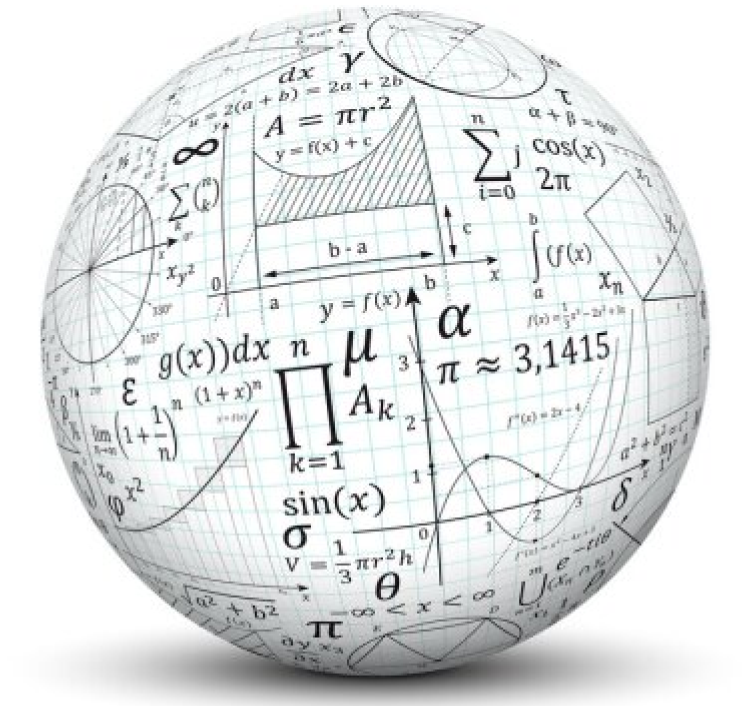
Gelöste Mathematikaufgaben



Verfasst von: Sven Dooley.

Liste der von mir gelösten Aufgaben

Känguru-Wettbewerb

matheraetsel.de

Mathematik-Olympiade

mathematik.uni-stuttgart.de

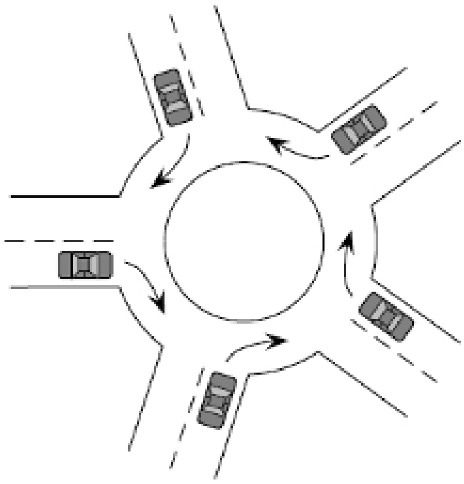
Einige Übungsaufgaben

Meine Highlights

Der Kreisverkehr

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Fünf Autos fahren gleichzeitig in einen Kreisverkehr, jedes aus einer anderen Richtung. Jedes der Autos fährt weniger als eine ganze Runde und alle Autos verlassen den Kreisverkehr in unterschiedliche Richtungen. Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es für die Autos, den Kreisverkehr zu verlassen?*



Lösung. Gesucht ist hier also die Anzahl fixpunktfreier Permutationen der Länge $n = 5$. Insgesamt gibt es nun $n!$ Permutationen, wobei man die Permutationen davon abziehen muss, die einen Fixpunkt haben, d.h. 1 steht auf 1 oder 2 auf 2 und so weiter. Weil die Permutationen mit einem bestimmten Fixpunkt nicht disjunkt sind, muss man die Siebformel von Sylvester benutzen, die man leicht mit vollständiger Induktion beweist. Die Anzahl der Permutationen mit Fixpunkt lautet dann:

$$5 \cdot 4! - \binom{5}{2} \cdot 3! + \binom{5}{3} \cdot 2! - \binom{5}{4} \cdot 1! + \binom{5}{5} \cdot 0! = 76$$

Nun muss man diese Anzahl von der Anzahl aller möglichen Permutationen abziehen:

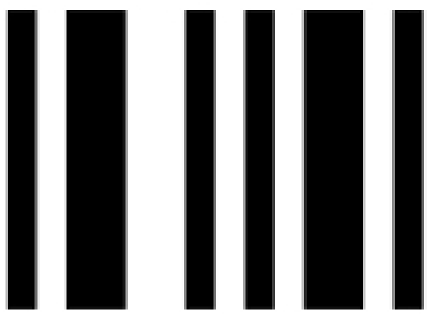
$$5! - 76 = 120 - 76 = 44$$

Es gibt also 44 Möglichkeiten für die Autos den Kreisverkehr zu verlassen. □

Die Strichcodes

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Die Strichcodes, die wir untersuchen wollen, bestehen abwechselnd aus schwarzen und weißen Strichen und beginnen und enden schwarz. Die Striche haben die Breite* 1 *oder* 2*, und die Gesamtbreite eines Codes soll* 14 *sein. Wie viele verschiedene Codes sind möglich, wenn stets von links nach rechts gelesen wird?*



Lösung. Weil der Strichcode mit einem schwarzen Strich anfängt und endet, gibt es genau einen schwarzen Strich mehr als man weiße hat. Das bedeutet, dass man immer eine ungerade Zahl an Strichen insgesamt hat. Wenn man nur Striche der Länge 2 benutzt, dann weiß man, dass man mindestens 7 Striche haben muss. Benutzt man nur Striche der Länge 1, dann ist klar, dass man höchstens 14 Striche haben kann. Schließlich gibt es nur die Gesamtanzahlen 7, 9, 11 und 13. Betrachte nun 7: Schreibt man 7 Einsen auf, dann müssen auch ingesamt 7 Einsen auf die jeweiligen Einserstellen addiert werden, weil man sonst nicht die Gesamtlänge 14 hat. Betrachte nun 13: Auf die Einserstellen muss jetzt genau eine 1 addiert werden; man hat dafür 13 Stellen zur Verfügung. Insgesamt hat man also bis jetzt $1 + 13 = 14$ Möglichkeiten. Betrachte nun also 9 und 11: Bei 11 kann man nun auf die 11 Einserstellen, $14 - 11 = 3$ Einsen verteilen, wofür es $\binom{11}{3}$ Möglichkeiten gibt. Bei 9 hat man deswegen also den Wert $\binom{9}{5}$. Also ist die Lösung dieser Aufgabe $14 + \binom{9}{5} + \binom{11}{3} = 305$. □

Die guten und bösen Kröten

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Frau Unkes magische Kröten sind äußerlich alle gleich, doch es gibt gute und böse. Ist eine gute Kröte mit* 3 *bösen in einem Raum, wird auch sie böse. Ist eine böse Kröte mit* 3 *guten in einem Raum, wird sie rot und schämt sich. Zu Testzwecken setzt Frau Unke* 3 *Kröten in einen leeren Raum. Dann setzt sie die* 4*. Kröte dazu und nimmt kurz danach die* 1*. wieder heraus. Dann setzt sie die* 5*. dazu und nimmt kurz danach die* 2*. wieder heraus usw. Als sie die* 2012*. Kröte in den Raum setzt, läuft zum ersten Mal eine Kröte rot an. Welche der folgenden Kröten könnten beide von Beginn an böse gewesen sein? (A)* 1*.,* 2011*. (B)* 2*.,* 2010*. (C)* 3*.,* 2009*. (D)* 4*.,* 2012*. (E)* 2*.,* 2011*.*

Lösung. Es gibt für die ersten 4 Kröten $x_1x_2x_3x_4$ im Raum fünf verschiedene Möglichkeiten: $(0b, 4g)$, $(1b, 3g)$, $(2b, 2g)$, $(3b, 1g)$, $(4b, 0g)$. Die Kombination $(4b, 0g)$ darf nicht sein, weil die späteren Kombinationen, dann immer böse bleiben, da eine böse Kröte dazukommt oder eine gute Kröte böse wird, weil die anderen drei böse sind. $(1b, 3g)$ gibt es nur bei $x_{2009}x_{2010}x_{2011}x_{2012}$. Da in den Multiple-Choice-Antworten mindestens einer der vier x_i von $x_1x_2x_3x_4$ böse ist, kann man auch $(0b, 4g)$ ausschließen. $(3b, 1g)$ kann auch nicht sein, weil sonst die gute Kröte böse wird und dann immer alle böse bleiben, so dass man es am Ende nicht erreichen kann, dass für $x_{2009}x_{2010}x_{2011}x_{2012}$ die Konstellation $(1b, 3g)$ erreicht wird. Es bleibt für $x_1x_2x_3x_4$ nur noch $(2b, 2g)$. Mal angenommen, x_4 ist gut, dann gilt 1. $x_1 = g$, $x_2 = b$, $x_3 = b$ oder 2. $x_1 = b$, $x_2 = g$, $x_3 = b$ oder 3. $x_1 = b$, $x_2 = b$, $x_3 = g$. Setzt man Frau Unke's Verfahren fort, so dass sich nie eine Kröte vor dem letzten Mal schämt oder alle Kröten böse werden, dann hat man immer genau 2 böse und 2 gute Kröten, und wegen einer auftretenden Periodizität der Länge 4 gilt dann, dass $x_{2009}x_{2010}x_{2011}$ die Form von 1., 2. oder 3. hat. Da man immer genau zwei böse und eine gute Kröte hat, kann die Hinzunahme von x_{2012} nicht das Schämen einer Kröte resultieren lassen. Also sollte von nun an $x_4 = b$ sein. Das bedeutet, dass man am Ende des Verfahrens $x_{2009}x_{2010}x_{2011}$ genau eine böse und genau zwei gute Kröten hat. Also schämt sich eine Kröte, wenn $x_{2012} = g$ hinzugefügt wird. Von Anfang an können also x_1 und x_{2009} oder x_2 und x_{2010} oder schließlich x_3 und x_{2011} böse gewesen sein. Auch könnte x_4 mit x_{2009}, x_{2010} und x_{2011} von Anfang an böse gewesen sein. Die Lösung ist also (B) 2., 2010. und damit ist man jetzt fertig. □

Die Teiler einer zweistelligen Zahl

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Wir ordnen jeder zweistelligen Zahl z diejenige Zahl $t(z)$ zu, die entsteht, wenn sämtliche Teiler von z, einschließlich* 1 *und z selbst, der Größe nach hintereinander geschrieben werden. So ist z.B. $t(14) = 12714$. Wie viele Stellen hat die größte dieser Zahlen $t(z)$?*

Lösung. Zunächst mal hat eine zweistellige Zahl höchstens 3 verschiedene Primteiler ungleich 1, denn das kleinste Produkt 4 verschiedener Primteiler ungleich 1 ist $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 99$. Man betrachtet nun den Fall, dass z genau 3 verschiedene Primteiler hat, also $z = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3}$ $(p_1 < p_2 < p_3)$ mit $e_i \geq 1$. Es folgt, dass $e_i \leq 2$ sein muss, denn nimmt man die kleinsten drei Primteiler für z, also $z = 2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3}$, dann würde bei der Wahl eines $e_i > 2$ das Produkt größer sein als 99. Es gilt also $e_i = 1$ oder $e_i = 2$. Weiter kann man feststellen, dass e_3 nur 1 sein kann, weil $2 \cdot 3 \cdot 5^2 > 99$ gilt. Wenn $e_1 = 2$ ist, dann muss $e_2 = 1$ sein, denn es gilt $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 > 99$. Es ist also höchstens ein e_i gleich 2. Man hat also $z = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^1$. Ist $e_1 = e_2 = 1$, dann hat z höchstens $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$ Teiler, d.h. $t(z)$ hat maximal $8 \cdot 2 = 16$ Stellen. Nun ist $e_1 = 1$ und $e_2 = 2$ oder $e_1 = 2$ und $e_2 = 1$. Das heißt z hat in den beiden Fällen höchstens $(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$ Teiler. Wären alle $p_i > 2$, dann müssten die $e_i = 1$ sein, weil sonst $z > 99$ wäre. Man hat dann $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$ Teiler für z, d.h. die Anzahl der Stellen von $t(z)$ sind höchstens $8 \cdot 2 = 16$. Ist nun ein $p_i = 2$, dann hat man $z = 2^2 \cdot p_2^1 \cdot p_3^1$ oder $z = 2^1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^1$. Im ersten Fall gilt nur $p_2 = 3$ und $p_3 = 5$, also $z = 60$, d.h. $t(z)$ hat genau 18 Ziffern. Im zweiten Fall ist nur $p_2 = 3$ und $p_3 = 5$, d.h. $z = 90$ und also hat $t(z)$ genau

18 Stellen. Sei nun angenommen, dass z aus genau einem Primteiler besteht, dann sei $z = p^e$, dann gibt es $z = 2^6$, $z = 3^4$, $z = 4^3$, $z = 5^2$, ... Die letzten drei z und fortfahrende haben höchstens 5 Teiler, also ist die Stellenzahl von $t(z) \leq 5 \cdot 2 = 10$. $z = 2^6$ hat 7 Teiler, von denen 3 zweistellig sind, also $t(z)$ hat 10 Stellen. Sei nun z mit zwei verschiedenen Primteiler ausgestattet. Frage nun: Wieviele Stellen mehr als 18 sind nun drin? Antwort: Nimmt man zwei zweistellige Primzahlen, so ist das Produkt der beiden größer als 99, d.h. mindestens eine Primzahl muss einstellig sein. Die zweistelligen Primzahlen haben höchstens den Exponenten 1. Man nehme nun eine zweistellige Zahl wie $p_2^{e2} = 11^1$, dann kann $p_1^{e1} = 7^1$ oder gleich 5^1 oder 3^2, 3^1 oder 2^1, 2^2, 2^3 sein. Es werden $z = 5^1 \cdot 11^1$, $z = 3^2 \cdot 11^1 = 99$ und $z = 2^3 \cdot 11^1$ betrachtet. Der erste Fall hat nur 4 Teiler; $4 \cdot 2 < 18$. Im zweiten Fall hat man $(2+1) \cdot (1+1) = 6$, also $t(z)$ höchstens 12 Stellen, und im dritten Fall hat man $(3+1) \cdot (1+1) = 8$, also $t(z)$ höchstens 16 Stellen. Nimmt man größere zweistellige Zahlen als 11, dann sind die p_1^{e1} eine Teilmenge von denen bei 11, also $t(z)$ nicht größer. Seien nun p_1 und p_2 aus $\{2, 3, 5, 7\}$, wobei man die Exponenten so groß wie möglich gestalte. Das Paar $p_1 = 5$ und $p_2 = 7$ können nur den Exponenten $e_1 = e_2 = 1$ haben. Die Stellenanzahl von $t(z)$ ist offensichtlich nicht größer als 18, der bisherige Maximalwert. Also weiter: $z = 3^2 \cdot 7^1$ hat 6 Teiler und $z = 2^3 \cdot 7^1$ hat 8 Teiler, also 18 wird immer noch nicht überboten. Nun das Paar $p_1 = 3$ und $p_2 = 5$: $z = 3^1 \cdot 5^2$, $z = 3^2 \cdot 5^1$ - beide jeweils 6 Teiler. Jetzt kommt $p_1 = 2$ und $p_2 = 5$: $z = 2^1 \cdot 5^2$, $z = 3^2 \cdot 5^1$ - wieder beide 6 Teiler, also die Stellenanzahl von $t(z)$ höchstens $6 \cdot 2 = 12$. Jetzt nur noch das Paar $p_1 = 2$ und $p_2 = 3$: $z = 2^1 \cdot 3^3$, $z = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, $z = 2^5 \cdot 3^1 = 96$ - das erste z hat nur 8 Teiler, das zweite 12 und das dritte auch 12. Also müssen die beiden letzten z überprüft werden: 72 hat 12 Teiler, von denen 5 zweistellig sind, also $|t(z)| = 7 + 5 \cdot 2 = 17$. 96 hat auch 12 Teiler, von denen 6 zweistellig sind, also $|t(z)| = 6 + 6 \cdot 2 = 18$. Die Anwort ist also 18: Die Stellenanzahl von $t(z)$ hat den Maximalwert 18. Damit ist die Lösung der Aufgabe beendet. □

Die interessante Zahlenfolge

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Die wachsende Zahlenfolge* 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... $(= 3^0, 3^1, 3^0+3^1, 3^2, 3^0+3^2, 3^1+3^2, 3^0+3^1+3^2, \ldots)$ *besteht aus Potenzen der Zahl* 3 *sowie aus allen möglichen Summen verschiedener solcher Potenzen. Wie lautet dann die hundertste Zahl der Folge?*

Lösung. Man kann die Exponentenfolge rekursiv konstruieren: Man startet mit 0, dann kommt die 1, als nächstes kommt dann 01, dann 2. Es wird dann die Zahlenfolge vor 2 nochmal aufgeschrieben, nur, dass man dann die 2 dranhängt. Ist das beendet, dann kommt die 3 und es wird dann die bisherige Zahlenfolge wieder aufgeschrieben, wobei dann die 3 hinten drangeheftet wird. Aufgrund der Rekursion stellt sich heraus, dass 2 and vierter Stelle, 3 an achter und 4 an 16. Stelle steht usw. Es folgt, dass die 6 an 64. Stelle steht. Jetzt werden die vorhergehenden Stellen wieder aufgeschrieben und die 6 drangehängt. An 32. Stelle steht die 5, also steht an 96. Stelle die Folge 56, also an 97. Stelle: 056, an 98: Stelle: 156, an 99. Stelle 0156 und schließlich an hundertster Stelle 256. Das bedeutet, dass die Lösung $3^2 + 3^5 + 3^6 = 9 + 243 + 729 = 981$ ist. Damit ist diese Aufgabe endlich gelöst. □

Die Bimsel, Gnafze und Ylpen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Im Wald des Wandels gibt es merkwürdige Wesen:* 17 *Bimsel,* 55 *Gnafze und* 6 *Ylpen. Treffen ein Bimsel und ein Gnafz aufeinander, verschmelzen sie zu einer Ylpe. Treffen ein Bimsel und eine Ylpe aufeinander, verschmelzen sie zu einem Gnafz. Treffen ein Gnafz und eine Ylpe aufeinander, verschmelzen sie zu einem Bimsel. Dies führt dazu, dass irgendwann nur noch eine der drei Arten übrig ist. Wie viele Wesen dieser Art sind dann höchstens übrig?*

Lösung. Man hat also folgende drei Transformationen: $T_1(b, g, y) = (b-1, g-1, y+1)$, $T_2(b, g, y) = (b-1, g+1, y-1)$ und $T_3(b, g, y) = (b+1, g-1, y-1)$. Diese Abbildungen sind paarweise kommutativ, wie man leicht nachrechnet. Deswegen kann man die beliebigen Hintereinanderschaltungen sortiert aufschreiben. Es gilt also:

$$(T_1^\alpha \circ T_2^\beta \circ T_3^\gamma)(17, 55, 6) = (17 - \alpha - \beta + \gamma, 55 - \alpha + \beta - \gamma, 6 + \alpha - \beta - \gamma)$$

Mal angenommen, es bleiben nur noch Bimsel übrig, dann gilt:

$$(17 - \alpha - \beta + \gamma, 55 - \alpha + \beta - \gamma, 6 + \alpha - \beta - \gamma) = (*, 0, 0)$$

Daraus würde dann folgen, dass $61 = 55 + 6 = 2\gamma$ ist, also gibt es diesen Fall nicht. Sei nun

$$(17 - \alpha - \beta + \gamma, 55 - \alpha + \beta - \gamma, 6 + \alpha - \beta - \gamma) = (0, *, 0)$$

Hier folgt dann $17+6=23=2\beta$, also gibt es diesen Fall auch nicht. Es bleiben nur noch Ylpen übrig:

$$(17-\alpha-\beta+\gamma, 55-\alpha+\beta-\gamma, 6+\alpha-\beta-\gamma)=(0,0,*)$$

In diesem Fall nämlich folgt $17+55=72=2\alpha \Rightarrow \alpha=36$. Also gilt:

$$(-19-\beta+\gamma, 19+\beta-\gamma, 42-\beta-\gamma)=(0,0,*)$$

Weil -19 eine negative Zahl ist, muss γ mindestens 19 sein. Am größten wird $*$, wenn man $\gamma=19$ und $\beta=0$ wählt, denn wäre $\gamma=19+n$ $(n\geq 1)$, dann müsste $\beta=n$ gelten, also wäre $42-\beta-\gamma$ kleiner als 23. Das bedeutet also, dass am Ende höchstens $42-\beta-\gamma=42-0-19=23$ Ylpen übrigbleiben. □

Die Fahrt von Bremen nach Rostock

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Henry muss von Bremen nach Rostock fahren, und er plant dafür eine gewisse Durchschnittsgeschwindigkeit ein. Wenn er durchschnittlich 5km/h schneller als geplant fahren würde, käme er 5 Stunden eher an, würde er im Durchschnitt 10km/h schneller als geplant fahren, wäre er sogar 8 Stunden eher am Ziel. Nun wird die große Frage gestellt: Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat er geplant?*

Lösung. Es gilt zunächst mal folgendes:

$$s=v\cdot t=(v+5)\cdot(t-5)=(v+10)\cdot(t-8)\Leftrightarrow 0=-5v+5t-25=-8v+10t-80$$

Aus der ersten Gleichung ist dann folgendes bekannt:

$$t=\frac{5v+25}{5}$$

Dieses Ergebnis setzt man dann in die Gleichung $-8v+10t-80=0$ ein und erhält:

$$-8v+2\cdot(5v+25)-80=0\Leftrightarrow -8v+10v+50-80=0\Leftrightarrow 2v=30\Leftrightarrow v=15$$

Man weiß nun, dass Henry die Durchschnittsgeschwindigkeit 15km/h gewählt hat. □

Die Primzahl teilt eine bestimmte Summe

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Alexandra berechnet die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Dabei bemerkt sie, dass die Primzahl p diese Summe teilt, aber keinen der Summanden. Welche der folgenden Zahlen könnte gleich $n+p$ sein? Es gibt hier die folgenden Antwortmöglichkeiten: (A) 217 (B) 221 (C) 229 (D) 245 (E) 269*

Lösung. Es gilt also $p\nmid 1,\ldots,n \Rightarrow p>n$ und $p\mid s=1+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$, woraus folgt, dass $p\mid(n\cdot(n+1))\Rightarrow p\mid n\vee p\mid(n+1)$. $p\mid n$ gilt ja nicht nach Voraussetzung. $p\mid(n+1)$ bedeutet $p\leq n+1$, also $p=n+1$. Also $n+p=(p-1)+p=2p-1$. Nun ist Antwort (A) 217 die einzig mögliche Antwort, weil $(217+1):2=109$ auch eine Primzahl ist. □

Die Zahlenpaare für eine Gleichung

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Wie viele positive ganzzahlige Lösungen (x,y) mit $x<y$ hat die Gleichung $x+y+xy+1=2002$?*

Lösung. Zunächst mal gilt $x+y+xy+1=(x+1)\cdot(y+1)$ und $2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$. Die Frage ist also wie viele Möglichkeiten es gibt die vier Primzahlen auf zwei Boxen so zu verteilen, dass das Produkt in der ersten Box kleiner ist als in der zweiten! Wenn man jede der vier Zahlen jeweils einmal in die erste tut und die restlichen Primzahlen in die zweite Box, dann hat man schonmal 4 Möglichkeiten. Jetzt sucht man sich zwei Primzahlen in die erste Box. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten, aber nur bei drei von denen ist das Produkt in der ersten Box auch kleiner. Die Antwort ist also: Es gibt genau 7 mögliche Paare (x,y), die die Gleichung oben erfüllen. □

Das Quadrat einer bestimmten Zahl

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Die Dezimaldarstellung der Zahl n besteht aus 2001 Ziffern 9. Die Frage dieser Aufgabe lautet nun: Wie oft ist die Ziffer 9 dann in der Zahl n^2 enthalten?*

Lösung. Es gilt erstmal $\underbrace{9\dots9}_{m\text{-mal}} = 10^m - 1$. Also gilt $\underbrace{9\dots9}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{9\dots9}_{m\text{-mal}} = (10^m-1)\cdot(10^m-1) = 10^{2m} - 2\cdot 10^m + 1 = \underbrace{9\dots9}_{(m-1)\text{-mal}}\ 8\ \underbrace{0\dots0}_{(m-1)\text{-mal}}\ 1$. Die Antwort ist also $2001 - 1 = 2000$ Ziffern 9 befinden sich in der quadrierten Zahl. □

Die Wölfe, Schafe und Schlangen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *In einem blühenden Tal leben Wölfe, Schafe und Schlangen. Jeden Morgen um 8 Uhr reißt jeder Wolf genau zwei Schafe. Jeden Mittag um 12 Uhr zertritt jedes Schaf genau zwei Schlangen, die faul in der Sonne liegen, und jeden Abend um 18 Uhr versetzt jede Schlange genau zwei Wölfen ihren tödlichen Biss. Am Morgen des 6. Tages, um sechs Uhr, lebt schließlich nur noch ein einsamer Wolf an diesem paradiesischen Fleckchen Erde. Wie viele Tiere von jeder Art bevolkerten das Tal am ersten Tag um sechs Uhr morgens?*

Lösung. Sei w die Anzahl der Schafe zu Beginn und sf die der Schafe sowie sl die der Schlangen. Dann gilt für die Anzahl der Tiere nach einem Tag:

$$\begin{pmatrix} sf - 2w \\ sl - 2\cdot(sf - 2w) \\ w - 2\cdot(sl - 2\cdot(sf-2w)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf - 2w \\ sl - 2sf + 4w \\ w - 2sl + 4sf - 8w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf - 2w \\ sl - 2sf + 4w \\ -7w - 2sl + 4sf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} sf \\ sl \\ w \end{pmatrix}$$

Weil also am sechsten Tag vor 8 Uhr nur noch ein Wolf übrigbleibt gilt dann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} sf \\ sl \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 609 & -376 & -986 \\ -986 & 609 & 1596 \\ 1596 & -986 & -2583 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} sf \\ sl \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann die Anzahl der Tiere am Anfang berechnen:

$$\begin{pmatrix} sf \\ sl \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 609 & -376 & -986 \\ -986 & 609 & 1596 \\ 1596 & -986 & -2583 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 609 & 988 & 378 \\ 378 & 609 & 232 \\ 232 & 378 & 145 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 378 \\ 232 \\ 145 \end{pmatrix}$$

Also waren zu Beginn 378 Schafe, 232 Schlangen und 145 Wölfe vorhanden. □

Die Gras fressenden Kühe

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Jan kennt seine Kühe. Er weiß, dass 25 seiner Kühe in vier Tagen eine Weide von 20Ar kahl fresssen, während für 27 Tiere eine Weide von 24Ar fünf Tage reicht. Wenn er die Herde auf eine Weide treibt, hat das Gras stets die gleiche Höhe. Außerdem wächst das Gras auf seinen Weiden stetig und mit konstanter Geschwindigkeit nach. Wie groß muss eine Weide sein, auf der 100 Kühe 16 Tage grasen können?*

Lösung. Zunächst macht man einige Definitionen: g sei das vorhandene Gras pro Ar, n die Menge des Grases pro Ar pro Tag und f sei dann die Menge des gefressenen Grases pro Kuh pro Tag. Es gelten dann folgende Gleichungen, die sich nämlich aus der Aufgabenstellung, wie folgt, ergeben:

$$\begin{aligned} 20\cdot g + 20\cdot 4\cdot n &= 25\cdot 4\cdot f \\ 24\cdot g + 24\cdot 5\cdot n &= 27\cdot 5\cdot f \end{aligned}$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt nun, dass $g = \frac{5}{2} \cdot f$ und $n = \frac{5}{8} \cdot f$ gilt. Sei nun a die gesuchte Fläche in Ar, auf der 100 Kühe 16 Tage lang weiden können. Es gilt also: $a \cdot g + a \cdot 16 \cdot n = 100 \cdot 16 \cdot f$. Jetzt setzt man in diese Gleichung g und n ein:

$$a \cdot \frac{5}{2} \cdot f + a \cdot 16 \cdot \frac{5}{8} \cdot f = 100 \cdot 16 \cdot f \Leftrightarrow a \cdot \frac{5}{2} + 10 \cdot a = 1600 \Leftrightarrow 12{,}5 \cdot a = 1600 \Leftrightarrow a = 128$$

Die Antwort ist also: Man braucht 128Ar für soviele Kühe und soviele Tage. □

Die Fliege auf dem Luftballon

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Luftballon wird so aufgeblasen, dass der Radius mit der Geschwindigkeit v zunimmt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Radius $r = r_0$. Auf dem Äquator krabbelt eine Fliege mit der Geschwindigkeit c. Nun soll die Bahnkurve der Fliege im Raum bestimmt werden. Nach welcher Zeit in Abhängigkeit von c und v gelingt der Fliege eine Umrundung?*

Lösung. Für die Darstellung der Bahnkurve werden Polarkoordinaten verwendet. Auf der Fliege wirken zwei Geschwindigkeiten: Die Geschwindigkeit c wirkt orthogonal zum Radiusvektor in mathematisch positiver Richtung und v wirkt kolinear zum Radiusvektor nach außen. Es gilt also:

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{pmatrix} \cos(\omega(t)) \\ \sin(\omega(t)) \end{pmatrix} \cdot r(t)\right] = \begin{pmatrix} -\sin(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) \\ \cos(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} \cdot r(t) + \begin{pmatrix} \cos(\omega(t)) \\ \sin(\omega(t)) \end{pmatrix} \cdot \dot{r}(t) = \vec{c} + \vec{v}$$

Daraus folgt also:

$$\left|\begin{pmatrix} -\sin(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) \cdot r(t) + \cos(\omega(t)) \cdot \dot{r}(t) \\ \cos(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) \cdot r(t) + \sin(\omega(t)) \cdot \dot{r}(t) \end{pmatrix}\right| = |\vec{c} + \vec{v}|$$

Wenn die Beträge unter Berücksichtigung von Additionstheoremen für Sinus und Kosinus ausgerechnet werden, erhält man:

$$\sqrt{\dot{\omega}(t)^2 \cdot r(t)^2 + \dot{r}(t)^2} = \sqrt{c^2 + v^2}$$

Es ist bekannt, dass $r(t) = r_0 + t \cdot v \Rightarrow \dot{r}(t) = v$ gilt, also $r(0) = r_0$. Weiter:

$$\dot{\omega}(t)^2 \cdot r(t)^2 + v^2 = c^2 + v^2 \Rightarrow \dot{\omega}(t) = \frac{c}{r(t)} = \frac{c}{r_0 + t \cdot v} \Rightarrow \omega(t) = \frac{c}{v} \cdot \ln(r_0 + t \cdot v) + C$$

Nun gilt noch die Anfangsbedingung $\omega(0) = 0 \Rightarrow \frac{c}{v} \cdot \ln(r_0) + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{c}{v} \cdot \ln(r_0)$, also:

$$\omega(t) = \frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{r_0 + t \cdot v}{r_0}\right)$$

Die gesuchte Bahnkurve lautet also:

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{r_0 + t \cdot v}{r_0}\right)\right) \\ \sin\left(\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{r_0 + t \cdot v}{r_0}\right)\right) \end{pmatrix} \cdot (r_0 + t \cdot v)$$

Es handelt sich bei dieser Kurve um die logarithmische Spirale. Nun wird die Zeit bis zur ersten Umrundung ausgerechnet:

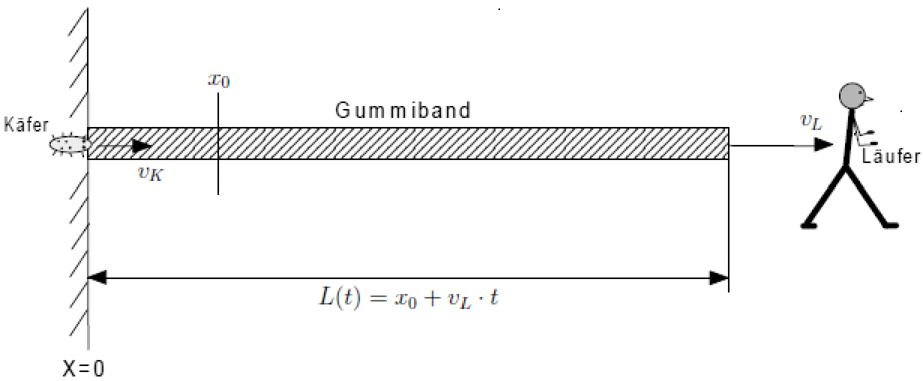
$$\frac{c}{v} \cdot \ln\left(\frac{r_0 + t_U \cdot v}{r_0}\right) = 2\pi \Rightarrow t_U = \frac{r_0}{v} \cdot \left(e^{2\pi \cdot \frac{v}{c}} - 1\right)$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. □

Der Käfer auf dem Gummiband

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Es sei ein $x_0 = 1$ Meter langes Gummiband an einer Wand befestigt, auf dessen Anfang ein Käfer gesetzt wurde. Dieser Käfer bewege sich auf diesem Gummiband mit der Geschwindigkeit $v_K = 1\frac{cm}{s}$ zum anderen Ende, während ein Läufer das Gummiband mit der Geschwindigkeit $v_L = 1\frac{m}{s}$ hinter sich herzieht und so das Gummiband unendlich lang dehnt. Die Frage ist nun, wann der Käfer den Läufer auf dem Gummiband eingeholt hat?*



Lösung. Sei $x(t)$ die Länge der Strecke, die der Käfer zurückgelegt hat. Der Käfer hat die Geschwindigkeit v_K plus die Geschwindigkeit $v_G(t)$, die es durch die Dehnung des Gummibandes erfährt. Es gilt dabei $v_G(t) = \frac{x(t)}{L(t)} \cdot v_L = \frac{x(t)}{x_0 + v_L \cdot t} \cdot v_L$, denn die Dehnung des Gummibandes hinter dem Käfer ist dafür verantwortlich, dass der Käfer sich schneller bewegt. Je mehr Strecke der Käfer auf dem Gummiband relativ zur Gummibandlänge zurückgelegt hat, desto mehr bekommt er von der Geschwindigkeit v_L dazu. Ist der Käfer am Ende des Gummibandes, dann hat er die zusätzliche Geschwindigkeit v_L. Also gilt jetzt:

$$\dot{x}(t) = v_K + v_G(t) = v_K + \frac{x(t)}{x_0 + v_L \cdot t} \cdot v_L \Leftrightarrow \dot{x}(t) - \frac{v_L}{x_0 + v_L \cdot t} \cdot x(t) = v_K$$

Das ist eine Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung sich aus der Summe der homogenen und einer partikulären Lösung zusammensetzt. Zunächst zur homogenen Lösung:

$$\dot{x}(t) - \frac{v_L}{x_0 + v_L \cdot t} \cdot x(t) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{v_L}{x_0 + v_L \cdot t}$$

Auf beiden Seiten wird nun integriert und man erhält:

$$\ln(x(t)) = \int \frac{v_L}{x_0 + v_L \cdot t}\, dt + C \Rightarrow x(t) = e^C \cdot e^{\int \frac{v_L}{x_0 + v_L \cdot t}\, dt} =: K \cdot e^{v_L \cdot \frac{\ln(x_0 + v_L \cdot t)}{v_L}} = K \cdot (x_0 + v_L \cdot t)$$

Nun zur partikulären Lösung. Eine solche erhält man durch Variation der Konstanten. Es gilt ja $x_h(t) = K \cdot (x_0 + v_L \cdot t)$ und jetzt macht man den Ansatz $x_p(t) = K(t) \cdot (x_0 + v_L \cdot t)$. Das führt dann zu:

$$\dot{x}_p(t) - \frac{v_L}{x_0 + v_L \cdot t} \cdot x_p(t) = v_K \Rightarrow \left[\dot{K}(t) \cdot (x_0 + v_L \cdot t) + K(t) \cdot v_L\right] - \frac{v_L}{x_0 + v_L \cdot t} \cdot [K(t) \cdot (x_0 + v_L \cdot t)] = v_K$$

Jetzt noch ein bisschen umformen:

$$\left[\dot{K}(t) \cdot (x_0 + v_L \cdot t) + K(t) \cdot v_L\right] - K(t) \cdot v_L = \dot{K}(t) \cdot (x_0 + v_L \cdot t) = v_K \Rightarrow \dot{K}(t) = \frac{v_K}{x_0 + v_L \cdot t}$$

Daraus folgt dann also:

$$K(t) = \frac{v_K}{v_L} \cdot \ln(x_0 + v_L \cdot t) + C'$$

Nun lautet die allgemeine Lösung:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = K \cdot (x_0 + v_L \cdot t) + \left(\frac{v_K}{v_L} \cdot \ln(x_0 + v_L \cdot t) + C'\right) \cdot (x_0 + v_L \cdot t)$$

Jetzt müssen die Konstanten K und C' durch Bedingungen festgelegt werden: Eine Anfangsbedingung ist: $x(0) = 0$, also:

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow K \cdot x_0 + \left(\frac{v_K}{v_L} \cdot \ln(x_0) + C'\right) \cdot x_0 = 0 \Leftrightarrow K + \frac{v_K}{v_L} \cdot \ln(x_0) + C' = 0 \Leftrightarrow C' = -K - \frac{v_K}{v_L} \cdot \ln(x_0)$$

Setzt man dieses C' in $x(t) = K \cdot (x_0 + v_L \cdot t) + \left(\frac{v_K}{v_L} \cdot \ln(x_0 + v_L \cdot t) + C'\right) \cdot (x_0 + v_L \cdot t)$ ein, so hebt sich die Konstante K raus, so dass man nämlich erhält:

$$x(t) = \frac{v_K}{v_L} \cdot \ln\left(\frac{x_0 + v_L \cdot t}{x_0}\right) \cdot (x_0 + v_L \cdot t)$$

Zum Zeitpunkt t_E, wo der Käfer den Läufer einholt, gilt $x(t_E) = x_0 + v_L \cdot t_E$. Weiter:

$$\frac{v_K}{v_L} \cdot \ln\left(\frac{x_0 + v_L \cdot t_E}{x_0}\right) \cdot (x_0 + v_L \cdot t_E) = x_0 + v_L \cdot t_E \Rightarrow \frac{v_K}{v_L} \cdot \ln\left(\frac{x_0 + v_L \cdot t_E}{x_0}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x_0 + v_L \cdot t_E}{x_0} = e^{\frac{v_L}{v_K}} \Rightarrow t_E = \frac{x_0 \cdot \left(e^{\frac{v_L}{v_K}} - 1\right)}{v_L}$$

Es gilt $v_K = 0,01$ und $v_L = 1$ sowie $x_0 = 1$. Also muss dann gelten:

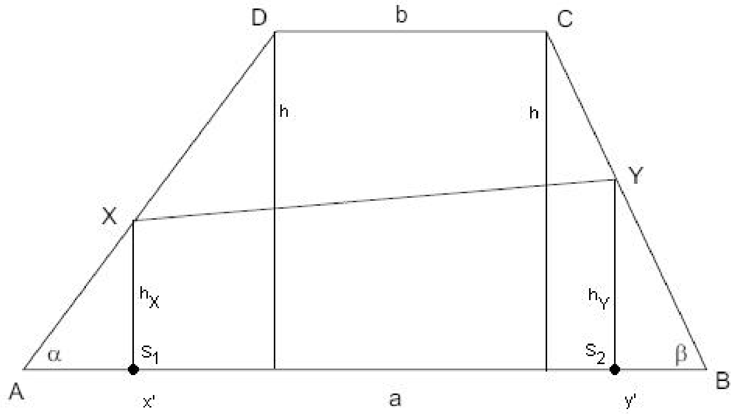
$$t_E = \frac{x_0 \cdot \left(e^{\frac{v_L}{v_K}} - 1\right)}{v_L} = \frac{1 \cdot \left(e^{\frac{1}{0,01}} - 1\right)}{1} = e^{100} - 1$$

Es dauert also $e^{100} - 1$ Sekunden bis der Käfer den Läufer eingeholt hat. Das sind $\frac{e^{100} - 1}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365} \approx 8,52 \cdot 10^{35}$ Jahre. □

Die Zerteilung einer Fläche

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Es seien A, B, C, D die Eckpunkte eines trapezförmigen Geländes. Vermessen wurden die parallelen Seiten* $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $a > b$ *sowie die spitzen Winkel* $\sphericalangle BAD = \alpha = 30°$ *und* $\sphericalangle ABC = \beta = 60°$*. Zwischen den Punkten X auf der Seite* $\overline{AD}$ *und Y auf* $\overline{BC}$ *soll ein Zaun minimaler Länge so gezogen werden, dass die beiden Teilstücke des Trapezes flächengleich sind. Nun soll die minimale Länge des Zaunes bestimmt werden!*



Lösung. Zunächst wird der Flächeninhalt des Trapezes ABCD ausgerechnet: Es gilt $a - b = x' + y'$ und $\tan(\alpha) = \frac{h}{x'}$ sowie $\tan(\beta) = \frac{h}{y'}$. Daraus folgt dann $a-b = x'+y' = \frac{h}{\tan(\alpha)} + \frac{h}{\tan(\beta)} = h \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)}\right)$, also gilt dann: $h = \frac{a-b}{\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)}}$.

Der Flächeninhalt des Trapezes ist $A_T = h \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{a^2 - b^2}{\frac{2}{\tan(\alpha)} + \frac{2}{\tan(\beta)}}$. Jetzt wird der Flächeninhalt des Vierecks $ABYX$ bestimmt.

Seien λ, λ' aus $[0,1]$ so, dass gilt $|\overline{AX}| = \lambda \cdot |\overline{AD}|$ und $|\overline{BY}| = \lambda' \cdot |\overline{BC}|$. Nach dem zweiten Strahlensatz gilt: $\lambda = \frac{|\overline{AX}|}{|\overline{AD}|} = \frac{h_X}{h} \Leftrightarrow h_X = \lambda \cdot h$. Analog findet man: $h_Y = \lambda' \cdot h$. Der erste Strahlensatz besagt $\frac{|\overline{AS_1}|}{x'} = \frac{|\overline{AX}|}{|\overline{AD}|} = \lambda \Leftrightarrow |\overline{AS_1}| = \lambda \cdot x' = \lambda \cdot \frac{h}{\tan\alpha}$. Analog: $|\overline{BS_2}| = \lambda' \cdot y' = \lambda' \cdot \frac{h}{\tan\beta}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks AS_1X ist also $\frac{|\overline{AS_1}| \cdot h_X}{2} = \frac{\lambda^2 \cdot h^2}{2 \cdot \tan(\alpha)}$. Analog erhält man für das Dreieck BS_2Y: $\frac{\lambda'^2 \cdot h^2}{2 \cdot \tan(\beta)}$. Jetzt zum Flächeninhalt des Vierecks S_1S_2YX: $\frac{h_X + h_Y}{2} \cdot \left(a - |\overline{AS_1}| - |\overline{BS_2}|\right) = \frac{\lambda \cdot h + \lambda' \cdot h}{2} \cdot \left(a - \frac{\lambda \cdot h}{\tan(\alpha)} - \frac{\lambda' \cdot h}{\tan(\beta)}\right)$. Der Flächeninhalt des Vierecks $ABYX$ soll halb so groß sein, wie der des Trapezes $ABCD$, also:

$$\frac{\lambda^2 \cdot h^2}{2 \cdot \tan(\alpha)} + \frac{\lambda'^2 \cdot h^2}{2 \cdot \tan(\beta)} + \frac{(\lambda + \lambda') \cdot h^2}{2} \cdot \left(\frac{a}{h} - \frac{\lambda}{\tan(\alpha)} - \frac{\lambda'}{\tan(\beta)}\right) = \frac{A_T}{2}$$

Weiter umgeformt also:

$$\frac{\lambda^2}{\tan(\alpha)} + \frac{\lambda'^2}{\tan(\beta)} + (\lambda + \lambda') \cdot \left(\frac{a}{h} - \frac{\lambda}{\tan(\alpha)} - \frac{\lambda'}{\tan(\beta)}\right) = \lambda \cdot \frac{a}{h} + \lambda' \cdot \frac{a}{h} - \frac{\lambda \cdot \lambda'}{\tan(\alpha)} - \frac{\lambda \cdot \lambda'}{\tan(\beta)} = \frac{A_T}{h^2}$$

Und das ist äquivalent zu:

$$\lambda = \frac{\frac{A_T}{h^2} - \lambda' \cdot \frac{a}{h}}{\frac{a}{h} - \frac{\lambda'}{\tan(\alpha)} - \frac{\lambda'}{\tan(\beta)}}$$

Jetzt werden bekannte Größen eingesetzt: $\tan(\alpha) = \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $\tan(\beta) = \tan(60°) = \sqrt{3}$. Daraus folgt dann:

$$\lambda = \frac{\frac{A_T}{h^2} - \lambda' \cdot \frac{a}{h}}{\frac{a}{h} - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \lambda' - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \lambda'}$$

Nun wird h ausgerechnet:

$$h = \frac{a-b}{\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)}} = \frac{a-b}{\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (a-b)$$

Jetzt wird noch A_T etwas vereinfacht dargestellt:

$$A_T = \frac{a^2 - b^2}{\frac{2}{\tan(\alpha)} + \frac{2}{\tan(\beta)}} = \frac{a^2 - b^2}{\frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot (a^2 - b^2)$$

Also gilt dann für λ:

$$\lambda = \frac{\frac{\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot (a^2 - b^2)}{\frac{3}{16} \cdot (a-b)^2} - \lambda' \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{a-b}}{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{a-b} - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \lambda' - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \lambda'} = \lambda = \frac{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2} - \lambda' \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{a-b}}{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{a-b} - \lambda'\right)} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{2 \cdot (a-b)^2} - \lambda' \cdot \frac{a}{a-b}}{\frac{a}{a-b} - \lambda'}$$

Insgesamt erhält man schließlich nach einer längeren Rechnung:

$$\lambda = \frac{a \cdot (2 \cdot \lambda' - 1) - b}{2 \cdot (a \cdot (\lambda' - 1) - \lambda' \cdot b)}$$

λ und λ' aus $[0,1]$ parametrisieren jeweils die Punkte X auf $\overline{AD}$ bzw. Y auf $\overline{BC}$. Nun sind λ' und $\lambda(\lambda')$ so konstruiert, dass $\overline{XY}$ das Trapez $ABCD$ in zwei gleichgroße Flächen zerlegt. Die Länge L_{XY} von $\overline{XY}$ soll nun zusätzlich so klein, wie möglich, sein. Es gilt die folgende Identität:

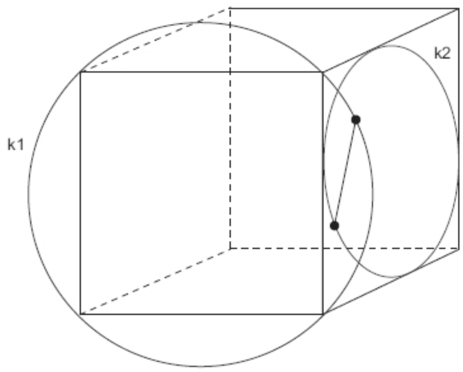
$$(h_Y - h_X)^2 + (a - |\overline{AS_1}| - |\overline{BS_2}|)^2 = (\lambda' - \lambda)^2 \cdot h^2 + \left(a - \frac{\lambda \cdot h}{\tan(\alpha)} - \frac{\lambda' \cdot h}{\tan(\beta)}\right)^2 = L_{XY}^2$$

Nun ist L_{XY}^2 genau dann minimal, wenn L_{XY} minimal ist. Setzt man nun alle bekannten Werte ein, so dass man eine Formel für L_{XY}^2 bekommt, die nur noch von a, b und λ' abhängt, dann kann man diesen Wert auf Extremwerte hin untersuchen. Da $0 \leq \lambda' \leq 1$ gilt, muss man die zu minimierende Funktion nur auf $[0,1]$ untersuchen. Es stellt sich dabei heraus, dass in Abhängigkeit von a und b die Funktion $L_{XY}^2(\lambda')$ auf $[0,1]$ monoton steigend (die Ableitung ist dort größer-gleich Null) ist (nämlich, wenn dort keine Extremalstellen sind), also nimmt es sein Minimum an der Stelle $\lambda' = 0$ an. Dann gilt $\lambda = \lambda(\lambda') = \lambda(0) = \frac{a+b}{2 \cdot a}$. Damit sind also die Punkte X und Y identifiziert, für die die Zaunlänge minimal ist, wenn die Strecke $\overline{XY}$ zusätzlich das Trapez in zwei gleich-große Flächen zerlegt. Die minimale Zaunlänge beträgt in diesem Fall $\frac{\sqrt{13 \cdot a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4}}{4 \cdot a}$. Manchmal passiert es auch, dass auf $[0,1]$ eine innere Minimalstelle zu finden ist. Und zwar genau dann wenn $a \geq \sqrt{2 \cdot \sqrt{3} - 1} \cdot b$ mit $a, b > 0$ und $b < a$ gilt; dann ist die Extremalstelle bei $\lambda' = \frac{\sqrt[4]{108} \cdot \left(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt[4]{12} \cdot a\right)}{6 \cdot (b-a)}$ und deswegen $\lambda = \lambda(\lambda') = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{2} \cdot a\right)}{2 \cdot (b-a)}$. Nach meinen Berechnungen ist dies die einzige Extremalstelle in $[0,1]$, wenn $a, b > 0$ gilt. Weil die zweite Ableitung an der Stelle λ' echt größer ist als Null, hat man dort also eine Minimalstelle. Ist die Bedingung für eine innere Minimalstelle in $[0,1]$ erfüllt, dann ist die kürzeste Zaunlänge, wo dieser Zaun das Trapez auch in zwei flächengleiche Teilfelder zerlegt, gleich $\frac{\sqrt[4]{3}}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$. Dieses Ergebnis erhält man, wenn man λ' in L_{XY}^2 auswertet und dann die Wurzel aus dem erhaltenen Ergebnis zieht. $\square$

Der Abstand zweier Kreispunkte

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge $2 \cdot a$. Einer Seitenfläche ist der Kreis $k1$ umbeschrieben, einer benachbarten Seitenfläche ist der Kreis $k2$ einbeschrieben (Abbildung unten). Je ein Punkt bewegt sich auf $k1$ und $k2$. Was ist der geringstmögliche Abstand dieser beiden Punkte und was sind die Koordinaten dieser Punkte?*



Lösung. Der Mittelpunkt des Würfels mit der Kantenlänge $2 \cdot a$ befinde sich im Nullpunkt des Koordinatensystems. Es gilt:

$$k_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} \cdot a \text{ und } k_2 : \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \cdot a$$

Der Abstand der beiden Punkte auf k_1 bzw. k_2 beträgt dann:

$$d(\alpha, \beta) := |a| \cdot \sqrt{-2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha) - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + 2 \cdot \cos(\beta) + 5}$$

Wenn die Funktion d an der Stelle (α, β) ein Extrempunkt hat, müssen dort die partiellen Ableitungen von d verschwinden:

$$\frac{d}{d\alpha} d(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = 0 \text{ und } \frac{d}{d\beta} d(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) = 0$$

Es muss also gelten: (a) $\alpha = \operatorname{atan}(\sin(\beta))$ und (b) $\tan(\beta) = -\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha)$. Also gilt dann $\tan(\beta) = -\sqrt{2} \cdot \sin(\operatorname{atan}(\sin(\beta)))$. Diese Gleichung wird erfüllt von $\beta = 0$, $\beta = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\beta = \pi - \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\beta = \pi$, $\beta = \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ und $\beta = 2\pi - \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Das sind alle Werte aus $[0, 2\pi)$, die jene Gleichung erfüllen. Nun setzt man jedes β in (a) ein und erhält das α. Es gibt also folgende mögliche Extrempunkte:

$$\beta = 0,\ \alpha = 0 \tag{1}$$

$$\beta = 0,\ \alpha = \pi \tag{2}$$

$$\beta = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \alpha = \frac{7}{6}\pi \tag{3}$$

$$\beta = \pi - \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \alpha = \frac{\pi}{6} \tag{4}$$

$$\beta = \pi,\ \alpha = 0 \tag{5}$$

$$\beta = \pi,\ \alpha = \pi \tag{6}$$

$$\beta = \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \alpha = \frac{11}{6}\pi \tag{7}$$

$$\beta = 2\pi - \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \alpha = \frac{5}{6}\pi \tag{8}$$

Sei (α_E, β_E) einer der möglichen Extrempunkte. Man betrachtet nun die Funktion $g(t) := d(\alpha_E + t \cdot \cos(\omega), \beta_E + t \cdot \sin(\omega))$. Ist $g''(0) > 0 \,\forall \omega \in [0, 2\pi)$, dann handelt es sich bei (α_E, β_E) um ein Minimum. Gilt $g''(0) < 0 \,\forall \omega \in [0, 2\pi)$, dann handelt es sich um ein Maximum an der Stelle (α_E, β_E). Nun gilt weiter:

$$g''(0) = d_{\alpha\alpha}(\alpha_E, \beta_E) \cdot \cos(\omega)^2 + 2 \cdot d_{\alpha\beta}(\alpha_E, \beta_E) \cdot \cos(\omega) \cdot \sin(\omega) + d_{\beta\beta}(\alpha_E, \beta_E) \cdot \sin(\omega)^2$$

Mithilfe von $g''(0)$ findet man heraus, dass (1), (2), (5) und (6) keine Extrempunkte sind. (3) und (8) sind Maxima. Nun sind (4) und (7) Minima; die hier gesucht sind. Setzt man nun die α- und β-Werte von (4) und (7) in $d(\alpha, \beta)$ ein, dann erhält man in beiden Fällen den Wert $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot a$, was der kürzeste Abstand zwischen Punkten von $k1$ zu den Punkten von $k2$ darstellt. Die beiden Punktpaare, für die der Abstand minimal ist, lauten:

$$k_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} \cdot a \text{ und } k_2 : \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \cdot a$$

Und:

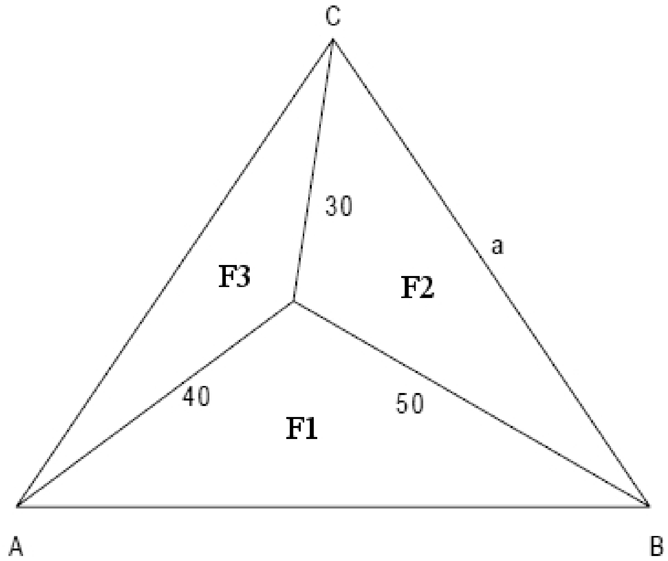
$$k_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} \cdot a \text{ und } k_2 : \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \cdot a$$

Damit ist die Aufgabe also gelöst. □

Das gleichseitige Dreieck

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck. Dem Dreieck sind drei Seiten mit bekannter Länge einbeschrieben. Bestimmt werden soll nun die Seitenlänge a des Dreiecks.*



Lösung. Die Flächeninhalte $F1$, $F2$ und $F3$ sind durch jeweils drei Seiten eindeutig bestimmt. Es wird nun die Heronische Flächenformel benutzt: Sei ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gegeben. Dann beträgt der Flächeninhalt dieses Dreiecks dann $F_{a,b,c} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ mit $s := \frac{a+b+c}{2}$. Es muss also gelten: $F1 + F2 + F3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$. Der rechte Term ist die Formel für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge a. Es gilt nun:

$$F1 = \sqrt{\left(45 + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(45 - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(-5 + \frac{a}{2}\right)}$$

Und:

$$F2 = \sqrt{\left(40 + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(40 - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(-10 + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(10 + \frac{a}{2}\right)}$$

Sowie:

$$F3 = \sqrt{\left(35 + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(35 - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(-5 + \frac{a}{2}\right)}$$

Der Wert für a ist durch die folgende Gleichung festgelegt:

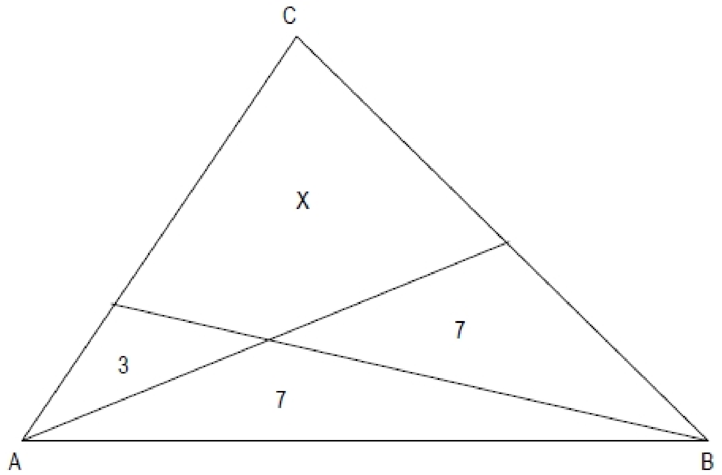
$$F1(a) + F2(a) + F3(a) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

Mithilfe eines Computeralgebrasystems findet man auf numerischen Wege, dass gilt $a \approx 67,66$. □

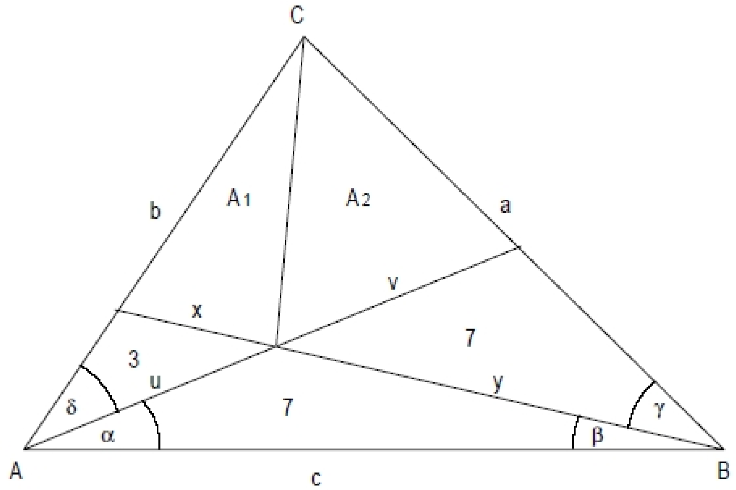
Der gesuchte Teildreiecks-Flächeninhalt

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Vorgelegt sei das schiefwinklige Dreieck ABC. Die zwei eingezeichneten Diagonalen teilen das Dreieck in vier Flächen auf. Drei Flächeninhalte sind gegeben. Es soll mithilfe dieser Angaben der Flächeninhalt von X bestimmt werden!*



Lösung. Man erweitert die Zeichnung oben um einige Winkel- und Streckenbezeichnungen:



Aus den drei gegebenen Teilflächen lassen sich Beziehungen zwischen den Strecken u, v und x, y ableiten:

$$\frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot c \cdot u = 7, \; \frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot c \cdot (u + v) = 7 + 7 \Rightarrow u = v$$

Und man hat auch folgendes:

$$\frac{\sin(\beta)}{2} \cdot c \cdot y = 7, \; \frac{\sin(\beta)}{2} \cdot c \cdot (x + y) = 7 + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{7} \cdot y$$

Analog kann für die beiden gesuchten Flächeninhalte A_1 und A_2 notiert werden:

$$\frac{\sin(\gamma)}{2} \cdot a \cdot y = 7 + A_2, \; \frac{\sin(\gamma)}{2} \cdot a \cdot (x + y) = 7 + A_1 + A_2$$

Desweiteren hat man auch die Beziehungen:

$$\frac{\sin(\delta)}{2} \cdot b \cdot u = 3 + A_1, \; \frac{\sin(\delta)}{2} \cdot b \cdot (u + v) = 3 + A_1 + A_2$$

Löst man die bisherigen Gleichungen nach A_1 und A_2 auf, dann erhält man:

$$A_1 = \frac{15}{2}, \; A_2 = \frac{21}{2} \Rightarrow X = A_1 + A_2 = 18$$

Und das war es auch schon! $\square$

Die unterschiedlichen Würfel

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Es sei ein großer und schwarzer Würfel gegeben, der außen weiß angestrichen ist. Nun wird dieser Würfel in $4 \times 4 \times 4$ kleine und gleich-große Würfel zerschnitten und diese in einen Sack getan. Ist das Spiel fair, dass man mit einem Würfel aus dem Sack für das Würfeln der Farbe weiß gewinnt?*

Lösung. Wenn man den großen Würfel in 64 gleich-große Würfel zerschneidet, dann haben 8 Würfel alle Seiten schwarz, weitere 8 Würfel drei von sechs Feldern weiß, 24 Würfel haben dann eine weiße Fläche und nochmal 24 Würfel zwei von sechs weiße Flächen. Man rechnet nun:

$$P = \frac{8}{64} \cdot \frac{0}{6} + \frac{8}{64} \cdot \frac{3}{6} + \frac{24}{64} \cdot \frac{1}{6} + \frac{24}{64} \cdot \frac{2}{6} = 0 + \frac{4}{64} + \frac{4}{64} + \frac{8}{64} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

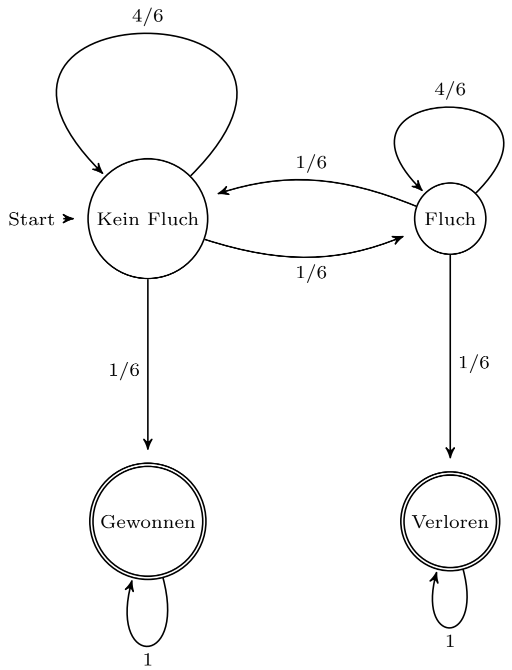
Die Antwort ist also, dass das Spiel nicht fair ist. □

Das Spiel mit dem Würfel

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *An einem Spielstand verspricht der Inhaber, dass bei seinem Spiel die Gewinnwahrscheinlichkeit doppelt so hoch ist, wie die Wahrscheinlichkeit zu verlieren. Das Spiel geht so: Wirft jemand mit einem Würfel sofort die 6, hat er schon gewonnen und bekommt 3 Euro. Falls mehrere Würfe notwendig sind, um eine 6 zu bekommen, so erhält der Kunde pro gemachten Wurf 3 Euro. Jetzt kommt der Haken: Wer eine 1 würfelt, hat einen Fluch am Hals und kann solange nicht mehr gewinnen, bis er eine 6 würfelt, die den Fluch aufhebt. Jede andere Augenzahl als 1 und 6 lässt den Fluch weiterhin bestehen. Solange der Fluch besteht, kann der Kunde das Spiel verlieren, indem er erneut eine 1 würfelt. Dann muss der Kunde pro gemachten Wurf 4 Euro bezahlen und ist dann vom Fluch befreit, so dass er ein neues Spiel beginnen kann.*

Lösung. Zunächst hat man die folgende Markov-Kette:



Damit sieht die Übergangsmatrix folgendermaßen aus:

$$M \cdot \begin{pmatrix} KF \\ F \\ G \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} KF \\ F \\ G \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} \cdot KF + \frac{1}{6} \cdot F \\ \frac{1}{6} \cdot KF + \frac{4}{6} \cdot F \\ \frac{1}{6} \cdot KF + G \\ \frac{1}{6} \cdot F + V \end{pmatrix}$$

Nun soll M^n berechnet werden. Es gilt dafür:

$$T^{-1}\cdot M\cdot T=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{4}{6}&\frac{1}{6}&0&0\\\frac{1}{6}&\frac{4}{6}&0&0\\\frac{1}{6}&0&1&0\\0&\frac{1}{6}&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\-3&-1&0&0\\-1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{5}{6}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Es folgt daraus:

$$T^{-1}\cdot M^n\cdot T=(T^{-1}\cdot M\cdot T)^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{5}{6}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^n&0&0&0\\0&\left(\frac{5}{6}\right)^n&0&0\\0&0&1^n&0\\0&0&0&1^n\end{pmatrix}$$

Jetzt weiß man also:

$$M^n=\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\-3&-1&0&0\\-1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^n&0&0&0\\0&\left(\frac{5}{6}\right)^n&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}$$

Nach einer etwas mühseligen Rechnung gilt also:

$$M^n=\begin{pmatrix}2^{-n-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n+2^{-n-1}&2^{-n-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n-2^{-n-1}&0&0\\2^{-n-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n-2^{-n-1}&2^{-n-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n+2^{-n-1}&0&0\\-2^{-n-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n+\frac{2^{-n-1}}{3}+\frac{2}{3}&-2^{-n-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n+\frac{2^{-n-1}}{3}+\frac{1}{3}&1&0\\-2^{-n-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n+\frac{2^{-n-1}}{3}+\frac{1}{3}&-2^{-n-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n+\frac{2^{-n-1}}{3}+\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}$$

Jetzt wird der Grenzwert für n gegen ∞ ausgerechnet:

$$\lim_{n\to\infty}M^n=\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\-3&-1&0&0\\-1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}$$

Also gilt dann:

$$M^{\infty}\cdot\begin{pmatrix}KF\\F\\G\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}KF\\F\\G\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{2}{3}\cdot KF+\frac{1}{3}\cdot F+G\\\frac{1}{3}\cdot KF+\frac{2}{3}\cdot F+V\end{pmatrix}$$

Daraus sieht man nun, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit $P[Gewinn]=\dfrac{2}{3}$ ist, und die Verlierwahrscheinlichkeit $P[Verloren]=\dfrac{1}{3}$, denn es gilt nämlich $G+\underline{\frac{2}{3}\cdot KF+\dots}$ (vom Startpunkt nach Gewonnen) und es gilt eben $V+\underline{\frac{1}{3}\cdot KF+\dots}$ (der Wahrscheinlichkeitsfluss vom Startzustand nach Verloren). Es ist also wirklich doppelt so wahrscheinlich zu gewinnen als zu verlieren. Als nächstes soll die Anzahl der zu erwartenen Schritte für einen Gewinn und für eine Niederlage berechnet werden: Sei $P(A_i)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel nach genau i Schritten zu Ende ist. $P(G)=\dfrac{2}{3}$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass man das Spiel gewinnt. Man braucht nun die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl i der Schritte im Falle eines Gewinns; das wird durch die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_G(A_i)=P(A_i|G)=\dfrac{P(A_i\cap G)}{P(G)}$ gegeben. Man betrachtet nun die Zahl M_{11}^{i-1}; diese Zahl gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit man in genau $i-1$ Schritten vom Startzustand in denselben Zustand landet, sodass man im nächsten Schritt gewinnen kann. Ein Spiel ist genau dann im i-ten Schritt gewonnen, wenn man sich im $(i-1)$-ten Schritt im Zustand „Kein Fluch“ befindet und dann eine 6 mit der Wahrscheinlichkeit $\dfrac{1}{6}$ würfelt. Es gilt also $P(A_i\cap G)=M_{11}^{i-1}\cdot\dfrac{1}{6}$. Man rechnet nun:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G)&=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot P(A_i|G)=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\frac{P(A_i\cap G)}{P(G)}=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\frac{M_{11}^{i-1}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}\\&=\frac{1}{4}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot M_{11}^{i-1}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{i-1}+1}{2^i}=\frac{1}{8}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}+\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\right]\\&=\frac{1}{8}\cdot\left[\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^i+\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^i\right]=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}\right)=\frac{1}{8}\cdot(4+36)=5\end{aligned}$$

Nun wird die Anzahl der zu erwartenen Schritte für eine Niederlage berechnet. Es gilt $P_V(A_i) = P(A_i|V) = \frac{P(A_i \cap V)}{P(V)}$, wobei gilt: $P(V) = \frac{1}{3}$ und $P(A_i \cap V) = M_{21}^{i-1} \cdot \frac{1}{6}$. Ein Spiel ist genau dann verloren, wenn man im $(i-1)$-ten Schritt vom Startzustand angefangen sich im Zustand „Fluch“ befindet und dann eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ würfelt. Also:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(V) &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(A_i|V) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{P(A_i \cap V)}{P(V)} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{M_{21}^{i-1} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot M_{21}^{i-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{i-1} - 1}{2^i} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[-\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i} + \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i}\right] = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{-1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}\right) = \frac{1}{4} \cdot (-4+36) = 8
\end{aligned}
$$

Es wurde hier die Formel $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot q^i = \frac{1}{(1-q)^2}$ für $0 < q < 1$ benutzt und wird hier nicht bewiesen. Man weiß nun also: Wenn man gewinnt, dann hat man erwartungsgemäß 5-mal gewürfelt. Hat man verloren, dann hat man wohl 8-mal gewürfelt. Nun kann man nachrechnen, wie lukrativ das Spiel ist:

$$
\text{Profit} = \text{Gewinn} - \text{Kosten} = 3€ \cdot \mathbb{E}(G) \cdot P(G) - 4€ \cdot \mathbb{E}(V) \cdot P(V) = 3€ \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} - 4€ \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}€
$$

Obwohl die Gewinnwahrscheinlichkeit tatsächlich doppelt so hoch ist, wie die Wahrscheinlichkeit zu verlieren, macht man im Schnitt $\frac{2}{3}$€ Verlust. Man sollte also nicht zu viel würfeln. □

Die neun gesuchten Zahlen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gegeben sind neun positive ganze Zahlen, die in einer solchen Reihenfolge angeordnet sind, dass die Summe von jeweils drei aufeinander folgenden Zahlen gleich ist. Die erste Zahl in der Reihenfolge ist* 450*, die letzte* 50*. Die Summe aller Zahlen beträgt* 2010*. Man bestimme alle neun Zahlen.*

Lösung. Es gilt also nach Aufgabenstellung:

$$
x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_5 = x_4 + x_5 + x_6 = x_5 + x_6 + x_7 = x_6 + x_7 + x_8 = x_7 + x_8 + x_9 = \alpha
$$

Daraus folgt dann:

$$
x_1 - x_4 = 0 \wedge x_2 - x_5 = 0 \wedge x_3 - x_6 = 0 \wedge x_4 - x_7 = 0 \wedge x_5 - x_8 = 0 \wedge x_6 - x_9 = 0
$$

Also gilt dann:

$$
450 = x_1 = x_4 = x_7 \wedge x_3 = x_6 = x_9 = 50
$$

Nun sind noch drei Zahlen unbestimmt: $x_2 = x_5 = x_8 = x$. Die Summe aller Zahlen ist ja 2010, also:

$$
2010 = (x_1 + x_4 + x_7) + (x_3 + x_6 + x_9) + (x_2 + x_5 + x_8) = (3 \cdot 450) + (3 \cdot 50) + 3x = 1500 + 3x \Leftrightarrow 510 = 3x \Leftrightarrow x = 170
$$

Die Zahlen lauten also:

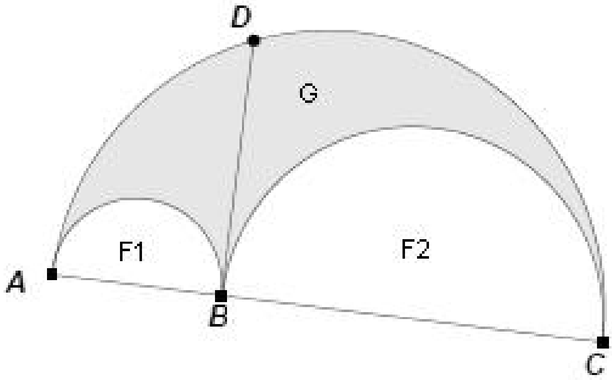
$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 170 \\ 50 \\ 450 \\ 170 \\ 50 \\ 450 \\ 170 \\ 50 \end{pmatrix}
$$

Und das war auch schon alles. □

Die Gleichheit zu einer Kreisfläche

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gegeben sei ein Halbkreis über die Strecke $\overline{AC}$. Auf der Strecke $\overline{AC}$ liege der Punkt B. Die Senkrechte zu $\overline{AC}$ durch B schneide den Halbkreis über der Strecke $\overline{AC}$ im Punkt D. Über den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ seien Halbkreise gezeichnet:*



Man beweise nun, dass der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{BD}$ und die grau markierte Fläche denselben Flächeninhalt haben.

Lösung. Sei zunächst $|\overline{AB}| = x$ und $|\overline{BC}| = y$ und $|\overline{AC}| = a$, also $x + y = a$. Nun gilt $F1 = \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{\pi}{8} \cdot x^2$ und $F2 = \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{\pi}{8} \cdot y^2 = \dfrac{\pi}{8} \cdot (a-x)^2$. Also gilt dann:

$$G = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - F1 - F2 = \frac{\pi}{8} \cdot a^2 - \frac{\pi}{8} \cdot x^2 - \frac{\pi}{8} \cdot (a-x)^2 = \frac{\pi}{8} \cdot (a^2 - x^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot x - x^2) = \frac{\pi}{8} \cdot (2 \cdot a \cdot x - 2x^2) = \frac{\pi}{4} \cdot (a \cdot x - x^2)$$

Sei nun $\overline{BD} = h$, dann gilt $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a \cdot x - x^2$. Und jetzt gilt dann für den Flächeninhalt des Kreises mit dem Durchmesser h:

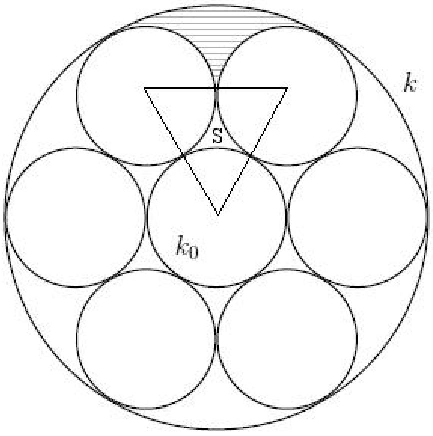
$$F_{\overline{BC}} := \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot h^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (a \cdot x - x^2) = G$$

Also ist die Aufgabe gelöst. □

Die Fläche in einem Kreis

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Zwei konzentrische Kreise k und k_0 liegen so zueinander, dass es genau sechs zum Kreis k_0 kongruente Kreise gibt, die den Kreis k_0 von außen, den Kreis k von innen und je zwei der sechs Kreise berühren. Man berechne die Größe des Inhalts des schraffierten Flächenstückes in Abhängigkeit vom Radius r des Kreises k_0.*



Lösung. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist bekanntlich $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$. Also gilt für die Fläche des gleichseitigen Dreiecks, oben im Bild: $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2 \cdot r)^2 = \sqrt{3} \cdot r^2$. Als nächstes zieht man von dieser Fläche die drei Kreissektoren ab: $S = \sqrt{3} \cdot r^2 - 3 \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2}{6}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot r^2$. Die schraffierte Fläche erhält man folgendermaßen: Man zieht vom Flächeninhalt des großen Kreises 6-mal S und 7-mal die Fläche der kleinen Kreise ab. Die Differenz ist dann das sechsfache der schraffierten Fläche. Die zugehörige Rechnung lautet also:

$$\frac{\pi \cdot (3 \cdot r)^2 - 6 \cdot S - 7 \cdot (\pi \cdot r^2)}{6} = \frac{9 \cdot \pi \cdot r^2 - 6 \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot r^2 - 7 \cdot \pi \cdot r^2}{6} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^2 - 6 \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot r^2}{6}$$

Die schraffierte Fläche hat also den Flächeninhalt $A_{\text{schraff.}} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 - \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot r^2 = \left(\frac{5}{6} \cdot \pi - \sqrt{3}\right) \cdot r^2$. □

Die interessante Ungleichung

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gegeben seien n nichtnegative reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, die die Ungleichungen $x_1^2 + \ldots + x_m^2 \geq m^2$ für alle $1 \leq m \leq n$ erfüllen. Man zeige nun, dass dann gilt:*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq \sqrt{1} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{2 \cdot n - 1}$$

Lösung. Es gilt nach Voraussetzung $x_1^2 \geq 1^2$. Man wähle dann x_1^2 minimal, also $x_1^2 = 1^2$. Weil $x_1^2 + x_2^2 \geq 2^2$ gilt, folgt $x_2^2 \geq 2^2 - 1^2$. Dann wählt man x_2^2 minimal, also $x_2^2 = 2^2 - 1^2$. Wegen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 3^2$ folgt dann $(1^2) + (2^2 - 1^2) + x_3^2 \geq 3^2$, also $x_3^2 \geq 3^2 - 2^2$. Man macht so weiter und erhält damit: $x_i^2 \geq i^2 - (i-1)^2 = 2 \cdot i - 1$ für alle $1 \leq i \leq n$. Also gilt dann $x_i \geq \sqrt{2 \cdot i - 1}$, folglich also $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq \sqrt{1} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{2 \cdot n - 1}$. □

Die Darstellung als Summe zweier Quadrate

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Es seien $n \geq 2$ Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, und es sei bekannt, dass jede von ihnen als Summe zweier Quadratzahlen geschrieben werden kann. Es soll nun also bewiesen werden, dass dann auch das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ gleich der Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen ist.*

Lösung. Sei zunächst $x_1 = a^2 + b^2$ und $x_2 = x^2 + y^2$, d.h. x_1 und x_2 sind beide darstellbar als Summe zweier Quadratzahlen. Es wird nun gezeigt, dass dann auch das Produkt $x_1 \cdot x_2$ darstellbar ist als Summe zweier Quadrate. Weiter: $x_1 \cdot x_2 = (a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2) = a^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot y^2 = (a^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot y^2) + (a^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot x^2) = (a^2 \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot b \cdot y + b^2 \cdot y^2) + (a^2 \cdot y^2 + 2 \cdot a \cdot y \cdot b \cdot x + b^2 \cdot x^2) = (a \cdot x - b \cdot y)^2 + (a \cdot y + b \cdot x)^2$. Also hat man hier das Produkt $x_1 \cdot x_2$ dargestellt als Summe zweier Quadrate. Mit vollständiger Induktion zeigt man nun die Behauptung für das Produkt aus n darstellbaren Zahlen. I.A.: Die Behauptung gilt schonmal für

$n = 2$. I.V.: Es gelte die Behauptung für ein beliebiges n. I.S.: Es gilt doch $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \cdot x_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ darstellbar, genauso, wie x_{n+1}. Weil das Produkt zweier darstellbarer Zahlen, wie oben bewiesen, darstellbar ist, ist also auch $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$ darstellbar. Der Induktionsschluss ist also gelungen. □

Die nicht-primen Zahlen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man beweise, dass keine der Zahlen* 1001, 1001001, 1001001001, 1001001001001, *usw. eine Primzahl ist.*

Lösung. Es gilt für diese Zahlen die Darstellung $Z_n = \sum_{k=0}^{n} 1000^k = \frac{1000^{n+1}-1}{1000-1}$ mit $n \geq 1$. Wenn $n+1$ durch 3 teilbar ist, dann hat die Zahl Z_n eine durch drei teilbare Anzahl an Einsen, und der Rest sind nur Nullen. Also ist die Quersumme durch 3 teilbar, also sind in diesen Fällen Z_n (durch 3 teilbar) keine Primzahlen. Sei also von nun an $n+1$ nicht durch 3 teilbar.

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} 1000^k = \frac{1000^{n+1}-1}{1000-1} = \frac{\left(10^{n+1}-1\right)\cdot\left(100^{n+1}+10^{n+1}+1\right)}{999} = \frac{10^{n+1}-1}{9} \cdot \frac{100^{n+1}+10^{n+1}+1}{111}$$

Nun ist $10^{n+1}-1$ durch 9 teilbar, also ist $\frac{10^{n+1}-1}{9}$ eine ganze Zahl ungleich Eins für $n \geq 1$. Es bleibt nun zu prüfen, ob die Zahl $100^{n+1}+10^{n+1}+1$ durch 111 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{array}{cccc}
n=0: & 100^{0+1} \bmod 111 = 100 & 10^{0+1} \bmod 111 = 10 & 1 \bmod 111 = 1 \\
n=1: & 100^{1+1} \bmod 111 = 10 & 10^{1+1} \bmod 111 = 100 & 1 \bmod 111 = 1 \\
n=2: & 100^{2+1} \bmod 111 = 1 & 10^{2+1} \bmod 111 = 1 & 1 \bmod 111 = 1 \\
n=3: & 100^{3+1} \bmod 111 = 100 & 10^{3+1} \bmod 111 = 10 & 1 \bmod 111 = 1 \\
n=4: & 100^{4+1} \bmod 111 = 10 & 10^{4+1} \bmod 111 = 100 & 1 \bmod 111 = 1 \\
n=5: & 100^{5+1} \bmod 111 = 1 & 10^{5+1} \bmod 111 = 1 & 1 \bmod 111 = 1 \\
n=6: & 100^{6+1} \bmod 111 = 100 & 10^{6+1} \bmod 111 = 10 & 1 \bmod 111 = 1 \\
n=7: & 100^{6+1} \bmod 111 = 10 & 10^{7+1} \bmod 111 = 100 & 1 \bmod 111 = 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Man sieht also, dass $100^{n+1}+10^{n+1}+1$ genau dann durch 111 teilbar ist, wenn $n+1$ nicht durch drei teilbar ist. Und dieser Fall war ja vorausgesetzt. Der Quotient $\frac{100^{n+1}+10^{n+1}+1}{111}$ ist also in diesen Fällen eine ganze Zahl ungleich 1, wobei gilt $n \geq 1$. Es wurde also bewiesen, dass $Z_n = \sum_{k=0}^{n} 1000^k$ dargestellt werden kann als Produkt zweier Zahlen, die ungleich 1 sind. Die Nichtprimalität ist also auch in diesem Fall gegeben. Die Lösung ist somit vollbracht. □

Die schwere Gleichung

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, die die Gleichung $19 \cdot x^3 - 17 \cdot y^3 = 50$ erfüllen.*

Lösung. Mal angenommen, es gibt solche Zahlen x und y. Dann folgt $(19 \cdot x^3 - 17 \cdot y^3) \bmod 19 = 50 \bmod 19 = 12$, also: $((-17 \bmod 19) \cdot (y^3 \bmod 19)) \bmod 19 = 12$, folglich $(2 \cdot (y^3 \bmod 19)) \bmod 19 = 12$, und: $y^3 \bmod 19 = 6$. Es wird nun geprüft, ob es Restklassen modulo

19 gibt, deren Kubik bei der Division durch 19 den Rest 6 hat. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 0^3 \bmod 19 \\ 1^3 \bmod 19 \\ 2^3 \bmod 19 \\ 3^3 \bmod 19 \\ 4^3 \bmod 19 \\ 5^3 \bmod 19 \\ 6^3 \bmod 19 \\ 7^3 \bmod 19 \\ 8^3 \bmod 19 \\ 9^3 \bmod 19 \\ 10^3 \bmod 19 \\ 11^3 \bmod 19 \\ 12^3 \bmod 19 \\ 13^3 \bmod 19 \\ 14^3 \bmod 19 \\ 15^3 \bmod 19 \\ 16^3 \bmod 19 \\ 17^3 \bmod 19 \\ 18^3 \bmod 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \bmod 19 \\ 1 \bmod 19 \\ 8 \bmod 19 \\ 27 \bmod 19 \\ 64 \bmod 19 \\ 125 \bmod 19 \\ 216 \bmod 19 \\ 343 \bmod 19 \\ 512 \bmod 19 \\ 729 \bmod 19 \\ 1000 \bmod 19 \\ 1331 \bmod 19 \\ 1728 \bmod 19 \\ 2197 \bmod 19 \\ 2744 \bmod 19 \\ 3375 \bmod 19 \\ 4096 \bmod 19 \\ 4913 \bmod 19 \\ 5832 \bmod 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 8 \\ 7 \\ 11 \\ 7 \\ 1 \\ 18 \\ 7 \\ 12 \\ 1 \\ 18 \\ 12 \\ 8 \\ 12 \\ 11 \\ 11 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Man sieht also, dass $y^3 \bmod 19$ niemals gleich 6 ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine x und y mit der oben genannten Eigenschaft geben kann. Die Aufgabe ist damit gelöst. □

Die Summe aufeinanderfolgender Zahlen

[Zurück zur Liste]

Lemma. *Eine lineare diophantische Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ besitzt genau dann ganzzahlige Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$, wenn c ein ganzzahliges Vielfaches von $\operatorname{ggT}(a, b)$ ist.*

Beweis. Angenommen, es gilt $a \cdot x + b \cdot y = c$ für bestimmte $x, y \in \mathbb{Z}$. Es gibt Zahlen $a', b' \in \mathbb{Z}$ mit $a = a' \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$ und $b = b' \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$, also: $(a' \cdot \operatorname{ggT}(a, b)) \cdot x + (b' \cdot \operatorname{ggT}(a, b)) \cdot y = c$, woraus $\operatorname{ggT}(a, b) | c$ folgt. Sei nun umgekehrt $c = k \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$ ($k \in \mathbb{Z}$). Der rekursive Algorithmus zu Berechnung des ggT zweier ganzer Zahlen lautet:

$$\operatorname{ggT}(a, b) = \begin{cases} a, & a = b \\ \operatorname{ggT}(a - b, b), & a > b \\ \operatorname{ggT}(b, a), & a < b \end{cases}$$

Dieser Algorithmus liefert im Abbruchsfall: $\tilde{x} \cdot a + \tilde{y} \cdot b = \operatorname{ggT}(a, b)$. Daraus folgt dann:

$$(\tilde{x} \cdot k) \cdot a + (\tilde{y} \cdot k) \cdot b = k \cdot \operatorname{ggT}(a, b) = c$$

Also ist die diophantische Gleichung lösbar. Das ist das Ende des Beweises. □

Satz. *Seien x_0 und y_0 eine spezielle Lösung der linearen diophantischen Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c = k \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$. Dann haben alle weiteren ganzzahligen Lösungen (x, y) die Form:*

$$x = x_0 + \frac{l \cdot b}{\operatorname{ggT}(a, b)} \wedge y = y_0 - \frac{l \cdot a}{\operatorname{ggT}(a, b)} \quad \textit{mit } l \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Seien (x_0, y_0) eine spezielle und (x, y) die allgemeine Lösung. Dann gilt: $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c$ und $a \cdot x + b \cdot y = c$, also: $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$. Wieder gibt es Zahlen $a', b' \in \mathbb{Z}$ mit $a = a' \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$ und $b = b' \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$, also: $a' \cdot (x - x_0) + b' \cdot (y - y_0) = 0 \cdot \operatorname{ggT}(a, b) = 0$. Also folgt:

$$\frac{a' \cdot (x - x_0)}{b'} = -(y - y_0) \in \mathbb{Z}$$

Weil $\operatorname{ggT}(a, b) = \operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a, b) \cdot a', \operatorname{ggT}(a, b) \cdot b') = \operatorname{ggT}(a', b') = 1$ gilt, folgt, dass b' die ganze Zahl $x - x_0$ teilt, d.h. $x - x_0 = t_1 \cdot b' \Leftrightarrow x = x_0 + t_1 \cdot b' = x_0 + \dfrac{t_1 \cdot b}{\operatorname{ggT}(a, b)}$. Es gilt nun auch:

$$\frac{-(y - y_0) \cdot b'}{a'} = x - x_0 \in \mathbb{Z}$$

Wegen $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$ folgt, dass a' die ganze Zahl $-(y - y_0)$ teilt, also $y - y_0 = -t_2 \cdot a' \Leftrightarrow y = y_0 - t_2 \cdot a' = y_0 - \dfrac{t_2 \cdot a}{\mathrm{ggT}(a,b)}$. Nun gilt die folgende Rechnung:

$$a' \cdot (x - x_0) = -b \cdot (y - y_0) \Leftrightarrow a' \cdot (t_1 \cdot b') = -b' \cdot (-t_2 \cdot a') \Leftrightarrow t_1 = t_2 = l$$

Setzt man nun $t_1 = t_2$ gleich l, so folgt die Behauptung für x und y. □

Aufgabe. *Es seien m und n teilerfremde positive ganze Zahlen. Man beweise, dass es dann stets zwei Mengen M und N von m bzw. n aufeinanderfolgenden postiven ganzen Zahlen gibt, deren Elemente die gleiche Summe haben. Beispielsweise gilt für $m = 2$ und $n = 3$ mit $M = \{4, 5\}$ und $N = \{2, 3, 4\}$: $4 + 5 = 2 + 3 + 4$.*

Lösung. Es soll also gelten:

$$(x + 0) + (x + 1) + \ldots + (x + (m - 1)) = (y + 0) + (y + 1) + \ldots + (y + (n - 1)) \Leftrightarrow m \cdot x + \frac{(m-1) \cdot m}{2} = n \cdot y + \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

Und das ist äquivalent zu:

$$m \cdot x - n \cdot y = \frac{(n-1) \cdot n}{2} - \frac{(m-1) \cdot m}{2} =: \alpha \in \mathbb{Z}$$

Es ist nun die Aufgabe positive ganze Zahlen x und y so zu finden, dass $m \cdot x - n \cdot y = \alpha$ gilt. Nach dem obigen Lemma ist $m \cdot x + n \cdot (-y) = \alpha$ lösbar, weil α ein Vielfaches von $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ ist. Sei (x_0, y_0) eine spezielle Lösung, dann sind alle Lösungen (nach dem Satz oben) gegeben durch:

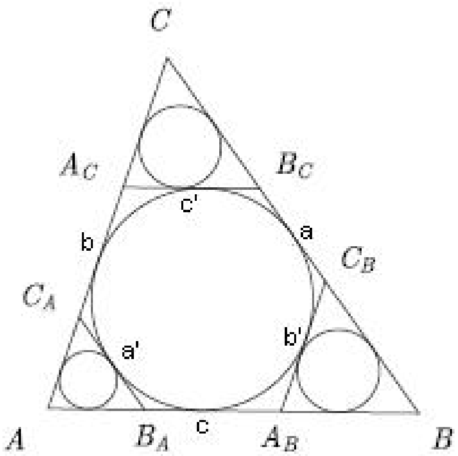
$$x = x_0 + l \cdot n \wedge -y = y_0 - l \cdot m \Leftrightarrow x = x_0 + l \cdot n \wedge y = l \cdot m - y_0$$

Man kann nun das l so groß machen, dass x und y positiv sind. Also ist die Aufgabe gelöst. □

Die Summe dreier Inkreisradien

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inkreis k. Der Radius von k sei r. Durch Tangenten an k, die parallel zu den Dreiecksseiten sind, entstehen die Dreiecke AB_AC_A, A_BBC_B und A_CB_CC, wie im Bild unten. Die Radien ihrer Inkreise seien r_a, r_b bzw. r_c. Man beweise, dass $r_a + r_b + r_c = r$ gilt.*



Lösung. Zunächst sind die drei kleinen Kreise kongruent zum Dreieck ABC. Sie sind jeweils mit einem bestimmten Faktor kleinskaliert. Das gilt auch für die jeweiligen Inkreisradien. Es sind $\lambda_a = \dfrac{a'}{a}$, $\lambda_b = \dfrac{b'}{b}$ und $\lambda_c = \dfrac{c'}{c}$ die Kontraktionsfaktoren für ihr jeweiliges kleines Dreieck im Vergleich zum Dreieck ABC. $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$ sind bekannt. a', b' und c' können mittels Analytischer Geometrie berechnet werden, weil die Winkel α bei A, β bei B und γ bei C bekannt sind, und da man weiß, dass die parallen Strecken a und a', b und b' sowie c und c' den Abstand $2 \cdot r$ haben. Es gilt dann:

$$a' = a - 2 \cdot r \cdot \left(\frac{1}{\tan(\beta)} + \frac{1}{\tan(\gamma)}\right) \wedge b' = b - 2 \cdot r \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\gamma)}\right) \wedge c' = c - 2 \cdot r \cdot \left(\frac{1}{\tan(\beta)} + \frac{1}{\tan(\beta)}\right)$$

Die Formel für den Inkreisradius des Dreiecks ABC lautet: $r = \dfrac{2 \cdot A_{ABC}}{U_{ABC}}$, wobei A_{ABC} der Flächeninhalt und U_{ABC} der Umfang des Dreiecks ABC ist. Also gilt dann:

$$r = \frac{\sin(\alpha) \cdot b \cdot c}{a + b + c} = \frac{\sin(\beta) \cdot a \cdot c}{a + b + c} = \frac{\sin(\gamma) \cdot a \cdot b}{a + b + c}$$

Aus dem Kosinussatz folgen die folgenden Identitäten:

$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{b^2 + c^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) \wedge \beta = \text{acos}\left(\frac{a^2 + c^2}{2 \cdot a \cdot c}\right) \wedge \gamma = \text{acos}\left(\frac{a^2 + b^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)$$

Setzt man nun die bekannten Werte für α, β, γ und r ein, so erhält man a', b' und c' nur noch in Abhängigkeit von a, b und c. Nach einer etwas längeren Rechnung, wo $\sin(\text{acos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ und $\tan(\text{acos}(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ gebraucht wird, ergibt sich, ohne Durchführung einer genaueren Berechnung:

$$\lambda_a = \frac{a'}{a} = \frac{-a + b + c}{a + b + c} \wedge \lambda_b = \frac{b'}{b} = \frac{a - b + c}{a + b + c} \wedge \lambda_c = \frac{c'}{c} = \frac{a + b - c}{a + b + c}$$

Also gilt dann für die Inkreisradien:

$$r_a + r_b + r_c = (\lambda_a \cdot r) + (\lambda_b \cdot r) + (\lambda_c \cdot r) = (\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c) \cdot r = \left(\frac{-a + b + c}{a + b + c} + \frac{a - b + c}{a + b + c} + \frac{a + b - c}{a + b + c}\right) \cdot r = \frac{a + b + c}{a + b + c} \cdot r = r$$

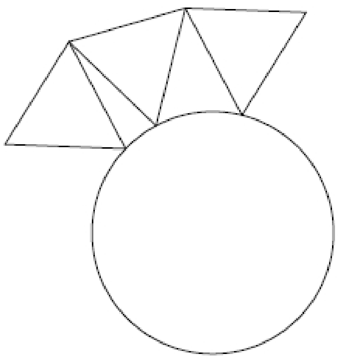
Damit ist die Aufgabe also vollständig gelöst. □

Die Dreiecke um einen Kreis

[Zurück zur Liste]

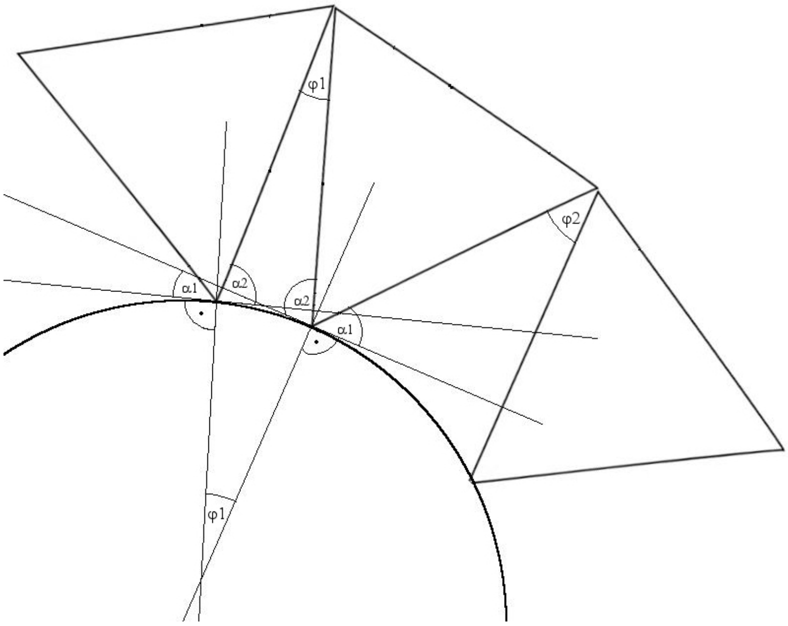
Aufgabe. *Auf dem Tisch liegt eine Kreisscheibe mit dem Radius 6cm. Inge möchte von außen möglichst viele gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 6cm an die Kreisscheibe legen. Dabei möchte sie folgende Bedingungen einhalten:*

1. *Von jedem Dreieck liegt eine Ecke auf der Peripherie des Kreises.*
2. *Die Dreiecke überdecken sich nicht.*
3. *Je zwei aufeinanderfolgende Dreiecke besitzen genau einen gemeinsamen Eckpunkt, und dieser liegt nicht auf dem Kreis.*



Man bestimme, wie viele Dreiecke Inge höchstens an den Kreis legen kann, ohne dass sich Dreiecke überdecken. Man beweise, dass sich bei dieser Anzahl das erste und das letzte Dreieck in Eckpunkten berühren.

Lösung. Als erstes braucht man eine gute Zeichnung:



Wie dem Bild oben zu entnehmen ist, gilt $\alpha 1 + 60^\circ + \alpha 2 = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha 2 = 120^\circ - \alpha 1$. Außerdem findet man $2 \cdot \varphi 1 + 2 \cdot \alpha 2 + 180^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \varphi 1 + \alpha 2 = 90^\circ \Leftrightarrow \varphi 1 = 90^\circ - \alpha 2$. Analog findet man $\varphi 2 = 90^\circ - \alpha 1$. Also folgt nun:

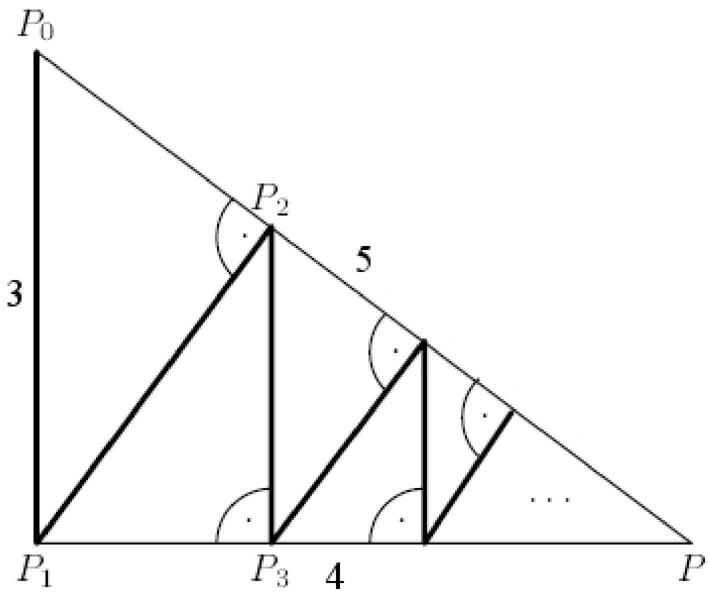
$$\varphi 1 + \varphi 2 = (90^\circ - \alpha 2) + (90^\circ - \alpha 1) = 180^\circ - \alpha 2 - \alpha 1 = 180^\circ - (120^\circ - \alpha 1) - \alpha 1 = 60^\circ$$

Weil $360^\circ = 6 \cdot 60^\circ = 6 \cdot (\varphi 1 + \varphi 2) = 6 \cdot \varphi 1 + 6 \cdot \varphi 2$ ist, hat man um den Kreis genau $12 = 6 \cdot 2$ gleichseitige Dreiecke. Die beiden Winkel $\varphi 1$ und $\varphi 1$ wechseln sich um den Kreis immer ab. Das erste und letzte Dreieck berühren sich in einem Punkt. Die Dreiecke schaffen genau eine Runde. Das funktioniert, weil von den Winkel $\varphi 1$ und $\varphi 2$ gleichlange Schenkel kommen, die mit ihren Endpunkten auf dem Kreisrand liegen. Fertig! □

Der Streckenzug in einem Dreieck

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein rechtwinkliges Dreieck P_0P_1P habe die Seitenlängen $3, 4$ und 5, wobei $\overline{P_0P_1}$ die kürzeste Seite des Dreiecks sei. Es soll nun die Länge des unendlichen Streckenzuges $P_0P_1P_2P_3\ldots$ berechnet werden.*



Lösung. Es gilt schonmal $\overline{P_0P_1} = 3 = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0$. Da das Dreieck $P_0P_1P_2$ kongruent zum Dreieck P_0P_1P ist, gilt $\frac{\overline{P_1P_2}}{3} = \frac{4}{5}$, also $\overline{P_1P_2} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1$. Da das Dreieck $P_1P_3P_2$ ebenfalls kongruent zum Dreieck P_0P_1P ist, gilt also $\frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \overline{P_2P_3} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 \cdot \frac{4}{5} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$. Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen, dass gilt $\overline{P_kP_{k+1}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k$. Der Induktionsanfang gilt, weil $\overline{P_0P_1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0$ und $\overline{P_1P_2} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1$ gilt. Induktionsvoraussetzung: Gelte die Behauptung für 0 bis k. Induktionsschluss: Man berechnet nun also $\overline{P_{k+1}P_{k+2}}$. Ist $k+1$ ungerade, dann gilt $\frac{\overline{P_{k+1}P_{k+2}}}{\overline{P_kP_{k+1}}} = \frac{4}{5}$, weil das Dreieck $P_{k+1}P_{k+2}P_k$ kongruent ist zum Dreieck $P_1P_2P_0$, welches wiederum kongruent ist zum Dreieck P_0P_1P. Also folgt nach I.V.: $\overline{P_{k+1}P_{k+2}} = \overline{P_kP_{k+1}} \cdot \frac{4}{5} \overset{I.V.}{=} 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k \cdot \frac{4}{5} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}$. Ist nun $k+1$ gerade, dann gilt: $\frac{\overline{P_{k+1}P_{k+2}}}{\overline{P_kP_{k+1}}} = \frac{4}{5}$, weil das Dreieck $P_{k+1}P_{k+2}P_k$ kongruent ist zum Dreieck $P_2P_3P_1$, welches wiederum wieder kongruent ist zum Dreieck P_0P_1P, also auch hier $\overline{P_{k+1}P_{k+2}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}$. Nun wird die Länge des unendlichen Streckenzuges berechnet:

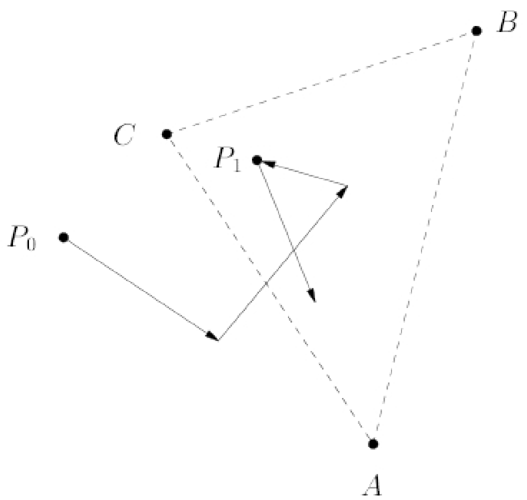
$$\sum_{k=0}^{\infty} |\overline{P_kP_{k+1}}| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k \right| = 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 3 \cdot 5 = 15$$

Damit ist also die Aufgabe gelöst. □

Der herumhüpfende Floh

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Im Punkt $P_0 = (-2, 0)$ sitzt ein junger, hüpffreudiger Floh. Zunächst springt er in Richtung des Punktes $A = (1, -2)$ und landet genau auf halber Strecke. Von dort aus hüpft er die halbe Distanz in Richtung des Punktes $B = (2, 2)$, anschließend die halbe Distanz nach $C = (-1, 1)$. Im nun erreichten Punkt P_1 macht er eine kurze Verschnaufpause, bevor er wieder in Richtung A startet und nach dem gleichen Prinzip weitere Dreieckssprünge vollführt. Nach jeweils drei Sätzen ruht sich der Floh aus. Die folgende Zeichnung veranschaulich die Sprünge:*



Die Folge (P_n) der Ruhepunkte nach $3n$ Sätzen konvergiert gegen einen Grenzpunkt P_∞. Es soll nun jeweils die 1000. Dezimalstelle der x- und der y-Koordinate von P_∞ berechnet werden.

Lösung. Man startet also in P_0 und man fliegt dann um $(A - P_0)\frac{1}{2}$, also nach $P_0 + (A - P_0)\frac{1}{2} =: P_{1,A}$. Dann: $P_{1,B} := P_{1,A} + (B - P_{1,A})\frac{1}{2}$ und also $P_1 = P_{1,B} + (C - P_{1,B})\frac{1}{2}$. Also gilt:

$$P_1 = P_{1,B} + (C - P_{1,B})\frac{1}{2} = (P_{1,A} + (B - P_{1,A})\frac{1}{2}) + (C - (P_{1,A} + (B - P_{1,A})\frac{1}{2}))\frac{1}{2}$$

Setzt man jetzt $P_{1,A}$ ein, erhält man:

$$P_1 = ((P_0 + (A - P_0)\frac{1}{2}) + (B - (P_0 + (A - P_0)\frac{1}{2}))\frac{1}{2}) + (C - (P_0 + (A - P_0)\frac{1}{2}) + (B - (P_0 + (A - P_0)\frac{1}{2}))\frac{1}{2}))\frac{1}{2}$$

Nach einer etwas längeren Umformung erhält man dann:

$$P_1 = \frac{A + 2B + 4C + P_0}{8} = \frac{\frac{2^{3\cdot 1}-1}{7}A + 2\cdot\frac{2^{3\cdot 1}-1}{7}B + 4\cdot\frac{2^{3\cdot 1}-1}{7}C + P_0}{2^{3\cdot 1}}$$

Mit vollständiger Induktion wird nun gezeigt:

$$P_i = \frac{\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}A + 2\cdot\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}B + 4\cdot\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}C + P_0}{2^{3\cdot i}}$$

Der Induktionsanfang ($i = 1$) gilt bereits. Sei die Behauptung richtig für i. Es wird dann gezeigt, dass die Behauptung auch für $i + 1$ gilt. Folgendermaßen wird jetzt weitergerechnet: $P_{i+1,A} = P_i + (A - P_i)\frac{1}{2}$, $P_{i+1,B} = P_{i+1,A} + (B - P_{i+1,A})\frac{1}{2}$ und es gilt also $P_{i+1} = P_{i+1,B} + (C - P_{i+1,B})\frac{1}{2}$, also folgt dann:

$$P_{i+1} = P_{i+1,B} + (C - P_{i+1,B})\frac{1}{2} = (P_{i+1,A} + (B - P_{i+1,A})\frac{1}{2}) + (C - (P_{i+1,A} + (B - P_{i+1,A})\frac{1}{2}))\frac{1}{2}$$

Setzt man nun $P_{i+1,A}$ ein, so folgt dann:

$$\begin{aligned} P_{i+1} &= ((P_i + (A - P_i)\frac{1}{2}) + (B - (P_i + (A - P_i)\frac{1}{2}))\frac{1}{2}) + (C - ((P_i + (A - P_i)\frac{1}{2}) + (B - (P_i + (A - P_i)\frac{1}{2}))\frac{1}{2}))\frac{1}{2} \\ &= \frac{A + 2B + 4C + P_i}{8} = \frac{A \cdot 2^{3i}}{2^3 \cdot 2^{3i}} + \frac{B \cdot 2^{3i+1}}{2^2 \cdot 2^{3i+1}} + \frac{C \cdot 2^{3i+2}}{2^1 \cdot 2^{3i+2}} + \frac{\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}A + 2\cdot\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}B + 4\cdot\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}C + P_0}{2^{3\cdot(i+1)}} \\ &= \frac{\left(\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}A + A\cdot 2^{3i}\right) + \left(2\cdot\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}B + B\cdot 2^{3i+1}\right) + \left(4\cdot\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}C + C\cdot 2^{3i+2}\right) + P_0}{2^{3\cdot(i+1)}} \end{aligned}$$

Und so geht es dann weiter:

$$\begin{aligned} P_{i+1} &= \frac{\left(\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}A + A\cdot\frac{2^{3i}\cdot 7}{7}\right) + \left(2\cdot\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}B + 2\cdot B\cdot\frac{2^{3i}\cdot 7}{7}\right) + \left(4\cdot\frac{2^{3\cdot i}-1}{7}C + 4\cdot C\cdot\frac{2^{3i}\cdot 7}{7}\right) + P_0}{2^{3\cdot(i+1)}} \\ &= \frac{\left(\frac{8\cdot 2^{3\cdot i}-1}{7}A\right) + \left(2\cdot\frac{8\cdot 2^{3\cdot i}-1}{7}B\right) + \left(4\cdot\frac{8\cdot 2^{3\cdot i}-1}{7}C\right) + P_0}{2^{3\cdot(i+1)}} \end{aligned}$$

Es gilt also, wie schon erwartet, der Induktionsschluss:

$$P_{i+1} = \frac{\frac{2^{3\cdot(i+1)}-1}{7}A + 2\cdot\frac{2^{3\cdot(i+1)}-1}{7}B + 4\cdot\frac{2^{3\cdot(i+1)}-1}{7}C + P_0}{2^{3\cdot(i+1)}}$$

Jetzt kann man endlich P_∞ ausrechnen:

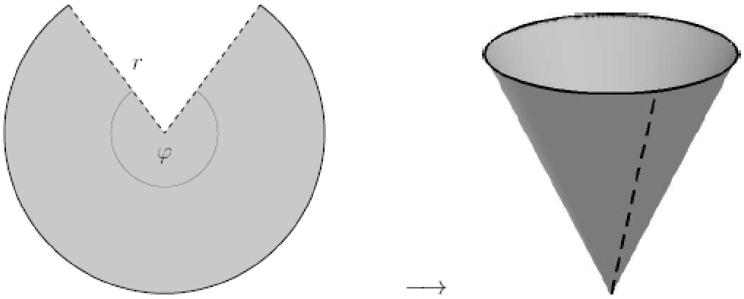
$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} P_i &= \frac{1}{7}\cdot\lim_{i\to\infty}\frac{2^{3\cdot i}-1}{2^{3\cdot i}}A + \frac{2}{7}\cdot\lim_{i\to\infty}\frac{2^{3\cdot i}-1}{2^{3\cdot i}}B + \frac{4}{7}\cdot\lim_{i\to\infty}\frac{2^{3\cdot i}-1}{2^{3\cdot i}}C + \lim_{i\to\infty}\frac{P_0}{2^{3\cdot i}} \\ &= \frac{1}{7}\cdot 1\cdot A + \frac{2}{7}\cdot 1\cdot B + \frac{4}{7}\cdot 1\cdot C + 0 \\ &= \frac{1A + 2B + 4C}{7} \end{aligned}$$

Nun gilt $A = (1, -2)$, $B = (2, 2)$ und $C = (-1, 1)$, also $P_\infty = \frac{(1,-2) + (4,4) + (-4,4)}{7} = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right)$. Desweiteren gilt also auch $P_\infty = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right) = (0,\overline{142857}; 0,\overline{857142})$. Nun gilt $1000 \bmod 6 = 4$. Also: 1000. Dezimalstelle von x ist 8, und 1000. Dezimalstelle von y ist 1. Die Aufgabe ist damit gelöst. □

Das Kegelvolumen im Vergleich

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Stück Papier, das die Form eines Kreissektors mit Radius r und Sektorwinkel $\varphi \in (0, 2\pi)$ hat, wird an den gestrichelten Linien überlappungsfrei zusammengeklebt. Dabei entsteht ein Kreiskegel.*



Für welchen Winkel φ wird das Verhältnis von Kegelvolumen zu Mantelfläche maximal?

Lösung. Zunächst gilt $A_{\text{Mantel}} = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\varphi}{2} \cdot r^2$. Weiter gilt: $\frac{\varphi}{2\pi} \cdot 2\pi r = 2\pi r_{\text{Kegel}} \Leftrightarrow r_{\text{Kegel}} = \frac{\varphi \cdot r}{2\pi}$. Es wird als nächstes die Höhe des Kegels bestimmt: $h^2 + r_{\text{Kegel}}^2 = r^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\varphi \cdot r}{2\pi}\right)^2}$. Für die Grundfläche des Kegels gilt $G = \pi r_{\text{Kegel}}^2 = \pi \cdot \left(\frac{\varphi \cdot r}{2\pi}\right)^2 = \frac{\varphi^2 \cdot r^2}{4\pi}$. Das Volumen V des Kegel ist damit:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\varphi^2 \cdot r^2}{4\pi} \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{\varphi \cdot r}{2\pi}\right)^2} = \frac{r^3}{12\pi} \cdot \varphi^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2}$$

Daraus folgt dann also:

$$Q(\varphi) := \frac{V}{A_{\text{Mantel}}}(\varphi) = \frac{\frac{r^3}{12\pi} \cdot \varphi^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2}}{\frac{\varphi}{2} \cdot r^2} = \frac{r}{6\pi} \cdot \varphi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2}$$

Das notwendige Kriterium für ein Maximum lautet $\frac{d}{d\varphi} Q(\varphi) = 0$, also:

$$\frac{d}{d\varphi} Q(\varphi) = \frac{r}{6\pi} \cdot 1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2} + \frac{r}{6\pi} \cdot \varphi \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{\varphi}{2\pi^2}\right) = 0$$

Und das ist äquivalent zu:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2} = \varphi^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2}} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow 4\pi^2 = 2 \cdot \varphi^2$$

An der Stelle $\varphi = \sqrt{2} \cdot \pi$ befindet sich ein Maximum, denn man weist leicht nach, dass $Q''(\sqrt{2} \cdot \pi) < 0$ gilt. Also ist der Quotient aus Kegelvolumen und Mantelfläche maximal für $\varphi = \sqrt{2} \cdot \pi$. Ende. □

Die letzte Ziffer sehr großer Potenzen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Es sollen hier die letzte Ziffer folgender Potenzen ausgerechnet werden:*

$$a)\ \left(123^{789}\right)^{456} \qquad b)\ 789^{\left(123^{456}\right)}$$

Lösung. Zunächst wird sich um a) gekümmert:

$$\begin{aligned}
\left(123^{789}\right)^{456} \bmod 10 &= \left(3^{789}\right)^{456} \bmod 10 = \left(\left(3^5 \cdot 3^5\right)^{78} \cdot 3^9\right)^{456} \bmod 10 = \left((243 \cdot 243)^{78} \cdot 3^5 \cdot 3^4\right)^{456} \bmod 10 \\
&= \left((3 \cdot 3)^{78} \cdot 243 \cdot 81\right)^{456} \bmod 10 = \left((3 \cdot 3)^{78} \cdot 3 \cdot 1\right)^{456} \bmod 10 = \left(9^{78} \cdot 3\right)^{456} \bmod 10 \\
&= \left(\left(9^2\right)^{39} \cdot 3\right)^{456} \bmod 10 = \left(81^{39} \cdot 3\right)^{456} \bmod 10 = \left(1^{39} \cdot 3\right)^{456} \bmod 10 = 3^{456} \bmod 10 \\
&= \left(3^2\right)^{228} \bmod 10 = 81^{228} \bmod 10 = 1^{228} \bmod 10 = 1
\end{aligned}$$

Als nächstes wird b) gelöst:

$$
\begin{aligned}
789^{\left(123^{456}\right)} \bmod 10 = 9^{\left(123^{456}\right)} \bmod 10 &= \left(9^{2\cdot 61}\cdot 9\right)^{\left(123^{455}\right)} \bmod 10 = \left(81^{61}\cdot 9\right)^{\left(123^{455}\right)} \bmod 10\\
&= \left(1^{61}\cdot 9\right)^{\left(123^{455}\right)} \bmod 10 = 9^{\left(123^{455}\right)} \bmod 10 = \left(9^{123}\right)^{\left(123^{454}\right)} \bmod 10 = 9^{\left(123^{454}\right)} \bmod 10\\
&= 9^{123} \bmod 10 = (81)^{61}\cdot 9 \bmod 10 = 1^{61}\cdot 9 \bmod 10 = 9
\end{aligned}
$$

Die Aufgabe ist damit vollständig gelöst. □

Die periodische Folge

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Für eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ sei jedes Glied um 1 kleiner als die Summe einer Nachbarn:*

$$x_k = x_{k-1} + x_{k+1} - 1,\ k = 2, 3, \ldots$$

Jede solche Folge ist periodisch. Aufgaben: a) Bestimme die Periodenlänge für den allgemeinen Fall, b) Berechne die Summe der ersten 66 Folgenglieder, c) Gebe von der Folge mit $x_1 = 1$ und $x_{66} = 66$ die Folgenglieder $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{55}$ an.

Lösung. Im allgemeinen Fall sieht die Folge also folgendermaßen aus:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
a	b	$1-a+b$	$2-a$	$2-b$	$1+a-b$	a	b	$1-a+b$

Wie man sieht, hat die Folge im allgemeinen Fall die Periodenlänge 6, also ist a) gelöst. Nun zu b): Es gilt $\sum_{i=1}^{6} x_i = a + b + (1 - a + b) + (2 - a) + (2 - b) + (1 + a - b) = 6$, daraus folgt $\sum_{i=1}^{66} x_i = 11 \cdot \sum_{i=1}^{6} x_i = 11 \cdot 6 = 66$, also b) fertig. Sei nun also $x_1 = a = 1$ und $x_{66} = x_6 = 1 + a - b = 1 + 1 - b = 2 - b = 66$, also $a = 1$ und $b = -64$. Also:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
1	-64	-64	1	66	66	1	-64	-64

Damit ist c) gelöst: $x_{11} = 66$ wegen $11 \bmod 6 = 5$, $x_{22} = 1$ wegen $22 \bmod 6 = 4$, $x_{33} = -64$ wegen $33 \bmod 6 = 3$, $x_{44} = -64$ wegen $44 \bmod 6 = 2$ und $x_{55} = 1$ wegen $55 \bmod 6 = 1$. Ende. □

Die Symbolrätsel

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *In der folgenden Anordnung sind sechs Gleichungen enthalten, wobei jedem Symbol genau eine Ziffer entspricht.*

$$
\begin{array}{cccccccc}
\bullet\ \square & - & \triangle\ \odot & = & \triangledown\ \odot \\
\div & & - & & - \\
\triangle\ \odot & + & \triangle\ \square & = & \oslash\ \odot \\
\hline
\triangledown & * & \odot & = & \oslash\ \square
\end{array}
$$

a) Wie lauten die gesuchten Ziffern?

$$
\begin{array}{ccccc}
a & - & b & = & d \\
\div & & - & & - \\
b & + & c & = & e \\
\hline
f & * & g & = & h
\end{array}
$$

b) Welche anderen Kombinationen von zweistelligen Zahlen a, b, c sind bei ganzzahligen positiven Ergebnissen d, e, f, g, h möglich? Man beweise, dass es nur genau vier Kombinationen gibt!

Lösung. Die beiden Aufgaben werden, wie folgt, bearbeitet:
a) Wegen $\nabla\odot - \oslash\odot = \oslash\Box$ folgt $\Box = 0$. Aus $\bullet\Box - \triangle\odot = \nabla\odot \Leftrightarrow \bullet\Box = \triangle\odot + \nabla\odot$ folgt $\odot = 5$. Weiter gilt $\triangle 5 + \triangle 0 = \oslash 5$, also $\oslash = 2, 4, 6, 8$. Weil $\nabla * 5 = \oslash 0$ gilt, kann $\oslash = 6, 8$ nicht sein, weil $\nabla * 5$ höchstens $45 = 9 \cdot 5$ ist. Es bleibt $\oslash = 2, 4$. Wäre $\oslash = 4$, dann wäre $\nabla = 8$ wegen $\nabla * 5 = 40$; da $\triangle$ mindestens 1 ist, folgt aus $\nabla = 8$, dass $\bullet 0 > 99$ ist, also Widerspruch. Folglich kann nur $\oslash = 2$ sein. Also gilt $\nabla = 4$, da $\nabla * 5 = 20$ gilt. Wegen $\triangle 5 - \triangle 0 = 5$ folgt $\triangle = 1$. Und schließlich folgt aus $\bullet 0 - 15 = 45$, dass $\bullet = 6$ gelten muss. Insgesamt sehen alle Lösungen so aus:

$$\bullet = 6 \quad \Box = 0 \quad \triangle = 1 \quad \odot = 5 \quad \nabla = 4 \quad \oslash = 2$$

Wenn man die Werte alle einsetzt, dann ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{array}{cccccccc}
6 & 0 & - & 1 & 5 & = & 4 & 5 \\
\div & & & & - & & & - \\
1 & 5 & + & 1 & 0 & = & 2 & 5 \\
\hline
 & 4 & * & & 5 & = & 2 & 0
\end{array}$$

b) Es werden nun die d, e, f, g, h in Abhängigkeit von a, b, c dargestellt:

$$\mathbf{d} = a - b; \quad \mathbf{e} = b + c; \quad \mathbf{f} = \frac{a}{b}; \quad \mathbf{g} = b - c; \quad a - \frac{a \cdot c}{b} = \frac{a}{b} \cdot (b - c) = f \cdot g = \mathbf{h} = d - e = (a - b) - (b + c) = a - 2b - c$$

Weil h zwei verschiedene Darstellungen hat, folgt also: $a - \frac{a \cdot c}{b} = a - 2b - c \Leftrightarrow c = \frac{2b^2}{a - b}$, also ist auch c festgelegt. Die Zahlen c, d, e, f, g, h werden also durch geeignete a, b parametrisiert. Es sollen also a, b, c zweistellig sein. Man sucht nun a, b so, dass c zweistellig ist, $c \neq a$ und $c \neq b$ ist, und dass gilt $b \mid a$ und $a \neq b$. Es gilt $2 \leq \frac{a}{b} \leq 9$ mit $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^{>0}$, denn wäre $\frac{a}{b} = 1$, dann wäre $a = b$, im Widerspruch zu $a \neq b$. $\frac{a}{b} \leq 9$ gilt, weil $\frac{99}{10} = 9{,}9$ ist. Jetzt zeigt man, dass $\frac{a}{b} = 2$ nicht sein kann: Also $b = \frac{a}{2} \Rightarrow c = \frac{2 \cdot \frac{a^2}{2^2}}{\frac{a}{2}} = a$, im Widerspruch zu $c \neq a$. Auch kann nicht $\frac{a}{b} = 3$ sein: $b = \frac{a}{3} \Rightarrow c = \frac{2 \cdot \frac{a^2}{3^2}}{\frac{2}{3}a} = \frac{a}{3} = b$, im Widerspruch zu $c \neq b$. Es gilt bisher $\frac{a}{b} \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Sei nun allgemein $\frac{a}{b} = \lambda \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ mit $\lambda \geq 5$, dann gilt: $b = \frac{a}{\lambda} \Rightarrow c = \frac{2 \cdot \frac{a^2}{\lambda^2}}{a - \frac{a}{\lambda}} = \frac{2 \cdot \frac{a^2}{\lambda^2}}{\frac{\lambda - 1}{\lambda} a} = \frac{2 \cdot a}{\lambda \cdot (\lambda - 1)} = \frac{a}{\frac{\lambda \cdot (\lambda - 1)}{2}}$. Aus $\lambda \geq 5$ folgt $\lambda - 1 \geq 4$, also $\lambda \cdot (\lambda - 1) \geq 20$, also $\frac{\lambda \cdot (\lambda - 1)}{2} \geq 10$. Weil a höchstens 99 ist, folgt, dass $c = \frac{a}{\frac{\lambda \cdot (\lambda - 1)}{2}} \leq 9{,}9$ ist, also, dass c nicht zweistellig sein kann. Es kann also nur $\frac{a}{b} = 4 \Leftrightarrow b = \frac{a}{4}$ sein, folglich: $c = \frac{2 \cdot \frac{a^2}{2^2}}{\frac{3}{4}a} = \frac{a}{6}$. Weil a durch 4 und durch 6 teilbar ist, ist a auch durch 12 teilbar. a muss wegen $c = \frac{a}{6}$ größer-gleich 60 sein, sonst ist c nicht zweistellig. Von 60 bis 99 sind durch 12 teilbar: $a = 60, 72, 84, 96$. Die vier Lösungskombinationen sollten also folgendermaßen lauten:

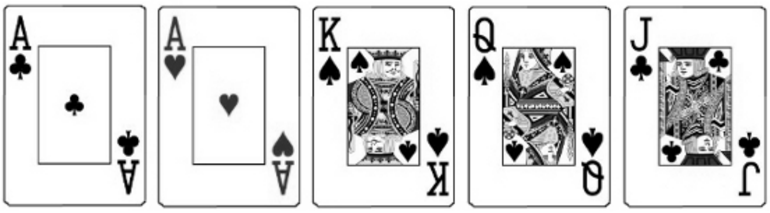
a	b	c	d	e	f	g	h
60	15	10	45	25	4	5	20
72	18	12	54	30	4	6	24
84	21	14	63	35	4	7	28
96	24	16	72	40	4	8	32

Die Zahlen sind in jeder Zeile paarweise verschieden. Die Lösung der Aufgabe ist nun fertig! □

Die Pokerblätter

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Folgende zwei Punkte sollen behandelt werden:*
1. Wieviele Möglichkeiten gibt es, beim Pokerspiel mit 32 Karten genau ein Paar zu erhalten?



2. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten dafür, dass sich das abgebildete Blatt (siehe oben) durch Tausch von zwei Karten zu einem Full-House verbessert!

Lösung. Zu 1.: Es gibt 8 Möglichkeiten das Zeichen des Paares festzulegen. Dann gibt es für das Paar $\binom{4}{2}$ mögliche Farbkombinationen. Die Anzahl der Paare muss man dann mit der Anzahl an Möglichkeiten für die restlichen 3 Karten multiplizieren. Weil die Zeichen der restlichen drei Karten verschieden sein sollen und ein Zeichen für das Paar vergeben ist, gibt es also $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten für die restlichen drei Karten. Diese drei Karten mit verschiedenen Zeichen gibt es in 4^3 Farbkonstellationen. Zusammengefasst ist die Anzahl für genau ein Paar also:

$$\left[8 \cdot \binom{4}{2}\right] \cdot \left[\binom{7}{3} \cdot 4^3\right] = 107520$$

Damit ist 1. fertig! Nun zu 2.: Es gibt drei Fälle: (i) Man zieht eines der zwei Asse und eine Karte von den drei anderen (K,Q,J), Anzahl der Möglichkeiten: $2 \cdot 3 = 6$; (ii) Man zieht beide Asse, Anzahl der Möglichkeiten: 1; (iii) Man zieht zwei Karten aus den drei Karten K,Q und J, Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{3}{2} = 3$. Es wurden also alle $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten betrachtet zwei Karten aus fünf auszuwählen. Zu (i): Zieht man ein Ass und eine Karte aus K,Q und J, dann bleiben drei verschiedene Karten übrig, also kann man sich in diesem Fall nicht zu einem Full-House verbessern. Zu (ii): Zieht man die beiden Asse, dann bleiben wieder drei verschiedene Karten übrig und man kann sich auch hier nicht zu einem Full-House verbessern. Zu (iii): Hat man K, Q gezogen, dann braucht man zwei J oder 1 Ass und ein J; hat man K, J gezogen, dann braucht man zwei Q oder 1 Ass und ein Q; hat man Q, J gezogen, dann braucht man zwei K oder 1 Ass und ein K. Es gilt also die folgende Anzahl an Möglichkeiten sich zu einem Full-House zu verbessern:

$$3 \cdot \left[\binom{3}{2} + \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1}\right] = 27$$

Die Lösung der Aufgabe ist daher komplett fertig! □

Das MasterMind-Spiel

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Bei dem Spiel MasterMind muss eine Kombination aus den Farben Rot (R), Grün (G) und Blau (B) erraten werden, wobei man nach jedem Versuch die Information erhält, wie viele Farben richtig gewählt wurden und wie viele Farben bereits an der richtigen Position stehen. Ein möglicher Spielverlauf ist:*

				richtige Farben	richtige Positionen
1. Versuch:	R	G	B	2	1
2. Versuch:	G	B	G	1	0

a) Wie viele Kombinationen sind nach der Information zu dem ersten Versuch noch möglich?

b) Welches ist die gesuchte Kombination, die nach den beiden Versuchen eindeutig festliegt?

c) Wenn zusätzlich noch die Farbe Schwarz (S) gegeben wäre, wie viele Kombinationen wären dann noch möglich?

Lösung. Zu a): Nach dem ersten Versuch weiß man, dass die drei Kugeln aus genau 2 Farben bestehen. Mögliche Farbkombinationen sind: RG, RB und GB. Hat man die Farbkombination RB, dann ist entweder R an der richtigen Position oder B, denn G ist nicht an der richtigen Position, weil G nicht Rot und nicht Blau ist. Mögliche Kombinationen im Fall RB: Ist R richtig an der ersten Position, dann muss B an die zweite Position, weil B auf drei sonst auf der richtigen Position wäre. Auf drei kommt dann R, denn, wenn dort B wäre, dann wäre auch B an der richtigen Stelle. Ist B an der dritten Stelle am richtigen Platz, dann muss R an die zweite Stelle, weil R auf dem ersten Platz sonst auch an der richtigen Stelle wäre. An die erste Stelle kommt dann B, denn, wenn dort R wäre, dann wäre auch R an der richtigen Stelle. In den Fällen RB und GB findet man ganz analog zum Fall RG ebenfalls jeweils zwei mögliche Kombinationen. Insgesamt hat man also:

$$\begin{array}{lll} RB: & \underline{R}BR & BR\underline{B} \\ RG: & \underline{R}RG & G\underline{G}R \\ GB: & B\underline{G}G & GB\underline{B} \end{array}$$

Nach dem ersten Versuch sind also noch 6 Kombinationen möglich. Nun zu b): Aus der zweiten Information folgt, dass G nicht auf der ersten und nicht auf der dritten Position stehen kann. Und B steht nicht auf der zweiten Position. Man kann also aus den 6 brigen Kombinationen falsche Kombinationen ausschließen:

$$\begin{array}{llll} RB: & \quad & R\overline{B}R & \widehat{BRB} \\ RG: & & RR\overline{G} & \overline{G}GR \\ GB: & & BG\overline{G} & \overline{G}BB \end{array}$$

Es bleibt BRB übrig und es erfüllt auch beide Informationen aus den zwei Versuchen. Also ist b) gelöst. Jetzt zu c): Wenn nun Schwarz (S) dazu kommt, dann bleibt BRB weiterhin eine Lösung unter den Kombinationen, die Schwarz nicht enthalten. Man unterscheidet drei Fälle: RB, RG und GB, wobei Schwarz in der Kombination enthalten ist, denn die ohne Schwarz hat man ja behandelt. Man hat dann also:

$$\begin{array}{llllll} RBS: & \quad & \underline{R}BS & \underline{R}SB & RS\underline{B} & SR\underline{B} \\ RGS: & & \underline{R}GS & \underline{R}SG & R\underline{G}S & S\underline{G}R \\ GBS: & & B\underline{G}S & S\underline{G}B & GS\underline{B} & SG\underline{B} \end{array}$$

Man kann nun wieder Kombinationen ausschließen: Fall RBS: Ist R an der ersten Position richtig, dann darf B nicht an der zweiten Stelle stehen, nach Information 2. Nach Information 1 darf B nicht an der dritten Stelle stehen, sonst wären zwei Buchstaben an der richtigen Stelle. Ist jedoch B auf der dritten Position an der richtigen Stelle, dann darf R nicht an der ersten Stelle stehen, nach Information 1. Fall RGS: Ist R an der ersten Stelle richtig, dann darf nach Information 1 das G nicht an der zweiten Stelle stehen. Nach Information 2 darf G auch nicht an dritter Stelle stehen. Ist G an der zweiten Stelle richtig, dann darf nach Information 1 das R nicht an der ersten Stelle stehen. Fall GBS: Ist B auf drei richtig, dann darf nach Information 1 das G nicht an zweiter Stelle stehen. Nach Information 2 darf G auch nicht an erster Stelle stehen. Ist G auf zwei richtig, dann darf nach Information 1 das B nicht an dritter Stelle stehen. Die Kombination $B\underline{G}S$ kann nach Information 2 nicht sein, sonst wären 2 Farben richtig.

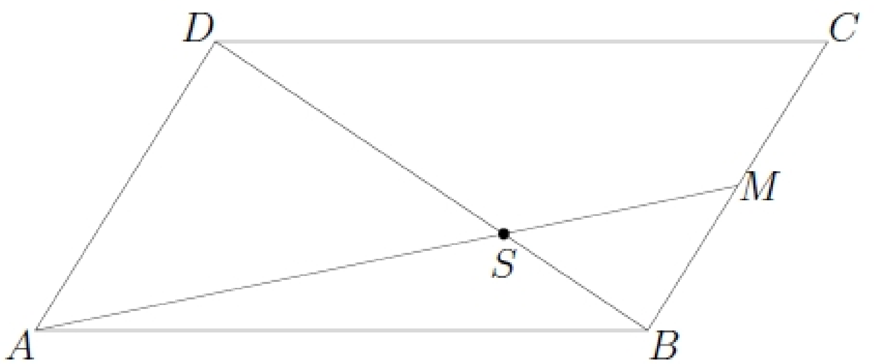
$$\begin{array}{llllll} RBS: & \quad & \underline{R}\overline{B}^2 S & \underline{R}S\overline{B}^1 & \overline{R}^1 S\underline{B} & \widehat{SR\underline{B}} \\ RGS: & & \underline{R}\overline{G}^1 S & \underline{R}S\overline{G}^2 & \overline{R}^1 \underline{G}S & \widehat{S\underline{G}R} \\ GBS: & & \overline{B\underline{G}}^2 S & S\underline{G}\overline{B}^1 & \overline{G}^2 S\underline{B} & S\overline{G}^1 \underline{B} \end{array}$$

Es bleiben also unausgeschlossen die Kombinationen SRB und SGR. Zusammen mit BRB sind also insgesamt noch 3 Kombinationen möglich, die alle den zwei Bedingungen genügen. c) ist also auch gelöst. Ende. $\square$

Die Verhältnisse im Parallelogramm

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Im Parallelogramm $ABCD$ bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ und S den Schnittpunkt der Strecke $\overline{AM}$ mit der Diagonalen $\overline{BD}$.*



a) In welchem Verhältnis teilt S die Diagonale $\overline{BD}$?

b) In welchem Verhältnis steht die Fläche des Parallelogramms $ABCD$ zur Fläche des Dreiecks BMS?

Lösung. a) Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{|\overline{BS}|}{|\overline{SD}|} = \frac{|\overline{BM}|}{|\overline{AD}|}$. Desweiteren gilt $\overline{DS} + \overline{SB} = \overline{DB}$ und setze $\overline{DS} = \lambda \cdot \overline{DB}$ sowie $\overline{SB} = (1-\lambda) \cdot \overline{DB}$, so dass also gilt $\overline{DS} + \overline{SB} = \lambda \cdot \overline{DB} + (1-\lambda) \cdot \overline{DB} = \overline{DB}$. Nun folgt dann $\frac{|\overline{BS}|}{|\overline{SD}|} = \frac{|(1-\lambda) \cdot \overline{DB}|}{|\lambda \cdot \overline{DB}|} = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} =$

$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot \overline{BC}\right|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{BM}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{BM}|}{|\overline{AD}|} \Leftrightarrow 2-2\lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$, also $1-\lambda = \frac{1}{3}$. Damit ist also gezeigt, dass S die Diagonale $\overline{BD}$ im Verhältnis $1:2$ teilt. Völlig analog zeigt man, dass S die Seitenhalbierende $\overline{AM}$ im Verhältnis $2:1$ teilt. Nun zu b): Sei $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Das Parallelogramm wird von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt, also gilt für den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD:

$$A_{ABCD} = |\det(\vec{a},\vec{b})| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| = |a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1|$$

Das Dreieck BMS hingegen wird von den Vektoren $\overrightarrow{SB} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ und $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\right)$. Also:

$$A_{BMS} = \frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SM}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\frac{1}{3}\cdot(\vec{a}-\vec{b}), \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\right)\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot(a_1-b_1) & \frac{1}{3}\cdot\left(a_1+\frac{1}{2}\cdot b_1\right) \\ \frac{1}{3}\cdot(a_2-b_2) & \frac{1}{3}\cdot\left(a_2+\frac{1}{2}\cdot b_2\right) \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left|\det\begin{pmatrix} (a_1-b_1) & \left(a_1+\frac{1}{2}\cdot b_1\right) \\ (a_2-b_2) & \left(a_2+\frac{1}{2}\cdot b_2\right) \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left|\frac{3}{2}\cdot(a_1\cdot b_2 - b_1\cdot a_2)\right| = \frac{1}{12}\cdot|a_1\cdot b_2 - b_1\cdot a_2|$$

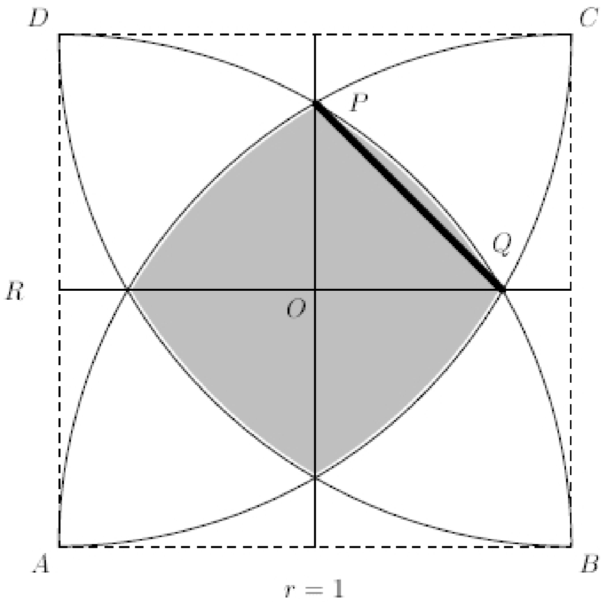
Die Lösung von b) lautet also: Das Parallelogramm $ABCD$ hat eine 12-mal so große Fläche wie das Dreieck BMS. Fertig!

□

Der Schnitt von vier Viertelkreisen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Kantenlänge $r = 1$.*



Aufgaben: a) Bestimme in der abgebildeten Figur oben den Winkel $\widehat{PAQ}$, b) die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ und c) den Flächeninhalt F der vier Viertelkreise (schraffiert).

Lösung. Die Koordinaten von P erhält man so: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4}$, also $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Q geht so: $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}$, also $Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Zu a): $\cos(\measuredangle PAQ) = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}|\cdot|\vec{Q}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}{1\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, also gilt $\measuredangle PAQ = \operatorname{acos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \simeq 30°$. Nun zu b): $|\overline{PQ}| = |Q-P| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)$. Nun wird also c) behandelt: $F = 4\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\,dx = \frac{\pi - 3\cdot\sqrt{3}+3}{3}$. Also: Ende.

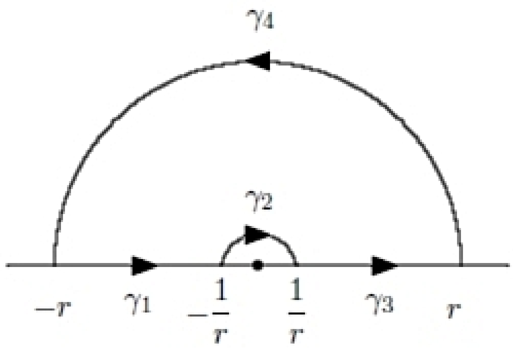
□

Aus der Funktionentheorie

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man beweise mit Funktionentheorie, dass gilt:* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \pi.$

Lösung. Es wird die Funktion $\dfrac{e^{i\cdot z}}{z}$ über die folgende geschlossene Kurve integriert:



Es gilt also das folgende: $\gamma_1 = -r + t,\ t \in \left[0, -\frac{1}{r} + r\right]$; $\gamma_2 = \frac{1}{r}\cdot e^{-i\cdot t},\ t \in [\pi, 2\pi]$; $\gamma_3 = \frac{1}{r} + t,\ t \in \left[0, r - \frac{1}{r}\right]$ und $\gamma_4 = r \cdot e^{i\cdot t}$, $t \in [0, \pi]$. Daraus folgt dann also:

$$
\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{e^{i\cdot z}}{z}\, dz &= \oint_{\gamma_1} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\, dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\, dz + \oint_{\gamma_3} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\, dz + \oint_{\gamma_4} \frac{e^{i\cdot z}}{z}\, dz \\
&= \int_0^{-\frac{1}{r}+r} \frac{e^{i\cdot(-r+t)}}{-r+t}\cdot 1\, dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{e^{i\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot e^{-i\cdot t}\right)}}{\frac{1}{r}\cdot e^{-i\cdot t}} \cdot \left(\frac{1}{r}\cdot e^{-i\cdot t}\cdot(-i)\right) dt + \int_0^{r-\frac{1}{r}} \frac{e^{i\cdot\left(\frac{1}{r}+t\right)}}{\frac{1}{r}+t}\cdot 1\, dt \\
&\quad + \int_0^\pi \frac{e^{i\cdot(r\cdot e^{i\cdot t})}}{r\cdot e^{i\cdot t}} \cdot (r\cdot e^{i\cdot t}\cdot i)\, dt \\
&= \int_0^{-\frac{1}{r}+r} \frac{e^{i\cdot(-r+t)}}{-r+t}\cdot 1\, dt + \int_\pi^{2\pi} e^{i\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot e^{-i\cdot t}\right)} \cdot (-i)\, dt + \int_0^{r-\frac{1}{r}} \frac{e^{i\cdot\left(\frac{1}{r}+t\right)}}{\frac{1}{r}+t}\cdot 1\, dt + \int_0^\pi e^{i\cdot(r\cdot e^{i\cdot t})}\cdot i\, dt \\
&= \int_{-r}^{-\frac{1}{r}} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\cdot 1\, dt + \int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\cdot 1\, dt + \int_\pi^{2\pi} e^{i\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot e^{-i\cdot t}\right)}\cdot(-i)\, dt + \int_0^\pi e^{i\cdot(r\cdot e^{i\cdot t})}\cdot i\, dt
\end{aligned}
$$

Weil γ geschlossen ist und die Polstelle von $\dfrac{e^{i\cdot z}}{z}$ nicht umrundet, gilt $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^{i\cdot z}}{z}\, dz = 0$, woraus dann folgt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{r\to\infty} \left[\int_{-r}^{-\frac{1}{r}} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt + \int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt + \int_\pi^{2\pi} e^{i\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot e^{-i\cdot t}\right)}\cdot(-i)\, dt + \int_0^\pi e^{i\cdot(r\cdot e^{i\cdot t})}\cdot i\, dt\right] \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt + \int_0^\infty \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt + \int_\pi^{2\pi} e^{i\cdot\left(0\cdot e^{-i\cdot t}\right)}\cdot(-i)\, dt + \lim_{r\to\infty}\int_0^\pi e^{i\cdot(r\cdot(\cos(t)+i\cdot\sin(t)))}\cdot i\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt - i\cdot\int_\pi^{2\pi} 1\, dt + i\cdot\lim_{r\to\infty}\int_0^\pi e^{i\cdot r\cdot\cos(t) - r\cdot\sin(t)}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt - i\cdot(2\pi - \pi) + i\cdot\int_0^\pi \lim_{r\to\infty}\left(e^{-r\cdot\sin(t)}\cdot e^{i\cdot r\cdot\cos(t)}\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt - i\cdot\pi + i\cdot\int_0^\pi \lim_{r\to\infty}\left(e^{-r\cdot\sin(t)}\cdot[\cos(r\cdot\cos(t)) + i\cdot\sin(r\cdot\cos(t))]\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt - i\cdot\pi + i\cdot\int_0^\pi 0\cdot[\cos(\infty\cdot\cos(t)) + i\cdot\sin(\infty\cdot\cos(t))]\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt - i\cdot\pi + i\cdot 0 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\cdot t}}{t}\, dt - i\cdot\pi
\end{aligned}
$$

Denn es gilt $\cos(r\cdot\cos(t))+i\cdot\sin(r\cdot\cos(t))\in([0,1]+i\cdot[0,1])$ für alle $r\in\mathbb{R}$. Es folgt also:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\cdot t}}{t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(t)}{t}+i\cdot\frac{\sin(t)}{t}\,dt=i\cdot\pi$$

Durch Vergleich der Imaginärteile erhält man also: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\pi$. Und damit ist man hier fertig! □

Aus der Fourieranalysis

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man beweise mit Fourieranalysis, dass gilt:* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2dx=\pi$.

Lösung. Sei $g(x):=\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}(g*g)(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}g(x-y)\cdot g(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x-y)\cdot\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\,dy=\int_{-1}^{1}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x-y)\,dy\\&=\int_{x+1}^{x-1}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x-(x-t))\cdot(-1)\,dt=\int_{x-1}^{x+1}\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\,dt\end{aligned}$$

Es gilt also das folgende:

$$(g*g)(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ x+2, & -2\le x<0\\ -x+2, & 0\le x\le 2\\ 0, & 2<x\end{cases}$$

Jetzt wird die Fouriertransformierte $\hat{g}$ von g berechnet:

$$\begin{aligned}\hat{g}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cdot e^{-ixt}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\cdot e^{-ixt}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-1}^{1}e^{-ixt}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\cos(-xt)+i\cdot\sin(-xt)\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-1}^{1}\cos(xt)-i\cdot\sin(xt)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-x}^{x}\left[\cos\left(x\cdot\frac{z}{x}\right)-i\cdot\sin\left(x\cdot\frac{z}{x}\right)\right]\cdot\frac{1}{x}\,dz\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\int_{-x}^{x}\cos(z)\,dz-i\cdot\int_{-x}^{x}\sin(z)\,dz\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{x}\cdot(2\cdot\sin(x)-i\cdot 0)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\end{aligned}$$

Nach der Faltungsregel gilt $(\widehat{g*g})(x)=\sqrt{2\pi}\cdot(\hat{g}(x)\cdot\hat{g}(x))=\sqrt{2\pi}\cdot\frac{4}{2\pi}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$. Nach dem Umkehrsatz der Fouriertransformation gilt dann:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(\widehat{g*g})(x)\cdot e^{ixt}\,dx=(g*g)(t)$$

Daraus folgt also insbesondere:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(\widehat{g*g})(x)\cdot e^{ix\cdot 0}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot 1\,dx=(g*g)(0)=2$$

Daraus folgt dann also $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2dx=2\cdot\frac{2\pi}{4}=\pi$, die Behauptung. Ende. □

Aus der Analysis

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Die Fibonacci-Zahlen werden rekursiv definiert durch* $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ *mit* $f_1=f_0=1$. *Man beweise dann, dass also die folgende Identität gilt:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{f_n\cdot f_{n+2}}=1$.

Lösung. Der Beweis geht so: $f_n+f_{n+1}=f_{n+2}\Rightarrow f_{n+1}=f_{n+2}-f_n\Rightarrow\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}=1-\frac{f_n}{f_{n+2}}\Rightarrow\frac{f_{n+1}}{f_n\cdot f_{n+2}}=\frac{1}{f_n}-\frac{1}{f_{n+2}}$. Also:

$$\frac{1}{f_n\cdot f_{n+2}}=\frac{1}{f_n\cdot f_{n+1}}-\frac{1}{f_{n+1}\cdot f_{n+2}}$$

Es folgt also:

$$\sum_{n=0}^{g}\frac{1}{f_n\cdot f_{n+2}}=\left(\frac{1}{f_0\cdot f_1}-\frac{1}{f_1\cdot f_2}\right)+\left(\frac{1}{f_1\cdot f_2}-\frac{1}{f_2\cdot f_3}\right)+\left(\frac{1}{f_2\cdot f_3}-\frac{1}{f_3\cdot f_4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{f_g\cdot f_{g+1}}-\frac{1}{f_{g+1}\cdot f_{g+2}}\right)$$

Das ist eine Teleskopsumme, und deswegen gilt:

$$\sum_{n=0}^{g} \frac{1}{f_n \cdot f_{n+2}} = \frac{1}{f_0 \cdot f_1} + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{g\text{-mal}} - \frac{1}{f_{g+1} \cdot f_{g+2}}$$

Weil $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$ gilt, folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_n \cdot f_{n+2}} = \frac{1}{f_0 \cdot f_1} - 0 = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$. Fertig! □

Aus der Gruppentheorie

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Sei p eine Primzahl und $G = (G, \cdot)$ eine abelsche aber nicht zyklische Gruppe der Ordnung p^2. Dann zeige:*

1. *Es gibt $u, v \in G$ mit*
   (a) $\mathrm{ord}(u) = \mathrm{ord}(v) = p$ und
   (b) jedes $a \in G$ lässt sich eindeutig schreiben als $a = u^n v^m$ mit $n, m \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$
2. $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

Lösung. Zu 1.: $|G| = p^2 \Rightarrow$ für alle $a \in G$: $\mathrm{ord}(a) \mid p^2 \Rightarrow \mathrm{ord}(a) = 1 \vee \mathrm{ord}(a) = p \vee \mathrm{ord}(a) = p^2$. Wäre $\mathrm{ord}(a) = p^2 = |G|$, dann wäre $G =< a >$, also G zyklisch, Widerspruch zur Voraussetzung. Gilt $\mathrm{ord}(a) = 1 \Rightarrow a = e$, davon gibt es in G nur ein Element. $p^2 - 1$ Elemente haben also die Ordnung p. Wegen $\mathrm{ord}(u) = p$ für eines aus den $p^2 - 1$ Elementen, die ungleich e sind, ist $H := \{u^0, \ldots, u^{p-1}\}$ eine zyklische Untergruppe von G. Sei $v \in G \setminus H$. Dann sei $K := \{v^0, \ldots, v^{p-1}\}$ (zyklisch). Nun: $u^i v^j = u^k u^l$. Es wird nun gezeigt, dass dann gilt $(i, j) = (k, l)$: Es gilt also $u^{i-k} v^{j-k} = e \Rightarrow u^{i-k} = v^{l-j} \in H \cap K =: W$. W ist eine Untergruppe von H und K. Also $|W| \mid p \Rightarrow |W| = 1 \vee |W| = p$. Wäre $|W| = p$, dann würde $W = H = K$ folgen, aber $e \neq v \in K$ ist in K enthalten, aber nicht in H. Deswegen kann $H = K$ nicht sein. Es ist also $W = \{e\}$. Also: $u^{i-k} = v^{l-j} = e$ mit $0 \leq |i-k|, |l-j| \leq p-1$. Folglich gilt: $i - k = 0 = l - j$, also gilt dann $(i, j) = (k, l)$. Das heißt, dass sich also jedes Element eindeutig schreiben lässt als $u^n v^m = a \in G$. Bei $u^i v^j$ gilt $i, j \in \{0, \ldots, p-1\}$, also p^2 Elemente in G, die alle verschieden sind.
Nun zu 2.: Definiere:

$$\varphi : G \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), a = u^n v^m \mapsto (n \bmod p, m \bmod p)$$

Wohldefiniertheit: Sei $u^n v^m$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ und $u^{n'} v^{m'}$ mit $n', m' \in \{0, \ldots, p-1\}$. Ist $n \bmod p = n'$ und $m \bmod p = m'$, dann ist auch $\varphi(u^n v^m) = \varphi(u^{n'} v^{m'})$. Homomorphismus: $\varphi(ab) = \varphi(u^n v^m u^{n'} v^{m'}) = \varphi(u^{n+n'} v^{m+m'}) = ((n+n') \bmod p, (m+m') \bmod p) = (n \bmod p, m \bmod p) + (n' \bmod p, m' \bmod p) = \varphi(u^n v^m) + \varphi(u^{n'} v^{m'}) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Injektivität: $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(u^n v^m) = \varphi(u^{n'} v^{m'}) \Rightarrow (n \bmod p, m \bmod p) = (n' \bmod p, m' \bmod p) \Rightarrow n \equiv n' \pmod p \wedge m \equiv m' \pmod p \Rightarrow a = b$. Surjektivität: Sei $\alpha = (x \bmod p, y \bmod p) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Dann ist $a = u^x v^y$ mit $\varphi(\alpha) = a$. Also: Ende. □

Aus der Zahlentheorie

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *In einem Korb sind n Eier. Wenn aus dem Korb Eier entfernt werden, und zwar $2, 3, 4, 5$ und 6 auf einmal, so bleiben $1, 2, 3, 4$ und 5 Eier übrig. Wenn aber immer 7 Eier auf einmal entfernt werden, dann bleibt kein Ei übrig. Welches ist die kleinste Anzahl von Eiern, die sich im Korb befinden kann?*

Lösung. Mathematisch betrachtet gilt zunächst:

$$\begin{aligned} n \bmod 2 = 1 &\Leftrightarrow (n+1) \bmod 2 = 0 \\ n \bmod 3 = 2 &\Leftrightarrow (n+1) \bmod 3 = 0 \\ n \bmod 4 = 3 &\Leftrightarrow (n+1) \bmod 4 = 0 \\ n \bmod 5 = 4 &\Leftrightarrow (n+1) \bmod 5 = 0 \\ n \bmod 6 = 5 &\Leftrightarrow (n+1) \bmod 6 = 0 \\ n \bmod 7 = 0 & \end{aligned}$$

Man sucht nun die kleinste Zahl, die von $2, 3, 4 = 2 \cdot 2, 5, 6 = 2 \cdot 3$ geteilt wird. $\mathrm{kgV}(2, 3, 4, 5, 6) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Nun gilt aber mit $60 = n + 1 \Leftrightarrow n = 59$ nicht $59 \bmod 7 = 0$. Das nächstgrößere Vielfache, dass immer noch von $2, 3, 4, 5, 6$ geteilt wird, ist $2 \cdot 60 = 120 = n + 1$. Nach Konstruktion wird $n + 1 = 120$ von $2, 3, 4, 5, 6$ geteilt und es gilt $n \bmod 7 = 119 \bmod 7 = 0$. Also lautet die Antwort: Im Korb befinden sich auf jeden Fall nicht weniger als 119 Eier. □

Aus der Algebra

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper mit* $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. *Man zeige:*
(a) Jede Körpererweiterung $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ *mit* $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$ *ist von der Form* $\mathbb{L} = \mathbb{K}(d)$ *mit* $d^2 \in \mathbb{K}$.
(b) Sei $\mathbb{M} : \mathbb{K}$ *eine Körpererweiterung und* $a \in M$ *mit* $a^2 \in \mathbb{K}$, *aber* $a \notin \mathbb{K}$. *Dann gilt* $[\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}] = 2$.

Lösung. Zu (a): Sei also $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung mit $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$. Sei $a \in \mathbb{L}$ mit $a \notin \mathbb{K}$. Dann ist $\mathbb{K}(a) \neq \mathbb{K}$. Andererseits ist $\mathbb{K}(a) \subseteq \mathbb{L}$, also folgt $[\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}] = 2$. Da $a \notin \mathbb{K}$ gilt, sind 1 und a linear unabhängig über $\mathbb{K}$. Andererseits ist a^2 linear abhängig von 1 und a, weil ja $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(a) = 2$ gilt. Es bleibt also $k, l \in \mathbb{K}$ mit $a^2 = k \cdot a + l$ oder $a^2 - k \cdot a - l = 0$. Es folgt (quadratische Ergänzung) $a^2 - k \cdot a + \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{4} - l = 0$. Diesen Schritt kann man jedoch nur durchführen, wenn man durch 4 teilen kann, wenn also $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ gilt. Für $d = a - \frac{k}{2}$ gilt dann also $d^2 = a^2 - k \cdot a + \frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{4} + l \in \mathbb{K}$. Außerdem gilt $d \in \mathbb{K}(a)$ und wegen $a = d + \frac{k}{2}$ auch $a \in \mathbb{K}(d)$. Damit ist $\mathbb{K}(d) = \mathbb{K}(a) = \mathbb{L}$. Zu (b): Sei $\mathbb{M} : \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung und $a \in M$ mit $a^2 \in \mathbb{K}$, aber $a \notin \mathbb{K}$. Sei $a^2 = k \in \mathbb{K}$, also $a^2 - k = 0$. Da $a \notin \mathbb{K}$ gilt, ist der Grad des Minimalpolynoms von a über $\mathbb{K}$ nicht 1. Da für $f = T^2 - k \in \mathbb{K}[T]$ aber $f(a) = 0$ gilt, ist der Grad des Minimalpolynoms von a über $\mathbb{K}$ gleich 2. Es folgt, dass $[\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}] = 2$ gilt, Beweis für n: Zunächst wird gezeigt, dass $\mathbb{K}(a) \simeq \mathbb{K}[T]/(g)$ gilt, wobei $(g) = \{x \in \mathbb{K}[T] : x(a) = 0\}$ ist. Man sieht leicht, dass $\phi : \mathbb{K}[T] \to \mathbb{K}(a)$ mit $\phi(p) = p(a)$ ein Ringhomomorphismus ist. Weiter gilt $\mathrm{kern}(\phi) = (g)$ und $\phi : \mathbb{K}[T] \to \mathrm{bild}(\phi) =: B \subseteq \mathbb{K}(a)$ ist surjektiv. Nach dem Homomorphiesatz gilt dann $\mathbb{K}[T]/(g) \simeq B$. Weil g irreduzibel ist in $\mathbb{K}[T]$, folgt, dass $\mathbb{K}[T]/(g)$ ein Körper ist, also auch B wegen $\mathbb{K}[T]/(g) \simeq B$. B ist also ein Körper, der $\mathbb{K}$ und a enthält. Wegen $B \subseteq \mathbb{K}(a)$ folgt $B = \mathbb{K}(a)$, denn $\mathbb{K}(a)$ ist der kleinste Körper, der $\mathbb{K}$ und a enthält. Also gilt tatsächlich $\mathbb{K}[T]/(g) \simeq \mathbb{K}(a)$. Man hat hier bewiesen, dass Elemente aus $\mathbb{K}(a)$ in der Form $p(a)$ mit $p \in \mathbb{K}[T]$ darstellbar sind. Sei nun m das Minimalpolynom vom Grad n. Man dividiert dann p durch m mit Rest und erhält $p = q \cdot g + r$ mit $q, r \in \mathbb{K}[T]$ und $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g) = n$. Also gilt: $p(a) = q(a) \cdot g(a) + r(a) = r(a)$, denn $g(a) = 0$. Sei $r = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot T^i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(0 \leq i \leq n-1)$, dann gilt $p(a) = r(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot a^i$. Damit folgt, dass $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}(a)$ ist. Nun zur Linearen Unabhängigkeit: Seien $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot a^i = 0$. Dann folgt $p(a) = 0$, wobei $p = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot T^i \in \mathbb{K}[T]$ gilt. Es gilt also $p \in (g) = \{x \in \mathbb{K}[T] : x(a) = 0\}$. Also gibt es ein $h \in \mathbb{K}[T]$ mit $p = g \cdot h$. Beweis: Es gilt $r = p - q \cdot g$ mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g) = n$ und also $r(a) = p(a) - q(a) \cdot g(a) = 0 + q(a) \cdot 0 = 0$, also $r \in (g)$, was nicht sein kann, weil Elemente aus (g) mindestens den Grad n haben, also muss $r = 0$ sein, folglich gilt $r = 0 = p - q \cdot g \Leftrightarrow p = q \cdot g$, also $g \mid p$. Angenommen, $h \neq 0$. Dann ist $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(g \cdot h) \geq \mathrm{grad}(g) = n$, ein Widerspruch. Also ist $h = p = 0$ und deswegen $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$. Man hat damit also eine Basis für $\mathbb{K}(a)$ aus n Elementen angegeben, folglich gilt $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(a) = n$, also $[\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}] = n$. Damit ist die Aufgabe gelöst! □

Aus der Kombinatorik

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Zwei Kandidaten* A *und* B *erhalten in einer Wahl* a *bzw.* b *Stimmen mit* $a > b$. *Auf wie viele Arten können die Stimmzettel arrangiert werden, so dass bei der Auszählung, eine Stimme nach der anderen,* A *stets mehr Stimmen als* B *hat. Es wird gezeigt, dass es dafür* $\frac{a-b}{a+b} \cdot \binom{a+b}{a}$ *Möglichkeiten gibt.*

Lösung. Der Trick ist eine Folge von Punkten (x, y) in ein Koordinatensystem zu zeichnen, wobei y die Anzahl der A-Stimmen minus die Anzahl der B-Stimmen ist, wenn x Stimmen ausgezählt sind. Die gesuchten Folgen sind dann also die Wege von $(0, 0)$ nach $(a + b, a - b)$, welche nach $(0, 0)$ nicht mehr die x-Achse berühren oder schneiden. Der erste Buchstabe muss eine A-Stimme sein, sonst hat man an der Stelle 1 mehr B-Stimmen als von A. Das heißt, dass man also alle Wege von $(1, 1)$ nach $(a + b, a - b)$ sucht, die die x-Achse nicht berühren oder schneiden. Weil man $a - 1$ A-Stimmen und b B-Stimmen in unterschiedlicher Reihenfolge für die Wege behandelt, gibt es also überhaupt $\binom{(a-1)+b}{a-1} = \binom{(a-1)+b}{b}$-viele Wege von $(1, 1)$ nach $(a + b, a - b)$. Von dieser Anzahl muss die Anzahl der Wege abgezogen werden, die die x-Achse berühren oder schneiden. Dazu betrachtet man die Wege von $(1, -1)$ nach $(a + b, a - b)$. Diese Wege müssen also mindestens einmal die x-Achse schneiden. Man spiegelt dann die Pfade zwischen den Punkten mit $y = 0$ auf der x-Achse an der x-Achse und lässt den Endpfad über der x-Achse unverändert. Man erhält also alle Pfade, die von $(1, 1)$ nach $(a + b, a - b)$ laufen und mindestens einmal die x-Achse berühren oder schneiden. Man hat damit eine Bijektion zwischen Wegen hergestellt. Da man nun von $(-1, 1)$ startet, braucht man genau ein A mehr, also $(1, 1)$, und ein B weniger, also $(1, -1)$. Die Anzahl der Pfade von $(1, 1)$ nach $(a + b, a - b)$, die die x-Achse schneiden oder berühren, welche gleich der Anzahl der Pfade ist, die von $(1, -1)$ nach $(a + b, a - b)$ laufen, ist also $\binom{(a-1+1)+(b-1)}{(a-1+1)} = \binom{a+b-1}{a}$. Also gibt es $\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \binom{a+b}{a}$ Möglichkeiten die Stimmen so anzuordnen, wie schon behauptet. □

Aus der Graphentheorie

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein (endlicher) Hypergraph H ist ein Paar (E, K), bestehend aus einer (endlichen) Grundmenge (der Menge der Ecken) E sowie einer Menge K von Teilmengen von E (der Menge) der Hyperkanten. Insbesondere fordert man damit, dass die Hyperkanten paarweise verschieden sind. Eine Ecke $e \in E$ und eine Hyperkante $k \in K$ heißen inzident, falls $e \in k$. Der Grad $d(e)$ einer Ecke e ist definiert als die Anzahl der Hyperkanten mit denen e inzident ist. H heißt r-regulär, falls für jede Ecke e gilt: $d(e) = r$. H ist p-uniform, falls jede Kante genau p Ecken enthält.*

(a) Man zeige, dass für jeden p-uniformen Hypergraph $H = (E, K)$ gilt: $\sum_{e \in E} d(e) = p \cdot |K|$.

(b) Man zeige oder widerlege die Existenz

(i) eines 5-regulären 3-uniformen Hypergraphen $H = (E, K)$ mit $|E| = 4$, $|K| = 6$, bzw.

(ii) eines 4-regulären 5-uniformen Hypergraphen $H = (E, K)$ mit $|E|$ gerade, $|K| = 5$, bzw.

(iii) eines 2-regulären 5-uniformen Hypergraphen $H = (E, K)$ mit $|K| \leq 4$, bzw.

(iv) eines 3-regulären 3-uniformen Hypergraphen $H = (E, K)$ mit $|E| = |K| = 7$.

Lösung. Zu (a): Sei $M := \{(e, k) \in E \times K : e \in k\}$. Dann gilt einerseits:

$$|M| = |\{(e, k) \in E \times K : e \in k\}| = \sum_{e \in E} |\{(e, k) \in \{e\} \times K : e \in k\}| = \sum_{e \in E} d(e)$$

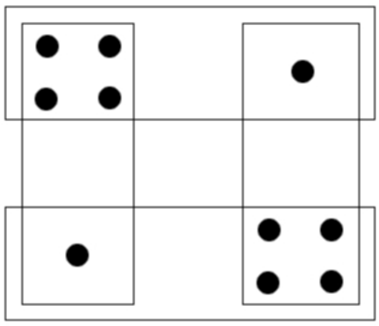
Andererseits gilt aber auch:

$$|M| = |\{(e, k) \in E \times K : e \in k\}| = \sum_{k \in K} |\{(e, k) \in E \times \{k\} : e \in k\}| = \sum_{k \in K} p = p \cdot |K|$$

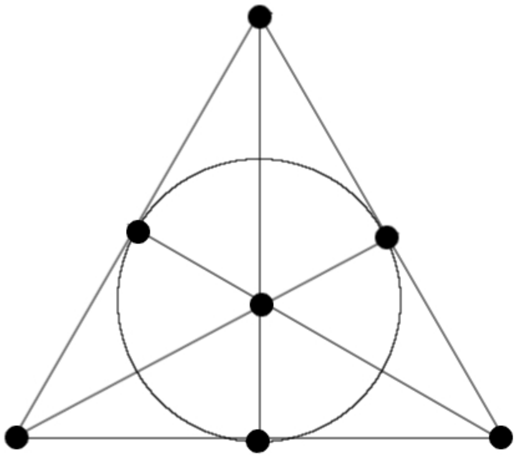
Insgesamt hat man also:

$$\sum_{e \in E} d(e) = |M| = p \cdot |K|$$

Nun zu (b): Ist ein Hypergraph r-regulär, dann gilt also $d(e) = r$, mit (a) also: $\sum_{e \in E} d(e) = r \cdot |E| = p \cdot |K|$. Wenn es einen Hypergraphen, wie in (i) gäbe, dann gelte $20 = 5 \cdot 4 = r \cdot |E| = p \cdot |K| = 3 \cdot 6 = 18$, also ein Widerspruch. (ii): $8i = 4 \cdot (2i) = r \cdot |E| = p \cdot |K| = 5 \cdot 5 = 25$ ist wieder ein Widerspruch, da 25 nicht durch 8 teilbar ist, also gibt es so einen Hypergraphen nicht, wie in (ii) beschrieben. Nun zu (*iii*): Sei zunächst $|K| \in \{1, 3\}$, dann würde folgen $2 \cdot |E| = r \cdot |E| = p \cdot |K| = 5 \cdot 1 = 5$ bzw. $2 \cdot |E| = r \cdot |E| = p \cdot |K| = 5 \cdot 3 = 15$. Also gibt es in diesem Fall keinen solchen Hypergraphen. Ist $|K| = 2$: $2 \cdot |E| = r \cdot |E| = p \cdot |K| = 5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow |E| = 5$. Da der Hypergraph 5-uniform ist, liegen alle 5 Ecken auf einer Kante; damit die andere Kante auch 5 Ecken hat, müssten die beiden Kanten gleich sein, was ein Widerspruch ist. Es bleibt also nur noch der Fall $|K| = 4$ mit $r = 2$ und $p = 5$. Der folgende Graph ist eine Lösung:



Dabei sind Ecken als Punkte und Hyperkanten als Rechtecke dargestellt. Jetzt (iv): So einen Graphen gibt es, die sogenannte Fano-Ebene, die folgendermaßen aussieht:



Also ist man hier fertig! □

Aus der Diskreten Mathematik

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Diagonale in einem konvexen n-Eck ist eine Verbindungsstrecke von zwei nicht benachbarten Ecken. Gegeben sei ein konvexes n-Eck, bei dem sich keine drei Diagonalen in einem gemeinsamen inneren Punkt schneiden. Wieviele Schnittpunkte von Diagonalen gibt es im Inneren des n-Ecks?*

Lösung. Es wird gezeigt, dass die Anzahl der Schnittpunkte von Diagonalen im Inneren des n-Ecks gleich $\binom{n}{4}$ ist. Betrachtet man einen Schnittpunkt, dann ist nach Voraussetzung dieser Schnittpunkt ein Schnittpunkt genau zweier Diagonalen, denn mindestens drei Diagonalen sind es ja nicht. Man betrachtet nun die Anfangs- und Endecken der beiden Diagonalen, die sich in einem Punkt schneiden. Man hat also vier Eckpunkte. Hat man einen anderen Schnittpunkt, dann ist mindestens einer der vier Eckpunkte verschieden. Jedem Schnittpunkt kann man nun auch immer vier Eckpunkte zuordnen. Hat man umgekehrt vier Ecken gegeben, dann kann man sich darunter auch immer genau einen Schnittpunkt vorstellen. Man hat also eine Bijektion zwischen Schnittpunkt und den zugehörigen vier Eckpunkten aus den n Ecken hergestellt. Es folgt also, dass es, wie schon behauptet, genau $\binom{n}{4}$ Schnittpunkte geben muss. □

Aus der Differentialgeometrie

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine geschlossene, reguläre, parametrisierte Kurve mit nicht verschwindender Krümmung. Man nehme an, dass die durch den Normalenvektor $n(s)$ in der Einheitssphäre S^2 beschriebene Kurve (die Normalenindikatrix) einfach ist. Dann wird S^2 durch $n(I)$ in zwei abgeschlossene Gebiete mit gleichem Flächeninhalt zerlegt.*

Lösung. Man nimmt an, dass α nach der Bogenlänge s parametrisiert ist. $\bar{s}$ bezeichne die Bogenlänge der Kurve $n = n(s)$ auf S^2. Die geodätische Krümmung $\bar{\kappa}_g$ von $n(s)$ ist: $\bar{\kappa}_g = \langle \ddot{n}, n \times \dot{n} \rangle$, wobei die Punkte für Ableitungen bezüglich $\bar{s}$ stehen. Nach den Frenet'schen Formeln aus der Kurventheorie gilt $\frac{d}{ds} n = -kt - \tau b$, wobei t der Einheitstangentenvektor, n der Normalenvektor, b

der Binormalenvektor, k die Krümmung und τ die Torsion der Kurve α ist. Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned}
\dot{n} &= \frac{d}{d\bar{s}} n(s(\bar{s})) = \frac{dn}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}} = (-kt - \tau b) \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} \\
\ddot{n} &= (-kt - \tau b) \cdot \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} + \left(-k' \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot t - k \cdot t' \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} - \tau' \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot b - \tau \cdot b' \cdot \frac{ds}{d\bar{s}}\right) \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} \\
&= (-kt - \tau b) \cdot \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} + (-k't - \tau' b - kt' - \tau b') \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 \\
&= (-kt - \tau b) \cdot \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} + (-k't - \tau' b) \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 - (kt' + \tau b') \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 \\
&= (-kt - \tau b) \cdot \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} + (-k't - \tau' b) \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 - (k \cdot kn + \tau \cdot \tau n) \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 \\
&= (-kt - \tau b) \cdot \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} + (-k't - \tau' b) \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 - (k^2 + \tau^2) \cdot n \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2
\end{aligned}$$

Denn es gilt $t' = kn$ und $b' = \tau n$. Weiter gilt noch:

$$\bar{s}(s) = \int_0^s \left|\frac{d}{dx} n(x)\right| dx = \int_0^s |(-kt - \tau b)(x)|\, dx \Rightarrow \frac{d}{ds}\bar{s}(s) = |(-kt - \tau b)(s)| = |(kt + \tau b)(s)| = \sqrt{k^2 + \tau^2} = \frac{d\bar{s}}{ds}$$

Das gilt, weil t und b die Länge 1 haben und senkrecht zueinander stehen. Es folgt: $\dfrac{ds}{d\bar{s}} = \dfrac{1}{\sqrt{k^2 + \tau^2}}$, also:

$$\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = \frac{1}{k^2 + \tau^2}$$

Jetzt kann man die geodätische Krümmung ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_g &= \langle n \times \dot{n}, \ddot{n} \rangle = \left\langle n \times \left[(-kt - \tau b) \cdot \frac{ds}{d\bar{s}}\right], \ddot{n} \right\rangle = \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \langle -k \cdot (n \times t) - \tau \cdot (n \times b), \ddot{n} \rangle = \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \langle -k \cdot (-b) - \tau \cdot t, \ddot{n} \rangle \\
&= \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \langle kb - \tau t, \ddot{n} \rangle = \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \left\langle kb - \tau t, (-kt - \tau b) \cdot \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} + (-k't - \tau' b) \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 - n \right\rangle \\
&= \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \left(\frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} \cdot \langle kb - \tau t, -kt - \tau b \rangle + \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 \cdot \langle kb - \tau t, -k't - \tau' b \rangle - \langle kb - \tau t, n \rangle \right) \\
&= \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \left(\frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} \cdot 0 + \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 \cdot \langle kb - \tau t, -k't - \tau' b \rangle - 0 \right) = \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3 \cdot \langle kb - \tau t, -k't - \tau' b \rangle \\
&= \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3 \cdot (\langle kb, -k't \rangle + \langle kb, -\tau' b \rangle + \langle -\tau t, -k't \rangle + \langle -\tau t, -\tau' b \rangle) = \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3 \cdot (0 + \langle kb, -\tau' b \rangle + \langle -\tau t, -k't \rangle + 0) \\
&= \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3 \cdot (-k\tau' \cdot \langle b, b \rangle + \tau k' \cdot \langle t, t \rangle) = \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3 \cdot (-k\tau' \cdot 1 + \tau k' \cdot 1) = \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3 \cdot (-k\tau' + k'\tau) \\
&= -\frac{\tau' k - k'\tau}{k^2 + \tau^2} \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} = -\frac{d}{ds} \operatorname{atan}\left(\frac{\tau(s)}{k(s)}\right) \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} = -\frac{d}{d\bar{s}} \operatorname{atan}\left(\frac{\tau}{k}(s(\bar{s}))\right)
\end{aligned}$$

Dabei gilt $n \times t = -b$ und $n \times b = t$, weil t, n, b das Frenet'sche Dreibein bilden. Aus dem gleichen Grund gilt $\langle kb - \tau t, -kt - \tau b \rangle = 0$, $\langle kb - \tau t, n \rangle = 0$, $\langle kb, -k't \rangle = 0$ und $\langle -\tau t, -\tau' b \rangle = 0$. Man wendet nun das Gauß-Bonnet-Theorem auf eines der von $n(I)$ berandeten abgeschlossenen Gebiete R an und benutzt die Tatsache, dass $K \equiv 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
2\pi &= \int_R K\, dA + \int_{\partial R} \bar{\kappa}_g(\bar{s})\, d\bar{s} \\
&= \int_R 1\, dA - \int_0^{l_{\partial R}} \frac{d}{d\bar{s}} \operatorname{atan}\left(\frac{\tau}{k}(\bar{s})\right)\, d\bar{s} \\
&= \int_R dA - \left[\operatorname{atan}\left(\frac{\tau}{k}(\bar{s})\right)\right]_{\bar{s}=0}^{\bar{s}=l_{\partial R}} \\
&= \text{Flächeninhalt von } R - 0 \\
&= \text{Flächeninhalt von } R
\end{aligned}$$

Es gilt nämlich $\left[\operatorname{atan}\left(\frac{\tau}{k}(\bar{s})\right)\right]_{\bar{s}=0}^{\bar{s}=l_{\partial R}} = 0$, weil die Kurve ∂R, parametrisiert nach Bogenlänge $\bar{s}$, geschlossen ist und deswegen $\frac{\tau}{k}(0) = \frac{\tau}{k}(l_{\partial R})$ gilt. Wichtig dafür, dass $\int_{\partial R} \bar{\kappa}_g\, d\bar{s} = 0$ ist, war hier, dass in $-\operatorname{atan}\left(\frac{\tau}{k}(\bar{s})\right)$ gilt: $k(\bar{s}) \neq 0$ für alle $\bar{s}$. Da der Flächeninhalt von S^2 gleich 4π ist, folgt also die Behauptung, dass die geschlossene Kurve $n(\bar{s})$ die Oberfläche S^2 in zwei gleichgroße Flächen zerlegt. Man ist hier also fertig! $\square$

Die schwere IQ-Test-Aufgabe

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Wenn* $DGJ + JAE + BHF = DDAB$ *und* $\dfrac{F \cdot C}{J} = GA$*, wieviel ist dann* $\dfrac{A}{G}$*?*

Lösung. Es gilt erstmal $D \neq 0$, weil sonst in DGJ die 0 führende Ziffer wäre. Wegen $999 + 999 + 999 = 2997$ gilt also $D \leq 2$. Angenommen, $D = 2$, dann gilt:

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & G & J \\ + & & J & A & E \\ + & & B & H & F \\ & & {\scriptstyle 0,1,2} & & \\ \hline & 2 & 2 & A & B \end{array}$$

Es gilt $9+8+7 = 24$, also ist der Übertrag der Summe $J+E+F$ höchstens 2. Der Übertrag von $(G+A+H)+2, (G+A+H)+1, (G+A+H)+0$ ist ebenfalls höchstens 2, denn $(9+8+7)+2 = 26$. Also ist der Übertrag bei $2+J+B$ nun $0, 1, 2$. $(2+J+B)+2$ ist höchstens $(2+9+8)+2 \leq 21$, also kann $(2+J+B)+2, (2+J+B)+1, (2+J+B)+0$ nicht gleich 22 sein. Es folgt, dass $D = 1$ gilt. Es wird nun gezeigt, dass $A \neq 0$ ist, sei also $A = 0$: Es gilt $J \cdot GA = F \cdot C \leq 9 \cdot 8 = 72$. Es gilt $J \neq 0$, andernfalls wäre in JAE die 0 führende Ziffer. Es gilt auch $J \neq 1$, weil $D = 1$. Also gilt $J \geq 2$. Weiter: $G \neq 0$, sonst wäre in GA die 0 führende Ziffer. Auch: $G \neq 1$, weil $D = 1$. Die Kandidaten für $GA = G0$ sind also: $G0 = 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$. Wegen $J \cdot G0 = F \cdot C \leq 9 \cdot 8 = 72$ und $J \geq 2$ kann $40, 50, 60, 70, 80, 90$ für $G0$ nicht sein. Es bleibt $20, 30$. Es muss gelten $J \leq 3$, denn wäre $J \geq 4$, dann gelte für $G0 = 20, 30$ nicht $J \cdot G0 \leq 72$. Also ist $J = 2, 3$. Ist $J = 2$, dann muss $G = 3$ sein, also $J \cdot G0 = 2 \cdot 30 = 60 = F \cdot C$, aber $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ kann man nicht als Produkt zweier Ziffern darstellen. Ist $J = 3$, dann muss $G = 2$ sein, also $J \cdot G0 = 3 \cdot 20 = 60 = F \cdot C$, und wieder kann man $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ nicht als Produkt zweier Ziffern darstellen. Es muss also $A \neq 0$ gelten, auch: $A \neq 1$. Man nimmt nun an, dass $G \mid A$ gilt. Es gilt $A = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Da muss man die Primzahlen $p = 2, 3, 5, 7$ streichen, weil sonst aus $G \mid A = p$ dann $G = A$ oder $G = 1$ folgen würde, aber: $G \neq 1$, und A und G müssen verschieden sein. Also: $A = 4, 6, 8, 9$. Aus $G \mid A$ folgt: Ist $A = 4$, dann muss $G = 2$ sein. Ist $A = 6$, dann ist $G = 2, 3$. Ist $A = 8$, dann muss $G = 2, 4$ sein. Ist $A = 9$, dann muss $G = 3$ sein. Die Kandidaten von GA sind also: $GA = 24, 26, 36, 28, 48, 39 = 24, 26, 28, 36, 39, 48$. Es muss wieder $0, 1 \neq J \leq 3$ gelten, denn sonst gilt wegen $J \geq 4$ nicht $J \cdot GA = F \cdot C \leq 9 \cdot 8 = 72$. Ist $J = 2$, dann gilt $GA = 36, 39, 48$. Man kann 39 und 48 streichen, weil $J \cdot GA = 2 \cdot 39, 2 \cdot 48 > 72$. Es bleibt $GA = 36$, also $J \cdot GA = 2 \cdot 36 = 72 = 9 \cdot 8 = F \cdot C$, also $F = 8, 9$. Wegen $J = 2$, $GA = 36$ $(G = 3,\ A = 6)$ und $D = 1$ gilt dann das Folgende:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 3 & 2 \\ + & & 2 & 6 & E \\ + & & B & H & F \\ & & & {\scriptstyle 1} & \\ \hline & 1 & 1 & 6 & B \end{array}$$

Der Übertrag von $2 + E + F$ ist wegen $F = 8, 9$ mindestens 1. Wegen $2 + 9 + 8 = 19 < 20$ ist er auch höchstens 1, also insgesamt gleich 1. Wegen $(3 + 6 + 9) + 1 = 19 < 26$ und $(3 + 6 + H) + 1 > 6$ muss also gelten: $(3 + 6 + H) + 1 = 16 \Rightarrow H = 6$, Widerspruch, denn es gilt schon $A = 6$. Es muss also $J = 3$ gelten, also $GA = 24, 26, 28, 48$. Man kann also $26, 28, 48$ streichen, weil $J \cdot GA = 3 \cdot 26, 3 \cdot 28, 3 \cdot 48 > 72$ ist. Es bleibt also $GA = 24$, also $72 = 3 \cdot 24 = J \cdot GA = F \cdot C = 9 \cdot 8$ $(\Rightarrow F = 8, 9)$. Also:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 3 \\ + & & 3 & 4 & E \\ + & & B & H & F \\ & & {\scriptstyle 1} & & \\ \hline & 1 & 1 & 4 & B \end{array}$$

Der Übertrag von $3+E+F$ ist wegen $3+9+8 \leq 20$ höchstens 2. Es gilt $2+4+H > 4$ und $(2+4+H)+2 \leq (2+4+9)+2 = 17 < 24$, also ist der Übertrag von $2 + 4 + H + 0, 1, 2$ gleich 1. Es folgt $B = 6$, also: Wegen $3 + E + F \leq 3 + 8 + 9 = 20 < 2B = 26$ und $3 + E + F > 6$ (wegen $F = 8, 9$) folgt, dass der Übertrag von $3 + E + F$ gleich 1 ist, also:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 3 \\ + & & 3 & 4 & E \\ + & & 6 & H & F \\ & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Es folgt dann $H = 7$. Es bleiben die Ziffern $5, 8, 9$ übrig. Es muss gelten: $3 + E + F = 16 \Leftrightarrow E + F = 13$, also $E, F = 5, 8$. Weil

$F = 8,9$ gilt, folgt $E = 5$ und $F = 8$. Also hat man:

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & 2 & 3 \\ + & & 3 & 4 & 5 \\ + & & 6 & 7 & 8 \\ & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Die Lösung lautet also: $\underline{A = 4}, \underline{B = 6}, C = 9, \underline{D = 1}, \underline{E = 5}, \underline{F = 8}, \underline{G = 2}, \underline{H = 7}, I = 0, \underline{J = 3}$ und $\frac{A}{G} = \frac{4}{2} = 2 = G$, denn $I = 0$, weil $C \neq 0$, denn: $\frac{F \cdot C}{J} = GA$. Wäre also $C = 0$, dann folgte $GA = 0$, Widerspruch. Weil $C \neq$ ist, folgt $C = 9$. Es wird nun noch gezeigt, dass GA mit $G \nmid A$ keine Lösung erlauben. Es gilt $A, G \neq 0, 1$. Die Kandidaten von GA seien in einer Matrix (m_{ij}) mit $2 \leq i \leq 9$ und $2 \leq j \leq 9$ sowie $m_{ij} = ij$, wobei $m_{ii} = \times$ $(2 \leq i \leq 9)$ sei, weil die Ziffern verschieden sein müssen, aufgelistet. Wegen $J \geq 2$ und $J \cdot GA \leq 72$ kann man in der Matrix (m_{ij}) die Zeilen für $i = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ streichen, und es bleiben die folgenden Kandidaten:

$$\begin{pmatrix} \times & 23 & \cancel{24} & 25 & \cancel{26} & 27 & \cancel{28} & 29 \\ 32 & \times & 34 & 35 & \cancel{36} & 37 & 38 & \cancel{39} \end{pmatrix}$$

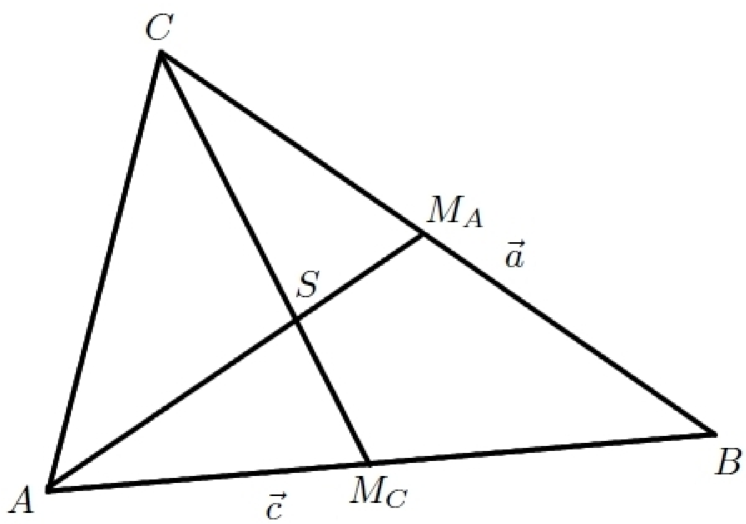
Dabei sind die Zahlen in der Matrix gestrichen, weil das GA sind mit $G \mid A$. Es bleiben also die Kandidaten: $GA = 23, 25, 27, 29, 32, 34, 35, 37, 38$. Es gilt wieder $J \leq 3$, denn sonst $(J \geq 4)$ gelte für die Kandidaten von GA nicht $J \cdot GA \leq 72$. Also gilt $J = 2, 3$, also kann man $23, 32$ streichen. Es bleiben $GA = 25, 27, 29, 34, 35, 37, 38$, Weil $J \geq 2$ und $J \cdot GA \leq 72$ gelten, kann man auch $37, 38$ $(2 \cdot 37 = 74 > 72$ und $2 \cdot 38 = 76 > 72)$ streichen. Es bleiben $GA = 25, 27, 29, 34, 35$. Ist $J = 3$, dann gilt für alle Kandidaten von GA nun $72 \geq J \cdot GA \geq 3 \cdot 25 = 75$, also ein Widerspruch. Es muss also $J = 2$ gelten, dann bleiben die Kandidaten $GA = 34, 35$ (Ziffer 2 ist schon an J vergeben). Es gilt $J \cdot GA = F \cdot C$ $(J = 2)$. Es gilt dann $J \cdot GA = 2 \cdot 34 = 68$ oder $J \cdot GA = 2 \cdot 35 = 70$, aber $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$ und $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ lassen sich nicht als Produkt zweier Ziffern darstellen. Es folgt also, dass die Lösung des Rechenrätels hier eindeutig ist. □

Die Seitenhalbierenden im Dreieck

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man beweise, dass das Teilungsverhältnis der Seitenhalbierenden im Dreieck* $1 : 2$ *ist.*

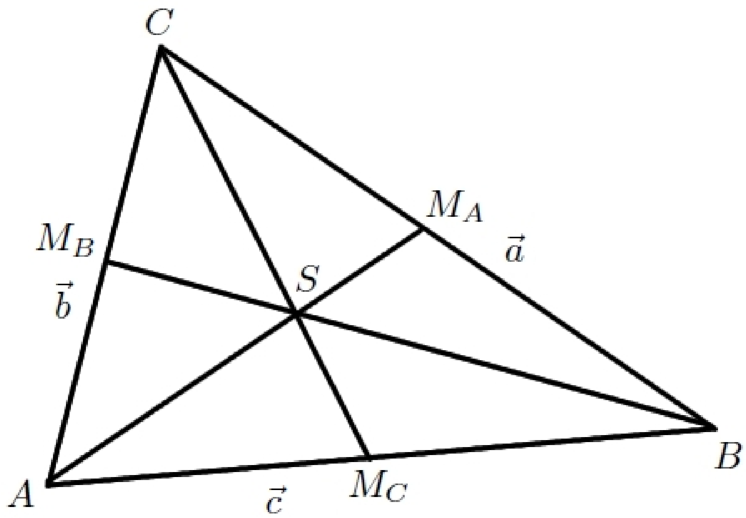
Lösung. Zuerst kommt ein Bild:



Es gilt dann: $\overrightarrow{AM_C} + \overrightarrow{M_CS} = \overrightarrow{AS}$, also: $\overrightarrow{AM_C} + \overrightarrow{M_CS} - \overrightarrow{AS} = \vec{0}$, also: $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{M_CC} - r \cdot \overrightarrow{AM_A} = \vec{0}$. Nun gilt: $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{M_CC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{c} + \vec{a}$ und $\overrightarrow{AM_A} = \vec{c} + \frac{1}{2} \cdot \vec{a}$. Also gilt:

$$\vec{0} = \frac{1}{2} \cdot \vec{c} + s \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{c} + \vec{a}\right) - r \cdot \left(\vec{c} + \frac{1}{2} \cdot \vec{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \vec{c} + s \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{c} + s \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{c} - r \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{a} = \left(\frac{1}{2} + s \cdot \frac{1}{2} - r\right) \cdot \vec{c} + \left(s - r \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \vec{a}$$

Da die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{a}$ linear unabhängig sind, weil sie ein Dreieck aufspannen, folgt also $\frac{1}{2}+s\cdot\frac{1}{2}-r=0$ und $s-r\cdot\frac{1}{2}=0$. Folglich gilt $s=r\cdot\frac{1}{2}$, also $\frac{1}{2}+\left(r\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}-r=0\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\cdot r=0\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\cdot r\Rightarrow 1=\frac{3}{2}\cdot r\Rightarrow r=\frac{2}{3}$, also $s=r\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. Man hat also: $r=\frac{2}{3}$ und $s=\frac{1}{3}$. Damit ist also gezeigt, dass die Seitenhalbierenden $\overrightarrow{AM_A}$ und $\overrightarrow{M_CC}$ durch den Punkt S im Verhältnis 1 : 2 geteilt werden. Folgendes Bild:



Es gilt im Bild: $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$. Nun wird jetzt gezeigt, dass auch die Seitenhalbierende $\overrightarrow{BM_B}$ so geteilt wird: Es gilt: $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM_A}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\cdot\left(\vec{c}+\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\right)-\vec{c}=\frac{2}{3}\cdot\vec{c}+\frac{1}{3}\cdot\vec{a}-\vec{c}=\frac{1}{3}\cdot\vec{a}-\frac{1}{3}\cdot\vec{c}$, und es gilt: $\overrightarrow{BM_B}=\overrightarrow{AM_B}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\cdot\vec{b}-\vec{c}=-\frac{1}{2}\cdot(-\vec{c}-\vec{a})-\vec{c}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{c}+\vec{a})-\vec{c}=\frac{1}{2}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\cdot\vec{a}-\vec{c}=\frac{1}{2}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\cdot\vec{c}$, denn es gilt $\vec{c}+\vec{a}=-\vec{b}$. Es folgt wegen $\overrightarrow{BS}=\frac{1}{3}\cdot\vec{a}-\frac{1}{3}\cdot\vec{c}$ und $\overrightarrow{BM_B}=\frac{1}{2}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\cdot\vec{c}$ also $\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BM_B}=\overrightarrow{BS}$. Daraus folgen zwei Dinge: 1.: Weil $\overrightarrow{BM_B}$ und $\overrightarrow{BS}$ kolinear sind, folgt, dass auch die Seitenhalbierende $\overrightarrow{BM_B}$ den Punkt S schneidet, 2.: Das Teilungsverhältnis der Seitenhalbierenden $\overrightarrow{BM_B}$ durch den Punkt S ist 1 : 2. Damit ist der Beweis also vollständig erbracht. □

Die fixpunktfreien Permutationen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man zeige, dass die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen einer n-elementigen Menge gegeben ist durch:*

$$d_n=n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Lösung. Es bezeichne $A_i:=\{\pi\in S_n:\pi(i)=i\}$ die Menge aller Permutationen, die einen Fixpunkt an der Stelle i haben. Dann hat die Menge der fixpunktfreien Permutationen die Darstellung $D_n=S_n\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_n)$. Dann gilt also: $d_n=n!-|A_1\cup\ldots\cup A_n|$. Es gilt die Siebformel von Sylvester, die man ganz einfach mit vollständiger Induktion beweist:

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|$$

Es gilt $|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|=(n-k)!$, weil k Stellen fix sind. $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl aus n Stellen k Fixpunkte auszuwählen, also gilt: $\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|=\binom{n}{k}\cdot(n-k)!=\frac{n!}{k!}$. Daraus folgt also:

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{n!}{k!}$$

Es folgt also die Lösung dieser Aufgabe:

$$d_n = n! - |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{n!}{k!} = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Das war es auch schon! $\square$

Die explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Es soll bewiesen werden, dass die n-te Fibonacci-Zahl gegeben ist durch $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right]$, wobei dort $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der goldene Schnitt sei.*

Lösung. Sei der Endomorphismus $a : V \to V$ mit $V = \mathbb{R}^2$ und $a(v) = A \cdot v$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Zur Bestimmung der Eigenvektoren von a berechnet man zunächst die Eigenwerte von a. Das charakteristische Polynom ist $\chi_a(\lambda) = \det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(a) - \lambda \cdot E_2\right) = \det(A - \lambda \cdot E_2) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$, wobei $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^2$ sei, also $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(a) = A$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte von a: $\chi_a(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Sei $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dann sind die Eigenwerte von a also $\lambda_1 = \varphi$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{\varphi}$. Weil $\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \lambda_1)\cdot(\lambda - \lambda_2)$ gilt, ist a diagonalisierbar. Es werden nun die Eigenvektoren v_1 und v_2 zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 bestimmt. Es muss gelten: $a(v_1) = A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$ und $a(v_2) = A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2$. Es ergibt sich daraus: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi \end{pmatrix}$. Weil die Eigenwerte λ_1 und λ_2 verschieden sind, folgt, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind. Die Eigenvektoren v_1 und v_2 bilden eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $V = \mathbb{R}^2$, denn fügt man zu v_1, v_2 einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{v_1, v_2\}$ hinzu, dann gilt $2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 < |\{v_1, v_2, v\}| = 3$, also folgt aus einer Folgerung aus dem Austauschsatz, dass v_1, v_2, v linear abhängig sind. Also bildet (v_1, v_2) eine Basis von $V = \mathbb{R}^2$. Sei also $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$, dann gilt $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(a) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Weiter gilt aus der Linearen Algebra: $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(a) = T^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(a) \cdot T = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot T$ mit $T := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$. Wegen $T \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(a) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(a) \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(a) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(a) = E_2$ folgt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(a) = T^{-1}$. Also folgt: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix}^{-1}$. Also gilt $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -\varphi & -1 \\ -\frac{1}{\varphi} & 1 \end{pmatrix}$. Es folgt also $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\varphi^{n+1} + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} & -\varphi^n + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \\ -\varphi^n + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n & -\varphi^{n-1} + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$, also gilt dann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}\right] \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right] \end{pmatrix}$$

Die Fibonacci-Zahlen werden rekursiv definiert: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ mit $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ für alle $n \geq 1$. Es wird nun bewiesen, dass gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$. Beweis durch vollständige Induktion: *I.A.*: Für $n = 0$ gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$. Für $n = 1$ gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$. Der Induktionsanfang ist also O.K.! *I.V.*: Gelte die Behauptung für n. *I.S.*: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \underset{I.V.}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$. Also ist der Beweis vollbracht. Also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}\right] \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right] \end{pmatrix}$$

Es folgt also $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right]$, die Behauptung. $\square$

Die Raucher in einem Zimmer

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *In einem Zimmer sitzen 4 Raucher und vergnügen sich beim Skatspiel. Das Zimmer enthalte V Liter Luft. Die Raucher stoßen je Minute Z Liter Zigarettenqualm aus, der 4 Volumenprozent Kohlenmonoxid (CO) enthalte und sich sofort mit der Zimmerluft gleichmäßig vermischt. Ein Ventilator ersetzt pro Minute Z Liter der Zimmerluft durch Frischluft.*

1. *Wie hoch ist t Minuten nach Beginn des Raucherabends die CO-Konzentration im Raum?*
2. *Nach welcher Zeit T wird eine CO-Konzentration von $0,012$ Prozent erreicht? Wird ein Mensch zu lange diser Konzentration ausgesetzt, treten Schädigungen ein.*
3. *Sei $V = 40m^3 = 40000l$ und $Z = 2\frac{l}{min}$ - berechne T!*

Lösung. Bezeichne $y(t)$ die Volumenmenge an Kohlenmonoxid in der Zimmerluft. Pro Minute gelangen von den Rauchern $c \cdot Z$ Liter Kohlenmonoxid in das Zimmer. Durch den Ventilator fließen im gleichen Zeitraum Z Liter Luft mit der CO-Konzentration $\frac{y(t)}{V}$ ab. Die Funktion $y(t)$ beschreibt einen Ausgleichsvorgang erster Ordnung und genügt nämlich der folgenden Differentialgleichung:

$$y'(t) = c \cdot Z - Z \cdot \frac{y(t)}{V}, \text{ also: } y'(t) + \frac{Z}{V} \cdot y(t) = c \cdot Z$$

Als Anfangsbedingung befinde sich im Zimmer reine Luft: $y(0) = 0$. Zuerst löst man die homogene Differentialgleichung $y_h'(t) + \frac{Z}{V} \cdot y_h(t) = 0$, also $y_h'(t) = -\frac{Z}{V} \cdot y_h(t)$, also $\frac{y_h'(t)}{y_h(t)} = -\frac{Z}{V}$. Integriert man auf beiden Seiten, dann erhält man $\ln(y(t)) = -\frac{Z}{V} \cdot t + C$, also $y(t) = A \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t}$ mit $A := e^C$. Die partikuläre Lösung erhält man durch Variation der Konstanten: Setze $y_p(t) = A(t) \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t}$, dann gilt $y_p'(t) + \frac{Z}{V} \cdot y_p(t) = c \cdot Z$, also $\left(A'(t) \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t} + A(t) \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t} \cdot \left(-\frac{Z}{V}\right)\right) + \frac{Z}{V} \cdot A(t) \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t}$, also $A'(t) \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t} = c \cdot Z$, also $A'(t) = c \cdot Z \cdot e^{\frac{Z}{V} \cdot t}$. Integrieren auf beiden Seiten liefert $A(t) = c \cdot V \cdot e^{\frac{Z}{V} \cdot t} + C'$. Man hat also $y_p(t) = \left(c \cdot V \cdot e^{\frac{Z}{V} \cdot t} + C'\right) \cdot \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t} = c \cdot V + C' \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t}$. Die allgemeine Lösung also lautet: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t} + \left(c \cdot V + C' \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t}\right) = (A + C') \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t} + c \cdot V$. Wegen $y(0) = 0$ folgt $(A + C') \cdot 1 + c \cdot V = 0$, also $A + C' = -c \cdot V$, und daraus folgt also, dass die allgemeine Lösung folgendermaßen lautet:

$$y(t) = -c \cdot V \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t} + c \cdot V = c \cdot V - c \cdot V \cdot e^{-\frac{Z}{V} \cdot t} = c \cdot V \cdot \left(1 - e^{-\frac{Z}{V} \cdot t}\right)$$

Gesucht war die Konzentration an CO in der Zimmerluft. Man teilt beide Seiten der Gleichung durch das Volumen V und erhält: $C_{CO}(t) = \frac{y(t)}{V} = c \cdot \left(1 - e^{-\frac{Z}{V} \cdot t}\right)$. Offensichtlich konvergiert $C_{CO}(t)$ für $t \to \infty$ gegen c. Sei nun also $40m^3 = 40000l$, $Z = 2\frac{l}{min}$ und $c = 0,04$, denn 4 Volumenprozent von Z Litern Zigarettenqualm pro Minute ist CO, Kohlenmonoxid. Es wird jetzt die Zeit T bestimmt, nach der eine Konzentration von $0,012$ Prozent an Kohlenmonoxid erreicht ist: $C_{CO}(T) = 0,00012$, also $0,00012 = 0,04 \cdot \left(1 - e^{-\frac{2}{40000} \cdot T}\right)$, also $\frac{0,00012}{0,04} = 1 - e^{-\frac{1}{20000} \cdot T}$, also $e^{-\frac{1}{20000} \cdot T} = 1 - 0,003$, also $-\frac{1}{20000} \cdot T = \ln(0,997)$, also $T = -20000 \cdot \ln(0.997) \approx 60,0901840[min]$. Nach ungefähr einer Stunde ist die schädliche Konzentration von $0,012$ Prozent im Zimmer erreicht! Das war es! $\square$

Der Schäferhund und seine Schafherde

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Der Schäferhund Boy befindet sich am Ende einer $1km$ langen Schafherde, die sich mit konstanter Geschwindigkeit vorwärtsbewegt. Zur Kontrolle läuft er nun - mit einer größeren konstanten Geschwindigkeit als die Herde - vom Ende bis zur Spitze der Herde und wieder an seinen Platz am Ende der Herde zurück. Als er wieder hinten ankommt, ist die Schafherde genau einen Kilometer weiter gewandert. Wie weit ist Boy gelaufen?*

Lösung. Sei v_S die konstante Geschwindigkeit des Schäferhundes, und v_H die der Schafherde. Der Schäferhund braucht für seinen Weg die Zeit $t_g = t_1 + t_2 = \frac{1}{v_S + v_H} + \frac{1}{v_S - v_H}$. Also hat die Herde die Geschindigkeit $v_H = \frac{1}{t_g}$. Also gilt: $t_g = \frac{1}{v_S + \frac{1}{t_g}} + \frac{1}{v_S - \frac{1}{t_g}}$, also $t_g = \frac{t_g}{v_S \cdot t_g + 1} + \frac{t_g}{v_S \cdot t_g - 1}$. Nun ist $v_S \cdot t_g =: s_S$ gerade der Weg, den der Hund zurücklegt. Es gilt also: $1 = \frac{1}{s_S + 1} + \frac{1}{s_S - 1}$. Sei $x := s_S$, dann gilt also $1 = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$, also $(x+1)\cdot(x-1) = (x-1)+(x+1)$, also $x^2 - 1 = 2x$, also $x^2 - 2x - 1 = 0$, also $x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - (-1)} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$. Weil $1 - \sqrt{2}$ negativ ist, ist die Lösung also $s_S = x = (1+\sqrt{2})[km]$. Das war es! □

Die Luftwiderstandsbeiwert-Bestimmung

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Die Bewegungsgleichung eines gleichförmig beschleunigten Kraftfahrzeugs lautet unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes bei Vernachlässigung aller übrigen Kräfte:*

$$m \cdot v'(t) = m \cdot a - \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v(t)^2$$

Dabei soll gelten:

m	$=$	800	kg	*Fahrzeugmasse*
v			$\frac{m}{s}$	*Geschwindigkeit*
a	$=$	1	$\frac{m}{s^2}$	*Beschleunigung*
c_W	$=$	*?*		*Luftwiderstandsbeiwert (dimensionslos)*
ρ	$=$	$1,25$	$\frac{kg}{m^3}$	*Luftdichte*
A	$=$	2	m^2	*angeströmte Fläche*

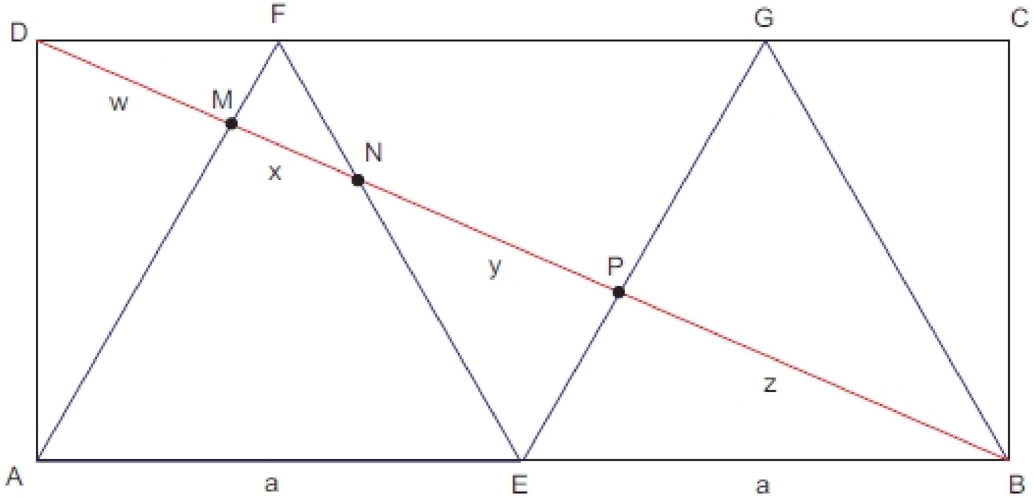
Sei die erzielbare Höchstgeschwindigkeit $v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = 144\frac{km}{h} = 40\frac{m}{s}$. *Berechne* c_W*!*

Lösung. Es gilt also: $v'(t) = a - \frac{\frac{1}{2}\cdot c_W \cdot \rho \cdot A}{m} \cdot v(t)^2$. Setze $\lambda := \frac{\frac{1}{2}\cdot c_W \cdot \rho \cdot A}{m}$, dann gilt also $v'(t) = a - \lambda \cdot v(t)^2$, also $\frac{v'(t)}{a - \lambda \cdot v(t)^2} = 1$, also $\int \frac{v'(t)}{a - \lambda\cdot v(t)^2}\,dt = \int 1\,dt$, also $-\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{\lambda}\cdot v(t) - \sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}\cdot v(t) + \sqrt{a}}\right)}{2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{a}} = t + C \Rightarrow -2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{a}\cdot t + C' = \ln\left(\frac{\sqrt{\lambda}\cdot v(t) - \sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}\cdot v(t) + \sqrt{a}}\right) \Rightarrow A \cdot e^{-2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{a}\cdot t} = e^{-2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{a}\cdot t + C'} = \frac{\sqrt{\lambda}\cdot v(t) - \sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}\cdot v(t) + \sqrt{a}}$, wobei $A := e^{C'}$ sei. Setze $f(t) := A \cdot e^{-2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{a}\cdot t}$, dann gilt: $f(t) = \frac{\sqrt{\lambda}\cdot v(t) - \sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}\cdot v(t) + \sqrt{a}}$, also $f(t)\cdot\sqrt{\lambda}\cdot v(t) + f(t)\cdot\sqrt{a} = \sqrt{\lambda}\cdot v(t) - \sqrt{a}$, also $f(t)\cdot\sqrt{\lambda}\cdot v(t) - \sqrt{\lambda}\cdot v(t) = -\sqrt{a} - f(t)\cdot\sqrt{a}$, also $v(t) = \frac{-\sqrt{a} - f(t)\cdot\sqrt{a}}{f(t)\cdot\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{a} + f(t)\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda} - f(t)\cdot\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1+f(t)}{1-f(t)}$. Es folgt also: $v(t) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1 + A\cdot e^{-2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{a}\cdot t}}{1 - A\cdot e^{-2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{a}\cdot t}}$. Wegen $v(0) = 0$ folgt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1 + A\cdot 1}{1 - A\cdot 1} = 0$, also $1 + A = 0$, also $A = -1$. Es gilt also $v(t) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1 - e^{-2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{a}\cdot t}}{1 + e^{-2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{a}\cdot t}}$. Daraus folgt $\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}} = v_\infty$, also $v_\infty^2 = \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{\frac{\frac{1}{2}\cdot c_W\cdot\rho\cdot A}{m}}$. Es folgt $\frac{a}{v_\infty^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot c_W\cdot\rho\cdot A}{m}$, also $c_W = \frac{2\cdot m\cdot a}{\rho\cdot A\cdot v_\infty^2} = \frac{2\cdot 800\cdot 1}{1,25\cdot 2\cdot 40^2} = 0,4$. Der c_W-Wert ist also $0,4$. Das ist das Ende! □

Die zwei gleichseitigen Dreiecke

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gegeben sei das Rechteck* $ABCD$ *mit der Grundseite* $AB = 2\cdot a$. *Dem Rechteck sind zwei gleichseitige Dreiecke* AEF *und* EBG *einbeschrieben, wie im Bild unten gezeigt. Die Diagonale* BD *schneidet die Dreieckseiten in den Punkten* M, N *und* P. *Berechne die Länge der eingezeichneten Strecken* w, x, y, z *in Abhängigkeit von* $AE = EB = a$*!*



Lösung. Folgende Verhältnisgleichungen lassen sich aus den Strahlensätzen aufstellen:

$$\frac{z}{x+y+z} = \frac{BE}{BA} = \frac{a}{2\cdot a} \Leftrightarrow 2\cdot z = x+y+z \Leftrightarrow z = x+y$$

Weiter:

$$\frac{w}{w+x+y} = \frac{DF}{DG} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}+a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\cdot w = w+x+y \Leftrightarrow 2\cdot w = x+y$$

Weiter:

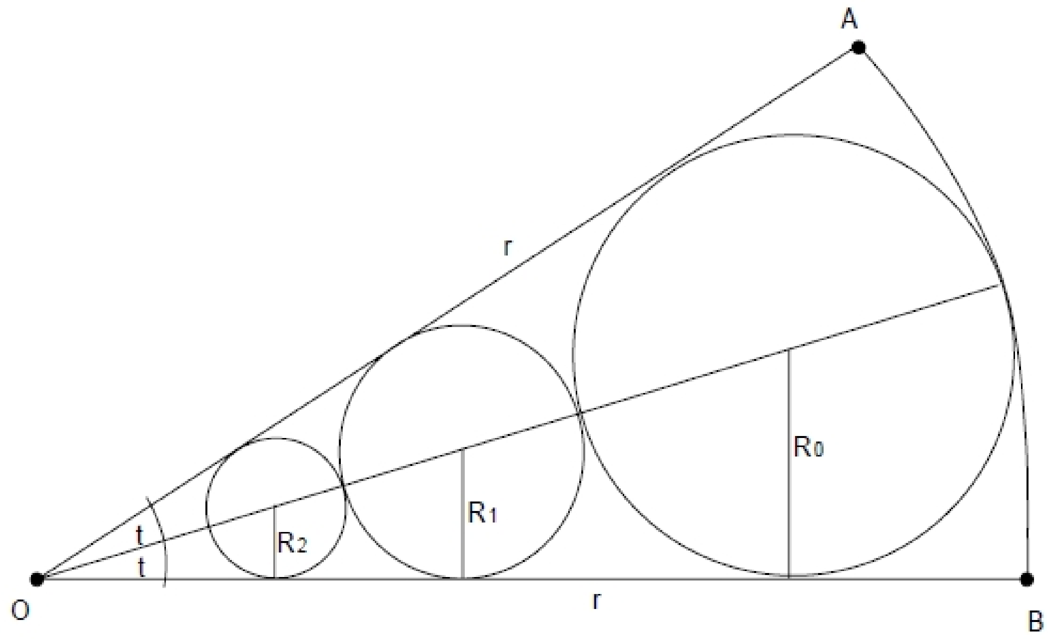
$$\frac{w+x}{w+x+y+z} = \frac{DF}{DG} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\cdot w + 3\cdot x = w+x+y+z \Leftrightarrow 2\cdot(w+x) = y+z$$

Aus $z = x+y$ und $2\cdot w = x+y$ folgt $z = 2\cdot w$. Aus $2\cdot(w+x) = y+z$ und $z = 2\cdot w$ folgt dann $2\cdot w + 2\cdot x = y + 2\cdot w$, also $y = 2\cdot x$. Aus $y = 2\cdot x$ und $2\cdot w = x+y = x+2\cdot x = 3\cdot x$ folgt $w = \frac{3}{2}\cdot x$. Aus $z = 2\cdot w$ und $w = \frac{3}{2}\cdot x$ folgt $z = 3\cdot x$. Man hat also $w = \frac{3}{2}\cdot x$, x, $y = 2\cdot x$ und $z = 3\cdot x$, also $w+x+y+z = \frac{3}{2}\cdot x + x + 2\cdot x + 3\cdot x = \frac{15}{2}\cdot x$. Die Breite des Rechtecks $ABCD$ ist $2\cdot a$ und die Höhe ist gleich der Höhe h des gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge a, also $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$. Daraus folgt, dass die Diagonale d von $ABCD$ ist: $d = \sqrt{(2\cdot a)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}\cdot a$. Also gilt $\frac{15}{2}\cdot x = w+x+y+z = d = \frac{\sqrt{19}}{2}\cdot a$, also $x = \frac{\sqrt{19}}{15}\cdot a$. Daraus lassen sich w, y, z bestimmen. Ende! □

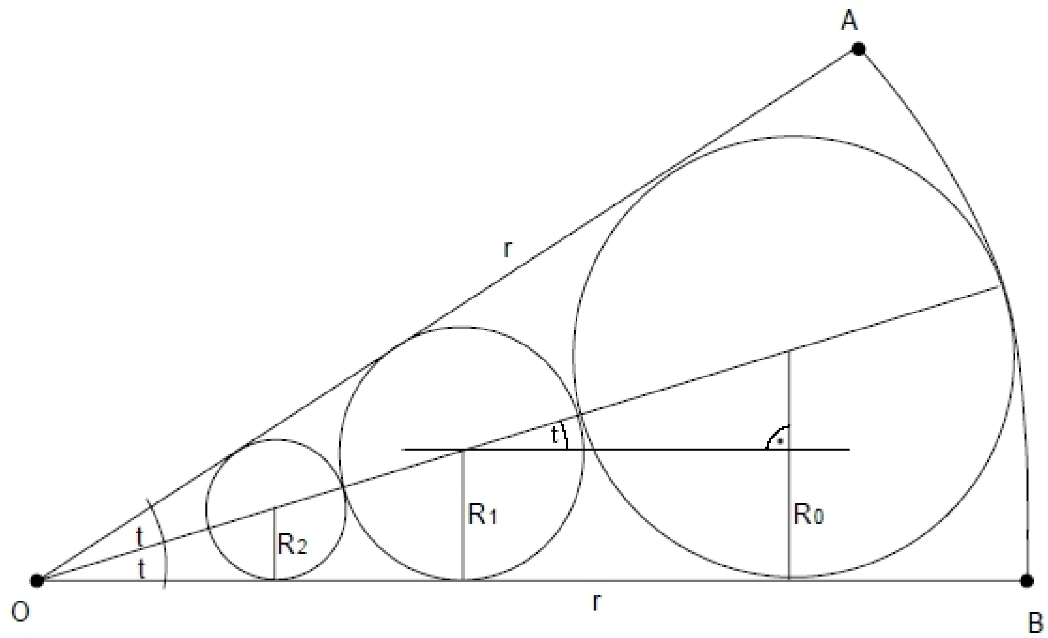
Die Kette unendlich vieler Kreise

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gegeben ist der Kreissektor OAB mit dem Radius r und dem Winkel $2\cdot t$. Dem Kreissektor werden, von rechts beginnend, fortlaufend Kreise einbeschrieben, so dass sich eine Kette stetig verjüngender Kreise bildet. Die Radien R_i der Kreise laufen gegen Null. In dem Bild unten sind nur die ersten drei Kreise eingezeichnet. Für welchen Winkel t ist das Verhältnis aus der Summe aller Kreisflächeninhalte zur Fläche des Kreissektors maximal?*



Lösung. Nochmal eine Zeichnung:



Es gilt: $\sin(t) = \dfrac{R_0 - R_1}{R_0 + R_1}$ und nach Strahlensatz: $\dfrac{R_1}{R_0} = \dfrac{r - R_1 - 2 \cdot R_0}{r - R_0}$. Aus $\sin(t) = \dfrac{R_0 - R_1}{R_0 + R_1}$ folgt $R_1 = R_0 \cdot \dfrac{1 - \sin(t)}{1 + \sin(t)}$, wobei: $\lambda := \dfrac{1 - \sin(t)}{1 + \sin(t)}$, also in die andere Gleichung eingesetzt: $\dfrac{R_0 \cdot \lambda}{R_0} = \dfrac{r - R_0 \cdot \lambda - 2 \cdot R_0}{r - R_0}$, also $\lambda \cdot (r - R_0) = \lambda \cdot r - R_0 \cdot \lambda = r - R_0 \cdot \lambda - 2 \cdot R_0$, also $\lambda \cdot r = r - 2 \cdot R_0$, also $R_0 = r \cdot \dfrac{1 - \lambda}{2} = r \cdot \dfrac{1 - \frac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)}}{2} = r \cdot \dfrac{\frac{1+\sin(t)}{1+\sin(t)} - \frac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)}}{2} = r \cdot \dfrac{2 \cdot \sin(t)}{2 \cdot (\sin(t) + 1)} = r \cdot \dfrac{\sin(t)}{1 + \sin(t)}$. Nun gilt aber auch: $\sin(t) = \dfrac{R_i - R_{i+1}}{R_i + R_{i+1}}$, also folgt $R_{i+1} = R_i \cdot \dfrac{1 - \sin(t)}{1 + \sin(t)} = R_i \cdot \lambda$, woraus $R_{i+1} = R_0 \cdot \lambda^{i+1}$ $(i \in \mathbb{N}_0)$ folgt. Der Gesamtflächeninhalt aller Kreise ist nun:

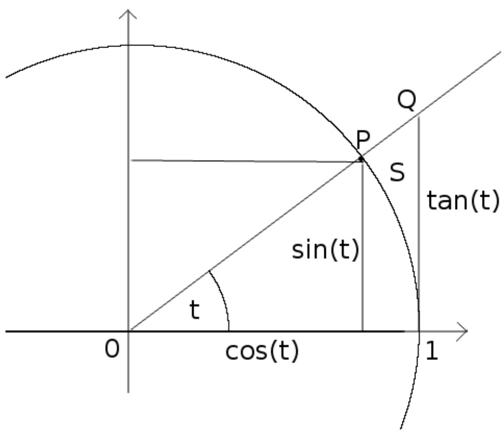
$$A_K := \sum_{i=0}^{\infty} \pi \cdot R_i^2 = \pi \cdot \sum_{i=0}^{\infty} R_i^2 = \pi \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(R_0 \cdot \lambda^i\right)^2 = \pi \cdot R_0^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\lambda^2\right)^i = \pi \cdot R_0^2 \cdot \frac{1}{1 - \lambda^2}$$

Denn die geometrische Reihe ist anwendbar wegen $0 \leq \lambda = \dfrac{1 - \sin(t)}{1 + \sin(t)} < 1$ für $0 < t < \pi$. Nun gilt: $\dfrac{1}{1 - \lambda^2} = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)}\right)^2} =$

$$\frac{1}{\frac{1+2\cdot\sin(t)+\sin(t)^2}{1+2\cdot\sin(t)+\sin(t)^2}-\frac{1-2\cdot\sin(t)+\sin(t)^2}{1+2\cdot\sin(t)+\sin(t)^2}}=\frac{1+2\cdot\sin(t)+\sin(t)^2}{4\cdot\sin(t)}.$$ Dann gilt:

$$A_K=\pi\cdot R_0^2\cdot\frac{1}{1-\lambda^2}=\pi\cdot\left(r\cdot\frac{\sin(t)}{1+\sin(t)}\right)^2\cdot\frac{1+2\cdot\sin(t)+\sin(t)^2}{4\cdot\sin(t)}=\pi\cdot r^2\cdot\frac{\sin(t)^2}{(1+\sin(t))^2}\cdot\frac{(1+\sin(t))^2}{4\cdot\sin(t)}=\frac{\pi}{4}\cdot r^2\cdot\sin(t)$$

Der Flächeninhalt des Kreissektors vom Radius r ist gleich $A_S:=\frac{2\cdot t}{2\pi}\cdot(\pi\cdot r^2)=t\cdot r^2$. Also ist das Flächenverhältnis von Kreisflächensumme zu Sektorfläche: $v(t):=\frac{A_K}{A_S}=\frac{\frac{\pi}{4}\cdot r^2\cdot\sin(t)}{t\cdot r^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sin(t)}{t}$. Gesucht ist der Winkel t, für den $v(t)$ ein Maximum hat. Es gilt $v'(t)=\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{t\cdot\cos(t)-\sin(t)}{t^2}\right)$. Nun gilt $\lim\limits_{t\to 0}t^2=0$ und $\lim\limits_{t\to 0}(t\cdot\cos(t)-\sin(t))=\lim\limits_{t\to 0}t\cdot\lim\limits_{t\to 0}\cos(t)-\lim\limits_{t\to 0}\sin(t)=0\cdot 1-0=0$. Also ist L'Hospital anwendbar: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cdot\cos(t)-\sin(t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{d}{dt}(t\cdot\cos(t)-\sin(t))}{\frac{d}{dt}t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-t\cdot\sin(t)}{2\cdot t}=\lim\limits_{t\to 0}-\frac{\sin(t)}{2}=0$. Also gilt $\lim\limits_{t\to 0}v'(t)=0$, also hat man mit $t=0$ einen Kandidaten für eine Extremalstelle. Es gilt $v''(t)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(2-t^2)\cdot\sin(t)-2\cdot t\cdot\cos(t)}{t^3}$. Weil Zähler und Nenner beide für $t\to 0$ gegen 0 konvergieren, ist wieder L'Hospital anwendbar: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(2-t^2)\cdot\sin(t)-2\cdot t\cdot\cos(t)}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-t^2\cdot\cos(t)}{3\cdot t^2}=-\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\cos(t)=-\frac{1}{3}\cdot 1=-\frac{1}{3}$, also $\lim\limits_{t\to 0}v''(t)=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{\pi}{12}<0$, also hat man bei $t=0$ ein relatives Maximum, welches den Wert $\lim\limits_{t\to 0}v(t)=\frac{\pi}{4}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=\frac{\pi}{4}\cdot 1=\frac{\pi}{4}\approx 0.7854\simeq 78,54\%$ hat. Beweis von $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$: Es gilt $\sin(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot t^{2k+1}}{(2k+1)!}$, also $\frac{\sin(t)}{t}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot t^{2k}}{(2k+1)!}=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot t^{2k}}{(2k+1)!}$. Wegen $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 0^{2k}}{(2k+1)!}=0$ folgt die Behauptung. Weiter: Ist $t\leq 2$, dann gilt $|v(t)|=\left|\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\right|=\frac{\pi}{4}\cdot\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\leq 1\cdot|\sin(t)|\cdot\frac{1}{t}\leq 1\cdot 1\cdot\frac{1}{t}\leq\frac{1}{2}$. Also ist $v(t)$ auf $[2,\infty)$ kleiner als das relative Maximum $\lim\limits_{t\to 0}v(t)=\frac{\pi}{4}>\frac{1}{2}$. Es wird nun gezeigt, dass $v(t)$ auf $(0,2]$ streng monoton fällt, denn dann ist $\lim\limits_{t\to 0}v(t)$ das absolute Maximum von $v(t)$: Gilt $\frac{\pi}{2}<t<\pi$, dann gilt $t,\sin(t)>0$ und $\cos(t)<0$, also $t\cdot\cos(t)<0<\sin(t)$, also $t\cdot\cos(t)<\sin(t)$. Ist $t=\frac{\pi}{2}$, dann gilt $t\cdot\cos(t)<\sin(t)$, denn $\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)<\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}\cdot 0<1\Leftrightarrow 0<1$. Sei nun $0<t<\frac{\pi}{2}$. Folgendes Bild:



Der Kreissektor $01P$ hat den Flächeninhalt $F_1:=\frac{t}{2\cdot\pi}\cdot 2\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{t}{2}$. Das Dreieck $01Q$ hat den Flächeninhalt $F_2:=\frac{1\cdot\tan(t)}{2}$. Weil wegen $0<t<\frac{\pi}{2}$ nun der Flächeninhalt von S echt-größer 0 ist ($|S|>0$), folgt: $F_1<F_2$, also $\frac{t}{2}<\frac{1\cdot\tan(t)}{2}$, also $t\cdot\cos(t)<\sin(t)$. Es wurde also gezeigt: Auf $(0,\pi)$ gilt $t\cdot\cos(t)<\sin(t)$, also $t\cdot\cos(t)-\sin(t)<0$ und wegen $t>0$ folgt $v'(t)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{t\cdot\cos(t)-\sin(t)}{t^2}<0$. Nochmal: Das absolute Maximum von $v(t)$ befindet sich bei $t=0$, also dann: $\lim\limits_{t\to 0}v(t)=\frac{\pi}{4}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=\frac{\pi}{4}\cdot 1=\frac{\pi}{4}\approx 0.7854\simeq 78,54\%$. Ende! □

Die Catalan-Zahlen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gelte die Rekursion* $C_n=\sum\limits_{k=1}^{n}C_{k-1}\cdot C_{n-k}$ *mit* $C_0=C_1=1$, *dann gilt* $C_n=\frac{1}{n+1}\cdot\binom{2\cdot n}{n}$ *(Catalan-Zahlen) - Beweise dies! Gebe 5 Abzählprobleme an, die mithilfe der Catalan-Zahlen gelöst werden.*

Lösung. Sei $E(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n$, dann gilt:

$$E(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k} \right) \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1} \cdot x^n$$
$$= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k} \cdot x^{n-1} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k} \cdot x^n = x \cdot E(x)^2$$

Also gilt $x \cdot E(x)^2 - E(x) + 1 = 0$, also $E(x)^2 - \frac{1}{x} \cdot E(x) + \frac{1}{x}$. Das ist eine quadratische Gleichung, also: $E(x)_{1,2} = -\frac{-\frac{1}{x}}{2} \pm \sqrt{\frac{(-\frac{1}{x})^2}{4} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2 \cdot x} \pm \sqrt{\frac{1}{4 \cdot x^2} - \frac{4 \cdot x}{4 \cdot x^2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot x}}{2 \cdot x}$. Weil $x \cdot E(x)$ für $x = 0$ gleich 0 sein muss, folgt, dass nur das negative Vorzeichen in Frage kommt, denn mit dem Pluszeichen hat man sonst: $x \cdot E(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot x}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 - 4 \cdot x}}{2} > 0$ für alle x, Widerspruch. Es gilt also: $E(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot x}}{2 \cdot x}$. Es wird nun die Taylorreihe von $f(x) := \sqrt{1 + x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ ermittelt: Betrachtet man $f^{(n)}(0)$, so erkennt man das Muster $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot \left(\prod\limits_{i=1}^{n-1} 2 \cdot i - 1 \right) \cdot 1$. Es gilt $\prod\limits_{i=1}^{n-1} (2 \cdot i - 1) = \frac{(2 \cdot n - 3)!}{2^{n-2} \cdot (n-2)!}$. Also gilt:

$$\sqrt{1 + x} = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{(2 \cdot n - 3)!}{2^{n-2} \cdot (n-2)!} \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2 \cdot n - 2} \cdot n!} \cdot \frac{(2 \cdot n - 2) \cdot (2 \cdot n - 3)!}{2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)!} \cdot x^n$$

Und weiter gilt dann das Folgende:

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2 \cdot n - 1} \cdot n!} \cdot \frac{(2 \cdot n - 2)!}{(n-1)!} \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2 \cdot n - 1} \cdot n} \cdot \frac{(2 \cdot n - 2)!}{(n-1)! \cdot (n-1)!} \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2 \cdot n - 1} \cdot n} \cdot \binom{2 \cdot n - 2}{n - 1} \cdot x^n$$

Weil $E(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot x}}{2 \cdot x}$ gilt, folgt also:

$$E(x) = \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \left(1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2 \cdot n - 1} \cdot n} \cdot \binom{2 \cdot n - 2}{n - 1} \cdot (-4 \cdot x)^n \right) = \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \binom{2 \cdot n - 2}{n - 1} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \binom{2 \cdot n - 2}{n - 1} \cdot x^{n-1}$$

Nun gilt noch $E(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \binom{2 \cdot n - 2}{n - 1} \cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2 \cdot n}{n} \cdot x^n$. Es gilt also $E(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2 \cdot n}{n} \cdot x^n$ und ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2 \cdot n}{n}$$

Es wird nun noch gezeigt, dass die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auch wirklich gegen $f(x) = \sqrt{1 + x}$ konvergiert: Es gilt: $f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot \left(\prod\limits_{i=1}^{n} 2i - 1 \right) \cdot (1+t)^{-\frac{2n+1}{2}}$. Das Restglied ist: $R_{n+1}(x, 0) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) \, dt$. Dann gilt $|R_{n+1}(x, 0)| \leq \frac{1}{n!} \cdot \int_0^x |x - t|^n \cdot |f^{(n+1)}(t)| \, dt$. Weil $|f^{(n+1)}(t)| = \frac{1}{2} \cdot \left(\prod\limits_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2} \right) \cdot |1+t|^{-\frac{2n+1}{2}} \leq 1 \cdot n! \cdot |1+t|^{-\frac{2n+1}{2}} \leq n! \cdot |1+t|^{-\frac{2n+1}{2}}$ gilt, folgt dann $|R_{n+1}(x, 0)| \leq \int_0^x |x-t|^n \cdot |1+t|^{-\frac{2n+1}{2}} \, dt$. Man zeigt nun, dass gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} |x-t|^n \cdot |1+t|^{-\frac{2n+1}{2}} = 0$, wenn $|x| < 1$, also $|t| < |x| < 1$. Sei $|x| < 1$. 1. Fall: $x > 0$, also $0 < t < x < 1$, dann gilt $0 > -t > -x$, also $1 > x > x - t > 0$, also $0 < x - t < 1$, also $|x - t| < 1$. Wegen $0 < t < 1$ folgt $1 < 1 + t < 2$, also $1 < |1 + t|$, also $\frac{1}{|1+t|} < 1$. Also gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} |x - t|^n = 0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} |1 + t|^{-\frac{2n+1}{2}} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{|1+t|} \right)^{n + \frac{1}{2}} = 0$. 2. Fall: $x = 0$, dann ist das Restglied trivialerweise gleich 0. 3. Fall: $x < 0$, also $-1 < x < t < 0$, also $1 > -x > -t > 0$, also $0 > x - t > x > -1$, also $0 > x - t > -1$. Wegen $-1 < t < 0$ folgt $0 < 1 + t < 1$. Es gilt: $|x - t|^n \cdot |1 + t|^{-\frac{2n+1}{2}} = |x - t|^n \cdot |1 + t|^{-n-\frac{1}{2}} = |x - t|^n \cdot |1 + t|^{-n} \cdot |1 + t|^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{|x-t|}{|1+t|} \right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{|1+t|}}$. Wenn man zeigt, dass $\frac{|x-t|}{|1+t|} < 1$ gilt, dann ist man fertig! Es gilt: $|x - t| = -(x - t)$ und $|1 + t| = 1 + t$. Angenommen: $|x - t| \geq |1 + t|$, also $-(x - t) \geq 1 + t$, also $-x + t \geq 1 + t$, also $-x \geq 1$, also $x \leq -1$, Widerspruch, denn es gilt $-1 < x$. Also muss sein: $|x - t| < |1 + t|$, also $\frac{|x-t|}{|1+t|} < 1$. Insgesamt also konvergiert das Restglied der Taylorreihe von f, nämlich $R_{n+1}(x, 0) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) \, dt$, für $n \to \infty$ und $x \in (-1, 1)$ gegen 0, also konvergiert die Taylorreihe auf $(-1, 1)$ auch wirklich gegen $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Es werden nun 5 Abzählprobleme vorgestellt:

1.) Die Anzahl der Binärbäume mit insgesamt n Knoten

Ein Binärbaum hat an jedem Knoten 0, 1 oder 2 ausgehende Kanten. Die Wurzel hat 0 eingehende Kanten und die anderen Knoten genau 1 eingehende Kante. Sei die Anzahl mit B_n bezeichnet. Man teilt nun in zwei Teilbinärbäume auf: Der Binärbaum, der k Knoten links von der Wurzel hat, und der andere Binärbaum, der $n - 1 - k$ Knoten rechts davon hat. Also gilt $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} B_k \cdot B_{n-1-k} = C_n$ wegen $B_0 = B_1 = 1$.

2.) Die Anzahl der syntaktisch korrekten Klammerausdrücke mit n Klammerpaaren

Ein Klammerausdruck mit $2 \cdot n$ Klammern ist syntaktisch korrekt, wenn eine geöffnete Klammer auch immer irgendwann geschlossen wird und bis zu keiner Stelle mehr Klammern geschlossen sind als geöffnet. Sei die gesuchte Anzahl mit K_n bezeichnet. Es wird die Menge der möglichen Klammerausdrücke zerlegt: Man zerlegt die Klammerausdrücke in solche, dessen erste Klammer an der Position $2 \cdot k$ geschlossen wird. Innerhalb der ersten Klammer liegen dann $k - 1$ Klammerpaare, außerhalb gerade $n - k$. Also gilt:

$K_n = \sum_{k=1}^{n} K_{k-1} \cdot K_{n-k} = C_n$, weil $K_0 = K_1 = 1$ gilt.

3.) Die Anzahl der Triangulierungen eines konvexen $(n+2)$-Ecks

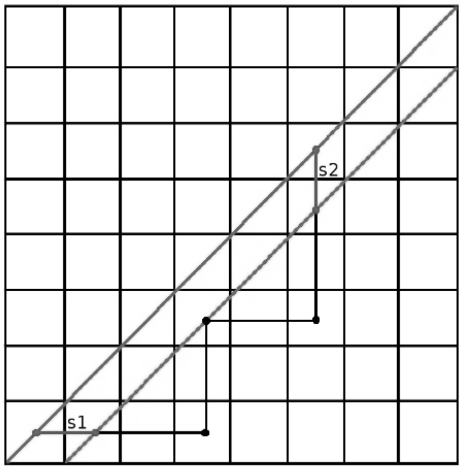
Es seien $P_0, P_1, \ldots, P_{n+1}$ die Punkte bei Umrundung des $(n+2)$-Ecks im mathematisch positiven Sinn. Die gesuchte Anzahl von Triangulierungen sei T_n. Dann gibt es genau $T_{n-1-(k-2)} \cdot T_{k-2}$ Triangulierungen, bei denen $P_0P_1P_k$ ein Dreieck bilden, weil links von $P_0P_1P_k$ ein $((n-1-(k-2))+2)$-Eck zu triangulieren ist, und rechts davon ein $((k-2)+2)$-Eck. Also gilt $T_n = \sum_{k=2}^{n+1} T_{n-1-(k-2)} \cdot T_{k-2} = \sum_{k=0}^{n-1} T_k \cdot T_{n-1-k} = C_n$, weil $T_0 = T_1 = 1$ gilt.

4.) Die Anzahl der Möglichkeiten, $2 \cdot n$ auf einem Kreis gelegene Punkte paarweise durch n sich nicht überschneidende Strecken zu verbinden

Sei die Anzahl mit V_n bezeichnet. Seien die Punkte auf dem Kreis im mathematisch positiven Sinn durch P_0 bis $P_{2\cdot n-1}$ bezeichnet. Man zerlegt die Möglichkeiten in solche, wo P_0 mit $P_{2\cdot k-1}$ verbunden ist $(k = 1, \ldots, n)$. Diese Verbindung zerlegt in zwei Bereiche: Ein Bereich hat $2 \cdot k - 2 = 2 \cdot (k-1)$ und der andere $2 \cdot n - 2 \cdot k = 2 \cdot (n-k)$ Punkte auf dem Kreis. Innerhalb dieser Bereiche zählt man die Möglichkeiten von Verbindungen ohne Überkreuzung. Es gibt also $V_{k-1} \cdot V_{n-k}$ Möglichkeiten ohne Überkreuzung zu verbinden, wobei P_0 mit $P_{2\cdot k-1}$ verbunden ist. Also gilt $V_n = \sum_{k=1}^{n} V_{k-1} \cdot V_{n-k} = C_n$, weil für die Startwerte gilt: $V_0 = V_1 = 1$.

5.) Die Anzahl der Turmwege von links unten nach rechts oben auf einem $n \times n$-Schachbrett ohne die Diagonale zu überschreiten

Sei die Anzahl mit W_n bezeichnet. Man zerlegt auf dem $n \times n$-Schachbrett jeden nicht über der Diagonalen von unten links nach oben rechts verlaufenden Turmweg in einen Turmweg von $(0,0)$ nach (k,k) und einen von (k,k) nach (n,n), für ein $k > 0$. Darum kann man die Turmwege disjunkt aufteilen in solche, die bei (k,k) erstmals die Hauptdiagonale berühren. Für gegebenes $k > 0$ ist deren Anzahl gleich $W_{k-1} \cdot W_{n-k}$. Man muss für die Wege von $(0,0)$ nach (k,k) die Anzahl W_{k-1} statt W_k zugrundelegen, weil im Bild unten die Strecken $s1$ und $s2$ schon festgelegt sind. Das Bild:



Die Anzahl aller Turmwege ist dann die Summe über k der Turmwege, die bei (k,k) die Hauptdiagonale erstmals betreten. Also gilt: $W_n = \sum_{k=1}^{n} W_{k-1} \cdot W_{n-k} = C_n$ wegen $W_0 = W_1 = 1$. □