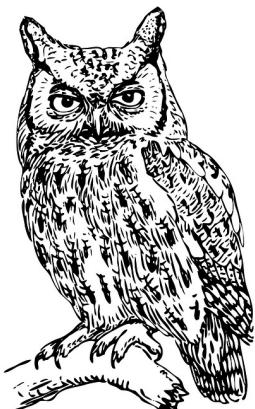
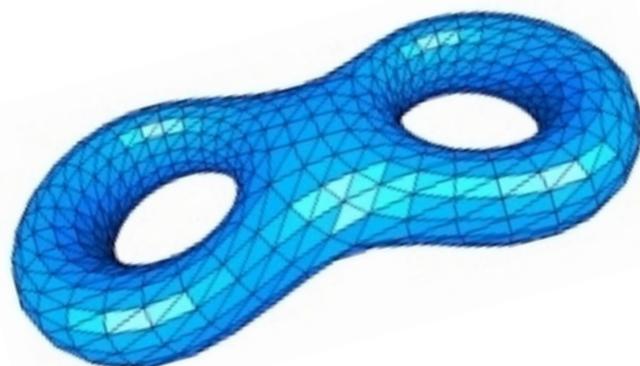


Schönste mathematische Sätze



$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_M K \, dA = 2 - 2 \cdot g$$



GeTeXt von: Sven Dooley.

Die Formel oben ist die Aussage des Satzes von Gauß-Bonnet in der globalen Version. Es wird dort die Gauß-Krümmung K über eine zweidimensionale, orientierbare und kompakte Fläche M ohne Rand im dreidimensionalen Raum integriert. Dabei gibt das Integral Auskunft über die Anzahl g der Löcher in der betrachteten Mannigfaltigkeit M .

Liste der mathematischen Sätze

Sammlung - Teil 1

1. [Der Satz von Gauß-Bonnet](#)
2. [Der allgemeine Satz von Stokes](#)
3. [Der Satz von de Rham](#)
4. [Der Satz von Borsuk-Ulam](#)
5. [Der Indexsatz von Poincaré-Hopf](#)
6. [Der Einbettungssatz von Whitney](#)
7. [Das Theorema Egregium](#)
8. [Der Brouwer'sche Fixpunktsatz](#)
9. [Der Igelsatz](#)
10. [Das Shannon'sche Abtasttheorem](#)
11. [Der Satz von Stone-Weierstraß](#)
12. [Der Satz von Tychonoff](#)
13. [Das Brachistochrone-Problem](#)
14. [Das isoperimetrische Problem](#)
15. [Das Verfolgungsproblem](#)
16. [Das Königsberger Brückenproblem](#)
17. [Das Kettenlinienproblem](#)
18. [Die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal](#)
19. [Der Residuensatz](#)
20. [Die Cauchy'sche Integralformel](#)
21. [Das Noether-Theorem](#)
22. [Das Euler-Produkt](#)
23. [Das Gauß-Integral](#)
24. [Das Wallis-Produkt](#)
25. [Die divergente harmonische Reihe](#)
26. [Der Riemann'sche Umordnungssatz](#)
27. [Der Fundamentalsatz der Algebra](#)
28. [Der RSA-Algorithmus](#)
29. [Das Räuber-Beute-Modell](#)
30. [Der Satz von Schröder-Bernstein](#)

Sammlung - Teil 2

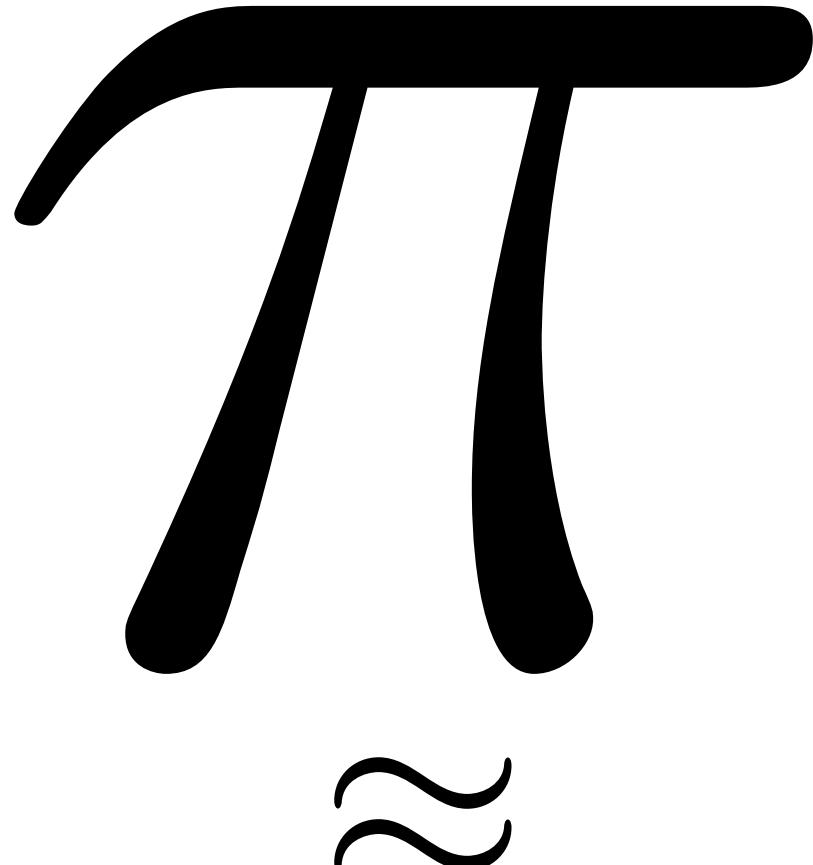
31. [Die Summe der reziproken Quadratzahlen](#)
32. [Die transzendenten Zahlen](#)
33. [Der Satz von Fermat-Wiles für Kuben](#)
34. [Die Darstellung als Summe zweier Quadrate](#)
35. [Die Partition von Zahlen](#)
36. [Die Summe von Potenzen](#)
37. [Der Banach'sche Fixpunktsatz](#)
38. [Der Satz von Bolzano-Weierstraß](#)
39. [Die Stirling'sche Näherungsformel](#)
40. [Die Fouriertransformation](#)
41. [Das Gesetz der großen Zahlen](#)
42. [Die AGH-Ungleichung](#)
43. [Die Tschebyscheff'sche Ungleichung](#)
44. [Die Anzahl der k-Partitionen](#)
45. [Die \$n\$ -dimensionale Kugel](#)
46. [Die Heisenberg'sche Unschärferelation](#)
47. [Die gedämpfte Schwingung](#)
48. [Das Freundschaftstheorem](#)
49. [Der Satz von Vitali](#)
50. [Der Satz von Wilson](#)
51. [Der Satz von Cantor](#)
52. [Der Satz von Lagrange](#)
53. [Der Satz von Cayley](#)
54. [Der Satz von Ptolemäus](#)
55. [Die Euler'sche Identität](#)
56. [Die Euler'sche Polyederformel](#)
57. [Die 5 platonischen Körper](#)
58. [Die Limesdarstellung der Euler'schen Zahl](#)
59. [Die Irrationalität der Wurzel aus 2](#)
60. [Die Unendlichkeit der Primzahlenanzahl](#)

Mathematische Internet-Links:

[Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze](#)
[Das Banach-Tarski-Paradoxon](#)
[Der 5 Farben-Satz](#)
[Die Riemann'sche Vermutung](#)
[Die Geometrie in der Teetasse](#)
[Die von Koch'sche Flockenkurve](#)

[Die zahlentheoretischen Funktionen](#)
[Die diophantischen Gleichungen](#)
[Die Herleitung von Potenzsummen](#)
[Die Zahlentheorie und die Kryptologie](#)
[Die Primzahlen und die elliptischen Kurven](#)
[Die irregulären Kettenbrüche](#)

[Die Catalan-Zahlen](#)
[Der Zauberwürfel](#)
[Die kubische Gleichung](#)
[Die gelösten Differentialgleichungen](#)
[Die elementaren Wachstumsmodelle](#)
[Das Foucault'sche Pendel](#)



3,
,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086
5132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461
2847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096
2829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611793105...

Der Satz von Gauß-Bonnet

[Zurück zur Liste]

Lemma (Richtungs- und kovariante Ableitung). Seien X und Y Vektorfelder längs eines Flächenstücks f , dann sei die Richtungsableitung definiert durch $(D_X Y)(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(p + t \cdot X(p)) - Y(p)) = dY_p(X(p)) = \frac{d}{dt} Y(c(t))|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(c(t)) - Y(c(0)))$, wobei c eine Kurve in f sei mit $c(0) = p$ sowie $c'(0) = X(p)$, und die kovariante Ableitung durch $(\nabla_X Y)(p) := (D_X Y)(p) - \langle (D_X Y)(p), \nu_p \rangle \cdot \nu_p \in T_p f$ mit p , Punkt auf der Fläche f , und $\nu_p \in N_p f$. Es gelten dann folgende Rechenregeln:

$$\begin{array}{ll} 1^D \quad D_{f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2} Y = f_1 \cdot D_{X_1} Y + f_2 \cdot D_{X_2} Y & 1^\nabla \quad \nabla_{f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2} Y = f_1 \cdot \nabla_{X_1} Y + f_2 \cdot \nabla_{X_2} Y \\ 2^D \quad D_X(\lambda_1 \cdot Y_1 + \lambda_2 \cdot Y_2) = \lambda_1 \cdot D_X Y_1 + \lambda_2 \cdot D_X Y_2 & 2^\nabla \quad \nabla_X(\lambda_1 \cdot Y_1 + \lambda_2 \cdot Y_2) = \lambda_1 \cdot \nabla_X Y_1 + \lambda_2 \cdot \nabla_X Y_2 \\ 3^D \quad D_X(g \cdot Y) = Xg \cdot Y + g \cdot D_X Y & 3^\nabla \quad \nabla_X(g \cdot Y) = Xg \cdot Y + g \cdot \nabla_X Y \\ 4^D \quad X \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle D_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, D_X Y_1 \rangle & 4^\nabla \quad X \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_1 \rangle \end{array}$$

Dabei seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und g, f_1, f_2 reellwertige Funktionen, definiert auf der Fläche f , sowie X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 Vektorfelder längs f . Im Fall 3^∇ muss Y tangential sein, und im Fall 4^∇ müssen Y_1 und Y_2 tangential sein.

Beweis. Zunächst wird bewiesen, dass die verschiedenen Darstellungen der Richtungsableitung $D_X Y$ auch alle gleich sind: $(D_X Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(p + t \cdot X(p)) - Y(p)) = \frac{d}{dt} Y(p + t \cdot X(p))|_{t=0} = dY_{p+t \cdot X} \left(\frac{d}{dt} (p + t \cdot X(p)) \right)|_{t=0} = dY_{p+t \cdot X}(X(p))|_{t=0} = dY_p(X(p)) = dY_{c(0)}(c'(0)) = dY_{c(t)}(c'(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} Y(c(t))|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(c(t)) - Y(c(0)))$. Jetzt wird der Beweis der Rechenregeln für alle 8 Fälle vollzogen:

Zu 1^D :

$D_{f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2} Y = dY(f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2) = f_1 \cdot dY(X_1) + f_2 \cdot dY(X_2) = f_1 \cdot D_{X_1} Y + f_2 \cdot D_{X_2} Y$, denn Differentiale sind, was aus der Analysis nämlich bekannt ist, linear.

Zu 1^∇ :

$\nabla_{f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2} Y = D_{f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2} Y - \langle D_{f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2} Y, \nu \rangle \cdot \nu = f_1 \cdot D_{X_1} Y + f_2 \cdot D_{X_2} Y - \langle f_1 \cdot D_{X_1} Y + f_2 \cdot D_{X_2} Y, \nu \rangle \cdot \nu = f_1 \cdot D_{X_1} Y + f_2 \cdot D_{X_2} Y - f_1 \cdot \langle D_{X_1} Y, \nu \rangle \cdot \nu - f_2 \cdot \langle D_{X_2} Y, \nu \rangle \cdot \nu = (f_1 \cdot D_{X_1} Y - f_1 \cdot \langle D_{X_1} Y, \nu \rangle \cdot \nu) + (f_2 \cdot D_{X_2} Y - f_2 \cdot \langle D_{X_2} Y, \nu \rangle \cdot \nu) = [f_1 \cdot (D_{X_1} Y - \langle D_{X_1} Y, \nu \rangle \cdot \nu)] + [f_2 \cdot (D_{X_2} Y - \langle D_{X_2} Y, \nu \rangle \cdot \nu)] = f_1 \cdot \nabla_{X_1} Y + f_2 \cdot \nabla_{X_2} Y$.

Zu 2^D :

$D_X(\lambda_1 \cdot Y_1 + \lambda_2 \cdot Y_2) = d(\lambda_1 \cdot Y_1 + \lambda_2 \cdot Y_2)(X) = \lambda_1 \cdot dY_1(X) + \lambda_2 \cdot dY_2(X) = \lambda_1 \cdot D_X Y_1 + \lambda_2 \cdot D_X Y_2$, denn für Differentiale gilt die Faktor- und Summenregel.

Zu 2^∇ :

$\nabla_X(\lambda_1 \cdot Y_1 + \lambda_2 \cdot Y_2) = D(\lambda_1 \cdot Y_1 + \lambda_2 \cdot Y_2)(X) - \langle D(\lambda_1 \cdot Y_1 + \lambda_2 \cdot Y_2)(X), \nu \rangle \cdot \nu = \lambda_1 \cdot DY_1(X) + \lambda_2 \cdot DY_2(X) - \langle \lambda_1 \cdot DY_1(X) + \lambda_2 \cdot DY_2(X), \nu \rangle \cdot \nu = [\lambda_1 \cdot DY_1(X) - \lambda_1 \cdot \langle DY_1(X), \nu \rangle \cdot \nu] + [\lambda_2 \cdot DY_2(X) - \lambda_2 \cdot \langle DY_2(X), \nu \rangle \cdot \nu] = [\lambda_1 \cdot (DY_1(X) - \langle DY_1(X), \nu \rangle \cdot \nu) + \lambda_2 \cdot (DY_2(X) - \langle DY_2(X), \nu \rangle \cdot \nu)] = \lambda_1 \cdot \nabla_X Y_1 + \lambda_2 \cdot \nabla_X Y_2$.

Zu 3^D :

$D_X(g \cdot Y) = dg(X) \cdot Y + g \cdot dY(X) = Xg \cdot Y + g \cdot D_X Y$, denn für Differentiale gilt die Produktregel.

Zu 3^∇ :

$\nabla_X(g \cdot Y) = D_X(g \cdot Y) - \langle D_X(g \cdot Y), \nu \rangle \cdot \nu = Xg \cdot Y + g \cdot D_X Y - \langle Xg \cdot Y + g \cdot D_X Y, \nu \rangle \cdot \nu = Xg \cdot Y + g \cdot D_X Y - Xg \cdot \langle Y, \nu \rangle \cdot \nu - g \cdot \langle D_X Y, \nu \rangle \cdot \nu = Xg \cdot Y + g \cdot D_X Y - Xg \cdot 0 \cdot \nu - g \cdot \langle D_X Y, \nu \rangle \cdot \nu = [Xg \cdot Y - 0] + [g \cdot (D_X Y - \langle D_X Y, \nu \rangle \cdot \nu)] = Xg \cdot Y + g \cdot \nabla_X Y$, denn Y wurde in diesem Fall als tangential vorausgesetzt, also $\langle Y, \nu \rangle = 0$.

Zu 4^D :

In diesem Beweis hier geht man etwas anders vor: $(X \langle Y_1, Y_2 \rangle)(p) = \frac{d}{dt} \langle Y_1(c(t)), Y_2(c(t)) \rangle|_{t=0} = \left\langle \frac{d}{dt} Y_1(c(t)), Y_2(c(t)) \right\rangle|_{t=0} + \left\langle Y_1(c(t)), \frac{d}{dt} Y_2(c(t))|_{t=0} \right\rangle|_{t=0} = \left\langle \frac{d}{dt} Y_1(c(t))|_{t=0}, Y_2(p) \right\rangle + \left\langle Y_1(p), \frac{d}{dt} Y_2(c(t))|_{t=0} \right\rangle = \langle (D_X Y_1)(p), Y_2(p) \rangle + \langle Y_1(p), (D_X Y_2)(p) \rangle$.

Beweis von $\frac{d}{dt} \langle A(t), B(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} A(t), B(t) \right\rangle + \left\langle A(t), \frac{d}{dt} B(t) \right\rangle$: Man beschränkt sich hier exemplarisch auf den hier wichtigen

3-dimensionalen Fall, denn der allgemeine Fall geht völlig analog: $A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix}$, also $\frac{d}{dt} \langle A(t), B(t) \rangle =$

$\frac{d}{dt} [a_1(t) \cdot b_1(t) + a_2(t) \cdot b_2(t) + a_3(t) \cdot b_3(t)] \stackrel{\text{Produktregel}}{=} [a'_1(t) \cdot b_1(t) + a_1(t) \cdot b'_1(t)] + [a'_2(t) \cdot b_2(t) + a_2(t) \cdot b'_2(t)] + [a'_3(t) \cdot b_3(t) + a_3(t) \cdot b'_3(t)]$

und das ist gleich zu: $[a'_1(t) \cdot b_1(t) + a'_2(t) \cdot b_2(t) + a'_3(t) \cdot b_3(t)] + [a_1(t) \cdot b'_1(t) + a_2(t) \cdot b'_2(t) + a_3(t) \cdot b'_3(t)] = \left\langle \frac{d}{dt} A(t), B(t) \right\rangle +$

$\left\langle A(t), \frac{d}{dt} B(t) \right\rangle$, fertig!

Zu 4^∇ :

$X \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle D_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, D_X Y_2 \rangle = \langle \nabla_X Y_1 + \langle D_X Y_1, \nu \rangle \cdot \nu, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 + \langle D_X Y_2, \nu \rangle \cdot \nu \rangle = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle \langle D_X Y_1, \nu \rangle \cdot \nu, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \langle D_X Y_2, \nu \rangle \cdot \nu \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 + \langle D_X Y_2, \nu \rangle \cdot \nu \rangle = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle \langle D_X Y_1, \nu \rangle \cdot \nu, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 + \langle D_X Y_2, \nu \rangle \cdot \nu \rangle$.

$\nu, Y_2\rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle + \langle Y_1, \langle D_X Y_2, \nu \rangle \cdot \nu \rangle = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle D_X Y_1, \nu \rangle \cdot \langle \nu, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nu \rangle \cdot \langle D_X Y_2, \nu \rangle = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle D_X Y_1, \nu \rangle \cdot 0 + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle + 0 \cdot \langle D_X Y_2, \nu \rangle = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_1 \rangle$, denn es wurde in diesem Fall vorausgesetzt, dass Y_1 und Y_2 tangential sind, sodass also gilt: $\langle \nu, Y_2 \rangle = \langle Y_1, \nu \rangle = 0$. \square

Lemma (Kovariante Ableitung längs Kurven). *Sei α , definiert auf $I \subseteq \mathbb{R}$, eine Kurve, die in der Fläche f verläuft. Für ein Vektorfeld X , definiert auf $I \subseteq \mathbb{R}$ auf f längs α gelte $X(t) \in T_{\alpha(t)} f$ für alle $t \in I$. Die kovariante Ableitung längs α ist dann definiert als $\frac{\nabla}{dt} X(t) = \frac{d}{dt} X(t) - \left\langle \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)} f$, wobei gelte: $\nu(\alpha(t)) \in N_{\alpha(t)} f$. Folgende Rechenregeln:*

1. $\frac{\nabla}{dt} (\lambda_1 \cdot X + \lambda_2 \cdot Y) = \lambda_1 \cdot \frac{\nabla}{dt} X + \lambda_2 \cdot \frac{\nabla}{dt} Y$
2. $\frac{\nabla}{dt} (g \cdot X) = \frac{d}{dt} g \cdot X + g \cdot \frac{\nabla}{dt} X$
3. $\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla}{dt} Y \right\rangle$

Dabei gelte $X(t), Y(t) \in T_{\alpha(t)} f$ für alle $t \in I$ und es sei g eine Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, außerdem: $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es werden nun alle 3 Rechenregeln bewiesen:

Zu 1.:

Es gilt dann also: $\frac{\nabla}{dt} (\lambda_1 \cdot X + \lambda_2 \cdot Y)(t) = \frac{d}{dt} (\lambda_1 \cdot X(t) + \lambda_2 \cdot Y(t)) - \left\langle \frac{d}{dt} (\lambda_1 \cdot X(t) + \lambda_2 \cdot Y(t)), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) = \lambda_1 \cdot \frac{d}{dt} X(t) + \lambda_2 \cdot \frac{d}{dt} Y(t) - \left\langle \lambda_1 \cdot \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) - \left\langle \lambda_2 \cdot \frac{d}{dt} Y(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) = \left[\lambda_1 \cdot \frac{d}{dt} X(t) - \lambda_1 \cdot \left\langle \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) \right] + \left[\lambda_2 \cdot \frac{d}{dt} Y(t) - \lambda_2 \cdot \left\langle \frac{d}{dt} Y(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) \right] = \lambda_1 \cdot \frac{\nabla}{dt} X(t) + \lambda_2 \cdot \frac{\nabla}{dt} Y(t)$, denn es gilt die Faktor- und Summenregel.

Zu 2.:

Nach der Produktregel gilt: $\frac{\nabla}{dt} (g \cdot X)(t) = \frac{d}{dt} (g(t) \cdot X(t)) - \left\langle \frac{d}{dt} (g(t) \cdot X(t)), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} g(t) \cdot X(t) + g(t) \cdot \frac{d}{dt} X(t) - \left\langle \frac{d}{dt} g(t) \cdot X(t) + g(t) \cdot \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} g(t) \cdot X(t) + g(t) \cdot \frac{d}{dt} X(t) - \frac{d}{dt} g(t) \cdot \langle X(t), \nu(\alpha(t)) \rangle \cdot \nu(\alpha(t)) - g(t) \cdot \left\langle \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} g(t) \cdot X(t) - \frac{d}{dt} g(t) \cdot 0 + g(t) \cdot \left[\frac{d}{dt} X(t) - \left\langle \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) \right] = \frac{d}{dt} g(t) \cdot X(t) + g(t) \cdot \frac{\nabla}{dt} X(t)$, denn es gilt $\langle X(t), \nu(\alpha(t)) \rangle = 0$ wegen $X(t) \in T_{\alpha(t)} f$ und $\nu(\alpha(t)) \in N_{\alpha(t)} f$.

Zu 3.:

$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle(t) = \frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} X(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{d}{dt} Y(t) \right\rangle$. Warum das gilt, wurde im Lemma (Richtungs- und kovariante Ableitung) oben unter 4^D bewiesen. Weiter gilt dann schließlich: $\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle(t) = \left\langle \frac{d}{dt} X(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{d}{dt} Y(t) \right\rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X(t) + \left\langle \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{\nabla}{dt} Y(t) + \left\langle \frac{d}{dt} Y(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) \right\rangle$ und das ist gleich zum Folgendem: $\left\langle \frac{\nabla}{dt} X(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle \left\langle \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{\nabla}{dt} Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \left\langle \frac{d}{dt} Y(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X(t), Y(t) \right\rangle + 0 + \left\langle X(t), \frac{\nabla}{dt} Y(t) \right\rangle + 0 = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{\nabla}{dt} Y(t) \right\rangle$, denn: $\left\langle \left\langle \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)), Y(t) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} X(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \langle \nu(\alpha(t)), Y(t) \rangle = 0 = \langle X(t), \nu(\alpha(t)) \rangle \cdot \left\langle \frac{d}{dt} Y(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle = \left\langle X(t), \left\langle \frac{d}{dt} Y(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) \right\rangle$, denn wegen $X(t), Y(t) \in T_{\alpha(t)} f$ und $\nu(\alpha(t)) \in N_{\alpha(t)} f$ gilt $\langle \nu(\alpha(t)), Y(t) \rangle = 0 = \langle X(t), \nu(\alpha(t)) \rangle \cdot \langle \frac{d}{dt} Y(t), \nu(\alpha(t)) \rangle = \left\langle X(t), \left\langle \frac{d}{dt} Y(t), \nu(\alpha(t)) \right\rangle \cdot \nu(\alpha(t)) \right\rangle$. \square

Lemma (Bogenlängenparametrisierung). *Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre (für alle t sei $c'(t) \neq 0$) Raumkurve. Die Geschwindigkeit dieser nach Bogenlänge parametrisierten Kurve ist gleich 1.*

Beweis. Sei die Kurve $c(t)$ gegeben. Sei $s(t) = \int_{t_0}^t \|c'(u)\| du$ die Bogenlängenfunktion. Wegen $s'(t) = \|c'(t)\| > 0$ ist $s(t)$ umkehrbar mit Umkehrfunktion $t(s)$. Ein Parameterwechsel ist dann $\tilde{c}(s) = c(t(s))$. Dann gilt: $\tilde{c}'(s) = \frac{d}{ds} c(t(s)) = c'(t(s)) \cdot t'(s)$. Es gilt $s(t(s)) = s$, also $s'(t(s)) \cdot t'(s) = 1 \Rightarrow t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))}$. Daraus folgt dann $\|\tilde{c}'(s)\| = \left\| \frac{d}{ds} c(t(s)) \right\| = \|c'(t(s)) \cdot t'(s)\| = \left\| c'(t(s)) \cdot \frac{1}{s'(t(s))} \right\| = \left\| c'(t(s)) \cdot \frac{1}{\|c'(t(s))\|} \right\| = \|c'(t(s))\| \cdot \frac{1}{\|c'(t(s))\|} = 1$. \square

Lemma (Geodätische Krümmung). *Die geodätische Krümmung einer regulären Raumkurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, die in einer Fläche f verläuft, berechnet sich folgendermaßen:*

$$k_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)^\perp \right\rangle$$

Beweis. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve. Die Krümmung dieser Kurve berechnet man, indem man diese Raumkurve nach Bogenlänge parametrisiert und dann den Beschleunigungsvektor ausrechnet, dessen Betrag die Krümmung ist. Weil diese Raumkurve die Geschwindigkeit 1 hat, hat nur die Form der Kurve Einfluss auf den Beschleunigungsvektor (also auf die Krümmung) und nicht die Geschwindigkeit. Man rechnet: $\tilde{\gamma}''(s) = (\gamma \circ t)''(s) = (\gamma'(t(s)) \cdot t'(s))' = (\gamma''(t(s)) \cdot t'(s)) \cdot t'(s) + \gamma'(t(s)) \cdot t''(s) = \gamma''(t(s)) \cdot t'(s)^2 + \gamma'(t(s)) \cdot t''(s)$. Nun gilt nach dem Lemma (Bogenlängenparametrisierung) oben $t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$,

also $t''(s) = \frac{0 \cdot s'(t(s)) - 1 \cdot (s'(t(s)))'}{(s'(t(s)))^2} = -\frac{s''(t(s)) \cdot t'(s)}{(s'(t(s)))^2} = -\frac{\frac{d}{dt} \|\gamma'(t(s))\| \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}}{\|\gamma'(t(s))\|^2} = -\frac{\frac{d}{dt} \|\gamma'(t(s))\|}{\|\gamma'(t(s))\|^3}$. Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}''(s) &= \gamma''(t(s)) \cdot t'(s)^2 + \gamma'(t(s)) \cdot t''(s) = \frac{\gamma''(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|^2} - \frac{\gamma'(t(s)) \cdot \frac{d}{dt}\|\gamma'(t(s))\|}{\|\gamma'(t(s))\|^3} = \frac{\gamma''(t(s)) \cdot \|\gamma'(t(s))\| - \gamma'(t(s)) \cdot \frac{d}{dt}\|\gamma'(t(s))\|}{\|\gamma'(t(s))\|^2}. \\
\frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|} &= \frac{\frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|}}{\|\gamma'(t(s))\|}, \text{ also gilt dann: } \tilde{\gamma}''(s(t)) = \frac{\frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t(s(t)))}{\|\gamma'(t(s(t)))\|}}{\|\gamma'(t(s(t)))\|} = \frac{\frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}{\|\gamma'(t)\|}, \text{ was dann die Krümmung an der Stelle } t \text{ darstellt. Es verlaufe nun } \gamma \text{ in einer Fläche im Raum, die durch } f \text{ dargestellt sei, mit Einheitsnormale } \nu. \text{ Es gilt } \tilde{\gamma}'(s(t)) = (\gamma \circ t)'(s(t)) = \gamma'(t(s(t))) \cdot t'(s(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \text{ also folgt dann: } \langle \tilde{\gamma}'(s(t)), \tilde{\gamma}'(s(t)) \rangle = \left\langle \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle = 1, \text{ also } 0 = \frac{d}{dt}1 = \langle \tilde{\gamma}''(s(t)) \cdot s'(t), \tilde{\gamma}'(s(t)) \rangle + \langle \tilde{\gamma}'(s(t)), \tilde{\gamma}''(s(t)) \cdot s'(t) \rangle, \text{ also } 0 = 2 \cdot s'(t) \cdot \langle \tilde{\gamma}''(s(t)), \tilde{\gamma}'(s(t)) \rangle (s'(t) \neq 0), \text{ also } \langle \tilde{\gamma}''(s(t)), \tilde{\gamma}'(s(t)) \rangle = 0. \\
\text{Umgeschrieben gilt also } &\left\langle \frac{\frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle = 0. \text{ Das bedeutet, dass sich der Krümmungsvektor } \frac{\frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}{\|\gamma'(t)\|} \text{ in der Ebene befindet, die durch } \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \text{ und } \nu \text{ aufgespannt wird. Dabei meint } \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \text{ den von } \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \text{ in } T_p f \text{ um } 90^\circ \text{ in positiver Richtung gedrehten Vektor. Daraus folgt also } \tilde{\gamma}''(s(t)) = \frac{\frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}{\|\gamma'(t)\|} = \underbrace{\left\langle \frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \right\rangle}_{=k_g(t)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp}_{=k_n(t)} + \underbrace{\left\langle \frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \nu \right\rangle}_{=\nu} \cdot \nu, \\
\text{denn } &\left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \text{ und } \nu \text{ sind orthonormal. } k_g \text{ heißt die geodätische Krümmung und } k_n \text{ Normalkrümmung. Es gilt dann } k_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \left\langle \frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \right\rangle = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \left\langle \frac{\nabla}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} + \left\langle \frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \nu(\gamma(t)) \right\rangle \cdot \nu(\gamma(t)), \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \right\rangle. \text{ Daraus folgt: } k_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \left\langle \frac{\nabla}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \right\rangle, \text{ denn es gilt doch nämlich: } \left\langle \left\langle \frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \right\rangle \cdot \nu(\gamma(t)), \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \right\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{d}{dt}\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \right\rangle}_{=0} \cdot \underbrace{\left\langle \nu(\gamma(t)), \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp \right\rangle}_{=0}. \text{ Das war es!} \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma (Hilfssatz über Richtungsableitungen). *Seien X, Y und Z Vektorfelder im \mathbb{R}^3 . Dann gilt:*

$$D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) = D_{[X,Y]}Z$$

Beweis. Zunächst gilt $D_{e_i}e_j = 0$ und $D_{e_i}D_{e_j}Z = \partial_i\partial_j Z \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \partial_j\partial_i Z = D_{e_j}D_{e_i}Z$ für alle i, j . Seien nun $X = \sum_{i=1}^3 \xi^i e_i$, $Y = \sum_{j=1}^3 \eta^j e_j$ gegeben. Außerdem sei definiert: $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$ Also:

$$\begin{aligned}
D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) &= \sum_{i=1}^3 \xi^i D_{e_i} \left(\sum_{j=1}^3 \eta^j D_{e_j} Z \right) - \sum_{j=1}^3 \eta^j D_{e_j} \left(\sum_{i=1}^3 \xi^i D_{e_i} Z \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi^i D_{e_i}(\eta^j D_{e_j} Z) - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \eta^j D_{e_j}(\xi^i D_{e_i} Z) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi^i (\eta^j D_{e_i} D_{e_j} Z + D_{e_i} \eta^j D_{e_j} Z) - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \eta^j (\xi^i D_{e_j} D_{e_i} Z + D_{e_j} \xi^i D_{e_i} Z) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi^i \eta^j (D_{e_i} D_{e_j} Z - D_{e_j} D_{e_i} Z) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi^i \partial_i \eta^j D_{e_j} Z - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \eta^j \partial_j \xi^i D_{e_i} Z \\
&= 0 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi^i \partial_i \eta^j D_{e_j} Z - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \eta^j \partial_j \xi^i D_{e_i} Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\xi^i \partial_i \eta^j - \eta^i \partial_i \xi^j) D_{e_j} Z \\
&= D \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [(\xi^i \partial_i \eta^j - \eta^i \partial_i \xi^j) e_j] Z = D \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [\xi^i ((D_{e_i} \eta^j) e_j + 0) - \eta^i ((D_{e_i} \xi^j) e_j + 0)] Z \\
&= D \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi^i ((D_{e_i} \eta^j) e_j + \eta^j D_{e_i} e_j) - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \eta^i ((D_{e_i} \xi^j) e_j + \xi^j D_{e_i} e_j) Z \\
&= D \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi^i D_{e_i}(\eta^j e_j) - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \eta^j D_{e_j}(\xi^i e_i) Z = D_{D_X Y - D_Y X} Z = D_{[X,Y]} Z
\end{aligned}$$

Und das ist das, was zu beweisen war. \square

Satz (Gauß- und Codazzi-Mainardi-Gleichung). *Seien X, Y und Z tangentiale Vektorfelder längs eines Flächenstücks, welches durch f dargestellt sei. Dann gilt die Gauß-Gleichung:*

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = \langle LY, Z \rangle LX - \langle LX, Z \rangle LY$$

Dabei ist $R(X, Y)Z$ der sogenannte Riemann'sche Krümmungstensor. Und es gilt die Gleichung von Codazzi-Mainardi:

$$\nabla_X(LY) - \nabla_Y(LX) - L([X, Y]) = 0$$

Beweis. Wegen $\langle Y, \nu \rangle = 0$ folgt $\langle D_X Y, \nu \rangle = -\langle Y, D_X \nu \rangle = -\langle -LX, Y \rangle = \langle LX, Y \rangle$. Es gilt: $\nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X Y, \nu \rangle \cdot \nu$, also $D_X Y = \nabla_X Y + \langle D_X Y, \nu \rangle \cdot \nu = \nabla_X Y + \langle LX, Y \rangle \cdot \nu$. Man zerlegt nun in Tangential- und Normalteil. Wegen des Hilfssatzes über Richtungsableitungen gilt doch:

$$\begin{aligned} 0 &= D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z \\ &= D_X(\nabla_Y Z + \langle LY, Z \rangle \cdot \nu) - D_Y(\nabla_X Z + \langle LX, Z \rangle \cdot \nu) - D_{[X, Y]}Z \\ &= D_X \nabla_Y Z + D_X(\langle LY, Z \rangle \cdot \nu) - D_Y \nabla_X Z - D_Y(\langle LX, Z \rangle \cdot \nu) - D_{[X, Y]}Z \\ &= D_X \nabla_Y Z + X \langle LY, Z \rangle \cdot \nu + \langle LY, Z \rangle D_X \nu - D_Y \nabla_X Z - Y \langle LX, Z \rangle \cdot \nu - \langle LX, Z \rangle D_Y \nu - D_{[X, Y]}Z \\ &= D_X \nabla_Y Z + X \langle LY, Z \rangle \cdot \nu - \langle LY, Z \rangle LX - D_Y \nabla_X Z - Y \langle LX, Z \rangle \cdot \nu + \langle LX, Z \rangle LY - D_{[X, Y]}Z \end{aligned}$$

Und das ist dann äquivalent zu:

$$\begin{aligned} 0 &= [\nabla_X \nabla_Y Z + \langle LX, \nabla_Y Z \rangle \cdot \nu] + X \langle LY, Z \rangle \cdot \nu - \langle LY, Z \rangle LX - [\nabla_Y \nabla_X Z + \langle LY, \nabla_X Z \rangle \cdot \nu] - \\ &\quad Y \langle LX, Z \rangle \cdot \nu + \langle LX, Z \rangle LY - [\nabla_{[X, Y]}Z + \langle L([X, Y]), Z \rangle \cdot \nu] \end{aligned}$$

Für den Tangentialanteil gilt:

$$0 = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z - \langle LY, Z \rangle LX + \langle LX, Z \rangle LY$$

Also ist die Gauß-Gleichung bewiesen. Und der Normalanteil ist folglich:

$$0 = (\langle LX, \nabla_Y Z \rangle + X \langle LY, Z \rangle - \langle LY, \nabla_X Z \rangle - Y \langle LX, Z \rangle - \langle L([X, Y]), Z \rangle) \nu$$

Wegen $X \langle LY, Z \rangle = -\langle \nabla_X(LY), Z \rangle - \langle LY, \nabla_X Z \rangle$ (für $Y \langle LX, Z \rangle$ analog) folgt:

$$(\langle \nabla_X(LY), Z \rangle - \langle \nabla_Y(LX), Z \rangle - \langle L([X, Y]), Z \rangle) \nu = 0$$

und das impliziert $\langle \nabla_X(LY) - \nabla_Y(LX) - L([X, Y]), Z \rangle = 0$ für beliebige tangentiale Z , also:

$$\nabla_X(LY) - \nabla_Y(LX) - L([X, Y]) = 0$$

Damit ist der Beweis schließlich beendet. \square

Definition (Differentialformen). Eine Pfaffsche Form (oder 1-Form) auf einem Flächenstück, das durch f gegeben ist, ist eine Zuordnung $p \mapsto \omega_p \in (T_p f)^*$. Nun seien X_1, X_2, X_3 gegeben. Dabei seien X_1, X_2 eine Orthonormalbasis von $T_p f$ und $X_3 = \nu$ sei dann die Einheitsnormale auf der Fläche f . Man definiert dann dazu $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ als die zugehörige Dualbasis, d.h. es gilt: $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$ mit $i, j = 1, 2, 3$. Das Dachprodukt zweier 1-Formen ist eine 2-Form und folgendermaßen definiert: $\omega \wedge \eta(X, Y) = \omega(X) \cdot \eta(Y) - \eta(X) \cdot \omega(Y)$. Der Pullback einer Differentialform sieht am Beispiel einer 2-Form so aus: $\varphi^* \omega(X, Y) = \omega(d\varphi(X), d\varphi(Y))$. Die äußere Ableitung einer 1-Form $\omega(X)$ ist die 2-Form definiert durch $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$. Es gilt der Satz von Stokes: $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$. Es sei nun vorausgesetzt, dass die Differentialformen stetig differenzierbar sind. Das war es hier auch schon!

Lemma (Zusammenhangsformen). Seien X_1 und X_2 orthonormal und tangential, $X_3 = \nu$ normal an der Fläche f . Man definiert eine 1-Form ω_j^i durch $\omega_j^i(X) = \omega^i(D_X X_j)$. ω_j^i heißt dann Zusammenhangsform. Dann gilt eben:

$$D_X X_j = \sum_{i=1}^3 \omega_j^i(X) \cdot X_i \text{ und } \nabla_X X_j = \sum_{i=1}^2 \omega_j^i(X) \cdot X_i \text{ sowie } \omega_j^i = -\omega_i^j$$

Gebraucht wird später das Folgende: $\omega_j^i(X) = \langle \nabla_X X_j, X_i \rangle$ ($i, j = 1, 2$), falls die X_i tangential an f sind.

Beweis. Weil X_1, X_2 und X_3 eine Orthonormalbasis bilden, gilt: $D_X X_j = \sum_{k=1}^3 \langle D_X X_j, X_k \rangle \cdot X_k$, also $\omega_j^i(X) = \omega^i(D_X X_j) = \omega^i \left(\sum_{k=1}^3 \langle D_X X_j, X_k \rangle \cdot X_k \right) = \sum_{k=1}^3 \langle D_X X_j, X_k \rangle \cdot \omega^i(X_k) = \langle D_X X_j, X_i \rangle$, also gilt dann $D_X X_j = \sum_{i=1}^3 \omega_j^i(X) \cdot X_i$. Weiter gilt dann $\omega_j^i = -\omega_i^j$. Beweis: $0 = X \langle X_i, X_j \rangle = \langle D_X X_i, X_j \rangle + \langle X_i, D_X X_j \rangle = \omega_i^j(X) + \omega_j^i(X)$. Nach Voraussetzung sind X_1 und X_2 orthonormal und tangential sowie $X_3 = \nu$ normal an der Fläche f . Dann gilt: $\omega_j^i(X) = \omega^i(D_X X_j) = \langle D_X X_j, X_i \rangle = \langle \nabla_X X_j, X_i \rangle$ ($i, j = 1, 2$), denn der Normalanteil von $D_X X_j$ hebt sich wegen des tangentialen X_i raus. Es gilt weiter $\nabla_X X_j = \sum_{k=1}^3 \langle \nabla_X X_j, X_k \rangle \cdot X_k = \sum_{k=1}^2 \langle \nabla_X X_j, X_k \rangle \cdot X_k$ wegen $\langle \nabla_X X_j, X_3 \rangle = \langle \nabla_X X_j, \nu \rangle = 0$, also $\omega^i(\nabla_X X_j) = \omega^i \left(\sum_{k=1}^2 \langle \nabla_X X_j, X_k \rangle \cdot X_k \right) = \sum_{k=1}^2 \langle \nabla_X X_j, X_k \rangle \cdot \omega^i(X_k) = \langle \nabla_X X_j, X_i \rangle$. Daraus folgt dann also: $\omega_j^i(X) = \omega^i(D_X X_j) = \omega^i(\nabla_X X_j)$. Nochmal schön aufgeschrieben gilt noch: $\nabla_X X_j = \sum_{i=1}^2 \omega_j^i(X) \cdot X_i$. Und das war es auch schon! \square

Satz (Maurer-Cartan-Strukturgleichungen). Es gelten die folgenden Gleichungen:

$$(i) \quad d\omega_j^i + \sum_{k=1}^3 \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0 \text{ für } i, j = 1, 2$$

$$(ii) \quad d\omega_3^i + \sum_{k=1}^2 \omega_k^i \wedge \omega_3^k = 0 \text{ für } i = 1, 2$$

Beweis. Wegen $D_X D_Y X_j - D_Y D_X X_j - D_{[X,Y]} X_j = 0$ (Hilfssatz über Richtungsableitungen) folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X_i, 0 \rangle = \langle X_i, D_X D_Y X_j - D_Y D_X X_j - D_{[X,Y]} X_j \rangle \\ &= \left\langle X_i, D_X \left(\sum_{k=1}^3 \omega_j^k(Y) \cdot X_k \right) - D_Y \left(\sum_{k=1}^3 \omega_j^k(X) \cdot X_k \right) - \left(\sum_{k=1}^3 \omega_j^k([X, Y]) \cdot X_k \right) \right\rangle \\ &= \omega^i \left(D_X \left(\sum_{k=1}^3 \omega_j^k(Y) \cdot X_k \right) - D_Y \left(\sum_{k=1}^3 \omega_j^k(X) \cdot X_k \right) - \left(\sum_{k=1}^3 \omega_j^k([X, Y]) \cdot X_k \right) \right) \\ &= \omega^i \left(\left(\sum_{k=1}^3 X \omega_j^k(Y) \cdot X_k + \omega_j^k(Y) \cdot D_X X_k \right) - \left(\sum_{k=1}^3 Y \omega_j^k(X) \cdot X_k + \omega_j^k(X) \cdot D_Y X_k \right) - \left(\sum_{k=1}^3 \omega_j^k([X, Y]) \cdot X_k \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 X \omega_j^k(Y) \cdot \omega^i(X_k) - \sum_{k=1}^3 Y \omega_j^k(X) \cdot \omega^i(X_k) - \sum_{k=1}^3 \omega_j^k([X, Y]) \cdot \omega^i(X_k) + \\ &\quad \sum_{k=1}^3 \omega_j^k(Y) \cdot \omega^i(D_X X_k) - \sum_{k=1}^3 \omega_j^k(X) \cdot \omega^i(D_Y X_k) \\ &= X \omega_j^i(Y) - Y \omega_j^i(X) - \omega_j^i([X, Y]) + \sum_{k=1}^3 \omega_j^k(Y) \cdot \langle D_X X_k, X_i \rangle - \sum_{k=1}^3 \omega_j^k(X) \cdot \langle D_Y X_k, X_i \rangle \\ &= d\omega_j^i(X, Y) + \sum_{k=1}^3 \omega_j^k(Y) \cdot \omega_k^i(X) - \sum_{k=1}^3 \omega_j^k(X) \cdot \omega_k^i(Y) = d\omega_j^i(X, Y) + \sum_{k=1}^3 \omega_k^i(X) \cdot \omega_j^k(Y) - \omega_j^k(X) \cdot \omega_k^i(Y) \\ &= \left(d\omega_j^i + \sum_{k=1}^3 \omega_k^i \wedge \omega_j^k \right) (X, Y) \end{aligned}$$

Zum Beweis von (i): Ist einfach der Fall $i, j = 1, 2$. Und (ii) entspricht dem Fall $i = 1, 2$ und $j = 3$. Also gilt dann die folgende Rechnung: $d\omega_3^i + \sum_{k=1}^3 \omega_k^i \wedge \omega_3^k = d\omega_3^i + \left(\sum_{k=1}^2 \omega_k^i \wedge \omega_3^k \right) + \underbrace{\omega_3^i \wedge \omega_3^3}_{=\omega_3^i \wedge 0} = \sum_{k=1}^2 \omega_k^i \wedge \omega_3^k$, denn aus der bekannten Identität $\omega_j^i = -\omega_i^j$

(siehe Lemma (Zusammenhangsformen) oben) folgt deswegen also $\omega_3^3 = -\omega_3^3$, also $\omega_3^3 = 0$. \square

Satz (Krümmungsformen). Für eine gegebene Orthonormalbasis X_1, X_2, X_3 (X_1, X_2 , orthonormal und tangential an f sowie $X_3 = \nu$ Einheitsnormale) auf einem Flächenstück f seien die Krümmungsformen Ω_j^i definiert durch $\Omega_j^i(X, Y) = \langle R(X, Y)X_j, X_i \rangle$. Dabei gilt $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$ sowie die Gleichung:

$$\Omega_j^i(X, Y) = d\omega_j^i + \sum_{k=1}^2 \omega_k^i \wedge \omega_j^k$$

In Verbindung mit (i) in dem Satz (Maurer-Cartan-Strukturgleichungen) gilt: $\Omega_j^i = -\omega_3^i \wedge \omega_j^3$

Beweis. Nach der Gauß-Gleichung (s.o.) gilt: $\Omega_j^i(X, Y) = \langle R(X, Y)X_j, X_i \rangle = \langle \langle LY, X_j \rangle LX - \langle LX, X_j \rangle LY, X_i \rangle = \langle LY, X_j \rangle \cdot \langle LX, X_i \rangle - \langle LX, X_j \rangle \cdot \langle LY, X_i \rangle = \omega_j^3(Y) \cdot \omega_i^3(X) - \omega_j^3(X) \cdot \omega_i^3(Y) = -(-\omega_3^i(X) \cdot \omega_j^3(Y) + \omega_j^3(X) \cdot \omega_i^3(Y)) = -(\omega_3^i(X) \cdot \omega_j^3(Y) - \omega_3^i(X) \cdot \omega_3^i(Y)) = -\omega_3^i \wedge \omega_j^3(X, Y)$, denn es gilt $\omega_l^3(Z) = \langle D_Z X_l, X_3 \rangle = -\langle X_l, D_Z X_3 \rangle = -\langle X_l, D_Z \nu \rangle = -\langle X_l, -LZ \rangle = \langle X_l, LZ \rangle$. Also folgt daraus: $\Omega_j^i = -\omega_3^i \wedge \omega_j^3 = \sum_{k=1}^2 \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \sum_{k=1}^3 \omega_k^i \wedge \omega_k^3 = d\omega_j^i + \sum_{k=1}^2 \omega_k^i \wedge \omega_j^k$ (siehe Satz (Maurer-Cartan-Strukturgleichungen) unter (i)). Nun noch der Beweis für $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$: Es gilt $\Omega_j^i(X, Y) = \langle LY, X_j \rangle \cdot \langle LX, X_i \rangle - \langle LX, X_j \rangle \cdot \langle LY, X_i \rangle = -(\langle LY, X_i \rangle \cdot \langle LX, X_j \rangle - \langle LX, X_i \rangle \cdot \langle LY, X_j \rangle) = -\Omega_i^j(X, Y)$. Also ist damit der Beweis vollbracht. \square

Satz (Volumenform). Es gilt: $\int_{f(B)} K \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 = \int_{f(B)} K \, dA$.

Beweis. Zunächst einmal gilt $f^*(\omega^1 \wedge \omega^2)(u, v) = h(u, v) \, du \wedge dv$, also $f^*(\omega^1 \wedge \omega^2)(e_1, e_2)(u, v) = h(u, v)$, denn: $du \wedge dv(e_1, e_2) = 1$, wobei e_1, e_2 die Standardbasis sei. Nun ist aber folglich $h(u, v) = f^*(\omega^1 \wedge \omega^2)(e_1, e_2)(u, v) = \omega^1 \wedge \omega^2(df(e_1), df(e_2))(u, v) = \omega^1 \wedge \omega^2(\partial_1 f(u, v), \partial_2 f(u, v))$. Weil $\partial_1 f, \partial_2 f \in T_p f$ gibt es die folgende Darstellung:

$$\partial_1 f(u, v) = a_{11}(u, v) \cdot X_1(f(u, v)) + a_{21}(u, v) \cdot X_2(f(u, v)) \text{ und } \partial_2 f(u, v) = a_{12}(u, v) \cdot X_1(f(u, v)) + a_{22}(u, v) \cdot X_2(f(u, v))$$

Denn: X_1, X_2 ist nach Voraussetzung (siehe oben) eine Orthonormalbasis von $T_p f$. Damit gilt dann: $\omega^1 \wedge \omega^2(\partial_1 f(u, v), \partial_2 f(u, v)) = \omega^1(\partial_1 f(u, v)) \cdot \omega^2(\partial_2 f(u, v)) - \omega^2(\partial_1 f(u, v)) \cdot \omega^1(\partial_2 f(u, v)) = a_{11}(u, v) \cdot a_{22}(u, v) - a_{21}(u, v) \cdot a_{12}(u, v)$, denn es gilt doch, dass ω^i ($i = 1, 2$) als 1-Form im Argument linear ist, und es gilt, wie oben, $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$ ($i, j = 1, 2$). Also:

$$\omega^1 \wedge \omega^2(\partial_1 f(u, v), \partial_2 f(u, v)) = \det \begin{pmatrix} a_{11}(u, v) & a_{12}(u, v) \\ a_{21}(u, v) & a_{22}(u, v) \end{pmatrix} =: \det(A)(u, v)$$

Nun gelten die folgenden Identitäten:

1. $E(u, v) = \langle \partial_1 f(u, v), \partial_1 f(u, v) \rangle = \langle a_{11} \cdot X_1 + a_{21} \cdot X_2, a_{11} \cdot X_1 + a_{21} \cdot X_2 \rangle(u, v) = a_{11}^2(u, v) + a_{21}^2(u, v)$
2. $F(u, v) = \langle \partial_1 f(u, v), \partial_2 f(u, v) \rangle = \langle a_{11} \cdot X_1 + a_{21} \cdot X_2, a_{12} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 \rangle(u, v) = a_{11}(u, v) \cdot a_{12}(u, v) + a_{21}(u, v) \cdot a_{22}(u, v)$
3. $G(u, v) = \langle \partial_2 f(u, v), \partial_2 f(u, v) \rangle = \langle a_{12} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2, a_{12} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 \rangle(u, v) = a_{12}^2(u, v) + a_{22}^2(u, v)$

Man verifiziert ganz leicht, dass dann gilt:

$$\begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(u, v) & a_{12}(u, v) \\ a_{21}(u, v) & a_{22}(u, v) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a_{11}(u, v) & a_{12}(u, v) \\ a_{21}(u, v) & a_{22}(u, v) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt also:

$$\begin{aligned} (E \cdot G - F^2)(u, v) &= \det \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} = \det(A^T \cdot A)(u, v) = \det(A^T)(u, v) \cdot \det(A)(u, v) \\ &= \det(A)^2(u, v) = [\omega^1 \wedge \omega^2(\partial_1 f(u, v), \partial_2 f(u, v))]^2 \end{aligned}$$

Schlussendlich erhält man also:

$$h(u, v) = \omega^1 \wedge \omega^2(\partial_1 f(u, v), \partial_2 f(u, v)) = \sqrt{E \cdot G - F^2}(u, v)$$

Damit erhält man also das gewünschte Resultat, dass dann gilt:

$$\int_{f(B)} K \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 = \int_B f^*(K \cdot \omega^1 \wedge \omega^2) = \int_B (K \circ f) \cdot f^*(\omega^1 \wedge \omega^2) = \int_B (K \circ f) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} du \wedge dv = \int_{f(B)} K dA$$

□

Satz (Gauß-Bonnet, lokale Version). *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Gebiet. Durch $f : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ (injektiv) sei ein Flächenstück im Raum dargestellt, wobei der Rand $\partial f(B)$ durch die Kurve $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dargestellt sei. Diese zusammenhängende und reguläre Kurve sei dann stückweise stetig differenzierbar. Denn: An den endlich vielen Ecken $\gamma(t_i)$ ($i = 1, \dots, n+1$), wo der Tangentialvektor um den Winkel α_i ($i = 1, \dots, n$), auch orientierter Außenwinkel genannt, springt, ist γ dann nicht stetig differenzierbar, nur stetig. Dabei gilt $-\pi < \alpha_i < \pi$ ($i = 1, \dots, n$). γ verlaufe so, dass $f(B)$ zur Linken liegt. Des Weiteren ist klar, dass γ geschlossen ist, also $\gamma(0) = \gamma(t_1) = \gamma(t_{n+1}) = \gamma(L)$. Es wird unten bewiesen:*

$$\int_{f(B)} K dA + \int_{\gamma} k_g dl + \sum_{i=1}^n \alpha_i = \int_{f(B)} K dA + \int_{\partial f(B)} k_g dl + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$$

Dabei ist K die Gaußkrümmung auf der Fläche $f(B)$ und k_g die geodätische Krümmung von γ .

Beweis. Seien $X_1 = \frac{\partial f}{\partial u}$ und $X_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$ Vektorfelder längs f , also eine Orthonormalbasis von $T_p f$. Dann sei $X_3 = \nu$ die Einheitsnormale auf f . Man betrachtet nun X_1 und X_2 auf dem Rand $\partial f(B)$, also $X_i(\gamma(t)) = X_i(t)$ ($i = 1, 2$). Es gibt ein $\alpha(t)$, sodass folgende Darstellung gilt:

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \cos \alpha(t) \cdot X_1(t) + \sin \alpha(t) \cdot X_2(t) \quad \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)^\perp = -\sin \alpha(t) \cdot X_1(t) + \cos \alpha(t) \cdot X_2(t)$$

Es wird jetzt die geodätische Krümmung k_g ausgerechnet:

$$\begin{aligned} k_g(t) &= \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)^\perp \right\rangle = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \left\langle \frac{\nabla}{dt} (\cos \alpha(t) \cdot X_1 + \sin \alpha(t) \cdot X_2), -\sin \alpha(t) \cdot X_1 + \cos \alpha(t) \cdot X_2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \left\langle \cos \alpha(t) \cdot \frac{\nabla}{dt} X_1 - \alpha'(t) \cdot \sin \alpha(t) \cdot X_1 + \sin \alpha(t) \cdot \frac{\nabla}{dt} X_2 + \alpha'(t) \cdot \cos \alpha(t) \cdot X_2, -\sin \alpha(t) \cdot X_1 + \cos \alpha(t) \cdot X_2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \left[\cos^2 \alpha(t) \cdot \left\langle \frac{\nabla}{dt} X_1, X_2 \right\rangle - \sin^2 \alpha(t) \cdot \left\langle \frac{\nabla}{dt} X_2, X_1 \right\rangle + \sin^2 \alpha(t) \cdot \alpha'(t) + \cos^2 \alpha(t) \cdot \alpha'(t) \right] \end{aligned}$$

Es wurde hier verwendet: $\langle X_1, X_2 \rangle = \langle X_2, X_1 \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X_1, X_1 \right\rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X_2, X_2 \right\rangle = 0$, denn: $\langle X_i, X_i \rangle = 1$, also $0 = \frac{d}{dt} \langle X_i, X_i \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X_i, X_i \right\rangle + \left\langle X_i, \frac{\nabla}{dt} X_i \right\rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{\nabla}{dt} X_i, X_i \right\rangle$, also $\left\langle \frac{\nabla}{dt} X_i, X_i \right\rangle = 0$ ($i = 1, 2$). Es gilt nun $\left\langle \frac{\nabla}{dt} X_2, X_1 \right\rangle = -\left\langle \frac{\nabla}{dt} X_1, X_2 \right\rangle$, denn: $0 = \langle X_1, X_2 \rangle$, also $0 = \frac{d}{dt} \langle X_1, X_2 \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X_1, X_2 \right\rangle + \left\langle X_1, \frac{\nabla}{dt} X_2 \right\rangle$, also $\left\langle \frac{\nabla}{dt} X_2, X_1 \right\rangle = -\left\langle \frac{\nabla}{dt} X_1, X_2 \right\rangle$. Daraus folgt dann also:

$$k_g(t) \cdot \|\gamma'(t)\| = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X_1, X_2 \right\rangle + \alpha'(t) = -\left\langle \frac{\nabla}{dt} X_2, X_1 \right\rangle + \alpha'(t)$$

Nun: $\frac{\nabla}{dt} X(t) = \frac{\nabla}{dt} (X \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt} (X \circ \gamma)(t) - \left\langle \frac{d}{dt} (X \circ \gamma)(t), \nu(\gamma(t)) \right\rangle \cdot \nu(\gamma(t)) = dX_{\gamma(t)} \gamma'(t) - \langle dX_{\gamma(t)} \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle \cdot \nu(\gamma(t)) = (D_{\gamma'(t)} X)(\gamma(t)) - \langle (D_{\gamma'(t)} X)(\gamma(t)), \nu(\gamma(t)) \rangle \cdot \nu(\gamma(t)) = (\nabla_{\gamma'(t)} X)(\gamma(t))$. Dies rechtfertigt folgende Notation: $\left\langle \frac{\nabla}{dt} X_2, X_1 \right\rangle = \left\langle \nabla_{\gamma'(t)} X_2, X_1 \right\rangle$. Jetzt folgt insgesamt also:

$$k_g(t) \cdot \|\gamma'(t)\| = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X_1, X_2 \right\rangle + \alpha'(t) = -\left\langle \frac{\nabla}{dt} X_2, X_1 \right\rangle + \alpha'(t) = -\left\langle \nabla_{\gamma'(t)} X_2, X_1 \right\rangle + \alpha'(t) = -\omega_2^1(\gamma'(t)) + \alpha'(t)$$

Letztes Gleichheitszeichen: siehe Lemma (Zusammenhangsformen). Man kann also in Zukunft benutzen:

$$k_g(t) \cdot \|\gamma'(t)\| + \omega_2^1(\gamma'(t)) = \alpha'(t)$$

Wegen der Gauß-Gleichung (s.o.) $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \langle LY, Z \rangle LX - \langle LX, Z \rangle LY$ gilt also: $\Omega_2^1(X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle = \langle \langle LX_2, X_2 \rangle LX_1 - \langle LX_1, X_2 \rangle LX_2, X_1 \rangle = \langle LX_2, X_2 \rangle \cdot \langle LX_1, X_1 \rangle - \langle LX_1, X_2 \rangle \cdot \langle LX_2, X_1 \rangle$. Also folgt daraus dann:

$$\Omega_2^1(X_1, X_2) = \det \begin{pmatrix} \langle LX_1, X_1 \rangle & \langle LX_1, X_2 \rangle \\ \langle LX_2, X_1 \rangle & \langle LX_2, X_2 \rangle \end{pmatrix} = \det(L) = K$$

Nun gilt damit: $\Omega_2^1(X_1, X_2) = K = K \cdot 1 = K \cdot \omega^1 \wedge \omega^2(X_1, X_2)$, und weil X_1, X_2 eine Orthonormalbasis ist, folgt also $\Omega_2^1 = K \cdot \omega^1 \wedge \omega^2$.

Weiter gilt wegen des Satzes (Krümmungsformen): $\Omega_2^1 = d\omega_2^1 + \omega_1^1 \wedge \omega_2^1 + \omega_2^1 \wedge \omega_2^2 = d\omega_2^1 + 0 \wedge \omega_2^1 + \omega_2^1 \wedge 0 = d\omega_2^1 + 0 + 0 = d\omega_2^1$.

Mit $k_g(t) \cdot \|\gamma'(t)\| + \omega_2^1(\gamma'(t)) = \alpha'(t)$ folgt damit:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) \cdot \|\gamma'(t)\| dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_2^1(\gamma'(t)) dt}_{= \int_{\gamma} k_g dl} = \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha'(t) dt = \sum_{i=1}^n \alpha(t_{i+1} - 0) - \alpha(t_i + 0) \stackrel{\text{Hopf}}{=} 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Wegen $\sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_2^1(\gamma'(t)) dt \stackrel{*1}{=} \int_{\gamma} \omega_2^1 = \int_{\partial f(B)} \omega_2^1 \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{f(B)} d\omega_2^1 \stackrel{\text{s.o.}}{=} \int_{f(B)} \Omega_2^1 \stackrel{\text{s.o.}}{=} \int_{f(B)} K \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 \stackrel{*2}{=} \int_{f(B)} K dA$ folgt also

die Behauptung des Satzes. Noch die Begründung von $*1$: $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma(I)} \omega = \int_I \gamma^* \omega$. Nun ist $\gamma^* \omega(t) = h(t) dt$, also $\gamma^* \omega(1)(t) = h(t)$ wegen $dt(1) = 1$, also $h(t) = \omega(d\gamma(1))(t) = \omega(\gamma'(t))$, also: $\int_{\gamma} \omega = \int_I \omega(\gamma'(t)) dt$. Zu $*2$: siehe Satz (Volumenform). Es wurde also insgesamt bewiesen:

$$\int_{f(B)} K dA + \int_{\gamma} k_g dl + \sum_{i=1}^n \alpha_i = \int_{f(B)} K dA + \int_{\partial f(B)} k_g dl + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$$

Und damit ist der Satz von Gauß-Bonnet in der lokalen Version bewiesen! \square

Satz (Gauß-Bonnet, erweiterte Version). *Es sei $R \subseteq S$ ein reguläres abgeschlossenes Gebiet einer orientierten Fläche und C_1, \dots, C_n die geschlossenen, einfachen, stückweise regulären Kurven, die den Rand ∂R von R bilden. Man nehme an, alle C_i sind positiv orientiert, und sei $\{\theta_1, \dots, \theta_p\}$ die Menge der Außenwinkel der Kurven C_1, \dots, C_n . Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g dl + \int_R K dA + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \cdot \chi(R)$$

Beweis. Sei das abgeschlossene Gebiet R trianguliert und der Rand eines jeden Dreiecks positiv orientiert. Man beachte, dass bei Dreiecken, die eine Kante gemeinsam haben, die entgegengesetzten Orientierungen dafür sorgen, dass die Integrale über diese Kante sich herausheben. Es gilt bereits der lokale Satz von Gauß-Bonnet insbesondere für Dreiecke. Man beachte, dass alle inneren Seiten zweimal in entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden. Nun addiert man die Ergebnisse für die Dreiecke der Triangulierung auf und erhält:

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g dl + \int_R K dA + \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi F$$

Dabei sei F die Anzahl der Dreiecke der Triangulierung und $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ die Außenwinkel des Dreiecks T_j . Man führt nun die Innenwinkel des Dreiecks T_j ein, gegeben durch $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$. Also:

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = \sum_{j,k=1}^{F,3} \pi - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk} = 3F \cdot \pi - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk}$$

Sei K_a die Anzahl der äußeren Kanten, K_i die der inneren und sei E_a die Anzahl der äußeren Eckpunkte, und E_i die der inneren. Da die Kurven C_i geschlossen sind, gilt $K_a = E_a$. Darüber hinaus kann man mit vollständiger Induktion zeigen, dass $3F = 2K_i + K_a$ gilt. Also gilt deshalb:

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi K_i + \pi K_a - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk}$$

Man bemerkt nun, dass die äußeren Ecken entweder Ecken einer Kurve C_i sind, oder Ecken, die durch Triangulierung entstanden sind. Man setzt dann: $E_a = E_{ac} + E_{at}$, wobei E_{ac} die Anzahl der Ecken der Kurve C_i ist, und E_{at} die Anzahl der äußeren Ecken der Triangulierung, die nicht gleichzeitig Ecken einer Kurve C_i sind. Da die Summe der Winkel um jede innere Ecke gleich 2π ist, erhält man:

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi K_i + \pi K_a - \left(2\pi E_i + \pi E_{at} + \left(\pi E_{ac} - \sum_{l=1}^p \theta_l \right) \right) = 2\pi K_i + \pi K_a - 2\pi E_i - \pi E_{ac} - \pi E_{at} + \sum_{l=1}^p \theta_l$$

Nun wird zum obigen Ausdruck πK_a addiert und wieder subtrahiert. Also folgt unter Beachtung von $K_a = E_a$:

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi K_i + 2\pi K_a - 2\pi E_i - \pi E_a - \pi E_{ac} - \pi E_{at} + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi K - 2\pi E + \sum_{l=1}^p \theta_l$$

Zusammengefasst gilt also folgendes:

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g dl + \int_R K dA + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \cdot (F - K + E) = 2\pi \cdot \chi(R)$$

Damit ist die Behauptung des Satzes also bewiesen. \square

Satz (Gauß-Bonnet, globale Version). *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand, die also orientierbar ist. Dann gilt die folgende Identität:*

$$\int_M K dA = 2\pi \cdot \chi(M)$$

Dabei ist $\chi(M) \in \mathbb{Z}$ die Euler-Charakteristik von M .

Beweis. Wegen der Kompaktheit kann M durch endlich viele Teilmengen überdeckt werden, die sich als Bild eines Flächenstücks beschreiben lassen. Daher kann M in endlich viele Teile M_1, \dots, M_m zerlegt werden, so dass dann folgendes gilt:

1. $M = \bigcup_{i=1}^m M_i$
2. $M_i \cap M_j$ enthält für $i \neq j$ keine inneren Punkte, sondern höchstens Randpunkte von M_i oder M_j
3. Jedes M_i ist ein Kompaktum mit stückweise glattem und zusammenhängendem Rand (sowie mit endlich vielen Ecken und Kanten mit zugehörigen Außenwinkeln α_{ij})

Wegen der existierenden Orientierung der kompakten Untermannigfaltigkeit ohne Rand gilt für jedes $i = 1, \dots, m$:

$$\int_{M_i} K dA + \int_{\partial M_i} \kappa_g dl = 2\pi - \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}$$

Dabei heben sich bei der Summe über alle i die Randteile auf, d.h. es gilt $\sum_{i=1}^m \int_{\partial M_i} \kappa_g dl = 0$. Man erhält dann:

$$\int_M K dA = 2\pi m - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} = 2\pi m - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\pi - \beta_{ij}) = 2\pi \cdot (\text{Zahl der Ecken} - \text{Zahl der Kanten} + m) =: 2\pi \cdot \chi(M)$$

Die vorletzte Gleichung gilt, weil in jeder Ecke die Innenwinkelsumme gleich 2π und folglich $\sum_{i,j} \beta_{ij}$ gleich der Anzahl der Ecken, multipliziert mit 2π , ist. Die Anzahl aller Summanden in der Summe ist gleich dem Doppelten der Zahl der Kanten, denn jede Kante kommt in genau zwei der M_i vor und jedes M_i hat genauso viele Ecken wie Kanten, also ist $\sum_{i,j} \pi$ gleich der Anzahl der Kanten, multipliziert mit 2π . \square

Korollar (1). *Eine kompakte Fläche positiver Krümmung ($K > 0$) ohne Rand ist homöomorph zu einer Sphäre.*

Beweis. Es gilt $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_M K dA = \chi(M) = 2 - 2 \cdot g$ (g sei die Anzahl der Löcher der geschlossenen Fläche). Ist $K > 0$, dann folgt $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_M K dA > 0$, also $g = 0$, denn nur dann ist $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_M K dA > 0$. Also hat man es topologisch mit einer Sphäre, die die Euler-Charakteristik 2 hat, zu tun. \square

Korollar (2). *Wenn es zwei einfache geschlossene Geodätische Γ_1 und Γ_2 auf einer kompakten zusammenhängenden Fläche S ohne Rand mit positiver Krümmung ($K > 0$) gibt, so schneiden sich Γ_1 und Γ_2 .*

Beweis. Zunächst ist unter den Voraussetzungen für S festzustellen, dass S nach Korollar 1 homöomorph zu einer Sphäre ist. Würden sich Γ_1 und Γ_2 nicht schneiden, so wäre die aus Γ_1 und Γ_2 gebildete Menge der Rand eines abgeschlossenen Gebietes R , dessen Euler-Charakteristik $0 = \chi(R)$ ist. Nun gilt nach Gauß-Bonnet (erweiterte Version): $\int_R K dA + \int_{\partial R} \kappa_g dl + 0 = 2\pi \cdot \chi(R) \Leftrightarrow \int_R K dA + 0 + 0 = 2\pi \cdot 0$, also $\int_R K dA = 0$, im Widerpruch dazu, dass $K > 0$ gilt. \square

Korollar (3). *Es sei S eine orientierbare Fläche mit Krümmung kleiner oder gleich Null. Dann können sich zwei Geodätische γ_1 und γ_2 , die an einem Punkt $p \in S$ beginnen, nicht in einem solchen Punkt $q \in S$ treffen, dass die Spuren von γ_1 und γ_2 den Rand eines einfachen abgeschlossenen Gebiets R von S bilden.*

Beweis. Man nimmt das Gegenteil an. Nach dem Satz von Gauß-Bonnet in der lokalen Version gilt (R ist einfach):

$$\int_R K dA + \int_{\partial R} \kappa_g dl + \theta_1 + \theta_2 = \int_R K dA + 0 + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$$

Denn Geodätische haben die geodätische Krümmung Null. θ_1 und θ_2 seien die Außenwinkel des abgeschlossenen Gebietes R . Da die Geodätischen γ_1 und γ_2 nicht tangential sein können, gilt $\theta_i < \pi$ ($i = 1, 2$). Nun ist aber $K \leq 0$, also $\int_R K dA \leq 0$, aber $2\pi - \theta_1 - \theta_2 > 0$, also ein Widerspruch! Gilt $\theta_1 = \theta_2 = 0$, so bilden die Spuren der Geodätischen γ_1 und γ_2 eine einfache geschlossene Geodätische von S . Aus $\theta_1 = \theta_2 = 0$ folgt ein Widerspruch: $\int_R K dA \leq 0$, aber $2\pi - \theta_1 - \theta_2 = 2\pi - 0 - 0 = 2\pi$. Das heißt, dass es auf einer Fläche nicht positiver Krümmung keine einfache geschlossene Geodätische geben kann, die Rand eines einfachen abgeschlossenen Gebietes ist. \square

Korollar (4). Auf einem Zylindermantel S mit Gauß'scher Krümmung $K < 0$, gibt es höchstens eine einfache geschlossene Kurve, die in jedem Punkt die geodätische Krümmung 0 hat.

Beweis. Sei eine einfach geschlossene Geodätische Γ auf einem Zylindermantel S mit Gauß-Krümmung $K < 0$ gegeben. Nach Korollar 3 folgt, dass es auf einem Zylindermantel wegen $K < 0$ keine einfach geschlossene Geodätische geben kann, die ein einfach geschlossenes Gebiet begrenzt. Also muss eine einfach geschlossene Geodätische auf dem Zylindermantel einmal geschlossen um den Zylindermantel herum verlaufen. Sei eine weitere einfach geschlossene Geodätische Γ' auf S gegeben. Auch Γ' läuft einmal um S herum. Nun dürfen sich Γ und Γ' in S nicht schneiden, denn sonst würden Γ und Γ' als Geodätische ein geodätisches Zweck begrenzen, was nach Korollar 3 wegen $K < 0$ nicht geht. Weil sich Γ und Γ' auf S nicht schneiden, begrenzen sie einen Zylindermantel R mit $\chi(R) = 0$. Es folgt dann: $\int_R K dA = \int_R K dA + 0 + 0 = \int_R K dA + \int_{\partial R} \kappa_g dl + 0 = 2\pi \cdot \chi(R) = 2\pi \cdot 0 = 0$, also $\int_R K dA = 0$, im Widerspruch zu $K < 0$. \square

Korollar (Theorema Elegantissimum). Es sei D ein geodätisches Dreieck (d.h. die Seiten von D sind Geodätische) in einer orientierten Fläche S . $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ seien die Außenwinkel von D und $\varphi_1 = \pi - \theta_1, \varphi_2 = \pi - \theta_2, \varphi_3 = \pi - \theta_3$ die Innenwinkel. Dann gilt also die folgende Formel:

$$\int_D K dA = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \pi$$

Es folgt dann also insbesondere das Folgende: Für ein sphärisches Dreieck ($K = \frac{1}{r^2}$) gilt: $A_{\text{sphärisches } D.} = \int_{sD} 1 dA = [(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \pi] \cdot r^2$; für ein hyperbolisches Dreieck ($K = -\frac{1}{r^2}$) gilt: $-A_{\text{hyperbolisches } D.} = \int_{hD} -1 dA = [(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \pi] \cdot r^2 \Leftrightarrow A_{\text{hyperbolisches } D.} = [\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)] \cdot r^2$.

Beweis. Nach dem Satz von Gauß-Bonnet in der lokalen Version gilt $\int_D K dA + \int_{\partial D} \kappa_g dl + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \int_D K dA + 0 + (\pi - \varphi_1) + (\pi - \varphi_2) + (\pi - \varphi_3) = 2\pi \Leftrightarrow \int_D K dA = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \pi$. \square

Der allgemeine Satz von Stokes

[Zurück zur Liste]

Satz. Sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M . Es sei auf M eine Orientierung gegeben. ∂M sei mit der induzierten Orientierung versehen. Weiter sei ω eine $(n-1)$ -Form auf M mit kompaktem Träger und $d\omega$ ihre äußere Ableitung. Dann gilt die folgende Formel:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}$$

Beweis. Sei $I_k = (a_k, b_k)$ ein offenes Intervall für $k = 1, 2, \dots, n$. Setze:

$$\tilde{I}_1 = I_1 \cap (-\infty, 0], Q = \prod_{k=1}^n I_k, \tilde{Q} = Q \cap \mathbb{R}_-^n = \tilde{I}_1 \times I_2 \times \dots \times I_n, \partial \tilde{Q} = Q \cap \partial \mathbb{R}_-^n = (I_1 \cap \{0\}) \times I_2 \times \dots \times I_n$$

Dabei sei $\mathbb{R}_-^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$. Dann ist \tilde{Q} eine orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial \tilde{Q}$. Nun wird der Satz von Stokes für eine n -Form ω zunächst auf Q mit kompaktem Träger bewiesen: Fall 1: $a_1 < 0 < b_1$. Die $(n-1)$ -Form ω hat die folgende Darstellung:

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Und die äußere Ableitung davon lautet:

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Nach dem Satz von Fubini gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{Q}} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot \int_{\tilde{I}_1 \times I_2 \times \dots \times I_n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n \\ &= \underbrace{\int_{I_2 \times \dots \times I_n} \left(\int_{a_1}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n}_{=: \mathcal{I}_1} + \underbrace{\sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} \cdot \int_{\tilde{I}_1 \times I_2 \times \dots \times I_{i-1} \times I_{i+1} \times \dots \times I_n} \left(\int_{I_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n}_{=: \mathcal{I}_2} \end{aligned}$$

Als nächstes wird der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewandt:

$$\mathcal{I}_1 = \int_{I_2 \times \dots \times I_n} f_1(0, x_2, \dots, x_n) - f_1(a_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

und

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} \cdot \int_{\tilde{I}_1 \times I_2 \times \dots \times I_{i-1} \times I_{i+1} \times \dots \times I_n} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n$$

Da der Träger $\text{Tr}(\omega) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \subseteq Q$ kompakt ist, folgt:

$$f_1(a_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

und für alle $i \geq 2$:

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$$

Daraus folgt:

$$\int_{\tilde{Q}} d\omega = \int_{I_2 \times \dots \times I_n} f_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{\partial \tilde{Q}} \omega$$

Fall 2: $0 \leq a_1$. In diesem Fall sind \tilde{Q} und $\partial \tilde{Q}$ leer und die Integrale auf beiden Seiten gleich 0. Fall 3: $b_1 \leq 0$. Dann tritt b_1 in den obigen Ausdrücken an die Stelle von 0. Also gilt:

$$\int_{\tilde{Q}} d\omega = \int_{I_2 \times \dots \times I_n} f_1(b_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

Wieder ist $f_1(b_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Da $\partial \tilde{Q} = \emptyset$ ist, sind auch in diesem Fall beide Integrale gleich 0. Damit ist der Satz für $M = \tilde{Q}$ bewiesen. Nun wird der allgemeine Fall der n -dimensionalen glatten orientierten Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M und einer $(n-1)$ -Form ω mit kompakten Träger betrachtet. Wähle nun einen der Orientierung entsprechenden orientierten Atlas $\mathcal{A} = \{h_i : U_i \rightarrow V_i : i \in I\}$ mit der Eigenschaft, dass alle V_i von der Gestalt \tilde{Q}_i für einen geeigneten offenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ sind. Sei $\{e_i : i \in I\}$ eine der offenen Überdeckung $\{U_i : i \in I\}$ von M untergeordnete Teilung der Eins. Das bedeutet, dass es für jedes $x \in M$ eine Umgebung U gibt, so dass auf dieser für alle $i \in I$ bis auf endlich viele Ausnahmen $e_i(x) = 0$ ist. Außerdem gilt $\sum_{i \in I} e_i = 1$ und für jedes $i \in I$ ist der Träger $\text{Tr}(e_i)$ in U_i enthalten. Es ist $\partial \mathcal{A} = \{h_i|_{U_i \cap \partial M} : U_i \cap \partial M \rightarrow V_i \cap \partial \mathbb{R}^n\}$ ein der auf ∂M induzierten Orientierung entsprechender orientierter Atlas für ∂M und $\{e_i|_{\partial M} : i \in I\}$ ist eine der Überdeckung $\{U_i \cap \partial M : i \in I\}$ untergeordnete Teilung der Eins auf ∂M . Mit diesem Rüstzeug kann man den allgemeinen Fall nun durch Rückführung auf den eben bewiesenen Spezialfall beweisen:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_{i \in I} e_i \cdot \omega\right) \\ &= \sum_{i \in I} \int_M d(e_i \cdot \omega) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{U_i} d(e_i \cdot \omega)|_{U_i} \\ &= \sum_{i \in I} \int_{V_i} (h_i^{-1})^* d(e_i \cdot \omega)|_{U_i} \\ &= \sum_{i \in I} \int_{V_i} d((h_i^{-1})^*(e_i \cdot \omega)|_{U_i}) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\partial V_i} ((h_i^{-1})^*(e_i \cdot \omega)|_{U_i})|_{\partial V_i} \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\partial V_i} ((h_i|_{U_i \cap \partial M})^{-1})^*(e_i|_{U_i \cap \partial M} \cdot \omega|_{U_i \cap \partial M}) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{U_i \cap \partial M} (e_i|_{U_i \cap \partial M} \cdot \omega|_{U_i \cap \partial M}) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\partial M} (e_i|_{\partial M} \cdot \omega|_{\partial M}) \\ &= \int_{\partial M} \left(\sum_{i \in I} e_i|_{\partial M} \cdot \omega|_{\partial M} \right) \\ &= \int_{\partial M} \omega|_{\partial M} \end{aligned}$$

Und damit ist der Beweis des Satzes auch schon fertig. \square

Der Satz von de Rham

[Zurück zur Liste]

Es wird nun die de Rham-Kohomologie definiert:

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\Omega^k(M)$ die Menge der k -Formen auf M . Der de Rham-Komplex $(\Omega^k(M), d^k)$ ist der Kokettenkomplex

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

Dabei ist $d^k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ die Cartan-Ableitung. Es gilt die Komplexeigenschaft $d^{k+1} \circ d^k = 0$, d.h. es gilt:

$$\text{bild}(d^{k-1}) \subseteq \text{kern}(d^k)$$

1. Eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt geschlossen, falls $d^k \omega = 0$, also $\omega \in \text{kern}(d^k)$.
2. Eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt exakt, falls es ein $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ gibt mit $d^{k-1} \eta = \omega$, also $\omega \in \text{bild}(d^{k-1})$.

$$H_{dR}^k(M) = \frac{\text{kern}(d^k)}{\text{bild}(d^{k-1})} = \frac{\{\text{geschlossene } k\text{-Formen auf } M\}}{\{\text{exakte } k\text{-Formen auf } M\}}$$

Diesen Quotientenraum kann man nämlich definieren wegen der oben geltenden Teilmengenrelation. $H_{dR}^k(M)$ heißt die k -te de Rham-Kohomologiegruppe von M . Nun heißt $H_{dR}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_{dR}^k(M)$ die de Rham-Kohomologie von M .

$$[\omega] = \omega + d^{k-1} \Omega^{k-1}(M) \in H_{dR}^k(M)$$

heißt die Kohomologiekasse von der geschlossenen k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$.

Es wird nun die glatte Singuläre Homologie definiert:

Sei für \mathbb{R}^∞ nun e_1, e_2, e_3, \dots die Standardbasis und $e_0 = 0$. M sei wieder n -dimensional. Dann ist ein Standard k -Simplex folgendermaßen definiert durch:

$$\Delta_k = \left\{ x = \sum_{i=0}^k \lambda_i e_i : \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

Weiterhin sei definiert:

$$f_{i,k} := [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k] : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$$

Man nennt $f_{i,k}$ auch die i -te Seite von Δ_k . Ein glattes singuläres k -Simplex ist dann eine glatte Abbildung $\sigma : \Delta_k \rightarrow M$. Sei $S_k^\infty(M)$ die Menge der glatten singulären k -Simplices. Dann ist $C_k^\infty(M)$ definiert als der freie \mathbb{R} -Modul mit der Menge $S_k^\infty(M)$ ($k \geq 0$) als Basis. Also ist ein Element aus $C_k^\infty(M)$ eine formale Summe $\sum_{\sigma \in S_k^\infty(M)} r_\sigma \cdot \sigma$, wobei nur endlich viele der Koeffizienten r_σ von Null verschieden sind. Sie heißt glatte singuläre k -Kette. Der Rand von σ ist:

$$\partial_k : S_k^\infty(M) \rightarrow S_{k-1}^\infty(M), \sigma \mapsto \partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot (\sigma \circ f_{i,k})$$

Für ein Element $c \in C_k^\infty(M)$ setzt man dann:

$$\partial_k : C_k^\infty(M) \rightarrow C_{k-1}^\infty(M), c = \sum_{\sigma \in S_k^\infty(M)} r_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in S_k^\infty(M)} r_\sigma \cdot \partial_k(\sigma)$$

Mit ∂_k erhält man folglich:

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1}^\infty(M) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k^\infty(M) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}^\infty(M) \longrightarrow \cdots$$

Dabei gilt $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$. Außerdem erhält man daraus:

$$\cdots \longrightarrow \text{hom}(C_{k-1}^\infty(M), \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta_{k-1}} \text{hom}(C_k^\infty(M), \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta_k} \text{hom}(C_{k+1}^\infty(M), \mathbb{R}) \longrightarrow \cdots$$

Man definiert damit dann folgendes ($\delta_k \circ \delta_{k-1} = 0$):

$$H_{\text{sing}, \infty}^k(M, \mathbb{R}) = \frac{\text{kern}(\delta_k)}{\text{bild}(\delta_{k-1})}$$

Dies ist die k -te glatte singuläre Kohomologiegruppe von M .

$$H_{\text{sing}, \infty}^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_{\text{sing}, \infty}^k(M, \mathbb{R})$$

heißt die glatte singuläre Homologie von M .

Es wird nun die de Rham-Abbildung definiert:

Man definiert hier die folgende Abbildung:

$$\Psi : \Omega^k(M) \rightarrow \text{hom}(C_k^\infty(M), \mathbb{R}), \omega \mapsto \left(c \mapsto \int_c \omega = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \cdot \int_{\sigma} \omega = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \cdot \int_{\Delta_k} \sigma^* \omega \right)$$

Es gilt dann, dass das folgende Diagramm mit der Kettenabbildung Ψ kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Omega^{k-1}(M) & \xrightarrow{d^{k-1}} & \Omega^k(M) & \xrightarrow{d^k} & \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \cdots & \longrightarrow & \text{hom}(C_{k-1}^\infty(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta_{k-1}} & \text{hom}(C_k^\infty(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta_k} & \text{hom}(C_{k+1}^\infty(M), \mathbb{R}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

X heißt de Rham, falls $H_{dR}^k(X) \rightarrow H_{\text{sing}, \infty}^k(X, \mathbb{R})$ für $k \geq 0$ ein Isomorphismus ist.

Lemma (1). Wenn $F : X \rightarrow Y$ ein Diffeomorphismus ist, dann, wenn X de Rham ist, ist auch Y de Rham.

Beweis. Sei $F : X \rightarrow Y$ eine glatte Abbildung, dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^k(Y) & \xrightarrow{F^*} & H_{dR}^k(X) \\ \Psi^* \downarrow & & \downarrow \Psi^* \\ H_{\text{sing}, \infty}^k(Y, \mathbb{R}) & \xrightarrow{F^*} & H_{\text{sing}, \infty}^k(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

Weil F ein Diffeomorphismus ist, ist die induzierte Abbildung F^* ein Isomorphismus und da X de Rham ist, ist Ψ_X^* ebenfalls ein Isomorphismus. Nun ist $\Psi_Y^* = (F^*)^{-1} \circ \Psi_X^* \circ F^*$ als Verkettung von Isomorphismen ein Isomorphismus von $H_{dR}^k(Y)$ nach $H_{\infty}^k(Y, \mathbb{R})$, also Y ist de Rham. \square

Es folgt nun der Beweis des Satzes von de Rham:

Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Diese Überdeckung heißt de Rham-Überdeckung, wenn alle U_i de Rham sind und alle endliche Schnitte der U_i ebenfalls de Rham sind. Eine de Rham-Überdeckung, die zusätzlich eine Basis der Topologie von M ist, wird dann de Rham-Basis genannt.

Lemma (2). Jede konvexe offene Menge des \mathbb{R}^n ist de Rham.

Beweis. Sei U diese konvexe offene Menge aus dem \mathbb{R}^n . Weil diese Menge nullhomotop ist und wegen der Homotopieinvarianz der Homologien, gilt also $H_{dR}^k(U) = H_{dR}^k(\{\bullet\}) = 0$ und $H_{\text{sing}, \infty}^k(U, \mathbb{R}) = H_{\text{sing}, \infty}^k(\{\bullet\}, \mathbb{R}) = 0$ für $k > 0$, nach dem Dimensionsaxiom für Homologien. Also hat man in diesem Fall trivialerweise eine Isomorphie mittels Ψ^* . Wenn allerdings $k = 0$ ist, dann gilt bekanntermaßen $H_{dR}^0(\{\bullet\}) = \mathbb{R}$ und $H_{\text{sing}, \infty}^0(\{\bullet\}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Man hat nun die Abbildung $\Psi^* : \{\text{konstante Funktionen}\} = H_{dR}^0(\{\bullet\}) \rightarrow H_{\text{sing}, \infty}^0(\{\bullet\}, \mathbb{R})$, also ($f \cong c_0$): $\Psi^*[f] = [\Psi(f)] = [c \mapsto \int_c f] = \left[c \mapsto \sum_{\sigma} r_{\sigma} \cdot \int_{\sigma} f \right] = \left[c \mapsto \sum_{\sigma} r_{\sigma} \cdot \int_{\Delta_0} \sigma^* f \right] = \left[c \mapsto \sum_{\sigma} r_{\sigma} \cdot (f \circ \sigma)(0) \right] = \left[c \mapsto c_0 \cdot \sum_{\sigma} r_{\sigma} \right] = [c \mapsto c_0 \cdot r_0] \cong [c_0 \cdot r_0]$, also hat man auch hier ein Isomorphismus. Damit ist folglich bewiesen, dass U de Rham ist. \square

Lemma (3). Wenn M eine endliche de Rham-Überdeckung hat, dann ist M de Rham.

Beweis. Man zeigt diese Behauptung mit vollständiger Induktion über die endliche Anzahl k der Mengen der de Rham-Überdeckung. Für $k = 1$ ist der Fall klar und den Fall $k = 2$ zeigt man so: Sei also $M = U \cup V$ mit: $U, V, U \cap V$ sind de Rham. Man benötigt hier die Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{dR}^{k-1}(U) \oplus H_{dR}^{k-1}(V) & \longrightarrow & H_{dR}^{k-1}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{dR}^k(M) & \longrightarrow & H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) & \longrightarrow & H_{dR}^k(U \cap V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{sing}, \infty}^{k-1}(U, \mathbb{R}) \oplus H_{\text{sing}, \infty}^{k-1}(V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{\text{sing}, \infty}^{k-1}(U \cap V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{\text{sing}, \infty}^k(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{\text{sing}, \infty}^k(U, \mathbb{R}) \oplus H_{\text{sing}, \infty}^k(V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{\text{sing}, \infty}^k(U \cap V, \mathbb{R}) \end{array}$$

Weil also U, V und $U \cap V$ de Rham sind, sind der 1., 2., 4. und 5. senkrechte Pfeil Isomorphismen. Aus dem Fünferlemma folgt, dass dann auch der senkrechte Pfeil in der Mitte, also der 3., ein Isomorphismus darstellt. Das bedeutet also, dass M de Rham ist. Gelte nun die Behauptung für ein $k \geq 1$. Setze $U = U_1 \cup \dots \cup U_k$ und $V = U_{k+1}$. Nach Induktions-Voraussetzung sind U und V de Rham. $U \cap V = (U_1 \cap U_{k+1}) \cup \dots \cup (U_k \cap U_{k+1})$ ist de Rham, weil die Schnitte de Rham sind (Eigenschaften einer de Rham-Überdeckung) und man über k Mengen vereinigt (I.-V.). Also: $U \cup V = U_1 \cup \dots \cup U_k \cup U_{k+1}$ ist de Rham. \square

Lemma (4). Ist $\{X_j\}$ eine abzählbare disjunkte Sammlung von Mannigfaltigkeiten, die de Rham sind, dann ist ihre disjunkte Vereinigung de Rham. Der Beweis dafür wird jetzt erbracht:

Beweis. Sei $X = \coprod_j X_j$ und seien die Inklusionsabbildungen $i_j : X_j \rightarrow X$ gegeben. Die Abbildung $i = (i_1, i_2, i_3, \dots)$ induziert die Isomorphismen (φ und φ') zwischen $\bigoplus_j H_{dR}^k(X_j)$ und $H_{dR}(X)$ sowie zwischen $\bigoplus_j H_{\text{sing},\infty}^k(X_j, \mathbb{R})$ und $H_{\text{sing},\infty}^k(X, \mathbb{R})$. Weil nach Voraussetzung die X_j de Rham sind, hat man die Isomorphismen $\Psi_j^* : H_{dR}^k(X_j) \rightarrow H_{\text{sing},\infty}^k(X_j, \mathbb{R})$. Man benutzt im folgenden Verlauf, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_j H_{dR}^k(X_j) & \xrightarrow{\varphi} & H_{dR}^k(X) \\ \bigoplus_j \Psi_j^* \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \bigoplus_j H_{\text{sing},\infty}^k(X_j, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi'} & H_{\text{sing},\infty}^k(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

Da das Diagramm kommutiert gilt: $\Phi = \varphi' \circ \left(\bigoplus_j \Psi_j^* \right) \circ \varphi^{-1} : H_{dR}^k(X) \rightarrow H_{\text{sing},\infty}^k(X, \mathbb{R})$. Nun ist Φ als Verkettung von Isomorphismen selbst ein Isomorphismus, also folgt daraus, dass X de Rham ist. \square

Proposition. Auf jeder glatten n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M existiert eine positive glatte Funktion f mit der Eigenschaft $f^{-1}((-\infty, c])$ ist kompakt für jedes $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. M hat eine abzählbare Überdeckung $\{V_i\}$ von offenen Mengen, deren Abschluss kompakt ist. Dies realisiert man durch die Urbilder mittels der Kartendiffeomorphismen von offenen Bällen des \mathbb{R}^n mit rationalen Mittelpunkten und Radien aus den rationalen Zahlen. Sei dann $\{f_i\}$ (glatte Funktionen) eine der Überdeckung untergeordnete Partition der Eins. Es gilt also $0 \leq f_i \leq 1$, $\sum_i f_i = 1$ und $\text{supp}(f_i) \subseteq V_i$ sowie: Für jeden Punkt in M gibt es eine Umgebung, in der nur endlich viele f_i von Null verschieden sind. Man definiert nun $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot f_i(x)$. f ist dann auch glatt, denn es wird nur über endlich viele $f_i(x)$ summiert. $f(x)$ ist positiv, denn: $f(x) \geq \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = 1$. Sei $N \in \mathbb{N}^{>0}$, dann wird gezeigt: $f(x) \leq N \Rightarrow x \in \bigcup_{j=1}^N \overline{V}_j$. Beweis: Sei $x \notin \bigcup_{j=1}^N \overline{V}_j$, dann ist $f_j(x) = 0$ für $1 \leq j \leq N$, weil doch $\text{supp}(f_j) \subseteq \overline{V}_j$ gilt. Man erhält dann: $f(x) = \sum_{j=N+1}^{\infty} j \cdot f_j(x) > \sum_{j=N+1}^{\infty} N \cdot f_j(x) = N \cdot \sum_{j=N+1}^{\infty} f_j(x) = N$. Also gilt $f(x) > N$. Sei jetzt $c \in \mathbb{R}$. Es gibt nun ein $N \in \mathbb{N}^{>0}$ so, dass $c \leq N$. Nun gilt $f^{-1}((-\infty, c]) \subseteq f^{-1}((-\infty, N]) \subseteq \bigcup_{j=1}^N \overline{V}_j$. Weil $f^{-1}((-\infty, c])$ als abgeschlossene Menge Teilmenge der kompakten Menge $\bigcup_{j=1}^N \overline{V}_j$ ist, ist auch $f^{-1}((-\infty, c])$ kompakt. \square

Lemma (5). Wenn M eine de Rham Basis hat, dann ist M de Rham.

Beweis. Sei $\{U_\alpha\}$ eine de Rham-Basis von M . Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ wie in der Proposition. Für jede natürliche Zahl m seien dann folgende Teilmengen von M definiert: $A_m = \{q \in M : m \leq f(q) \leq m+1\}$ und $A'_m = \{q \in M : m - \frac{1}{2} \leq f(q) \leq m+1 + \frac{1}{2}\}$. Nun gilt $A_m \subseteq A'_m$. A_m ist eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $f^{-1}((-\infty, m+1])$, also ist auch A_m kompakt. Für jedes $x \in A_m$ gibt es ein Element der de Rham-Basis \mathcal{U}_m^x so, dass $x \in \mathcal{U}_m^x \subseteq A'_m$. $\{\mathcal{U}_m^x\}$ ist also eine offene de Rham-Überdeckung von A_m . Da A_m kompakt ist, überdecken schon endlich viele der \mathcal{U}_m^x die Menge A_m . Es gilt also $A_m \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_m^i =: B_m$. Man hat nun eine endliche de Rham-Überdeckung von B_m und nach Lemma (3) ist dann B_m de Rham. Zur Erinnerung: $A_m \subseteq B_m \subseteq A'_m$, daraus folgt nach Konstruktion, dass sich B_m mit $B_{\tilde{m}}$ nur dann schneiden, wenn $\tilde{m} = m+1, m, m-1$ ist. Es folgt also, dass $U = \bigcup_{m \text{ ungerade}} B_m$ und $V = \bigcup_{m \text{ gerade}} B_m$ abzählbare disjunkte Vereinigungen von Mannigfaltigkeiten sind, die de Rham sind. Also sind U und V de Rham, nach Lemma (4). Auch $U \cap V$ ist de Rham, denn man schneidet hier über Mengen, die aus einer de Rham-Basis stammen. Es ist jetzt $M = U \cup V$ und weil $U \cup V$ eine endliche de Rham-Überdeckung von M ist, ist M de Rham nach Lemma (3). \square

Satz. Jede glatte Mannigfaltigkeit ist de Rham, d.h. $\Psi^* : H_{dR}^k(M) \rightarrow H_{\text{sing},\infty}^k(M, \mathbb{R})$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt einen Atlas, deren Koordinatenumgebungen eine Basis der Topologie von M darstellen. Beweis: $\{(U_i, \varphi_i)\}$ sei ein Atlas von M . Seien offene Bälle (sind konvex) $B_r(x)$ mit $x \in \mathbb{Q}$ und $r \in \mathbb{Q}^{>0}$. Nun sei $B_i = \{\varphi_i^{-1}(B_r(x)) : \varphi_i^{-1}(B_r(x)) \subseteq U_i\}$, also ist $\bigcup_i B_i$ eine Überdeckung von M durch abzählbar viele neue Koordinatenumgebungen, die eine Basis der Topologie von M darstellen. Diese neuen Koordinatenumgebungen erben nun die Diffeomorphismen des alten Atlas: Ist das Urbild eines offenen Balles in U_i , so übernimmt es den Diffeomorphismus φ_i . Alle endliche Schnitte aus den neuen Koordinatenumgebungen sind diffeomorph zu Schnitten endlich vieler Bälle, die konvex sind, denn der Schnitt endlich vieler konvexer Mengen ist wieder konvex. Es folgt also, dass endliche Schnitte aus den neuen Koordinatenumgebungen und die Koordinatenumgebungen selbst de Rham sind, weil sie diffeomorph zu konvexen Mengen sind (Lemma (1)), die ja de Rham sind (nach Lemma (2)). Also hat man damit eine de Rham-Überdeckung gefunden und weil die neuen Koordinatenumgebungen sogar eine Basis der Topologie darstellen, hat man eine de Rham-Basis von M erhalten, also folgt nach Lemma (5), das M de Rham ist. \square

Satz (de Rham). Es gilt $H_{dR}^*(M) \cong H_{sing}^*(M; \mathbb{R})$.

Beweis. Bereits bewiesen wurde $H_{dR}^*(M) \cong H_{sing,\infty}^*(M, \mathbb{R})$. Es gilt $C_*^\infty(M) \subseteq C_*^{sing}(M)$. Sei dann $i_k : C_k^\infty(M) \rightarrow C_k^{sing}(M)$ die Inklusionsabbildung. Diese induziert dann die Abbildung $i_k^* : H_{sing,\infty}^k(M) \rightarrow H_{sing}^k(M; \mathbb{R})$. Dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, zeigt man genauso wie im Beweis für die Isomorphie von $H_{dR}^k(M)$ nach $H_{sing,\infty}^k(M, \mathbb{R})$. Zusammengefasst gilt also: $H_{dR}^*(M) \cong H_{sing,\infty}^*(M, \mathbb{R}) \cong H_{sing}^*(M; \mathbb{R})$. \square

Der Satz von Borsuk-Ulam

[Zurück zur Liste]

Definition (Abbildungsgrad). Zu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $f \in A^2(\Omega) := C^k(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und mit $\text{supp}(\omega) := \{x \in \mathbb{R} : \omega(x) \neq 0\}$ bezeichnet man den Träger der Funktion $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei $f \in A^2(\Omega)$ eine Funktion mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Eine stetige Funktion $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nennt man zulässig für f , wenn sie die Eigenschaften $\text{supp}(\omega) \subseteq (0, \varepsilon)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|) dy = 1$ hat. Für eine solche Testfunktion ω erklärt man den Abbildungsgrad von f bezüglich 0 als

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\Omega} \omega(|f(x)|) \cdot J_f(x) dx$$

Dabei ist $J_f(x)$ die Jacobi-Determinante an der Stelle x . Der Abbildungsgrad ist unabhängig von der Wahl einer Testfunktion.

Lemma (Nullstellen-Lemma). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \partial\Omega$. Besitzt f in Ω keine Nullstelle, so folgt: $\deg(f, \Omega) = 0$.

Beweis. Bewiesen wird diese Aussage nur für Funktionen $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) =: A^2(\Omega)$. Approximiert man nur stetige f mit Funktionen aus $A^2(\Omega)$, dann gilt die Aussage auch für $f \in C^0$. Besitzt f in Ω keine Nullstelle, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \bar{\Omega}$. Man wähle dann eine zulässige Testfunktion $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\text{supp}(\omega) \subseteq (0, \varepsilon)$. Dann folgt:

$$\deg(f, \Omega) = \int_{\Omega} \underbrace{\omega(|f(x)|)}_{=0} \cdot J_f(x) dx = 0$$

Und das war auch schon alles. \square

Lemma (Wichtige Abschätzung). Zu $a \in \mathbb{R}^n$ und $h > 0$ sei $W := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - a_i| \leq \frac{h}{2}\}$ ein Würfel der Kantenlänge h . Weiter sei eine C^2 -Funktion $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben mit $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$, $|Df(x) - Df(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in W$. Schließlich existiere ein $z \in W$ mit $J_f(z) = 0$. Dann gilt $f(W) \leq C(L, n) \cdot h^{n+1}$, wobei mit $|f(W)|$ das Lebesgue-Maß der Menge $f(W)$ gemeint ist.

Beweis. Da W kompakt und f stetig ist, ist $f(W)$ kompakt und somit auch Lebesgue-messbar. Wegen $J_f(z) = 0$ existiert ein Vektor $v_1 \in \mathbb{R}^n$, $|v_1| = 1$ mit $v_1^T \cdot Df(z) = 0$. Beweis: Weil die Determinante von $Df(z)$ gleich Null ist, ist ihr Zeilenrang kleiner n , also sind die Zeilen linear abhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von diesen Zeilen so, dass die Summe gleich 0 ist. Die Koeffizienten seien durch den Vektor v_1 gegeben, wobei die Linearkombination = 0 noch durch den Skalar der Länge von v_1 auf beiden Seiten geteilt wird; die Linearkombination ist dann immer noch Null. $v_1 \cdot Df(z)$ ist dann die Linearkombination der Zeilen von $Df(z)$, also gleich 0. v_1 wird nun durch Vektoren v_2, \dots, v_n zu einer Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n ergänzt. Es gilt dann:

$$v_1^T \cdot (f(z) - f(x)) = v_1^T \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t \cdot (z - x)) dt = v_1^T \cdot \int_0^1 Df(x + t \cdot (z - x)) dt \cdot (z - x) = v_1^T \cdot \int_0^1 Df((1-t) \cdot x + t \cdot z) dt \cdot (z - x)$$

Und das ist dann gleich folgendes:

$$v_1^T \cdot \int_0^1 Df(t \cdot x + (1-t) \cdot z) dt \cdot (z - x) = v_1^T \cdot \int_0^1 Df(z + t \cdot (x - z)) dt \cdot (z - x) = v_1^T \cdot \int_0^1 (Df(z + t \cdot (x - z)) - Df(z)) dt \cdot (z - x)$$

Mit der Voraussetzung $|Df(x) - Df(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in W$ folgt dann die folgende Abschätzung:

$$|v_1^T \cdot (f(z) - f(x))| \leq L \cdot |z - x|^2 \cdot \int_0^1 t dt \leq L \cdot ((z_1 - x_1)^2 + \dots + (z_n - x_n)^2) \cdot \frac{1}{2} \leq L \cdot (n \cdot h^2) \cdot 1 \leq L \cdot n^2 \cdot h^2$$

Es gilt nach Voraussetzung $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in W$, also gilt:

$$|v_i^T \cdot (f(z) - f(x))| \leq L \cdot |z - x| \leq L \cdot \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + \dots + (z_n - x_n)^2} \leq L \cdot \sqrt{n \cdot h^2} \leq L \cdot n \cdot h$$

Wobei hier $i = 2, \dots, n$ sei. Insgesamt folgt somit also:

$$f(W) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n : |v_1^T \cdot (f(z) - f(x))| \leq L \cdot n^2 \cdot h^2, |v_i^T \cdot (f(z) - f(x))| \leq L \cdot n \cdot h \text{ für } i = 2, \dots, n\}$$

Unter Verwendung der Invarianz des Lebesgue-Maßes gegenüber Rotationen ergibt sich:

$$|f(W)| \leq (L \cdot n^2 \cdot h^2) \cdot (L \cdot n \cdot h)^{n-1} = L^n \cdot n^{n+1} \cdot h^{n+1} = C(L, n) \cdot h^{n+1}$$

Und damit ist dann die Behauptung bewiesen. \square

Lemma (Sard'sches Lemma). Zu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sei $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Für eine kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ sei $M := \{x \in K : J_f(x) = 0\}$ die Menge der singulären Punkte. Dann ist $f(M) = \{f(x) : x \in K, J_f(x) = 0\}$ eine Nullmenge.

Beweis. Da Ω offen und $K \subseteq \Omega$ kompakt ist, existieren endlich viele Würfel $W_i \subseteq \Omega$ ($i = 1, \dots, N$), welche K überdecken, also $K \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_N$. Es sei nun W_* einer dieser Würfel. Es wird nun gezeigt: $f(W_* \cap M)$ ist eine Nullmenge. Wegen $f(M) \subseteq f(W_1 \cap M) \cup \dots \cup f(W_N \cap M)$ ist dann auch $f(M)$ eine Nullmenge. Es sei also $W_* := \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - a_i| \leq \frac{R}{2}\right\} \subseteq \Omega$ ein solcher Würfel mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^n$ und Kantenlänge $R > 0$. Wegen $f \in C^2(W_*, \mathbb{R}^n)$ gibt es zunächst eine Konstante $L < \infty$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$, $|Df(x) - Df(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für $x, y \in W_*$. Nun wird W_* von k^n achsenparallelen Würfeln \hat{W}_i , $i = 1, \dots, k^n$ der Kantenlänge $h := \frac{R}{k}$ überdeckt. Es sei nun $I := \{i \in \{1, \dots, k^n\} : \hat{W}_i \cap M \neq \emptyset\}$ die Indexmenge aller derjenigen Würfel, welche singuläre Punkte von f enthalten. Für jedes $i \in I$ liefert Lemma (Wichtige Abschätzung) dann $|f(\hat{W}_i)| \leq C(L, n) \cdot \left(\frac{R}{k}\right)^{n+1}$. Beachtet man $f(W_* \cap M) \subseteq \bigcup_{i \in I} f(\hat{W}_i)$, so folgt dann $|f(W_* \cap M)| \leq \sum_{i \in I} |f(\hat{W}_i)| \leq C(L, n) \cdot \left(\frac{R}{k}\right)^{n+1} \cdot k^n = C(L, n) \cdot \frac{R^{n+1}}{k}$. Für $k \rightarrow \infty$ folgt also $|f(W_* \cap M)| = 0$, wie behauptet. \square

Lemma (7ε -Lemma). Gegeben seien zwei Funktionen $f_s, f_t \in A^2(\Omega) := C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $|f_s(x) - f_t(x)| < \varepsilon$ für $x \in \Omega$ sowie $|f_s(x)| > 7\varepsilon$ und $|f_t(x)| > 7\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$. Dann folgt:

$$\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$$

Beweis. Man wähle zunächst eine Funktion $\lambda \in C^2(\mathbb{R}, [0, 1])$ mit $\lambda(r) = 1$ für $r \leq 3\varepsilon$ und $\lambda(r) = 0$ für $r \geq 4\varepsilon$. Es wird dann die folgende Funktion erklärt:

$$z(x) := f_s(x) + \lambda(|f_s(x)|) \cdot (f_t(x) - f_s(x)) \in A^2(\Omega)$$

Sie hat die folgende Eigenschaft:

$$|z(x)| \geq |f_s(x)| - \lambda(|f_s(x)|) \cdot |f_t(x) - f_s(x)| > 7\varepsilon - \varepsilon = 6\varepsilon \text{ für } x \in \partial\Omega$$

Zusätzlich gelten die Abschätzungen:

$$|f_s(x) - z(x)| \leq \lambda(|f_s(x)|) \cdot |f_t(x) - f_s(x)| < \varepsilon$$

Und es gilt:

$$|f_t(x) - z(x)| \leq (1 - \lambda(|f_s(x)|)) \cdot |f_t(x) - f_s(x)| < \varepsilon$$

Daraus überlegt man sich leicht:

$$z(x) = \begin{cases} f_s(x), & |f_s(x)| \geq 4\varepsilon \\ f_t(x), & |f_t(x)| \leq 2\varepsilon \end{cases}$$

Man wähle dann zwei zulässige Testfunktionen $\omega_1, \omega_2 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\text{supp}(\omega_1) \subseteq (5\varepsilon, 6\varepsilon)$ und $\text{supp}(\omega_2) \subseteq (0, \varepsilon)$. Insbesondere folgt dann daraus: $\omega_1(|f_s(x)|) \cdot J_{f_s}(x) = \omega_1(|z(x)|) \cdot J_z(x)$ und $\omega_2(|z(x)|) \cdot J_z(x) = \omega_2(|f_t(x)|) \cdot J_{f_t}(x)$. Wegen $|f_s(x)|, |f_t(x)| > 7\varepsilon$ sowie $|z(x)| > 6\varepsilon$ sind die beiden Testfunktionen ω_1 und ω_2 zulässig zur Berechnung des Abbildungsgrades von f_s , f_t und z . Es folgt somit also:

$$\deg(f_s, \Omega) = \int_{\Omega} \omega_1(|f_s(x)|) \cdot J_{f_s}(x) dx = \int_{\Omega} \omega_1(|z(x)|) \cdot J_z(x) dx = \deg(z, \Omega)$$

Und es gilt auch:

$$\deg(f_t, \Omega) = \int_{\Omega} \omega_2(|f_t(x)|) \cdot J_{f_t}(x) dx = \int_{\Omega} \omega_2(|z(x)|) \cdot J_z(x) dx = \deg(z, \Omega)$$

Daraus folgt dann unmittelbar die Behauptung des Satzes. \square

Satz (Immer regulär). Für ein $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ gelte $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \partial\Omega$. Dann existiert eine Funktion $f_\varepsilon \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gilt die Abschätzung $|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $x \in \bar{\Omega}$.
2. Null ist regulärer Wert von f_ε , insbesondere also $\deg(f_\varepsilon, \Omega) \in \mathbb{Z}$.
3. Für die Abbildungsgrade gilt: $\deg(f, \Omega) = \deg(f_\varepsilon, \Omega)$.

Wenn für eine Funktion f also Null nicht ein regulärer Wert ist, dann kann man f durch Funktionen approximieren, die diese Eigenschaft aber haben.

Beweis. Zu gegebenem $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ wählt man zunächst $g \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $|g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x \in \bar{\Omega}$. Die Menge $K := \{x \in \Omega : |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\} \subseteq \Omega$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Nach dem Sard'schen Lemma ist die Menge $N := \{g(x) : x \in K, J_g(x) = 0\}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Folglich existiert ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$ sowie $y \notin N$. Dann setzt man $f_\varepsilon(x) := g(x) - y$ mit:

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq |f_\varepsilon(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Und zwar gilt das für alle $x \in \partial\Omega$. Es sei nun $x \in \Omega$ eine Nullstelle von f_ε , also $g(x) = y$. Wegen $y \notin N$ gilt dann $0 \neq J_g(x) = J_{f_\varepsilon}(x)$. Somit ist 0 ein regulärer Wert von f_ε . Es gilt nun auch $\deg(f, \Omega) = \deg(f_\varepsilon, \Omega)$. Beweis: Es gilt erstmal $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon < |f(x)|$ für alle $x \in \partial\Omega$. Betrachte nun für $t \in [0, 1]$ die Homotopie $f_t(x) := f(x) + t \cdot (f_\varepsilon(x) - f(x))$. Wegen $|x + y| \geq |x| - |y|$ gilt also $|f_t(x)| \geq |f(x)| - t \cdot |f_\varepsilon(x) - f(x)| > |f(x)| - t \cdot |f(x)| \geq 0$ für $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0, 1]$. Man wählt dann ein $\varepsilon > 0$ so klein, dass $|f_t(x)| > 7\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$, $t \in [0, 1]$ gilt. Da nun f auf der kompakten Menge $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit der Eigenschaft $|f_s(x) - f_t(x)| < \varepsilon$ für $x \in \bar{\Omega}$, $s, t \in [0, 1]$, $|s - t| < \delta$. Man approximiert dann f_s und f_t gleichmäßig durch zwei Folgen von Funktionen f_s^k , f_t^k aus $A^2(\Omega) := C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nach dem 7ε -Lemma ist dann $\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$ für $s, t \in [0, 1]$, $|s - t| \leq \delta$. Ein Überdeckungsargument liefert dann $\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$ für alle $s, t \in [0, 1]$. Also gilt $\deg(f, \Omega) = \deg(f_0, \Omega) = \deg(f_1, \Omega) = \deg(f_\varepsilon, \Omega)$. \square

Satz (Indexsummenformel). *Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) =: A^2(\Omega)$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Ferner sei 0 ein regulärer Wert von f . Dann gibt es nur endlich viele Lösungen $x \in \Omega$ von $f(x) = 0$, welche man mit $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ ($N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) bezeichnet. Es gilt dann:*

$$\deg(f, \Omega) = \sum_{i=1}^N \text{ind}(f, x_i) \in \mathbb{Z}$$

Dabei sei $\text{ind}(f, x_i) = \frac{J_f(x_i)}{|J_f(x_i)|} \in \{-1, 1\}$, wobei hier $J_f(x)$ die Jacobi-Determinante von f in x sei.

Beweis. Man zeigt zunächst, dass $f(x) = 0$ nur endlich viele Lösungen hat. Andernfalls gebe es eine Folge $x_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ mit $f(x_k) = 0$. Nach Auswahl einer Teilfolge konvergiert diese gegen ein $x_* \in \Omega$ mit $f(x_*) = 0$. Nach Voraussetzung ist 0 ein regulärer Wert f , also $J_f(x_*) \neq 0$. Nach dem Satz über die inverse Abbildung ist f lokal um x_* injektiv, im Widerspruch zu $f(x_k) = 0$ und $x_k \rightarrow x_*$ für $k \rightarrow \infty$. Die Indexsummenformel beweist man nun durch Induktion über die Anzahl N der Nullstellen von f : Induktionsanfang $N = 0$, also $f(x) = 0$ hat keine Lösung, also folgt $\deg(f, \Omega) = 0$ (Nullstellen-Lemma) und der Induktionsanfang gilt. Induktionsschritt: Es gebe $N + 1$ Lösungen $x_1, \dots, x_{N+1} \in \Omega$. Wegen $J_f(x_1) \neq 0$ ist f lokal um $x_1 \in \Omega$ ein Diffeomorphismus (Satz über die inverse Abbildung). Genauer gibt es eine offene Menge U mit $U \subseteq \Omega$, $x_1 \in U$ und $V := f(U)$, so dass f eingeschränkt auf \bar{U} ein Diffeomorphismus auf \bar{V} ist. Durch eventuelle Verkleinerung von U kann man annehmen, dass entweder $J_f(x) > 0$ oder $J_f(x) < 0$ für alle $x \in U$ gilt. Wegen $0 = f(x_1) \in V$ und V offen existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(0) \subseteq V$. Weil f ein Diffeomorphismus ist, gilt $f(\partial U) = \partial V$, insbesondere gilt dann $|f(x)| \geq 2\varepsilon > \varepsilon$ für alle $x \in \partial U$. Man setzt nun $\sigma := \text{ind}(f, x_1)$ mit der Eigenschaft $\sigma \cdot J_f(x) > 0$ für alle $x \in U$. Es sei nun $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine zulässige Testfunktion, also $\text{supp}(\omega) \subseteq (0, \varepsilon)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|z|) dz = 1$. Die Transformationsformel für Mehrfachintegrale liefert:

$$\deg(f, U) = \int_U \omega(|f(x)|) \cdot J_f(x) dx = \sigma \cdot \int_U \omega(|f(x)|) \cdot |J_f(x)| dx = \sigma \cdot \int_V \omega(|y|) dy = \sigma \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|) dy = \sigma = \text{ind}(f, x_1)$$

Im letzten Schritt wurde $\omega(|y|) = 0$ für $y \notin V$ verwendet. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich dann:

$$\deg(f, \Omega) = \deg(f, U) + \deg(f, \Omega \setminus U) = \text{ind}(f, x_1) + \sum_{i=2}^{N+1} \text{ind}(f, x_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \text{ind}(f, x_i)$$

Damit ist also der Induktionsschritt bewiesen und der Beweis ist damit beendet. \square

Satz (Borsuk). *Auf der offenen Kugel $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ sei eine Funktion $f \in C^0(\bar{B^n}, \mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial B^n$ gegeben. Ferner sei f ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$. Dann ist $\deg(f, B^n)$ eine ungerade, ganze Zahl.*

Beweis. Sei zunächst $f \in C^0(\bar{B^n}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(B^n, \mathbb{R}^n) =: A^2(B^n)$. Und sei Null ein regulärer Wert, d.h. die Jacobi-Determinate $J_f(x)$ ist für die Lösungen x von $f(x) = 0$ ungleich Null. Es gilt $f(-0) = -f(0)$, also $2 \cdot f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, also 0 ist eine Nullstelle von f . Nach der Indexsummenformel gilt:

$$\deg(f, B^n) = \sum_{z \in B^n, f(z)=0} \text{ind}(f, z) = \underbrace{\text{ind}(f, 0)}_{=\pm 1} + \sum_{z \in B^n \setminus \{0\}, f(z)=0} \text{ind}(f, z)$$

Ist $z \in B$ eine Nullstelle von f , dann ist wegen $0 = -f(z) = f(-z)$ auch $-z$ eine Nullstelle. Aus $f(-z) = -f(z)$ folgt $\frac{\partial}{\partial z_i} f(-z) = \frac{\partial f}{\partial z_i}(-z) \cdot (-1) = -\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$, also: $\frac{\partial f}{\partial z_i}(-z) = \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$ und deswegen $\text{ind}(f, z) = \text{ind}(f, -z)$. Es folgt also, dass $\sum_{z \in B^n \setminus \{0\}, f(z)=0} \text{ind}(f, z)$ eine gerade Zahl ist, also ist $\deg(f, B^n)$ ungerade. Sei nun $f \in C^0(\bar{B^n}, \mathbb{R}^n)$ eine ungerade Funktion. Es wird nun gezeigt, dass f sich beliebig gut von einer ungeraden Funktion $g \in A^2(B^n)$ approximieren lässt, für welche Null ein regulärer

Wert ist. Zu $\varepsilon > 0$ wähle man ein $h_0 \in A^2(B^n)$ mit $|f(x) - h_0(x)| \leq \varepsilon$ in B^n . Dann ist die Funktion $h_1(x) := \frac{1}{2} \cdot (h_0(x) - h_0(-x))$ ungerade und erfüllt ebenfalls $|h_1(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ in B^n , denn: $|h_1(x) - f(x)| = \left| \frac{h_0(x)}{2} - \frac{f(x)}{2} + \frac{f(-x)}{2} - \frac{h_0(-x)}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Sei nun $\delta \in (0, \varepsilon)$ mit $h(x) := h_1(x) - \delta x$ (ungerade Funktion) so, dass δ kein Eigenwert der Jacobi-Matrix $Dh(0)$ ist. Dann gilt nämlich $J_h(0) \neq 0$ und es gilt die Abschätzung $|f(x) - h(x)| \leq 2\varepsilon$ in B^n . Man wählt nun eine Funktion $\varphi \in C^2(\mathbb{R}, [-1, 1])$ mit den folgenden Eigenschaften: $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ für $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ und $\varphi'(0) = 0$. Es wird gesetzt: $\Omega_k = \{x \in B^n : x_i \neq 0 \text{ für ein } i \in \{1, \dots, k\}\}$. Also gilt dann $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots \subseteq \Omega_n$ und $\Omega_n = B^n \setminus \{0\}$. Man konstruiert nun induktiv Vektoren $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$ mit $|y_k| < \varepsilon$ sowie ungerade Funktionen $g_k(x) := h(x) - \varphi(x_1) \cdot y_1 - \dots - \varphi(x_k) \cdot y_k$ mit folgender Eigenschaft: Null ist ein regulärer Wert von g_k auf der Menge Ω_k . Es seien die Vektoren $y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ bereits entsprechend gewählt. Man konstruiert nun den Vektor y_k . Dazu sei $\tilde{g}(x) = \frac{g_{k-1}(x)}{\varphi(x_k)}$ für $x \in \tilde{\Omega} := \{x \in B^n : x_k \neq 0\}$. Mithilfe des Sard'schen Lemmas findet man ein y_k mit $|y_k| < \varepsilon$ so, dass y_k ein regulärer Wert von \tilde{g} in $\tilde{\Omega}$ ist. Beweis: $K := \{x \in \tilde{\Omega} : |\tilde{g}(x)| \leq \varepsilon\} \subseteq \tilde{\Omega}$ ist kompakt und $N := \{\tilde{g}(x) : x \in K, J_{\tilde{g}}(x) = 0\}$ ist nach dem Lemma eine Nullmenge. Also gibt es ein y_k mit $|y_k| \leq \varepsilon$ so, dass $y_k \notin N$ gilt, also: $x' \in \tilde{g}^{-1}(y_k) \Rightarrow J_{\tilde{g}}(x') \neq 0$. Alle Lösungen $x \in \tilde{\Omega}$ der Gleichung $\tilde{g}(x) = y_k$ erfüllen also $J_{\tilde{g}}(x) \neq 0$. Man setzt nun $g_k(x) := g_{k-1}(x) - \varphi(x_k) \cdot y_k = \varphi(x_k) \cdot (\tilde{g}(x) - y_k)$. Es sei nun $x \in \tilde{\Omega}$ mit $g_k(x) = 0$. Daraus folgt $\tilde{g}(x) = y_k$ sowie $J_{\tilde{g}}(x) \neq 0$. Man berechnet nun das folgende:

$$\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi(x_k) \cdot (\tilde{g}(x) - y_k)) = \delta_{ik} \cdot \varphi'(x_k) \cdot \underbrace{(\tilde{g}(x) - y_k)}_{=0} + \varphi(x_k) \cdot \frac{\partial \tilde{g}(x)}{\partial x_i} = \varphi(x_k) \cdot \frac{\partial \tilde{g}(x)}{\partial x_i}$$

Es gilt also $J_{g_k}(x) = \varphi(x_k)^n \cdot J_{\tilde{g}}(x) \neq 0$. Somit ist also Null ein regulärer Wert von g_k in der Menge $\tilde{\Omega} = \{x \in B^n : x_k \neq 0\}$. Jetzt wird noch gezeigt: Null ist auch ein regulärer Wert in der Menge $\Omega_k \setminus \tilde{\Omega}$. Ist $x \in \Omega_k \setminus \tilde{\Omega}$, dann folgt $x \in \Omega_{k-1}$ und $x_k = 0$. Folglich: $\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial g_{k-1}(x)}{\partial x_i} - 0$ für $i \neq k$, ist jedoch $i = k$, so ist $\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial g_{k-1}(x)}{\partial x_i} - \varphi'(0) \cdot y_k = \frac{\partial g_{k-1}(x)}{\partial x_i}$. Damit gilt also $J_{g_k}(x) = J_{g_{k-1}}(x)$ sowie nach Voraussetzung $J_{g_{k-1}}(x) \neq 0$. Somit ist Null regulärer Wert von g_k in $\Omega_k = \tilde{\Omega} \cup (\Omega_k \setminus \tilde{\Omega})$. Mit $g(x) := g_n(x) = h(x) - \varphi(x_1) \cdot y_1 - \dots - \varphi(x_n) \cdot y_n$ erhält man schließlich eine ungerade Funktion, für welche Null ein regulärer Wert in $(B^n \setminus \{0\}) \cup \{0\}$ ist, denn es gilt doch $Dg(0) = Dh(0)$ und also $J_g(0) = J_h(0) \neq 0$ (siehe oben). Es gilt noch die Abschätzung $|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq 2\varepsilon + n\varepsilon = (2+n)\cdot\varepsilon$, d.h. g liegt beliebig nahe an f . \square

Satz (Borsuk-Ulam). *Sei $f : \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $x \in S^{n-1}$ mit der Eigenschaft $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Angenommen, es gilt $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^{n-1}$. Man setzt nun f auf $\overline{B^n}$ fort zu einer stetigen Abbildung $f : \overline{B^n} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Dann sei $G : \overline{B^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G(x) := (f(x) - f(-x), 0)$ definiert. G ist eine ungerade und stetige Funktion. Weil $G(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \overline{B^n} = S^{n-1}$ gilt, ist demnach der Abbildungsgrad $\deg(G, \overline{B^n})$ anwendbar. Nach dem Satz von Borsuk ist $\deg(G, \overline{B^n}, 0) \neq 0$, weil G ungerade ist. Also gibt es eine hinreichend kleine offene Umgebung $K_r^n(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ von 0 so, dass auch noch $\deg(G, \overline{B^n}, y) \neq 0$ für alle $y \in K_r^n(0)$ gilt. Nach dem Lösungskriterium (Nullstellen-Lemma) gibt es also für jedes $y \in K_r^n(0)$ eine Lösung $x \in \overline{B^n}$ der Gleichung $G(x) = y$, woraus folgt: $K_r^n(0) \subseteq G(\overline{B^n})$. Das ist aber ein Widerspruch, weil in $G(\overline{B^n})$ die n -te Koordinate 0 ist. Also ist der Satz bewiesen. \square

Satz (Ham Sandwich). *Gegeben seien n beschränkte, messbare Mengen $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $(n-1)$ -dimensionaler, affiner Raum $E \subseteq \mathbb{R}^n$, welcher jede der n Mengen in volumengleiche Teile zerlegt.*

Beweis. 1. Fall: Alle A_i sind Nullmengen. Dann besitzt jeder Hyperraum im \mathbb{R}^n die gesuchte Eigenschaft. 2. Fall: Es existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mu(A_k) > 0$ (μ ist das Maß). Für einen Vektor $p \in S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ betrachte nun die Menge $H_p := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n + p_{n+1} \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Man beachte, dass $H_p \cup H_{-p} = \mathbb{R}^n$ gilt. Ferner ist $H_p \cap H_{-p}$ ein $(n-1)$ -dimensionaler affiner Raum im \mathbb{R}^n , falls $p \in S^n$ und $p \neq \pm e_{n+1} = (0, \dots, 0, \pm 1)$ ist. Für $i = 1, \dots, n$ betrachtet man die Abbildung $\varphi_i : S^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_i(p) := \mu(H_p \cap A_i)$. Nach dem Satz von Borsuk-Ulam existiert also für die stetige Funktion $\varphi(p) := (\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein $q \in S^n$ mit $\varphi(q) = \varphi(-q)$. Aus $\mu(A_k) > 0$ weiß man dann $q_k \neq 0$. Der Hyperraum $H_q \cap H_{-q}$ besitzt nun die gesuchte Eigenschaft. \square

Der Indexsatz von Poincaré-Hopf

[Zurück zur Liste]

Nach dem Einbettungssatz von Whitney kann jede n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M in den \mathbb{R}^{2n+1} eingebettet werden. Man betrachtet deswegen nur noch Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n .

Definition (Abbildungsgrad). *Zu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $f \in A^2(\Omega) := C^k(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und mit $\text{supp}(\omega) := \{x \in \mathbb{R} : \omega(x) \neq 0\}$ bezeichnet man den Träger der Funktion $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei $f \in A^2(\Omega)$ eine Funktion mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Eine*

stetige Funktion $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nennt man zulässig für f , wenn sie die Eigenschaften $\text{supp}(\omega) \subseteq (0, \varepsilon)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|) dy = 1$ hat. Für eine solche Testfunktion ω erklärt man den Abbildungsgrad von f bezüglich 0 als

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\Omega} \omega(|f(x)|) \cdot J_f(x) dx$$

Dabei ist $J_f(x)$ die Jacobi-Determinante an der Stelle x . Der Abbildungsgrad ist unabhängig von der Wahl einer Testfunktion.

Lemma (Nullstellen-Lemma). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \partial\Omega$. Besitzt f in Ω keine Nullstelle, so folgt: $\deg(f, \Omega) = 0$.

Beweis. Bewiesen wird diese Aussage nur für Funktionen $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) =: A^2(\Omega)$. Approximiert man nur stetige f mit Funktionen aus $A^2(\Omega)$, dann gilt die Aussage auch für $f \in C^0$. Besitzt f in Ω keine Nullstelle, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \bar{\Omega}$. Man wähle dann eine zulässige Testfunktion $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\text{supp}(\omega) \subseteq (0, \varepsilon)$. Dann folgt:

$$\deg(f, \Omega) = \int_{\Omega} \underbrace{\omega(|f(x)|)}_{=0} \cdot J_f(x) dx = 0$$

Und das war auch schon alles. \square

Lemma (7ε -Lemma). Gegeben seien zwei Funktionen $f_s, f_t \in A^2(\Omega) := C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $|f_s(x) - f_t(x)| < \varepsilon$ für $x \in \Omega$ sowie $|f_s(x)| > 7\varepsilon$ und $|f_t(x)| > 7\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$. Dann folgt:

$$\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$$

Beweis. Man wähle zunächst eine Funktion $\lambda \in C^2(\mathbb{R}, [0, 1])$ mit $\lambda(r) = 1$ für $r \leq 3\varepsilon$ und $\lambda(r) = 0$ für $r \geq 4\varepsilon$. Es wird dann die folgende Funktion erklärt:

$$z(x) := f_s(x) + \lambda(|f_s(x)|) \cdot (f_t(x) - f_s(x)) \in A^2(\Omega)$$

Sie hat die folgende Eigenschaft:

$$|z(x)| \geq |f_s(x)| - \lambda(|f_s(x)|) \cdot |f_t(x) - f_s(x)| > 7\varepsilon - \varepsilon = 6\varepsilon \text{ für } x \in \partial\Omega$$

Zusätzlich gelten die Abschätzungen:

$$|f_s(x) - z(x)| \leq \lambda(|f_s(x)|) \cdot |f_t(x) - f_s(x)| < \varepsilon$$

Und es gilt:

$$|f_t(x) - z(x)| \leq (1 - \lambda(|f_s(x)|)) \cdot |f_t(x) - f_s(x)| < \varepsilon$$

Daraus überlegt man sich leicht:

$$z(x) = \begin{cases} f_s(x), & |f_s(x)| \geq 4\varepsilon \\ f_t(x), & |f_t(x)| \leq 2\varepsilon \end{cases}$$

Man wähle dann zwei zulässige Testfunktionen $\omega_1, \omega_2 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\text{supp}(\omega_1) \subseteq (5\varepsilon, 6\varepsilon)$ und $\text{supp}(\omega_2) \subseteq (0, \varepsilon)$. Insbesondere folgt dann daraus: $\omega_1(|f_s(x)|) \cdot J_{f_s}(x) = \omega_1(|z(x)|) \cdot J_z(x)$ und $\omega_2(|f_t(x)|) \cdot J_{f_t}(x) = \omega_2(|z(x)|) \cdot J_z(x)$. Wegen $|f_s(x)|, |f_t(x)| > 7\varepsilon$ sowie $|z(x)| > 6\varepsilon$ sind die beiden Testfunktionen ω_1 und ω_2 zulässig zur Berechnung des Abbildungsgrades von f_s , f_t und z . Es folgt somit also:

$$\deg(f_s, \Omega) = \int_{\Omega} \omega_1(|f_s(x)|) \cdot J_{f_s}(x) dx = \int_{\Omega} \omega_1(|z(x)|) \cdot J_z(x) dx = \deg(z, \Omega)$$

Und es gilt auch:

$$\deg(f_t, \Omega) = \int_{\Omega} \omega_2(|f_t(x)|) \cdot J_{f_t}(x) dx = \int_{\Omega} \omega_2(|z(x)|) \cdot J_z(x) dx = \deg(z, \Omega)$$

Daraus folgt dann unmittelbar die Behauptung des Satzes. \square

Satz (Immer regulär). Für ein $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ gelte $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \partial\Omega$. Dann existiert eine Funktion $f_\varepsilon \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gilt die Abschätzung $|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $x \in \bar{\Omega}$.
2. Null ist regulärer Wert von f_ε , insbesondere also $\deg(f_\varepsilon, \Omega) \in \mathbb{Z}$.
3. Für die Abbildungsgrade gilt: $\deg(f, \Omega) = \deg(f_\varepsilon, \Omega)$.

Wenn für eine Funktion f also Null nicht ein regulärer Wert ist, dann kann man f durch Funktionen approximieren, die diese Eigenschaft aber haben.

Beweis. Zu gegebenem $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ wählt man zunächst $g \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $|g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x \in \bar{\Omega}$. Die Menge $K := \{x \in \Omega : |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\} \subseteq \Omega$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Nach dem Sard'schen Lemma ist die Menge $N := \{g(x) : x \in K, J_g(x) = 0\}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Folglich existiert ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$ sowie $y \notin N$. Dann setzt man $f_\varepsilon(x) := g(x) - y$ mit:

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq |f_\varepsilon(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Und zwar gilt das für alle $x \in \partial\Omega$. Es sei nun $x \in \Omega$ eine Nullstelle von f_ε , also $g(x) = y$. Wegen $y \notin N$ gilt dann $0 \neq J_g(x) = J_{f_\varepsilon}(x)$. Somit ist 0 ein regulärer Wert von f_ε . Es gilt nun auch $\deg(f, \Omega) = \deg(f_\varepsilon, \Omega)$. Beweis: Es gilt erstmal $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon < |f(x)|$ für alle $x \in \partial\Omega$. Betrachte nun für $t \in [0, 1]$ die Homotopie $f_t(x) := f(x) + t \cdot (f_\varepsilon(x) - f(x))$. Wegen $|x + y| \geq |x| - |y|$ gilt also $|f_t(x)| \geq |f(x)| - t \cdot |f_\varepsilon(x) - f(x)| > |f(x)| - t \cdot |f(x)| \geq 0$ für $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0, 1]$. Man wählt dann ein $\varepsilon > 0$ so klein, dass $|f_t(x)| > 7\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$, $t \in [0, 1]$ gilt. Da nun f auf der kompakten Menge $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit der Eigenschaft $|f_s(x) - f_t(x)| < \varepsilon$ für $x \in \bar{\Omega}$, $s, t \in [0, 1]$, $|s - t| < \delta$. Man approximiert dann f_s und f_t gleichmäßig durch zwei Folgen von Funktionen f_s^k , f_t^k aus $A^2(\Omega) := C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nach dem 7ε -Lemma ist dann $\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$ für $s, t \in [0, 1]$, $|s - t| \leq \delta$. Ein Überdeckungsargument liefert dann $\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$ für alle $s, t \in [0, 1]$. Also gilt $\deg(f, \Omega) = \deg(f_0, \Omega) = \deg(f_1, \Omega) = \deg(f_\varepsilon, \Omega)$. \square

Satz (Indexsummenformel). *Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) =: A^2(\Omega)$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Ferner sei 0 ein regulärer Wert von f . Dann gibt es nur endlich viele Lösungen $x \in \Omega$ von $f(x) = 0$, welche man mit $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ ($N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) bezeichnet. Es gilt dann:*

$$\deg(f, \Omega) = \sum_{i=1}^N \text{ind}(f, x_i) \in \mathbb{Z}$$

Dabei sei $\text{ind}(f, x_i) = \frac{J_f(x_i)}{|J_f(x_i)|} \in \{-1, 1\}$, wobei hier $J_f(x)$ die Jacobi-Determinante von f in x sei.

Beweis. Man zeigt zunächst, dass $f(x) = 0$ nur endlich viele Lösungen hat. Andernfalls gebe es eine Folge $x_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ mit $f(x_k) = 0$. Nach Auswahl einer Teilfolge konvergiert diese gegen ein $x_* \in \Omega$ mit $f(x_*) = 0$. Nach Voraussetzung ist 0 ein regulärer Wert f , also $J_f(x_*) \neq 0$. Nach dem Satz über die inverse Abbildung ist f lokal um x_* injektiv, im Widerspruch zu $f(x_k) = 0$ und $x_k \rightarrow x_*$ für $k \rightarrow \infty$. Die Indexsummenformel beweist man nun durch Induktion über die Anzahl N der Nullstellen von f : Induktionsanfang $N = 0$, also $f(x) = 0$ hat keine Lösung, also folgt $\deg(f, \Omega) = 0$ (Nullstellen-Lemma) und der Induktionsanfang gilt. Induktionsschritt: Es gebe $N + 1$ Lösungen $x_1, \dots, x_{N+1} \in \Omega$. Wegen $J_f(x_1) \neq 0$ ist f lokal um $x_1 \in \Omega$ ein Diffeomorphismus (Satz über die inverse Abbildung). Genauer gibt es eine offene Menge U mit $U \subseteq \Omega$, $x_1 \in U$ und $V := f(U)$, so dass f eingeschränkt auf \bar{U} ein Diffeomorphismus auf \bar{V} ist. Durch eventuelle Verkleinerung von U kann man annehmen, dass entweder $J_f(x) > 0$ oder $J_f(x) < 0$ für alle $x \in U$ gilt. Wegen $0 = f(x_1) \in V$ und V offen existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(0) \subseteq V$. Weil f ein Diffeomorphismus ist, gilt $f(\partial U) = \partial V$, insbesondere gilt dann $|f(x)| \geq 2\varepsilon > \varepsilon$ für alle $x \in \partial U$. Man setzt nun $\sigma := \text{ind}(f, x_1)$ mit der Eigenschaft $\sigma \cdot J_f(x) > 0$ für alle $x \in U$. Es sei nun $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine zulässige Testfunktion, also $\text{supp}(\omega) \subseteq (0, \varepsilon)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|z|) dz = 1$. Die Transformationsformel für Mehrfachintegrale liefert:

$$\deg(f, U) = \int_U \omega(|f(x)|) \cdot J_f(x) dx = \sigma \cdot \int_U \omega(|f(x)|) \cdot |J_f(x)| dx = \sigma \cdot \int_V \omega(|y|) dy = \sigma \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|) dy = \sigma = \text{ind}(f, x_1)$$

Im letzten Schritt wurde $\omega(|y|) = 0$ für $y \notin V$ verwendet. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich dann:

$$\deg(f, \Omega) = \deg(f, U) + \deg(f, \Omega \setminus U) = \text{ind}(f, x_1) + \sum_{i=2}^{N+1} \text{ind}(f, x_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \text{ind}(f, x_i)$$

Damit ist also der Induktionsschritt bewiesen und der Beweis ist damit beendet. \square

Lemma (7ε -Lemma für stetige Funktionen). *Gegeben seien zwei Funktionen $f_1, f_2 \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$ für $x \in \Omega$ sowie $f_k(x) > 7\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$. Dann folgt: $\deg(f_1, \Omega) = \deg(f_2, \Omega)$.*

Beweis. Man approximiert f_1 und f_2 gleichmäßig durch zwei Folgen von Funktionen f_1^k und f_2^k in $A^2(\Omega) := C^k(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und wendet das Lemma (7ε -Lemma) s.o. an. \square

Satz (Invarianz unter Homotopen). *Es sei $f_t(x) = f(x, t) \in C^0(\bar{\Omega} \times [a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Familie von Funktionen zum Parameter $t \in [a, b]$. Ferner gelte $f(x, t) \neq 0$ für alle $x \in \partial\Omega$, $t \in [a, b]$. Dann gilt $\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$ für alle $s, t \in [a, b]$.*

Beweis. Man wählt zunächst ein $\varepsilon > 0$ so klein, dass $|f(x, t)| > 7\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$, $t \in [a, b]$ gilt. Da nun f auf der kompakten Menge $\bar{\Omega} \times [a, b]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit der Eigenschaft $|f(x, s) - f(x, t)| < \varepsilon$ für $x \in \bar{\Omega}$, $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| \leq \delta$. Nach dem Lemma (7ε -Lemma für stetige Funktionen) ist dann $\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$ für $s, t \in [a, b]$, $|s - t| \leq \delta$. Ein Überdeckungsargument liefert dann $\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$ für alle $s, t \in [a, b]$. \square

Satz (Rouché). Es seien $f, g \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ zwei Funktionen mit $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ für $x \in \partial\Omega$, dann folgt $\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega)$. Insbesondere gilt für $f(x) = g(x)$ für $x \in \partial\Omega$ dann $\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega)$. Das bedeutet, dass der Abbildungsgrad bereits durch die Randwerte $f_{\partial\Omega}$ eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Betrachte zu $t \in [0, 1]$ die Homotopie $f_t(x) := f(x) + t \cdot (g(x) - f(x))$ mit der Eigenschaft $|f_t(x)| \geq |f(x)| - t \cdot |g(x) - f(x)| > |f(x)| - t \cdot |f(x)| \geq 0$ für $x \in \partial\Omega$, $t \in [0, 1]$. Der Satz (Invarianz unter Homotopen) s.o., sagt dann $\deg(f, \Omega) = \deg(f_0, \Omega) = \deg(f_1, \Omega) = \deg(g, \Omega)$. \square

Lemma (Wichtige Abschätzung). Zu $a \in \mathbb{R}^n$ und $h > 0$ sei $W := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - a_i| \leq \frac{h}{2}\}$ ein Würfel der Kantenlänge h . Weiter sei eine C^2 -Funktion $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben mit $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$, $|Df(x) - Df(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in W$. Schließlich existiere ein $z \in W$ mit $J_f(z) = 0$. Dann gilt $f(W) \leq C(L, n) \cdot h^{n+1}$, wobei mit $|f(W)|$ das Lebesgue-Maß der Menge $f(W)$ gemeint ist.

Beweis. Da W kompakt und f stetig ist, ist $f(W)$ kompakt und somit auch Lebesgue-messbar. Wegen $J_f(z) = 0$ existiert ein Vektor $v_1 \in \mathbb{R}^n$, $|v_1| = 1$ mit $v_1^T \cdot Df(z) = 0$. Beweis: Weil die Determinante von $Df(z)$ gleich Null ist, ist ihr Zeilenrang kleiner n , also sind die Zeilen linear abhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von diesen Zeilen so, dass die Summe gleich 0 ist. Die Koeffizienten seien durch den Vektor v_1 gegeben, wobei die Linearkombination = 0 noch durch den Skalar der Länge von v_1 auf beiden Seiten geteilt wird; die Linearkombination ist dann immer noch Null. $v_1 \cdot Df(z)$ ist dann die Linearkombination der Zeilen von $Df(z)$, also gleich 0. v_1 wird nun durch Vektoren v_2, \dots, v_n zu einer Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n ergänzt. Es gilt dann:

$$v_1^T \cdot (f(z) - f(x)) = v_1^T \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t \cdot (z - x)) dt = v_1^T \cdot \int_0^1 Df(x + t \cdot (z - x)) dt \cdot (z - x) = v_1^T \cdot \int_0^1 Df((1-t) \cdot x + t \cdot z) dt \cdot (z - x)$$

Und das ist dann gleich folgendes:

$$v_1^T \cdot \int_0^1 Df(t \cdot x + (1-t) \cdot z) dt \cdot (z - x) = v_1^T \cdot \int_0^1 Df(z + t \cdot (x - z)) dt \cdot (z - x) = v_1^T \cdot \int_0^1 (Df(z + t \cdot (x - z)) - Df(z)) dt \cdot (z - x)$$

Mit der Voraussetzung $|Df(x) - Df(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in W$ folgt dann die folgende Abschätzung:

$$|v_1^T \cdot (f(z) - f(x))| \leq L \cdot |z - x|^2 \cdot \int_0^1 t dt \leq L \cdot ((z_1 - x_1)^2 + \dots + (z_n - x_n)^2) \cdot \frac{1}{2} \leq L \cdot (n \cdot h^2) \cdot 1 \leq L \cdot n^2 \cdot h^2$$

Es gilt nach Voraussetzung $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in W$, also gilt:

$$|v_i^T \cdot (f(z) - f(x))| \leq L \cdot |z - x| \leq L \cdot \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + \dots + (z_n - x_n)^2} \leq L \cdot \sqrt{n \cdot h^2} \leq L \cdot n \cdot h$$

Wobei hier $i = 2, \dots, n$ sei. Insgesamt folgt somit also:

$$f(W) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n : |v_1^T \cdot (f(z) - f(x))| \leq L \cdot n^2 \cdot h^2, |v_i^T \cdot (f(z) - f(x))| \leq L \cdot n \cdot h \text{ für } i = 2, \dots, n\}$$

Unter Verwendung der Invarianz des Lebesgue-Maßes gegenüber Rotationen ergibt sich:

$$|f(W)| \leq (L \cdot n^2 \cdot h^2) \cdot (L \cdot n \cdot h)^{n-1} = L^n \cdot n^{n+1} \cdot h^{n+1} = C(L, n) \cdot h^{n+1}$$

Und damit ist dann die Behauptung bewiesen. \square

Lemma (Sard'sches Lemma). Zu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sei $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Für eine kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ sei $M := \{x \in K : J_f(x) = 0\}$ die Menge der singulären Punkte. Dann ist $f(M) = \{f(x) : x \in K, J_f(x) = 0\}$ eine Nullmenge.

Beweis. Da Ω offen und $K \subseteq \Omega$ kompakt ist, existieren endlich viele Würfel $W_i \subseteq \Omega$ ($i = 1, \dots, N$), welche K überdecken, also $K \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_N$. Es sei nun W_* einer dieser Würfel. Es wird nun gezeigt: $f(W_* \cap M)$ ist eine Nullmenge. Wegen $f(M) \subseteq f(W_1 \cap M) \cup \dots \cup f(W_N \cap M)$ ist dann auch $f(M)$ eine Nullmenge. Es sei also $W_* := \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - a_i| \leq \frac{R}{2}\right\} \subseteq \Omega$ ein solcher Würfel mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^n$ und Kantenlänge $R > 0$. Wegen $f \in C^2(W_*, \mathbb{R}^n)$ gibt es zunächst eine Konstante $L < \infty$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$, $|Df(x) - Df(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für $x, y \in W_*$. Nun wird W_* von k^n achsenparallelen Würfeln \hat{W}_i , $i = 1, \dots, k^n$ der Kantenlänge $h := \frac{R}{k}$ überdeckt. Es sei nun $I := \{i \in \{1, \dots, k^n\} : \hat{W}_i \cap M \neq \emptyset\}$ die Indexmenge aller derjenigen Würfel, welche singuläre Punkte von f enthalten. Für jedes $i \in I$ liefert Lemma (Wichtige Abschätzung) dann $|f(\hat{W}_i)| \leq C(L, n) \cdot \left(\frac{R}{k}\right)^{n+1}$. Beachtet man $f(W_* \cap M) \subseteq \bigcup_{i \in I} f(\hat{W}_i)$, so folgt dann $|f(W_* \cap M)| \leq \sum_{i \in I} |f(\hat{W}_i)| \leq C(L, n) \cdot \left(\frac{R}{k}\right)^{n+1} \cdot k^n = C(L, n) \cdot \frac{R^{n+1}}{k}$. Für $k \rightarrow \infty$ folgt also $|f(W_* \cap M)| = 0$, wie behauptet. \square

Definition (Index eines Vektorfeldes). Der Index eines Vektorfeldes X mit $X(p) = 0$ um p ist definiert als $\deg\left(\left.\frac{X}{\|X\|}\right|_{\partial B(p, \varepsilon)}\right) =: i_X(p)$. Weitere Informationen findet man unten, Lemma (Anschauung von $\deg\left(\frac{X}{\|X\|}\right)$ im 2-dimensionalen Fall)

Satz (Morse). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar, $p \in U$ mit $f(p) = 0$, $(df)_p = 0$ und $(Hf)_p$ ist nicht entartet. Dann existiert ein $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subseteq U$ ein Diffeomorphismus mit $\psi(0) = p$. Es gibt dann ein $r \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

$$(f \circ \psi)(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_m^2$$

Ein solcher Punkt p heißt kritischer Punkt vom Index r . Es gilt also $\text{ind}(\nabla f, p) = \frac{J_{\nabla f}(p)}{|J_{\nabla f}(p)|} = (-1)^r$.

Beweis. Sei f so, wie in der Voraussetzung und wie im Lemma (Separation der Variablen, s.u.). Also existiert ein $\sigma = \pm 1$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subseteq U$ so, dass gilt $(f \circ \psi)(x_1, \dots, x_m) = \sigma \cdot x_1^2 + g(x_2, \dots, x_m)$. Es gilt:

$$(H(f \circ \psi))_0 = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Hg & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Also gilt $(Hf)_p$ nicht-entartet $\Rightarrow Hg$ ist nicht-entartet. Wende nun dasselbe Lemma auf $g|_{V \cap \{x_1=0\}}$ an. \square

Lemma (Separation der Variablen). Sei f wie im Satz von Morse, aber $(Hf)_p \neq 0$. Dann existiert ein $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ ein Diffeomorphismus mit $\psi(0) = p$ und es existiert ein $\sigma = \pm 1$ so, dass $\sigma \cdot x_1^2 + g(x_2, \dots, x_m)$ gilt, wobei $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar ist.

Beweis. Sei also $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, $p \in U$: $f(p) = 0$, $(df)_p = 0$, $(Hf)_p \neq 0$. Ist $M := (Hf)_p$, dann existieren nach Voraussetzung i, j mit $M_{ij} \neq 0$. Seien die Koordinaten einer Karte von der Mannigfaltigkeit durch X_1, \dots, X_n gegeben, also $f \circ \varphi(X_1, \dots, X_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Man führt nun eine Koordinatentransformation zu den Koordinaten x_1, \dots, x_n durch so, dass $\frac{\partial f}{\partial x_1^2} = \pm 1$ gilt in der Hessematrix an der Position $(1, 1)$ mit den neuen Koordinaten. Sei $\mathcal{H}_f(p)$ die Hessematrix in den Koordinaten X_1, \dots, X_n und $H_f(p)$ die für x_1, \dots, x_n . Genauer hat man also:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, J^T(p) \cdot \mathcal{H}_f(p) \cdot J(p) = H_f(p)$$

Das wird mit der Kettenregel bewiesen, unter Berücksichtigung von $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$. Damit man eine Koordinatentransformation hat, muss die Determinante von $J(p)$ ungleich Null sein, also ist $J(p)$ invertierbar. Wählt man die Einträge in $J(p)$ geschickt, dann hat man in den neuen Koordinaten $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) = \pm 1$. Wichtig ist, dass mindestens ein Eintrag in M ungleich Null ist, sonst gilt $\frac{\partial f}{\partial x_1^2} = 0$. Setze zur Vereinfachung der Rechnung $p = 0$; denn das Verschieben in ein $p \neq 0$ ändert die differenzierbare Struktur nicht. Es gilt $f(0) = 0$, $(df)_0 = 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) = \pm 1$. Annahme: $+1$. Folglich ist $f|_{x_1\text{-Achse}}$ lokal um 0 strikt konkav (+1) oder konkav (-1). Weiterhin hat $f|_{x_1\text{-Achse}}$ bei 0 ein lokal eindeutiges Minimum. Wegen der Stetigkeit von f , df und Hf existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x_2, \dots, x_n mit $|x_i| < \delta$ gilt: $f_{x_2, \dots, x_n} : W \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $W \subseteq \mathbb{R}$ offen. Diese Funktion ist dort strikt konkav und hat ein eindeutiges Minimum $\bar{x}_1 = \bar{x}_1(x_2, \dots, x_n)$. \bar{x}_1 ist durch die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ implizit definiert. Nach dem Satz über implizite Funktionen lässt sich \bar{x}_1 eindeutig als Funktion in x_2, \dots, x_n ausdrücken. $\bar{x}_1(x_2, \dots, x_n)$ ist eine glatte Funktion in x_2, \dots, x_n . Der Satz über implizite Funktionen lässt sich anwenden, da $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) \neq 0$ gilt. Schreibe nun neue Koordinaten:

$$y_1 = \text{sign}(x_1 - \bar{x}_1) \cdot \sqrt{f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$y_2 = x_2$$

⋮

$$y_n = x_n$$

Daraus folgt dann also $f(y_1, \dots, y_n) - y_1^2 = f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) + f(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n)$, also: $f(y_1, \dots, y_n) - y_1^2 = f(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n) = g(y_2, \dots, y_n)$. Nun wird noch gezeigt, dass $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_i \mapsto y_j(x_i)$ (glatt) die Bedingung für eine Koordinatentransformation erfüllt. Es muss also gelten: $\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) \neq 0$. Man untersucht y_1 auf der x_1 -Achse: $y_1 = \text{sign}(x_1) \cdot \sqrt{f(x_1, 0, \dots, 0) - f(0, 0, \dots, 0)}$. Es gilt $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ und es gilt $f(x_1, 0, \dots, 0) = x_1^2 + O(x_1^3)$

nach Taylor ($f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = +1$). Also gilt $f(x_1, 0, \dots, 0) = x_1^2 + h(x_1)$ mit $h(x_1) \in O(x_1^3)$. Folglich: $y_1 = \text{sign}(x_1) \cdot |x_1| \cdot \sqrt{1 + \frac{h(x_1)}{x_1^2}} = x_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{h(x_1)}{x_1^2}}$ ist glatt und es gilt $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(0) = +1$. Also:

$$\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_0 = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, ist die Determinante ungleich Null. \square

Satz (Hopf). Sei X ein Vektorfeld mit isolierten Nullstellen auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Rand, so, dass X auf ∂M nach außen zeigt. Dann gilt $\sum_{p \in X^{-1}(0)} i_X(p) = \deg(g : \partial M \rightarrow S^{n-1}, q \mapsto n_q)$, wobei g die Gaußabbildung sei. Dabei sei n_q senkrecht auf dem Rand, habe die Länge 1 und zeige nach außen. Insbesondere ist die Summe der Indizes eines Vektorfeldes unabhängig von der Wahl des Vektorfeldes.

Beweis. Seien p_1, \dots, p_k die isolierten Nullstellen von M und $B(p_i, \varepsilon)$ Kugeln um die p_i , so dass alle B_i disjunkt sind und ganz in M liegen ohne den Rand zu berühren. Definiere: $M' := M \setminus \bigcup_{i=1}^k B^\circ(p_i, \varepsilon)$. Definiere X' durch $\frac{X}{\|X\|}$. Sei $h := X'|_{\partial M'} : \partial M' \rightarrow S^{n-1}$. Weil in der Menge, die von $\partial M'$ eingegrenzt wird, keine Nullstellen sind, folgt nach dem Lemma (Nullstellen-Lemma) $\deg(h) = 0$, denn der Abbildungsgrad hängt nur von den Werten auf dem Rand ab (siehe Satz von Rouché). Weiter gilt: $0 = \deg(h) = \deg(h|_{\partial M}) + \deg(h|_{\partial M' \setminus \partial M})$. Es gilt $h|_{\partial M}$ ist homotop zu g durch punktweise Drehung. Also $\deg(h|_{\partial M}) = \deg(g)$. Weiter: $\deg(h|_{\partial B(p_i, \varepsilon)}) = -i_X(p_i)$, da $\partial B(p_i, \varepsilon)$ als Rand von M' die umgekehrte Orientierung trägt. Also: $0 = \deg(h) = \deg(g) + \sum_{i=1}^k -i_X(p_i)$, also: $\deg(g) = \sum_{i=1}^k i_X(p_i)$. Damit ist dann der Beweis vollständig erbracht. \square

Satz. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand und X ein glattes Vektorfeld auf M mit isolierten Nullstellen, die alle nicht-degeneriert sind (siehe Satz (Ersatzvektorfeld)). Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so dass $N_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \exists p \in M : \|p - y\| \leq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte $(n+1)$ -Mannigfaltigkeit diesmal mit Rand ist. Dann gilt: $\sum_{p \in X^{-1}(0)} i_X(p) = \deg(G)$, wobei $G : \partial N_\varepsilon \rightarrow S^n$ die Gaußabbildung sei. Wieder ist die Summe der Indizes eines Vektorfeldes unabhängig vom Vektorfeld. Der Beweis geht dann, wie folgt:

Beweis. Idee: Verwendung des Satzes von Hopf für eine geeignete Fortsetzung von X nach N_ε . Definiere $r : N_\varepsilon \rightarrow M$, $y \mapsto r(y)$ so, dass $\|y - r(y)\| = \min_{p \in M} \|y - p\|$. Insbesondere ist r glatt und es gilt $y - r(y) \perp T_{r(y)} M$ für alle y . Definiere $W : N_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $y \mapsto X(r(y)) + y - r(y)$ glatt mit $W(y) \in T_y N_\varepsilon$ für alle $y \in N_\varepsilon$. W zeigt nach außen auf ∂N_ε . W hat ausschließlich nicht-degenerierte Nullstellen. W hat die gleichen Nullstellen wie X , denn: $W(y) = 0$ ist äquivalent zu $X(r(y)) = 0$ und $r(y) = y$, weil doch gilt $y - r(y) \perp X(r(y)) \in T_{r(y)} M$, also äquivalent zu $X(y) = 0$. Weiter gilt für $p \in M$ mit $X(p) = 0$: $dW_p(\xi) = dX_p(\xi)$ für alle $\xi \in T_p M$ und $dW_p(\eta) = \eta$ für alle $T_p N_\varepsilon$ mit $\eta \perp T_p M$, denn: $dW_p(\eta) = dV_{r(p)} \cdot r'(p) \cdot \eta + \eta - r'(p) \cdot \eta$ und weil $r'(p) \perp \eta$ und $r'(p) \in T_p M$ gilt, folgt die Behauptung. Da X nur nicht-degenerierte Nullstellen hat, ist dW_p invertierbar und es gilt $\text{ind}(W, p) = \text{sign}(\det(dW_p)) = \text{sign}(\det(dX_p)) = \text{ind}(X, p)$. Weil die Nullstellen von W und X nicht degeneriert sind, gilt $i_W(p) = \text{ind}(W, p)$ und $i_X(p) = \text{ind}(X, p)$ für p mit $W(p) = X(p) = 0$, Begründung: Siehe im Beweis des Satzes (Poincaré-Hopf) unten. Es folgt dann nach dem Satz (Hopf): $\deg(G) = \sum_{p \in W^{-1}(0)} i_W(p) = \sum_{p \in X^{-1}(0)} i_X(p)$. \square

Satz (Poincaré-Hopf). Sei X ein glattes Vektorfeld auf M mit isolierten Nullstellen, dann gilt: $\sum_{p \in X^{-1}(0)} i_X(p) = \chi(M)$.

Beweis. Da die Summe der Indizes eines Vektorfeldes unabhängig von der Wahl des Vektorfeldes ist, wird nun ein spezielles Vektorfeld konstruiert, so dass die Summe der Indizes gleich der Euler-Charakteristik ist. Das Vektorfeld ∇f sei so konstruiert, dass sich in der triangulierten Mannigfaltigkeit in jeder i -Zelle ein kritischer Punkt von f mit Index i befindet. Weiter seien die Nullstellen des Vektorfeldes ∇f alle nicht entartet, also $\det(d(\nabla f)_p) = \det(H_f(p)) \neq 0$, wie in der Voraussetzung des Satzes (Morse). Es gilt für einen kritischen Punkt von ∇f ($\nabla f(p) = 0$) dann $i_{\nabla f}(p) = \deg\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}|_{\partial K_\varepsilon(p)}\right)$ Homotopie $= \deg(\nabla f|_{\partial K_\varepsilon(p)})$ Indexsummenformel $= \text{ind}(\nabla f, p)$, weil $\partial K_\varepsilon(p)$ eine einzige Nullstelle von ∇f , nämlich p , umrandet, wobei diese Nullstelle nicht entartet ist, also die Indexsummenformel anwendbar ist. Seien alle kritische Punkte mit p_1, \dots, p_l bezeichnet. Es gilt also $\nabla f(p_i) = 0$ für alle i . Daraus folgt dann also folgendes: $\sum_{p \in (\nabla f)^{-1}(0)} i_{\nabla f}(p) = \sum_{p \in (\nabla f)^{-1}(0)} \text{ind}(\nabla f, p) = \sum_{i=0}^{\dim(M)} (-1)^i \cdot \#\{\text{kritische Punkte von } f \text{ mit Index } i\} = \sum_{i=0}^{\dim(M)} (-1)^i \cdot \#\{i\text{-Zellen in der Triangulierung von } M\} = \chi(M)$. \square

Satz (Ersatzvektorfeld). Für jedes Vektorfeld X gibt es ein Ersatzvektorfeld \hat{X} so, dass alle Nullstellen nicht entartet sind und die Summe der Indizes des Vektorfeldes den gleichen Wert hat.

Beweis. Sei das Vektorfeld X definiert auf M . Man legt nun um alle Nullstellen von X eine 2ε -Umgebung so, dass alle diese Umgebungen disjunkt sind und den Rand ∂M nicht schneiden. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die den Wert 1 auf den ε -Bällen in den 2ε -Bällen um den Nullstellen hat. Außerhalb der 2ε -Bälle sei f dann 0. Man betrachtet dann das Vektorfeld $\hat{X}(p) = X(p) - f(p) \cdot y$ mit einem regulären Wert y des Vektorfeldes X , das existiert nach dem Lemma (Sard'sches Lemma). Es gilt, dass $\|X(p)\| > \delta$ für alle p außerhalb der ε -Bälle und innerhalb der 2ε -Bälle. Wählt man das y so, dass $\|y\| < \delta$ gilt, dann befinden sich alle Nullstellen des neuen Vektorfeldes \hat{X} innerhalb der ε -Bälle. Sei z eine Nullstelle des neuen Vektorfeldes: $\hat{X}(z) = 0 \Leftrightarrow X(z) = y$. Weil y regulär ist, gilt $\det(dX(z)) \neq 0$. Wegen $\hat{X}(p) = X(p) - f(p) \cdot y$ und $f = 1$ für z als Nullstelle des neuen Vektorfeldes, also $d\hat{X}(z) = dX(z)$, also $\det(d\hat{X}(z)) = \det(dX(z)) \neq 0$. D.h. die Nullstellen des neuen Vektorfeldes \hat{X} sind nicht entartet. Nach dem Satz von Hopf sind die Summen der Indizes beider Vektorfelder gleich $\deg(g)$, wobei g die Gaußabbildung auf dem Rand von M sei. Also gilt $\sum_{p \in X^{-1}(0)} i_X(p) = \deg(g) = \sum_{p \in \hat{X}^{-1}(0)} i_{\hat{X}}(p)$. Lokal kann man also das Vektorfeld X ändern, ohne, dass sich die Summe der Indizes ändert. Also ist man hier fertig! \square

Lemma (Anschauung von $\deg\left(\frac{X}{\|X\|}\right)$ im 2-dimensionalen Fall). *Sei $X : M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Sei dann $p \in M$ mit $X(p) = 0$. $\deg\left(\frac{X}{\|X\|}\right)$ zählt die Anzahl der Windungen von X um p mit $X(p) = 0$.*

Beweis. Es wird nun die Abbildung $\partial K_\delta(0) \rightarrow S^1$, $q \mapsto \frac{X(q)}{\|X(q)\|}$ betrachtet, wobei δ so klein sei, dass p die einzige Nullstelle des Vektorfeldes um das Bild von $\partial K_\delta(0)$ (Karte) sei. Durch Einführung von Polarkoordinaten kann man die Abbildung von eben auffassen als $\partial K_\delta(0) \rightarrow S^1$, $\varphi \mapsto \psi(\varphi)$. Also gilt dann unter Berücksichtigung der Indexsummenformel:

$$\deg\left(\frac{X}{\|X\|}, \partial K_\delta(0), \psi_0\right) = \int_0^{2\pi} \omega(|\psi(\varphi) - \psi_0|) \cdot \psi'(\varphi) d\varphi = \sum_{\varphi \in \psi^{-1}(\psi_0)} \text{ind}(\psi, \varphi) = \sum_{\varphi \in \psi^{-1}(\psi_0)} \frac{\psi'(\varphi)}{\|\psi'(\varphi)\|}$$

Dabei gilt $\frac{\psi'(\varphi)}{\|\psi'(\varphi)\|} \in \{-1, 1\}$. Sei $\psi_0 \neq \psi(0)$ und $\psi'(\varphi) \neq 0$ für alle $\varphi \in \psi^{-1}(\psi_0)$. Wenn für ein $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ gilt $\psi(\varphi_0) = \psi_0$ und $\psi'(\varphi_0) > 0$, dann hat man eine Umrundung in positiver Richtung. Ist hingegen $\psi'(\varphi_0) < 0$, dann hat man eine Umrundung in negativer Drehrichtung. Es folgt also, dass $\sum_{\varphi \in \psi^{-1}(\psi_0)} \frac{\psi'(\varphi)}{\|\psi'(\varphi)\|}$ die Anzahl der Umrundungen zählt, die den Zeiger ψ_0 passieren.

Es wurde also gezeigt, dass $\deg\left(\frac{X}{\|X\|}\right)$ die Anzahl der Windungen des Vektorfeldes um die Nullstelle p mit $X(p) = 0$ längs einer geschlossenen Kurve um p zählt. \square

Der Einbettungssatz von Whitney

[Zurück zur Liste]

Definition (Untergeordnete Partition der Eins). *Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit mit $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M durch Kartenumgebungen. Dann ist eine zu \mathcal{U} untergeordnete Partition der Eins gegeben durch eine Familie $\{\vartheta_i\}$ glatter Funktionen $\vartheta_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $\forall i \in \mathbb{N} \forall x \in M: \vartheta_i(x) \in [0, 1]$.
2. $\forall x \in M$ sind nur endlich viele $\vartheta_i(x)$ von Null verschieden.
3. $\forall i \in \mathbb{N}$ existiert ein Kompaktum K_i und ein α mit $\text{Tr}(\vartheta_i) := \overline{\{x \in X : \vartheta_i(x) \neq 0\}} \subseteq K_i \subseteq U_\alpha$.
4. $\forall x \in M: \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(x) = 1$. Diese Summe ist wegen 2. wohldefiniert.

Definition (Guter Atlas). *Ist M eine glatte n -Mannigfaltigkeit, dann gilt: $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ sei eine offene Überdeckung von M durch Kartenumgebungen. Es wird dann ein sogenannter guter Atlas $\{V_j\}$ zu \mathcal{U} mit den folgenden Eigenschaften konstruiert:*

1. $\{V_j\}$ (abzählbar) überdeckt M mit Koordinatensystemen $h_j : V_j \rightarrow B_3(0) := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < 3\}$.
2. $\{V_j\}$ ist lokal endlich, d.h. jedes $x \in M$ liegt in nur endlich vielen V_j .
3. Für jedes j existiert ein α so, dass $V_j \subseteq U_\alpha$. Durch Umnummerierung der Kartengebiete erhält man $\alpha = j$.
4. Die $h_j^{-1}(B_1(0))$ überdecken M immer noch.

Satz (Eigentliche Abbildung). *Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine eigentliche, glatte Abbildung $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Die Existenz einer solchen Funktion wird im Beweis gezeigt.*

Beweis. Es sei \mathcal{U} irgendeine offene Überdeckung von M durch Kartenumgebungen und $\{\vartheta_j\}$ eine untergeordnete Partition der Eins. $\chi(x) := \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \vartheta_j(x)$ ist wohldefiniert, da nur endlich viele $\vartheta_j(x) \neq 0$, und χ ist glatt. Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $[-n, n] \supseteq K$. Es gilt $\chi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \vartheta_j(x) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_j(x) = 1$. Ist $x \notin \bigcup_{j=1}^n \text{Tr}(\vartheta_j)$, dann gilt $\chi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \vartheta_j(x) = \sum_{j>n} j \cdot \vartheta_j(x) > n$. Also gilt $\chi^{-1}([-n, n]) \subseteq \bigcup_{j=1}^n \text{Tr}(\vartheta_j)$. Die Vereinigung ist eine Vereinigung von kompakten Mengen, ist also kompakt. Es gilt folglich $\chi^{-1}(K) \subseteq \chi^{-1}([-n, n]) \subseteq \text{Kompaktum}$. Da das Urbild (unter einer stetigen Funktion) abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, ist also $\chi^{-1}(K)$ abgeschlossen. Weil eine abgeschlossene Menge als Teilmenge einer kompakten Menge kompakt ist, ist folglich $\chi^{-1}(K)$ kompakt, und damit ist χ eigentlich. \square

Satz (Immersion). *Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt mit $m \geq 2n$. Dann gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Immersion $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\sup_{x \in M} \|F(x) - f(x)\| < \varepsilon$.*

Beweis. Es sei \mathcal{U} eine Überdeckung von M durch Kartengebiete und $\{V_j\}$ ein untergeordneter guter Atlas. Seien $h_j : V_j \rightarrow B_3(0)$ und $W_j = h_j^{-1}(B_1(0))$ Überdeckungen von M . Sei weiter $\rho_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $\text{bild}(\rho_i) \subseteq [0, 1]$, $\rho_j(x) = 1 \forall x \in W_j$ und $\rho_j(x) = 0 \forall x \notin h_j^{-1}(B_2(0))$. Es werden nun rekursiv glatte $F_j : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit den folgenden Eigenschaften konstruiert:

$$(i) \quad \sup_{x \in M} \|F_j(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

$$(ii) \quad \forall x \notin V_j : F_j(x) = F_{j-1}(x).$$

$$(iii) \quad F_j|_{M_j} \text{ ist eine Immersion, wobei gilt: } M_j = \bigcup_{i=1}^j W_i.$$

Seien nun für $j = 1, \dots, k-1$ die Eigenschaften (i)-(iii) erfüllt, dann konstruiert man daraus F_k mit denselben Eigenschaften. Man setzt $F_0 = f$. Man setzt weiter $F_k(x) := F_{k-1}(x) + \rho_k(x) \cdot A_k(x)$. Dabei sei x die Koordinaten aus dem \mathbb{R}^n mittels der Karten von M . $A_k(x) = A_k \cdot x$ mit $A_k \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ ist noch zu bestimmen. Ist $x \notin V_k = h_k^{-1}(B_3(0))$, dann ist auch $x \notin h_k^{-1}(B_2(0))$, also $\rho_k(x) = 0$ und deswegen $F_k(x) = F_{k-1}(x) + 0 \cdot A_k(x) = F_{k-1}(x)$, d.h. es gilt (ii). Nach Induktionsvoraussetzung gilt (i) für $j = k-1$, also $\sup_{x \in M} \|F_{k-1}(x) - f(x)\| < \varepsilon_0$. Weiter gilt $\sup_{x \in M} \|F_k(x) - F_{k-1}(x)\| = \sup_{x \in \text{Tr}(\rho_k)} \|\rho_k(x) \cdot A_k(x)\| < \varepsilon - \varepsilon_0$, wenn $\|A_k\|_{\infty} < \delta$ mit einem hinreichend kleinen δ , denn $\rho_k(x) \in [0, 1]$. Daraus folgt dann: $\sup_{x \in M} \|F_k(x) - f(x)\| \leq \sup_{x \in M} \|F_k(x) - F_{k-1}(x)\| + \sup_{x \in M} \|F_{k-1}(x) - f(x)\| < (\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 = \varepsilon$, also gilt (i). Nun wird ein A_k mit $\|A_k\|_{\infty} < \delta$ so konstruiert, dass F_k auf M_k eine Immersion ist: Es gilt $dF_k = dF_{k-1} + A_k$, denn für $x \in W_k$ gilt $\rho_k(x) = 1$, also $F_k(x) = F_{k-1}(x) + A_k \cdot x$. Man konstruiert also A_k so, dass dF_k vollen Rang hat, also n linear unabhängige Spalten besitzt, und es soll weiterhin $\|A_k\|_{\infty} < \delta$ gelten. Es werden nun induktiv geeignete Spalten von A_k gefunden: Angenommen, $\frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_l}$ sind linear unabhängig auf W_k , dann beachte:

$$\Phi : \mathbb{R}^l \times V_k \rightarrow \mathbb{R}^m : \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_l \end{array} \right), x \mapsto \left(\sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_i}(x) \right) - \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_{l+1}}(x)$$

Wähle nun $a_{l+1} \in \mathbb{R}^m \setminus \text{bild}(\Phi)$ und setze $\tilde{F}_k(x) := F_{k-1}(x) + a_{l+1} \cdot x_{l+1}$. Dann gilt:

$$\left(\frac{\partial \tilde{F}_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{F}_k}{\partial x_{l+1}} \right) = \left(\frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_l}, \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_{l+1}} + a_{l+1} \right)$$

Dabei gilt: $\frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_l}$ sind linear unabhängig und auch $\frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_{l+1}} + a_{l+1}$ ist keine Linearkombination von den vorausgegangenen. Nun ist folgendes festzustellen:

$$\dim(\text{bild}(\Phi)) \leq l + n \leq (n-1) + n = 2n - 1 < m \text{ (nach Voraussetzung)}$$

Es folgt also, dass $\text{bild}(\Phi) \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge ist. Daraus folgt, dass man ein $a_{l+1} \in \mathbb{R}^m \setminus \text{bild}(\Phi)$ mit $\|a_{l+1}\|_{\infty} < \delta$ wählen kann. Man setzt schließlich:

$$\forall x \in M : F(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} F_j(x) \text{ auf } M_{\infty} = M$$

Der Grenzwert ist wohldefiniert, denn: Es existiert ein $J \in \mathbb{N}$ so, dass $F_j(x) = F_J(x)$ für alle $j \geq J$, da $\{V_j\}$ lokal endlich ist. F ist somit die gesuchte Immersion. \square

Satz (Injektive Immersion). *Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Immersion mit $m \geq 2n+1$. Dann gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine injektive Immersion $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ so, dass gilt $\sup_{x \in M} \|F(x) - f(x)\| < \varepsilon$.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}$ eine Überdeckung von M so, dass $\forall \alpha : f|_{U_{\alpha}}$ ist injektiv (möglich, da f eine Immersion ist). $\{V_j\}$ sei ein untergeordneter guter Atlas. Also gilt $\forall i : f|_{V_i}$ ist injektiv, denn: $V_i \subseteq U_i$. Seien h_j, W_j, ρ_j und M_j genauso, wie im vorherigen Satz. Es werden induktiv glatte $F_j : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ konstruiert, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$(i) \quad F_j \text{ ist eine Immersion.}$$

- (ii) $\sup_{x \in M} \|F_j(x) - f(x)\| < \varepsilon$.
- (iii) $\forall x \notin V_j : F_j(x) = F_{j-1}(x)$.
- (iv) F_j ist injektiv auf M_j .
- (v) F_j ist injektiv auf V_i für alle i .

Seien für $j = 1, \dots, k-1$ die Bedingungen (i)-(v) erfüllt. Man setzt dann $F_k(x) = F_{k-1}(x) + \rho_k(x) \cdot b_k$, wobei $b_k \in \mathbb{R}^m$ noch zu bestimmen ist, und $F_0 = f$. Ist $x \notin V_k = h_k^{-1}(B_3(0))$, dann ist auch $x \notin h_k^{-1}(B_2(0))$, also $\rho_k(x) = 0$ und deswegen $F_k(x) = F_{k-1}(x) + 0 \cdot b_k = F_{k-1}(x)$, d.h. es gilt (iii). Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\sup_{x \in M} \|F_{k-1}(x) - f(x)\| < \varepsilon_0$. Weiter gilt $\sup_{x \in M} \|F_k(x) - F_{k-1}(x)\| = \sup_{x \in \text{Tr}(\rho_k)} \|\rho_k(x) \cdot b_k\| < \varepsilon - \varepsilon_0$, wenn $\|b_k\|_\infty < \delta$ mit einem hinreichend kleinen δ , denn $\rho_k(x) \in [0, 1]$. Daraus folgt dann: $\sup_{x \in M} \|F_k(x) - f(x)\| \leq \sup_{x \in M} \|F_k(x) - F_{k-1}(x)\| + \sup_{x \in M} \|F_{k-1}(x) - f(x)\| < (\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 = \varepsilon$, also gilt (ii). Nun zu Eigenschaft (i): Sei also $F_k(x) = F_{k-1}(x) + \rho_k(x) \cdot b_k$. Dabei gilt: $\rho_k(x) = 1$ für $x \in W_k = h_k^{-1}(B_1(0))$, $\rho_k(x) = 0$ für $x \notin h_k^{-1}(B_2(0))$ und es gilt $0 < \rho_k(x) < 1$ für $x \in h_k^{-1}(B_2(0)) \setminus h_k^{-1}(B_1(0))$. Ist also $\rho_k(x)$ gleich 0 oder 1 auf den entsprechenden Mengen, dann gilt $dF_k = dF_{k-1} + 0 = dF_{k-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist F_{k-1} immersiv, also auch F_k . Sei also von nun an $x \in h_k^{-1}(B_2(0)) \setminus h_k^{-1}(B_1(0)) =: \Gamma$. Nun gilt:

$$dF_k(x) = dF_{k-1}(x) + b_k \cdot \rho'_k(x) = dF_{k-1}(x) + \begin{pmatrix} b_{k,1} \cdot \frac{\partial \rho_k}{\partial x_1}(x) & \cdots & b_{k,1} \cdot \frac{\partial \rho_k}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k,m} \cdot \frac{\partial \rho_k}{\partial x_1}(x) & \cdots & b_{k,m} \cdot \frac{\partial \rho_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Setze: $\frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_1}(x) + b_k \cdot \frac{\partial \rho_k}{\partial x_1}(x)$. Seien bereits $\frac{\partial F_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_k}{\partial x_l}$ linear unabhängig auf Γ . Nun folgende Abbildung:

$$\Omega_l : \mathbb{R}^l \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m : \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_l \end{array} \right), x \mapsto \frac{1}{\frac{\partial \rho_{l+1}}{\partial x_{l+1}}(x)} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(x) \right) - \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_{l+1}}(x) \right]$$

Nun ist wieder $\mathbb{R}^l \times \Gamma$ ($l = 1, \dots, n-1$) eine m -dimensionale Nullmenge (wegen $\dim(\mathbb{R}^l \times \Gamma) = l+n \leq (n-1)+n = 2n-1 < m$), also auch $\text{bild}(\Omega_l)$. Man wähle nun $b_k \in \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{l=1}^{n-1} \text{bild}(\Omega_l)$ mit $\|b_k\|_\infty < \delta$. Das geht, weil $\bigcup_{l=1}^{n-1} \text{bild}(\Omega_l)$ eine endliche Vereinigung von Nullmengen ist. Nach Wahl von b_k mit $\|b_k\|_\infty < \delta$ gilt also $\sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(x) \neq \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_{l+1}}(x) + b_k \cdot \frac{\partial \rho_{l+1}}{\partial x_{l+1}}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_{l+1}}(x)$ für alle $l \in \{1, \dots, n-1\}$, für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ und für alle $x \in \Gamma$. Es folgt also, dass b_k so gewählt wurde, dass F_k mit $F_k(x) = F_{k-1}(x) + b_k \cdot \rho_k(x)$ eine Immersion ist, weil das Differential aus $F_{k-1}(x) + b_k \cdot \rho_k(x)$ aus n linear unabhängigen Spalten besteht. Ein anderes Argument dafür, dass (i) gilt, geht so: Es gilt zunächst $\sup_{x \in M} \|F_k(x) - F_{k-1}(x)\| = \|\rho_k(x) \cdot b_k\| < \varepsilon$, wenn $\|b_k\| < \delta$ hinreichend klein ist. Nun ist nach Induktionsvoraussetzung dF_{k-1} injektiv, hat also den Rang n . Es befindet sich F_k in einem ε -Schlauch um das immersive F_{k-1} . Aus der $(m \times n)$ -Matrix dF_{k-1} mit n Spalten kann man wegen Spaltenrang gleich Zeilenrang n linear unabhängige Zeilen auswählen, so dass man die $(n \times n)$ -Matrix $(dF_{k-1})_n$ erhält. Dann gilt: $\text{rang}(dF_{k-1}) = n \Leftrightarrow \text{rang}((dF_{k-1})_n) = n \Leftrightarrow \det((dF_{k-1})_n) \neq 0$. Wenn man nun F_{k-1} stetig zu einem F_k im ε -Schlauch um F_{k-1} ändert, dann ändert sich auch stetig die Determinante aus dem zur quadratischen Matrix geschnittenem Differential der verformten Funktion. Ist $\delta > 0$ klein genug, also auch $\varepsilon > 0$, dann ändert sich aus Stetigkeitgründen auch nichts daran, dass auch $\det((dF_k)_n) \neq 0$ gilt; d.h. weil der ε -Schlauch dünn genug ist, ist auch $\text{rang}(dF_k) = n$, und also ist F_k immersiv. Es gilt also (i) für $j = (k-1) + 1 = k$. Als nächstes wird das $b_k \in \mathbb{R}^m$ festgelegt: Sei $U \subseteq M \times M$ definiert durch $U = \{(x, y) : \rho_k(x) \neq \rho_k(y)\}$ und sei $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\Psi(x, y) = -\frac{F_{k-1}(x) - F_{k-1}(y)}{\rho_k(x) - \rho_k(y)}$. Nun gilt $\dim(\text{bild}(\Psi)) \leq \dim(U) \leq 2 \cdot \dim(M) = 2n < m$ (nach Voraussetzung). Daraus folgt, dass $\text{bild}(\Psi)$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^m ist. Folglich existiert ein $b_k \in \mathbb{R}^m \setminus \text{bild}(\Psi)$ mit $\|b_k\|_\infty < \delta$. b_k sei dabei gleich dem b_k von oben, so dass F_k weiter immersiv bleibt. Mit diesem b_k gilt also immer $\rho_k(x) = \rho_k(y)$ und (i)-(iii). Sei $F_k(x) = F_k(y)$ mit $x, y \in V_i$. Weil $\rho_k(x) = \rho_k(y)$ gilt, folgt $F_{k-1}(x) = F_{k-1}(y)$ auf V_i ; also gilt nach Induktionsvoraussetzung $x = y$. Es ist also (v) gezeigt für k . Jetzt wird (iv) nachgewiesen: Sei also $F_k(x) = F_k(y)$ auf M_k , dann gelten 2 Fälle: 1. Fall: $\rho_k(x) \neq \rho_k(y)$, 2. Fall: $\rho_k(x) = \rho_k(y)$. Fall 1 gilt nicht, nach Wahl von b_k . Sei also von nun an $\rho_k(x) = \rho_k(y)$. Wieder gibt es 2 Fälle: $\rho_k(x) = \rho_k(y) = 0$ oder $\rho_k(x) = \rho_k(y) \neq 0$. Sei also zunächst $\rho_k(x) = \rho_k(y) = 0$. Dann gilt $x, y \notin h_k^{-1}(B_2(0)) \Rightarrow x, y \notin W_k = h_k^{-1}(B_1(0))$, also $x, y \in M_{k-1}$, weil $x, y \in M_k$ vorausgesetzt wurde. Nach I.V. gilt wegen (iv) $x = y$, da $x, y \in M_{k-1}$ und F_{k-1} injektiv auf M_{k-1} . Sei diesmal der Fall $\rho_k(x) = \rho_k(y) \neq 0$. Dann gilt $x, y \in V_k$ (denn: $x \notin V_k \Rightarrow \rho_k(x) = 0$). Weil $F_{k-1}(x) = F_{k-1}(y)$ gilt, folgt nach Induktionsvoraussetzung $x = y$, denn F_{k-1} ist injektiv auf V_k nach (v). Damit ist also (iv) nachgewiesen. Es gelten also (iv) und (v) für k . Man definiert nun $F(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} F_j(x)$ auf $M_\infty = M$. Wieder ist der Grenzwert wohldefiniert, da $\{V_j\}$ lokal endlich ist. \square

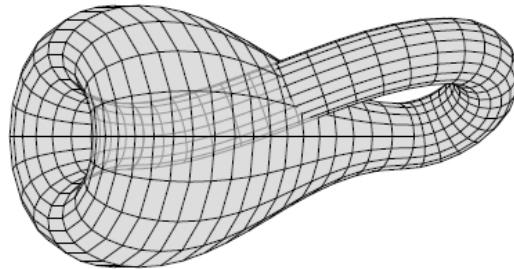
Satz (Einbettungssatz von Whitney). *Jede glatte n -Mannigfaltigkeit M erlaubt eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.*

Beweis. Sei $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und eigentlich (siehe Satz (Eigentliche Abbildung)). Dann ist auch $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ mit $f(x) = (\chi(x), \underbrace{0, \dots, 0}_{2n\text{-mal}})$ glatt und eigentlich. Nach dem Satz (Immersion) gibt es eine Immersion $F_1 : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ mit $\sup_{x \in M} \|F_1(x) - f(x)\| \leq 1$.

1. Und nach dem Satz (Injektive Immersion) gibt es eine injektive Immersion $F_2 : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ mit $\sup_{x \in M} \|F_2(x) - F_1(x)\| \leq 1$. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ eine kompakte Menge, die in einem Ball $B_R(0)$ enthalten ist. Ist also $F_2(p) \in K$, dann hat man $|f(p)| \leq |f(p) - F_1(p)| + |F_1(p) - F_2(p)| + |F_2(p)| \leq 1 + 1 + R$. Es wurde also gezeigt: $F_2(p) \in K \subseteq B_R(0) \Rightarrow f(p) \in \overline{B_{2+R}(0)}$. Daraus folgt dann, dass $F_2^{-1}(K)$ als abgeschlossene Menge (denn das Urbild abgeschlossener Mengen unter einer stetigen Abbildung sind ebenfalls abgeschlossen) eine Teilmenge von $f^{-1}(\overline{B_{2+R}(0)})$ (kompakt, weil f eigentlich ist) ist. Folglich ist $F_2^{-1}(K)$ kompakt. Also ist F_2 eine eigentliche injektive Immersion und darum also eine Einbettung. \square

Der Einbettungssatz von Whitney gilt sogar für \mathbb{R}^{2n} : Jede glatte n -Mannigfaltigkeit M erlaubt eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Korollar. *Die Klein'sche Flasche (siehe Bild unten) lässt sich als 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in den $\mathbb{R}^{2 \cdot 2} = \mathbb{R}^4$ einbetten, so dass die Klein'sche Flasche dort also keine Selbstdurchdringung oder -berührung mehr hat.*



Das Theorema Egregium

[Zurück zur Liste]

Satz. *Die Gauß'sche Krümmung K einer Fläche ist invariant unter lokalen Isometrien.*

Beweis. Sei $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $(u, v) \mapsto x(u, v) \in \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung einer regulären, orientierbaren und orientierten Fläche S . N bezeichne den Einheitsnormalenvektor auf S . Es sei nun definiert:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle, F = \langle x_u, x_v \rangle, G = \langle x_v, x_v \rangle$$

Das sind die Koeffizienten der 1. Fundamentalform.

$$e = -\langle N_u, x_u \rangle, f = -\langle N_u, x_v \rangle = -\langle N_v, x_u \rangle, g = -\langle N_v, x_v \rangle$$

Das sind die Koeffizienten der 2. Fundamentalform.

Beweis von $-\langle N_u, x_v \rangle = -\langle N_v, x_u \rangle$: Es gilt $\langle N, x_u \rangle = \langle N, x_v \rangle = 0$, also $\langle N_v, x_u \rangle + \langle N, x_{uv} \rangle \Leftrightarrow -\langle N_v, x_u \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle = \langle N, x_{vu} \rangle$. Wieder gilt $\langle N_u, x_v \rangle + \langle N, x_{vu} \rangle = 0$, also $\langle N, x_{vu} \rangle = -\langle N_u, x_v \rangle$. Daraus folgt $-\langle N_v, x_u \rangle = \langle N, x_{vu} \rangle = -\langle N_u, x_v \rangle$. Man möchte nun die Ableitungen von x_u , x_v und N in der Basis $\{x_u, x_v, N\}$ darstellen, was, wie folgt, aussieht:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \cdot x_u + \Gamma_{11}^2 \cdot x_v + L_1 \cdot N \\ x_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \cdot x_u + \Gamma_{12}^2 \cdot x_v + L_2 \cdot N \\ x_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \cdot x_u + \Gamma_{21}^2 \cdot x_v + \bar{L}_2 \cdot N \\ x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \cdot x_u + \Gamma_{22}^2 \cdot x_v + L_3 \cdot N \\ N_u &= a_{11} \cdot x_u + a_{21} \cdot x_v \\ N_v &= a_{12} \cdot x_u + a_{22} \cdot x_v \end{aligned}$$

Die Gaußkrümmung ist als die Determinante des Differentials der Gaußabbildung $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ definiert. Es sollen zunächst die a_{ij} bestimmt werden: $x(u, v)$ sei wieder die Parametrisierung von S bei $p \in S$. Sei weiter $\{x_u, x_v\}$ die zugehörige Basis von $T_p(S)$. Ist $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ eine parametrisierte Kurve in S mit $\alpha(0) = p$, dann gilt $dN_p(\alpha'(0)) = dN_p(x_u \cdot u'(0) + x_v \cdot v'(0)) =$

$\frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \Big|_{t=0} = N_u \cdot u'(0) + N_v \cdot v'(0) = (a_{11} \cdot x_u + a_{21} \cdot x_v) \cdot u'(0) + (a_{12} \cdot x_u + a_{22} \cdot x_v) \cdot v'(0) = (a_{11} \cdot u'(0) + a_{12} \cdot v'(0)) \cdot x_u + (a_{21} \cdot u'(0) + a_{22} \cdot v'(0)) \cdot x_v$, also gilt $dN_p \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$. Das zeigt, dass dN_p in der Basis $\{x_u, x_v\}$ durch die Matrix (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$ dargestellt wird. Die Determinante aus dieser Matrix ist dann gleich der Gaußkrümmung. Aus der Darstellung von N_u und N_v folgt:

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, x_v \rangle = a_{11} \cdot F + a_{21} \cdot G \\ -f &= \langle N_v, x_u \rangle = a_{12} \cdot E + a_{22} \cdot F \\ -e &= \langle N_u, x_u \rangle = a_{11} \cdot E + a_{21} \cdot F \\ -g &= \langle N_v, x_v \rangle = a_{12} \cdot F + a_{22} \cdot G \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise hat man also:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Damit ist also hergeleitet:

$$a_{11} = \frac{f \cdot F - e \cdot G}{E \cdot G - F^2}, a_{12} = \frac{g \cdot F - f \cdot G}{E \cdot G - F^2}, a_{21} = \frac{e \cdot F - f \cdot E}{E \cdot G - F^2}, a_{22} = \frac{f \cdot F - g \cdot E}{E \cdot G - F^2}$$

Außerdem weiß man jetzt: $K = \det(a_{ij}) = \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2}$. Aus $\langle N, x_u \rangle = \langle N, x_v \rangle = 0$ lässt sich herleiten: $e = \langle N, x_{uu} \rangle$, $f = \langle N, x_{uv} \rangle$ und $g = \langle N, x_{vv} \rangle$. Daraus folgt dann mit den Darstellungen von x_{uu} , x_{uv} , x_{vu} und x_{vv} in der Basis $\{x_u, x_v, N\}$, dass gilt: $L_1 = e$, $L_2 = \bar{L}_2 = f$ und $L_3 = g$. Nun zu den Christoffel-Symbolen: Wegen $x_{uv} = x_{vu}$ gilt $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ und $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. Es gilt nun für die Christoffel-Symbole:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 \cdot E + \Gamma_{11}^2 \cdot F &= \langle x_{uu}, x_u \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_u \\ \Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G &= \langle x_{uu}, x_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} \cdot E_v \\ \Gamma_{12}^1 \cdot E + \Gamma_{12}^2 \cdot F &= \langle x_{uv}, x_u \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_v \\ \Gamma_{12}^1 \cdot F + \Gamma_{12}^2 \cdot G &= \langle x_{uv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} \cdot G_u \\ \Gamma_{22}^1 \cdot E + \Gamma_{22}^2 \cdot F &= \langle x_{vv}, x_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} \cdot G_u \\ \Gamma_{22}^1 \cdot F + \Gamma_{22}^2 \cdot G &= \langle x_{vv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} \cdot G_v \end{aligned}$$

Man weiß nun, dass die Christoffel-Symbole sich als Terme aus Koeffizienten der ersten Fundamentalform und ihren Ableitungen darstellen lässt. Es gilt $(x_{uu})_v - (x_{uv})_u = 0$. Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^1 \cdot x_u + \Gamma_{11}^2 \cdot x_v + L_1 \cdot N)_v &= (\Gamma_{12}^1 \cdot x_u + \Gamma_{12}^2 \cdot x_v + L_2 \cdot N)_u \\ \Leftrightarrow (\Gamma_{11}^1 \cdot x_u + \Gamma_{11}^2 \cdot x_v + e \cdot N)_v &= (\Gamma_{12}^1 \cdot x_u + \Gamma_{12}^2 \cdot x_v + f \cdot N)_u \\ \Leftrightarrow \Gamma_{11}^1 \cdot x_{uv} + \Gamma_{11}^2 \cdot x_{vv} + e \cdot N_v + (\Gamma_{11}^1)_v \cdot x_u + (\Gamma_{11}^2)_v \cdot x_v + e_v \cdot N &= \\ \Gamma_{12}^1 \cdot x_{uu} + \Gamma_{12}^2 \cdot x_{vu} + f \cdot N_u + (\Gamma_{12}^1)_u \cdot x_u + (\Gamma_{12}^2)_u \cdot x_v + f_u \cdot N & \end{aligned}$$

Also gilt dann folgendes: $\Gamma_{11}^1 \cdot (\Gamma_{12}^1 \cdot x_u + \Gamma_{12}^2 \cdot x_v + f \cdot N) + \Gamma_{11}^2 \cdot (\Gamma_{12}^1 \cdot x_u + \Gamma_{12}^2 \cdot x_v + g \cdot N) + e \cdot (a_{12} \cdot x_u + a_{22} \cdot x_v) + (\Gamma_{11}^1)_v \cdot x_u + (\Gamma_{11}^2)_v \cdot x_v + e_v \cdot N = \Gamma_{12}^1 \cdot (\Gamma_{11}^1 \cdot x_u + \Gamma_{11}^2 \cdot x_v + e \cdot N) + \Gamma_{12}^2 \cdot (\Gamma_{11}^1 \cdot x_u + \Gamma_{11}^2 \cdot x_v + f \cdot N) + f \cdot (a_{11} \cdot x_u + a_{21} \cdot x_v) + (\Gamma_{12}^1)_u \cdot x_u + (\Gamma_{12}^2)_u \cdot x_v + f_u \cdot N$. Koeffizientenvergleich bei x_v (denn x_u , x_v und N sind linear unabhängig) liefert:

$$\Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 + e \cdot a_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{21}^2 + f \cdot a_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u$$

Und das ist gleich zu:

$$\Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 + e \cdot a_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{21}^2 + f \cdot a_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u$$

Daraus folgt dann also das folgende:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 = e \cdot a_{22} - f \cdot a_{21} = e \cdot \frac{f \cdot F - g \cdot E}{E \cdot G - F^2} - f \cdot \frac{e \cdot F - f \cdot E}{E \cdot G - F^2}$$

Also gilt folglich:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 = -E \cdot \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2} = -E \cdot K$$

Man sieht also, dass die Gaußkrümmung K aus Termen von Koeffizienten der 1. Fundamentalform und ihren Ableitungen darstellbar ist. K ist also aus Informationen nur aus der Fläche, ohne den Raum drumherum, bestimmt. Sei $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ eine Parametrisierung bei $p \in S$ und $\varphi : V \subseteq S \rightarrow S'$, wobei $V \subseteq x(U)$ eine Umgebung von $p \in S$ ist, eine lokale Isometrie bei p . Dann ist $y = \varphi \circ x$ eine Parametrisierung von S' bei $\varphi(p)$. Da φ eine Isometrie ist, stimmen die Koeffizienten der 1. Fundamentalform und deren Ableitungen in den Parametrisierungen x und y an den entsprechenden Punkten q und $\varphi(q)$, $q \in V$ überein; also stimmen die entsprechenden Christoffel-Symbole ebenfalls überein. Weil K in einem Punkt als Funktion der Christoffel-Symbole und Koeffizienten der 1. Fundamentalform und ihren Ableitungen darstellbar ist, folgt also $K(q) = K(\varphi(q))$ für alle $q \in V$. Es wurde damit also gezeigt, dass K (Gaußkrümmung) nur von der metrischen Struktur der Fläche abhängt und die Informationen außerhalb der Fläche, im Raum, nicht benötigt. Es wird jetzt an Beispielen gezeigt, warum die Koeffizienten der 1. Fundamentalform und ihre Ableitungen unter der Isometrie φ invariant bleiben: $E_{\varphi(p)} = \langle y_u, y_u \rangle = \langle (\varphi \circ x)_u, (\varphi \circ x)_u \rangle = \langle (d\varphi \circ x) \cdot x_u, (d\varphi \circ x) \cdot x_u \rangle = \langle x_u, x_u \rangle = E_p$ und $(E_v)_{\varphi(p)} = \frac{\partial}{\partial v} \langle y_u, y_u \rangle = \frac{\partial}{\partial v} \langle x_u, x_u \rangle = (E_v)_p$. Damit ist der Beweis also vollständig und endlich abgeschlossen. \square

Der Brouwer'sche Fixpunktsatz

[Zurück zur Liste]

Satz. Jede stetig-differenzierbare Abbildung $f : B^n \rightarrow B^n$ der n -dimensionalen Kugel in sich besitzt mindestens einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ mit $f(x) = x$.

Beweis. Angenommen, $f : B^n \rightarrow B^n$ hat keine Fixpunkte. Weil dann für alle $x \in B^n$ gilt $f(x) \neq x$, kann man eine eindeutig definierte Halbgerade von x durch $f(x)$ konstruieren, die den Rand von B^n , also die Menge S^{n-1} , in einem Punkt schneidet. Sei dieser Schnittpunkt mit $F(x)$ bezeichnet. $F : B^n \rightarrow S^{n-1}$ hat dann folgende Gestalt:

$$F(x) = x + \left(\sqrt{1 - \|x\|_2^2 + \left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|_2} \right\rangle^2} - \left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|_2} \right\rangle \right) \cdot \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|_2}$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig-differenzierbar. Auf dem Rand der Kugel wirkt F als Identität, also: $F(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$. Da $F(x) \in S^{n-1}$ ist für alle $x \in B^n$, gilt für diese x : $\sum_{i=1}^n (F^i(x))^2 = 1$. Differenziert man das, erhält man:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^n F^i \cdot dF^i = 2 \cdot \sum_{i,j=1}^n \left(F^i(x) \cdot \frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} \right) dx^j = 0$$

Wenn diese Differentialform gleich 0 ist, dann gilt für jeden Index j :

$$\sum_{i=1}^n F^i(x) \cdot \frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} = 0$$

Deshalb hat das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

die nichttriviale Lösung $(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = (F^1(x), \dots, F^n(x)) \neq (0, \dots, 0)$. Demnach ist das Gleichungssystem linear abhängig und somit verschwindet die Determinante der Matrix $\left(\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$, d.h. also: $\det \left(\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} \right) = 0$. Diese Tatsache wendet man auf die folgende Differentialform an: $\omega = F^1 \, dF^2 \wedge \dots \wedge dF^n$. Es gilt dann:

$$d\omega = dF^1 \wedge dF^2 \wedge \dots \wedge dF^n = \det \left(\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} \right) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = 0$$

Mithilfe des Satzes von Stokes folgt dann:

$$0 = \int_{B^n} d\omega = \int_{\partial B^n} \omega = \int_{S^{n-1}} \omega$$

Weil F auf S^{n-1} als Identität wirkt, gilt deswegen $\omega|_{S^{n-1}} = x^1 \, dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$, woraus folgt:

$$0 = \int_{S^{n-1}} x^1 \, dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{B^n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{B^n} 1 \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \text{vol}(B^n) \neq 0$$

Also hat man damit einen Widerspruch erzeugt, der zeigt, dass es einen Fixpunkt geben muss. \square

Der Igelsatz

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt nun folgendes: Jedes stetig-differenzierbare tangentiale Vektorfeld auf einer gerade-dimensionalen Sphäre hat mindestens eine Nullstelle.

Beweis. Angenommen, es gibt ein nirgends verschwindenes tangentiales Vektorfeld auf $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, wobei n gerade sei, das stetig-differenzierbar ist. Dann sind die Identität $\text{id} : S^n \rightarrow S^n$, $x \mapsto x = \text{id}(x)$ und die antipodische Involution $\tau : S^n \rightarrow S^n$, $x \mapsto -x = \tau(x)$ homotop. Denn folgende Abbildung

$$h(t, x) := \cos(\pi t) \cdot x + \sin(\pi t) \cdot \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

ist wegen $v(x) \neq 0$ für alle $x \in S^n$ eine stetig-differenzierbare Homotopie $h : [0, 1] \times S^n \rightarrow S^n$ zwischen diesen beiden Abbildungen $\text{id}(x) = h(0, x)$ und $\tau(x) = h(1, x)$. S^n ist kompakt und es gilt $\partial S^n = \emptyset$, also ist S^n eine geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension n . Sei dann ω eine n -Form mit $\int_{S^n} \omega \neq 0$ und $d\omega = 0$. Die $(n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $[0, 1] \times S^n$ mit dem Rand $\partial([0, 1] \times S^n) = \partial[0, 1] \times S^n \cup [0, 1] \times \partial S^n = \{0, 1\} \times S^n \cup [0, 1] \times \emptyset = \{0, 1\} \times S^n$ erbt von S^n und $[0, 1]$ mit der Standardorientierung eine Orientierung, die auch eine für ihren Rand induziert. Dann gilt wegen des Satzes von Stokes für Mannigfaltigkeiten also:

$$\int_{S^n} \tau^* \omega - \int_{S^n} \text{id}^* \omega = \int_{S^n} h_1^* \omega - \int_{S^n} h_0^* \omega = \int_{\{0, 1\} \times S^n} h^* \omega = \int_{\partial([0, 1] \times S^n)} h^* \omega|_{\partial([0, 1] \times S^n)} = \int_{[0, 1] \times S^n} d(h^* \omega) = \int_{[0, 1] \times S^n} h^*(d\omega)$$

Nun gilt doch $d\omega = 0$, also folgt:

$$\int_{S^n} \tau^* \omega - \int_{S^n} \text{id}^* \omega = \int_{[0, 1] \times S^n} h^* 0 = 0 \Rightarrow \int_{S^n} \tau^* \omega = \int_{S^n} \text{id}^* \omega = \int_{S^n} \omega \neq 0$$

Es gilt nun auch:

$$\int_{S^n} \tau^* \omega = \int_{S^n} (\omega_{1, \dots, n} \circ \tau) \cdot \tau^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = \int_{S^n} (\omega_{1, \dots, n} \circ \tau) \cdot \det\left(\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Und das ist nach der Transformationsformel (τ ist ein Diffeomorphismus) gleich zu:

$$\int_{S^n} \omega_{1, \dots, n}(\tau(x)) \cdot \det\left(\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\right) dx^1 \dots dx^n = - \int_{S^n} \omega_{1, \dots, n}(\tau(x)) \cdot \left| \det\left(\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\right) \right| dx^1 \dots dx^n = - \int_{\tau(S^n)} \omega_{1, \dots, n}(y) dy^1 \dots dy^n$$

Das gilt wegen $\det\left(\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\right) = (-1)^{n+1} = -1$ (n ist gerade, also $n+1$ ungerade). Zusammengefasst gilt also:

$$\int_{S^n} \omega = \int_{S^n} \tau^* \omega = - \int_{\tau(S^n)} \omega_{1, \dots, n} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = - \int_{S^n} \omega \neq 0$$

Denn es gilt $\tau(S^n) = S^n$. Es folgt also $1 = -1$ und das ist ein Widerspruch. Folglich kann es das angenommene Vektorfeld nicht geben und der Beweis des Satzes ist erbracht. \square

Das Shannon'sche Abtasttheorem

[Zurück zur Liste]

Satz. Eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$, die bandbeschränkt ist mit Bandbreite T , d.h. es gilt dann $f^\wedge(\theta) = 0$ für $\theta \notin [-T, T]$, ist diskret rekonstruierbar abtastbar, falls die äquidistante Abtastschrittweite h echt kleiner als $\frac{\pi}{T}$ ist.

Beweis. Zunächst gilt für $j, k \in \mathbb{Z}$ folgendes:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt} \cdot e^{ikt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} dt = \begin{cases} 2\pi, & j = k \\ \left[\frac{1}{i(k-j)t} \cdot e^{i(k-j)t} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, & j \neq k \end{cases}$$

Dabei sei i die imaginäre Einheit. Dann gilt für $c \in \ell_1(\mathbb{Z})$:

$$c(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c(j) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} c(j) \cdot e^{-ijt} \right) \cdot e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} c^\wedge(t) \cdot e^{ikt} dt =: (c^\wedge)^\vee(k)$$

Sei $\ell_1(\mathbb{Z}) \ni S_h f(k) := f(h \cdot k)$ der Abtastoperator. Es folgt dann:

$$S_h f(k) = ((S_h f)^\wedge)^\vee(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (S_h f)^\wedge(t) \cdot e^{ikt} dt$$

Es gilt aber auch:

$$\begin{aligned} S_h f(k) &= f(h \cdot k) = (f^\wedge)^\vee(h \cdot k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(t) \cdot e^{ihkt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{-\pi+2\pi j}{h}}^{\frac{\pi+2\pi j}{h}} f^\wedge(t) \cdot e^{ihkt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi+2\pi j}^{\pi+2\pi j} f^\wedge(h^{-1} \cdot t) \cdot e^{ikt} \cdot h^{-1} dt \\ &= \frac{1}{2\pi h} \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} f^\wedge(h^{-1} \cdot (t + 2\pi j)) \cdot e^{ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{h} \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} f^\wedge(h^{-1} \cdot (t + 2\pi j)) \right) \cdot e^{ikt} dt}_{=: F(t)} \end{aligned}$$

Es wurde also folgende Gleichung gezeigt (auf beiden Seiten wird noch mit $\sqrt{2\pi}$ multipliziert):

$$\left\langle (S_h f)^\wedge(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikt} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (S_h f)^\wedge(t) \cdot e^{ikt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cdot e^{ikt} dt = \left\langle F(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikt} \right\rangle$$

Weil die $e_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$, ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, gilt: $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle g, e_k \rangle \cdot e_k$. Folglich gilt dann: $F(t) = (S_h f)^\wedge(t)$. Ist nun h so klein, dass $[-T \cdot h, T \cdot h] \subsetneq [-\pi, \pi] \Leftrightarrow T \cdot h < \pi \Leftrightarrow h < \frac{\pi}{T}$ gilt, dann erhält man für $j > 0$ und $t \in [-\pi, \pi]$, dass $h^{-1} \cdot (t + 2\pi j) > \frac{T}{\pi} \cdot (-\pi + 2\pi j) = T \cdot (-1 + 2j) \geq T$ ist. Analog erhält man für $j < 0$, dass gilt: $h^{-1} \cdot (t + 2\pi j) < -T$. Wegen der Bandbeschränktheit von f ist also in der Summe in F höchstens der Summand für $j = 0$ ungleich 0. Das heißt also: $\frac{1}{h} \cdot f^\wedge(h^{-1} \cdot t) = F(t) = (S_h f)^\wedge(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(h \cdot j) \cdot e^{-ijt}$. Ersetzt man t durch $h \cdot \theta$, hat man $f^\wedge(\theta) = h \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(h \cdot j) \cdot e^{-ijh\theta}$. Da $T < \frac{\pi}{h}$ gilt und f nun T -bandbeschränkt ist, gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(\theta) \cdot e^{ix\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-T}^T f^\wedge(\theta) \cdot e^{ix\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} f^\wedge(\theta) \cdot e^{ix\theta} d\theta = \frac{h}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(h \cdot j) \cdot e^{i(x-jh)\theta} d\theta$$

Und das ist gleich zu:

$$\frac{h}{2\pi} \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(h \cdot j) \cdot \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{i(x-jh)\theta} d\theta = \frac{h}{2\pi} \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(h \cdot j) \cdot \left[\frac{e^{i(x-jh)\theta}}{i(x-jh)} \right]_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(h \cdot j) \cdot \underbrace{\frac{e^{i(x-jh)\frac{\pi}{h}} - e^{-i(x-jh)\frac{\pi}{h}}}{2i}}_{=\sin\left(\pi\left(\frac{x}{h} - j\right)\right)} \cdot \underbrace{\frac{h}{\pi} \cdot \frac{1}{(x-jh)}}_{=\left(\pi\left(\frac{x}{h} - j\right)\right)^{-1}}$$

Es wurde nun gezeigt:

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(h \cdot j) \cdot \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{x}{h} - j\right)\right)}{\pi\left(\frac{x}{h} - j\right)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(h \cdot j) \cdot \text{sinc}\left(\frac{x}{h} - j\right)$$

Dabei sei $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi \cdot x}$, der sogenannte „Sinus Cardinalis“. Es ist also eine Rekonstruktion von f aus einer diskreten Abtastungsmenge angegeben und der Satz damit bewiesen. \square

Der Satz von Stone-Weierstraß

[Zurück zur Liste]

Definition (Funktionenalgebra). Sei M ein kompakter metrischer Raum und $C^0(M, \mathbb{R})$ der vollständige reelle Raum der über M stetigen reellwertigen Funktionen. Man bezeichnet $A \subseteq C^0(M, \mathbb{R})$ als Funktionenalgebra, wenn A bezüglich Addition, skalarer Multiplikation und der Multiplikation von Funktionen abgeschlossen ist. Das heißt: Seien $f, g \in A$ und c eine reelle Konstante, dann gilt: $f + g \in A$, $c \cdot f \in A$ und $f \cdot g \in A$.

Definition. Sei $A \subseteq C^0(M, \mathbb{R})$ eine Funktionenalgebra.

1. Eine Funktionenalgebra verschwindet in einem Punkt $p \in M$, wenn $f(p) = 0$ für alle $f \in A$ gilt.

2. Eine Funktionenalgebra A heißt punktetrennend, wenn zu jedem Paar $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$ ein $f \in A$ existiert mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Lemma. Es heißen $r_k := \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ Bernsteinpolynome. Damit gilt dann: a) $\sum_{k=0}^n r_k(x) = 1$ und b) $\sum_{k=0}^n (k - n \cdot x)^2 \cdot r_k(x) = n \cdot x \cdot (1-x)$.

Beweis. Zu a): Es ist bekannt der Binomische Lehrsatz mit $x, y \in \mathbb{R}$: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$. Ersetzt man y durch $1-x$, dann folgt a). Zu b): Die Formel des binomischen Lehrsatzes leitet man auf beiden Seiten erst einmal, dann noch einmal ab: $n \cdot (x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot k \cdot x^{k-1} \cdot y^{n-k}$ und $n \cdot (n-1) \cdot (x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2} \cdot y^{n-k}$. In beiden Formeln ersetzt man nun y durch $1-x$ und multipliziert die erste Ableitung mit x und die zweite mit x^2 : $n \cdot x = x \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot k \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \cdot r_k(x)$ und $n \cdot (n-1) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2} \cdot (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \cdot (k-1) \cdot r_k(x)$. Es folgt dann $\sum_{k=0}^n k \cdot (k-1) \cdot r_k(x) = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot r_k(x) - \sum_{k=0}^n k \cdot r_k(x)$. Daraus folgt dann $\sum_{k=0}^n k^2 \cdot r_k(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^2 + \sum_{k=0}^n k \cdot r_k(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^2 + n \cdot x$. Jetzt weiß man: $\sum_{k=0}^n (k - n \cdot x)^2 \cdot r_k(x) = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot r_k(x) - 2 \cdot n \cdot x \cdot \sum_{k=0}^n k \cdot r_k(x) + (n \cdot x)^2 \cdot \sum_{k=0}^n r_k(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^2 + n \cdot x - 2 \cdot (n \cdot x)^2 + (n \cdot x)^2 = -n \cdot x^2 + n \cdot x = n \cdot x \cdot (1-x)$. \square

Satz (Approximationssatz von Weierstraß). Die Menge der Polynome ist dicht in $C^0([a, b], \mathbb{R})$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Das heißt für jedes $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom p so, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Beweis. O.B.d.A. untersuche man hier das Intervall $[0, 1]$ statt $[a, b]$. Da das Intervall kompakt ist, ist eine stetige Funktion auf diesem Intervall sogar gleichmäßig stetig. Außerdem weiß man, dass eine Folge stetiger Funktionen auf einem kompakten Intervall gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert. Auch das Maximum der Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$ lässt sich bestimmen, weil es ein kompaktes Intervall ist. Zu jeder stetigen Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ betrachte man die Funktion $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$. Es wird nun gezeigt, dass die Folge der Bernsteinpolynome $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert für $n \rightarrow \infty$. Auf dem Intervall $[0, 1]$ ist $r_k(x)$ immer positiv. Es gilt $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot r_k(x)$ und $f(x) = \sum_{k=0}^n f(x) \cdot r_k(x)$. Daraus folgt dann $p_n - f = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \cdot r_k$. Jetzt fehlt nur noch zu zeigen, dass diese Differenz kleiner ist als jedes $\varepsilon > 0$. Da f auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, gilt also: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $|f(i) - f(j)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $|i - j| < \delta$. Sei dann $K_1 = \left\{k \in \mathbb{N}_0 : \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta\right\}$ und $K_2 = \mathbb{N}_0 \setminus K_1$. Dann geht es so weiter: $|p_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \cdot r_k(x) = \sum_{k \in K_1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \cdot r_k(x) + \sum_{k \in K_2} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \cdot r_k(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k \in K_2} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \cdot r_k(x)$, weil $\sum_{k=0}^n r_k(x) = 1$ gilt und die k aus K_1 sind. Es gilt nun: $n \cdot x \cdot (1-x) = \sum_{k=0}^n (k - n \cdot x)^2 \cdot r_k(x) \geq \sum_{k \in K_2} (k - n \cdot x)^2 \cdot r_k(x) \geq \sum_{k \in K_2} (n \cdot \delta)^2 \cdot r_k(x)$. Daraus folgt jetzt: $\sum_{k \in K_2} r_k(x) \leq \frac{n \cdot x \cdot (1-x)}{(n \cdot \delta)^2}$. Weil $x \cdot (1-x)$ auf $[0, 1]$ kleiner-gleich $\frac{1}{4}$ ist, folgt $\sum_{k \in K_2} r_k(x) \leq \frac{1}{4 \cdot n \cdot \delta^2}$. Sei $\|f\| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$, dann gilt $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq 2 \cdot \|f\|$. Also gilt dann $|p_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|}{2 \cdot n \cdot \delta^2}$. Nun gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{\|f\|}{2 \cdot n \cdot \delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Also hat man endlich $|p_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Damit ist man hier fertig! \square

Lemma. Sei $A \subseteq C^0(M, \mathbb{R})$ eine punktetrennende und nirgendsverschwindende Funktionenalgebra. Seien weiter p_1 und p_2 verschiedene Punkte und die Konstanten c_1 und c_2 in \mathbb{R} . Dann existiert eine Funktion $f \in A$ mit $f(p_1) = c_1$ und $f(p_2) = c_2$.

Beweis. Wähle $g_1, g_2 \in A$ so, dass $g_1(p_1) \neq 0 \neq g_2(p_2)$. Dann ist $g = g_1^2 + g_2^2 \in A$ und $g(p_1) \neq 0 \neq g(p_2)$. Wähle dann ein $h \in A$ so, dass die Punkte p_1 und p_2 trennt und betrachte die Matrix

$$H := \begin{pmatrix} a & a \cdot b \\ c & c \cdot d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g(p_1) & g(p_1) \cdot h(p_1) \\ g(p_2) & g(p_2) \cdot h(p_2) \end{pmatrix}$$

Nach Konstruktion sind $a, c \neq 0$ und $b \neq d$. Da die Determinante von H nun $\det(H) = a \cdot c \cdot d - c \cdot a \cdot b = a \cdot c \cdot (d - b) \neq 0$ ist, hat H den Rang 2 und das lineare Gleichungssystem

$$a \cdot \xi + a \cdot b \cdot \eta = c_1 \wedge c \cdot \xi + c \cdot d \cdot \eta = c_2$$

hat eine eindeutige Lösung (ξ, η) . Dann ist $f = \xi \cdot g + \eta \cdot g \cdot h \in A$ und $f(p_1) = c_1, f(p_2) = c_2$. \square

Lemma. Der Abschluss einer Funktionenalgebra in $C^0(M, \mathbb{R})$ ist wieder eine Funktionenalgebra.

Beweis. Sei A eine Funktionenalgebra in $C^0(M, \mathbb{R})$ und $f, g \in \overline{A}$. Das bedeutet dann also, dass $f, g \in \{h \in C^0(M, \mathbb{R}) : h \text{ ist Berührungs punkt von } A\}$. Ist f ein Berührpunkt von A , dann gibt es in jeder Umgebung um f ein Element aus A . Es existieren deswegen Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A so, dass $f_n \rightarrow f$ und $g_n \rightarrow g$ bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz. Da $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine Folge in A ist und $f_n + g_n \rightarrow f + g$ bzgl. gleichmäßiger Konvergenz, folgt $f + g \in \overline{A}$. Die Nachweise der Abgeschlossenheit bzgl. der skalaren Multiplikation und der Multiplikation laufen analog. \square

Proposition. Sie A eine Funktionenalgebra, dann ist $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

Beweis. Ist $f \in \overline{A}$, dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $g \in A$ so, dass gilt: $\|f - g\| < \varepsilon$. Es gilt dann $A \subseteq \overline{A}$. Beweis: Seien $f \in A$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Es folgt: $\|f - f\| = 0 < \varepsilon \Rightarrow f \in \overline{A}$. Also gilt auch: $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$. Es muss also nur noch $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$ gezeigt werden: Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in \overline{\overline{A}}$, daraus folgt, es existiert ein $g \in \overline{A}$ mit $\|g - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $g \in \overline{A}$ ist, existiert ein $h \in A$ mit $\|g - h\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt $\|h - f\| = \|h - g + g - f\| \leq \|h - g\| + \|g - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$. \square

Lemma. Sei A eine Funktionenalgebra in $C^0(M, \mathbb{R})$, die in keinem Punkt verschwindet und punktetrennend ist. Sei $f \in \overline{A}$, dann ist auch $|f| \in \overline{A}$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz existiert ein Polynom p so, dass gilt $\sup\{|p(y) - |y|| : |y| \leq \|f\|\} < \frac{\varepsilon}{2}$ (*). $|y|$ ist eine stetige Funktion, welche auf dem Intervall $[-\|f\|, \|f\|]$ definiert ist. Der konstante Term von p ist kleiner-gleich $\frac{\varepsilon}{2}$, da $|p(0) - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $q(y) = p(y) - p(0)$. Dann ist wegen (*) also $|q(y) - |y|| < \varepsilon$. Setze nun $q(y) = a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2 + \dots + a_n \cdot y^n$ und $g = a_1 \cdot f + a_2 \cdot f^2 + \dots + a_n \cdot f^n$. Da \overline{A} eine Algebra ist, ist $g \in \overline{A}$ wegen $f \in \overline{A}$ (nach Voraussetzung). Sei nun $y = f(x)$ mit $x \in M$. Dann ist $|g(x) - |f(x)|| = |q(y) - |y|| < \varepsilon$. Daher ist $|f| \in \overline{A} = \overline{A}$. \square

Lemma. Sei A eine punktetrennende Funktionenalgebra, die in keinem Punkt verschwindet und seien $f, g \in \overline{A}$. Dann sind $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ auch Funktionen in \overline{A} .

Beweis. Das Maximum und das Minimum zweier Funktionen kann, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$\max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{und} \quad \min\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

Da \overline{A} eine Algebra ist, folgt also die Behauptung. Wenn man z.B. das Maximum von mehreren Funktionen haben möchte, dann: $\max\{f, g, h\} = \max\{f, \max\{g, h\}\}$ ist wieder ein Term mit Betragsausdrücken. \square

Satz (Stone-Weierstraß). Sei M kompakt und A eine Funktionalgebra in $C^0(M, \mathbb{R})$, die in keinem Punkt verschwindet und punktetrennend ist. Dann liegt A dicht in $C^0(M, \mathbb{R})$: Zu gegebenen $F \in C^0(M, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ ist ein $G \in A$ gesucht, so dass für alle $x \in M$ gilt: $F(x) - \varepsilon < G(x) < F(x) + \varepsilon$.

Beweis. Sei $F \in C^0(M, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Es wird nun ein $G \in \overline{A}$ gesucht so, dass der Graph von G im ε -Schlauch von F liegt. Man hält nun alle unterschiedlichen Punkte $p, q \in M$ fest. Nach einem Lemma oben kann man eine Funktion $H_{pq} \in A$ finden mit gegebenen Werten für p, q , so dass also die folgende Bedingung erfüllt ist: $H_{pq}(p) = F(p)$ und $H_{pq}(q) = F(q)$. Nun hält man p fest und lässt q variieren. Aus der Stetigkeit von H_{pq} folgt, dass jedes $q \in M$ eine Umgebung U_q hat, so dass aus $x \in U_q$ folgt, dass $F(x) - \varepsilon < H_{pq}(x)$ ist. H_{pq} löst das Problem schonmal lokal. Die Kompaktheit von M impliziert, dass nur endlich viele dieser Umgebungen U_q notwendig sind, um die Menge M zu überdecken. Seien diese Umgebungen U_{q_1}, \dots, U_{q_n} . Definiere G_p , wie folgt:

$$G_p(x) = \max\{H_{pq_1}, \dots, H_{pq_n}\}$$

Dann ist $G_p \in \overline{A}$ nach einem Lemma oben und es gilt $G_p(p) = F(p)$ und $F(x) - \varepsilon < G_p(x) < F(x) + \varepsilon$ für alle $x \in M$. Stetigkeit impliziert diesmal, dass jedes p eine Umgebung V_p hat, so dass aus $x \in V_p$ folgt, dass $G_p(x) < F(x) + \varepsilon$ gilt. Da M kompakt ist, überdecken endlich viele dieser Umgebungen die Menge M ; seien diese V_{p_1}, \dots, V_{p_m} genannt. Setze nun:

$$G(x) = \min\{G_{p_1}, \dots, G_{p_m}\}$$

Es gilt also $G \in \overline{A}$ und nach Konstruktion $F(x) - \varepsilon < G(x) < F(x) + \varepsilon$ für alle $x \in M$. \square

Der Satz von Tychonoff

[Zurück zur Liste]

Definition (Filter). Eine nichtleere Familie \mathcal{F} von Teilmengen von einer Menge M ist ein Filter auf M , falls sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$ und $B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
3. $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B \subseteq M \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

Ein Filter \mathcal{F} konvergiert gegen ein x , wenn alle Umgebungen von x in \mathcal{F} enthalten sind. Man nennt einen Filter \mathcal{U} auf M Ultrafilter, falls für jede Menge $A \subseteq M$ entweder $A \in \mathcal{U}$ oder $M \setminus A \in \mathcal{U}$ gilt.

Satz. Sei \mathcal{U} ein Filter auf M . Folgende Bedingungen sind dann äquivalent:

1. \mathcal{U} ist ein Ultrafilter.
2. Wenn \mathcal{F} ein Filter auf M ist und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, dann gilt $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.
3. Wenn $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{U}$, dann gilt $A_1 \in \mathcal{U}$ oder $A_2 \in \mathcal{U}$.

Beweis. 1. \Rightarrow 2.: Gebe es ein Element $A \in \mathcal{F}$, das nicht in \mathcal{U} wäre, so wäre $M \setminus A$ in \mathcal{U} und somit auch in \mathcal{F} . Aber dann gelte $A \cap (M \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{F}$ und das ist ein Widerspruch. 2. \Rightarrow 1.: Wäre \mathcal{U} kein Ultrafilter, dann wäre für alle $A \subseteq M$ weder $A \in \mathcal{U}$ noch $M \setminus A \in \mathcal{U}$. Und dann wäre $\{B \cap U : U \in \mathcal{U}, A \subseteq B \subseteq M\}$ ein Filter auf M , der A enthält und U umfasst. Diese Menge ist aber eine echte Obermenge und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. 1. \Rightarrow 3.: Es gilt $A_1 \in \mathcal{U}$ und wenn nicht, dann gilt $M \setminus A_1 \in \mathcal{U}$ (Ultrafilter-Definition). Damit folgt $(M \setminus A_1) \cap (A_1 \cup A_2) \subseteq A_2 \subseteq M \Rightarrow A_2 \in \mathcal{U}$. 3. \Rightarrow 1.: Man setzt $A_2 = M \setminus A_1$, also ist dann $A_1 \cup A_2 = M \in \mathcal{U}$, also A_1 oder A_2 in \mathcal{U} enthalten, d.h. \mathcal{U} ist ein Ultrafilter. \square

Satz. Jeder Filter wird von einem Ultrafilter auf der selben Menge umfasst.

Beweis. Sei \mathcal{F} ein Filter auf M . Die Menge $\{\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F} : \mathcal{G}$ ist ein Filter auf $M\}$ wird durch die Teilmengenrelation \subseteq geordnet. Wenn K eine Kette in dieser Menge ist, so ist $\bigcup K$ wieder ein Filter, der \mathcal{F} umfasst, und eine obere Schranke von K . Damit ist die Voraussetzung für das Zorn'sche Lemma gegeben und es existiert ein \subseteq -maximales Element \mathcal{U} . Weil $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}$ nunmal $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ impliziert, ist \mathcal{U} ein Ultrafilter. \square

Satz. Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn alle Ultrafilter auf X konvergieren.

Beweis. „ \Rightarrow “: Angenommen, X ist kompakt, aber ein Ultrafilter \mathcal{U} auf X konvergiert nicht. Damit gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung von x , die nicht in \mathcal{U} enthalten ist. Sei dann $\mathcal{O} = \{O : O \text{ offen}, O \notin \mathcal{U}\}$ mit $\bigcup \mathcal{O} = X$ und da X kompakt ist, existiert eine endliche Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{O}$ mit $\bigcup \mathcal{E} = X$. Weil $\bigcup \mathcal{E} = X \in \mathcal{U}$ gilt, folgt, dass ein Element von \mathcal{E} in \mathcal{U} enthalten ist, was der Konstruktion von \mathcal{O} widerspricht. Die andere Implikation, „ \Leftarrow “: Angenommen, jeder Ultrafilter konvergiert, aber X ist nicht kompakt. Sei \mathcal{O} eine Menge von offenen Mengen mit $\bigcup \mathcal{O} = X$ so, dass für keine endliche Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{O}$ gilt $\bigcup \mathcal{E} = X$. Dann ist $\{X \setminus \bigcup E : E \subseteq \mathcal{O}, E \text{ endlich}\}$ ein Filter, der von einem konvergenten Ultrafilter umfasst wird. Dieser Filter konvergiert gemäß der Annahme gegen ein x . Dieses x ist in einem $U_x \in \mathcal{O}$ enthalten. Da der Ultrafilter \mathcal{U} gegen x konvergiert, gilt $U_x \in \mathcal{U}$. Aber es gilt auch $X \setminus U_x \in \mathcal{U}$, also $\emptyset \in \mathcal{U}$ und das ist ein Widerspruch dazu, dass ein Filter die leere Menge nicht enthält und der Satz ist bewiesen. \square

Satz. Wenn für alle $i \in I$ der Filter $p_i[\mathcal{F}]$ gegen $x_i \in X_i$ konvergiert, dann konvergiert \mathcal{F} auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ gegen x .

Beweis. Sei U eine Umgebung von x . Es gibt eine endliche Menge $E \subseteq I$ mit U_i als Umgebung von x_i so, dass gilt $\bigcap_{i \in E} p_i^{-1}(U_i) \subseteq U$. Dann gibt es wegen der Konvergenz $p_i[\mathcal{F}] \rightarrow x_i = p_i(x)$ ein $A \in \mathcal{F}$ mit $p_i(A) \subseteq U_i$ ($i \in E$). Daraus folgt: $A \subseteq p_i^{-1}(p_i(A)) \subseteq p_i^{-1}(U_i) \Rightarrow A \subseteq \bigcap_{i \in E} p_i^{-1}(U_i) \subseteq U$. Also gilt $\mathcal{F} \ni A \subseteq U \subseteq X$, folglich $U \in \mathcal{F}$ und das bedeutet $\mathcal{F} \rightarrow x$. \square

Satz. Die Menge $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann kompakt, wenn für alle $i \in I$ die Menge X_i kompakt ist. Insbesondere ist der unendlich-dimensionale Würfel $[0, 1]^\infty$ (Hilbertwürfel) kompakt.

Beweis. „ \Rightarrow “: Wenn X kompakt ist, dann auch $X_i = p_i(X)$ für alle $i \in I$ als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung. Die andere Richtung, „ \Leftarrow “: Sei \mathcal{U} ein Ultrafilter auf X . Da X_i kompakt ist, konvergiert der Ultrafilter $p_i(\mathcal{U})$ gegen ein $x_i \in X_i$. Dann konvergiert \mathcal{U} gegen $x = (x_i)_{i \in I}$ und das bedeutet, dass X kompakt ist. \square

Das Brachistochrone-Problem

[Zurück zur Liste]

Satz. Durchläuft ein Körper ohne Reibung eine Bahnkurve von einem oberen Anfangspunkt A in der Ebene zu einem weiter rechts liegenden Endpunkt B in minimaler Zeit, dann ist die Kurve ein Teil einer Zykloide von A nach B .

Beweis. Sei $A = (0, 0)$ und $B = (b_1, b_2)$. Zuerst wird die Zeit berechnet, die der Körper für den Durchlauf der Bahnkurve braucht: Sei m die Masse des Körpers und g die Erdbeschleunigung und die Kurve werde beschrieben durch eine Funktion $y(x)$. Ist die Kurve an der Stelle x von A um $y(x)$ nach unten gefallen, dann hat der Körper die potentielle Energie $E_{pot} = -mgy(x)$ ($y(x)$ ist negativ) verloren, welche in kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ umgewandelt wird. Es gilt deswegen:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgy(x) \Rightarrow v = \sqrt{-2gy(x)}$$

Nun braucht man noch die Länge der Kurve bis zur Stelle x , die sich folgendermaßen berechnet:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\tau)^2} d\tau$$

Sei t die Zeit, die Körper von $A = (0, 0)$ nach $(x, y(x))$ braucht. Dann gilt nach der Kettenregel:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(x(t)) = \frac{d}{dx}s(x(t)) \cdot \frac{d}{dt}x(t)$$

Wegen $v(t) = \sqrt{-2gy(x(t))}$ und $\frac{d}{dx}s(x(t)) = \sqrt{1 + y'(x(t))^2}$ folgt:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sqrt{\frac{-2gy(x(t))}{1 + y'(x(t))^2}}$$

Da $x(t)$ streng monoton steigend ist, existiert die Umkehrfunktion. Für die Ableitung dieser Umkehrfunktion gilt die Formel $\frac{d}{dx}t(x) = \frac{1}{\frac{d}{dt}x(t(x))}$, also gilt dann:

$$\frac{d}{dx}t(x) = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{-2gy(x)}} \Rightarrow t(x) = \int \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{-2gy(x)}} dx$$

Man kann nun die Gesamtzeit ausrechnen:

$$T = t(b_1) - t(0) = t(b_1) - 0 = \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{-2gy(x)}} dx = \int_0^{b_1} L(y(x), y'(x)) dx$$

Gesucht wird nun eine Kurve y so, dass die Gesamtzeit T minimal ist. Sei y_0 diese Funktion, für die das Integral $\int_0^{b_1} L(y, y') dx$ das Extremum annimmt. Man betrachtet dann zu beliebige $u(x)$ mit $u(0) = u(b_1) = 0$ die Funktionenschar $y_0(x) + \varepsilon \cdot u(x)$ und dazu das folgende Integral:

$$T(\varepsilon) = \int_0^{b_1} L(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') dx$$

$T(\varepsilon)$ muss an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Extremum haben, weil y_0 das Integral ja minimiert. Es gilt also $T'(0) = 0$. Durch Vertauschung von Differentiation und Integration und mit der verallgemeinerten Kettenregel erhält man dann:

$$T'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^{b_1} L(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') dx = \int_0^{b_1} \frac{d}{d\varepsilon} L(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') dx$$

Und das ist gleich zu:

$$\int_0^{b_1} L_y(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') \cdot u + L_{y'}(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') \cdot u' dx$$

Um u ausklammern zu können, wird der zweite Summand im Integral partiell integriert:

$$\int_0^{b_1} L_{y'}(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') \cdot u' dx = \underbrace{[L_{y'}(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') \cdot u]_0^{b_1}}_{=0} - \int_0^{b_1} \left(\frac{d}{dx} L_{y'}(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') \right) \cdot u dx$$

Insgesamt gilt also:

$$T'(\varepsilon) = \int_0^{b_1} (L_y(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') - \frac{d}{dx} L_{y'}(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u')) \cdot u dx$$

Als nächstes wird $\varepsilon = 0$ gesetzt. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} L_{y'}(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') \right)_{\varepsilon=0} &= (L_{y'y}(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') \cdot (y'_0 + \varepsilon \cdot u') + L_{y'y'}(y_0 + \varepsilon \cdot u, y'_0 + \varepsilon \cdot u') \cdot (y''_0 + \varepsilon \cdot u''))_{\varepsilon=0} \\ &= L_{y'y}(y_0, y'_0) \cdot y'_0 + L_{y'y'}(y_0, y'_0) \cdot y''_0 \\ &= \frac{d}{dx} L_{y'}(y_0, y'_0) \end{aligned}$$

Das notwendige Kriterium für die Extremaleigenschaft von y_0 lautet also:

$$T'(0) = \int_0^{b_1} \left(L_y(y_0, y'_0) - \frac{d}{dx} L_{y'}(y_0, y'_0) \right) \cdot u \, dx = 0$$

Da dieses Integral für beliebige u verschwindet, folgt $L_y(y_0, y'_0) - \frac{d}{dx} L_{y'}(y_0, y'_0) = 0$. Diese Erkenntnis benutzt man nun, um eine einfachere Gleichung herzuleiten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (L(y_0, y'_0) - y'_0 \cdot L_{y'}(y_0, y'_0)) &= L_y(y_0, y'_0) \cdot y'_0 + L_{y'}(y_0, y'_0) \cdot y''_0 - y''_0 L_{y'}(y_0, y'_0) - y'_0 \cdot \frac{d}{dx} L_{y'}(y_0, y'_0) \\ &= L_y(y_0, y'_0) \cdot y'_0 - y'_0 \cdot \frac{d}{dx} L_{y'}(y_0, y'_0) \\ &= \underbrace{\left(L_y(y_0, y'_0) - \frac{d}{dx} L_{y'}(y_0, y'_0) \right)}_{=0} \cdot y'_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eine Kurve y , die die Gesamtzeit minimiert, erfüllt also die Gleichung $L(y, y') - y' \cdot L_{y'}(y, y') = C$ ($C \in \mathbb{R}$). Nun gilt:

$$L(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{-2gy}}$$

Setzt man dies in die Gleichung oben ein, erhält man:

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{-2gy}} - y' \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+y'^2}{-2gy}}} \cdot \frac{y'}{-gy} = C \Rightarrow \frac{-1-y'^2}{2gy} + \frac{y'^2}{2gy} = C \cdot \sqrt{\frac{1+y'^2}{-2gy}} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2gy}\right)^2 = C^2 \cdot \frac{1+y'^2}{-2gy} \Rightarrow -\frac{1}{2gy} = C^2 \cdot (1+y'^2)$$

Es muss also folgende Differentialgleichung erfüllt sein:

$$-y(x) \cdot (1+y'(x)^2) = \frac{1}{2gC^2} =: k^2$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird im Folgenden nicht durch $y(x)$ gegeben, sondern durch eine Parametrisierung $(x(t), y(t))$. Soll dafür der Graph der Funktion $y(x)$ gleich dem Graphen der Parametrisierung $(x(t), y(t))$ sein, dann muss $y(x(t)) = y(t)$ gelten. Aus der Differentialgleichung da oben: $-y(x) \cdot (1+y'(x)^2) = k^2$, folgt dann: $-y(x(t)) \cdot (1+y'(x(t))^2) = k^2$. Wegen $\frac{d}{dt} y(x(t)) = y'(x(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t)$, also $y'(x(t)) = \frac{\frac{d}{dt} y(x(t))}{\frac{d}{dt} x(t)} = \frac{\frac{d}{dt} y(t)}{\frac{d}{dt} x(t)}$, muss also $-y(t) \cdot \left(1 + \left(\frac{\frac{d}{dt} y(t)}{\frac{d}{dt} x(t)}\right)^2\right) = k^2$ erfüllt sein. Es wird nun gezeigt, dass $x(t) = \frac{k^2}{2} \cdot (t - \sin(t))$, $y(t) = \frac{k^2}{2} \cdot (\cos(t) - 1)$ eine Lösung dieser DGL ist, die sogar $(x(0), y(0)) = (0, 0) = A$ erfüllt. Der Nachweis also:

$$-y(t) \cdot \left(1 + \left(\frac{\frac{d}{dt} y(t)}{\frac{d}{dt} x(t)}\right)^2\right) = \frac{k^2}{2} \cdot (1 - \cos(t)) \cdot \left(1 + \left(\frac{\frac{k^2}{2} \cdot (-\sin(t))}{\frac{k^2}{2} \cdot (1 - \cos(t))}\right)^2\right) = \frac{k^2}{2} \cdot (1 - \cos(t)) \cdot \left(\frac{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2}{(1 - \cos(t))^2}\right)$$

Und das ist gleich zu:

$$\frac{k^2}{2} \cdot \left(\frac{1 - 2 \cdot \cos(t) + (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2}{1 - \cos(t)}\right) = \frac{k^2}{2} \cdot \left(\frac{2 - 2 \cdot \cos(t)}{1 - \cos(t)}\right) = \frac{k^2 \cdot 2}{2} = k^2$$

Als letztes muss das k nur noch so angepasst werden, dass die Kurve $(x(t), y(t))$ von A auch durch $B = (b_1, b_2)$ mit $b_1 > 0$ und $b_2 < 0$ läuft. Somit ist die Bahnkurve, die die Laufzeit von A nach B (rechts und unterhalb von A) minimiert, als Teil einer Zykloide von A nach B gefunden und der Satz bewiesen. \square

Das isoperimetrische Problem

[Zurück zur Liste]

Satz. Das isoperimetrische Problem besteht darin, unter allen geschlossenen ebenen Kurven gleichen Umfangs diejenige zu finden, die den größten Flächeninhalt umschließt. Die Lösung dieses Problems ist ein Kreis.

Beweis. Es sei die Lösungskurve in parametrisierter Form $(x(t), y(t))$ dargestellt. Da die Kurve geschlossen ist, müssen x und y eine gewisse Periodizität haben. O.B.d.A. wählt man die Periodizität so, dass die Kurve die Periode 2π beträgt, d.h. x und y sind Funktionen $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann kann man x und y in eine Fourier-Reihe entwickeln. Man erhält also:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt), \quad y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos(nt) + d_n \cdot \sin(nt)$$

Der Flächeninhalt der von $(x(t), y(t))$ umschlossenen Fläche berechnet sich mit der Leibniz'schen Sektorformel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) dt$$

Der Umfang dieser Kurve ist dabei gegeben durch:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

Für die Ableitungen von $x(t)$ und $y(t)$ gilt:

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (b_n \cdot \cos(nt) - a_n \cdot \sin(nt)), \quad \dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (d_n \cdot \cos(nt) - c_n \cdot \sin(nt))$$

Weiter gilt nun wegen der Konvergenz der Fourierreihen:

$$\begin{aligned} x(t)\dot{y}(t) &= \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt)}_{=: \alpha_n(t)} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n \cdot (d_n \cdot \cos(nt) - c_n \cdot \sin(nt))}_{=: \beta_n(t)} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m(t) \beta_n(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)y(t) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n \cdot (b_n \cdot \cos(nt) - a_n \cdot \sin(nt))}_{=: \gamma_n(t)} \right) \cdot \left(\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{c_n \cdot \cos(nt) + d_n \cdot \sin(nt)}_{=: \delta_n(t)} \right) \\ &= \frac{c_0}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_m(t) \delta_n(t) \end{aligned}$$

Also gilt dann:

$$x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_0 \cdot \beta_n(t) - c_0 \cdot \gamma_n(t)) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m(t) \beta_n(t) - \gamma_m(t) \delta_n(t)$$

Nun ist $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m(t) \beta_n(t) - \gamma_m(t) \delta_n(t)$ gleich $A(t) + B(t)$, wobei gilt:

$$A(t) := (n \cdot a_m d_n - m \cdot b_m c_n) \cdot \cos(mt) \cdot \cos(nt) + (m \cdot b_m d_n - n \cdot a_m c_n) \cdot \cos(mt) \cdot \sin(nt)$$

und

$$B(t) := (n \cdot b_m d_n + m \cdot a_m c_n) \cdot \sin(mt) \cdot \cos(nt) + (m \cdot a_m d_n - n \cdot b_m c_n) \cdot \sin(mt) \cdot \sin(nt)$$

Nun gelten folgende Relationen:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cdot \cos(nt) dt = \int_0^{2\pi} \sin(mt) \cdot \sin(nt) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cdot \sin(nt) dt = \int_0^{2\pi} \sin(mt) \cdot \cos(nt) dt = 0$$

Daraus folgt dann:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m \beta_n - \gamma_m \delta_n dt = 2\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (a_n d_n - b_n c_n)$$

Desweiteren gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_0 \cdot \beta_n(t) - c_0 \cdot \gamma_n(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot a_0 d_n - n \cdot c_0 b_n) \cdot \cos(nt) + (n \cdot c_0 a_n - n \cdot a_0 c_n) \cdot \sin(nt) dt = 0$$

Denn es gilt $\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = \int_0^{2\pi} \sin(nt) dt = 0$. Zusammengefasst gilt also:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(2\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (a_n d_n - b_n c_n) \right) = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (a_n d_n - b_n c_n)$$

O.B.d.A. wird nun weiter verlangt, dass $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \text{konst.}$ gilt, was bedeutet, dass die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Jeder mögliche Graph der Kurve kann so durchlaufen werden, dass die Geschwindigkeit konstant ist, deswegen hat man hier keine Einschränkung. Aus der Formel für die Länge der parametrisierten Kurve folgt dann:

$$L = 2\pi \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} - 0 \Rightarrow \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

Nun gilt folgendes:

$$\dot{x}(t)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m \cdot n \cdot (b_m b_n \cdot \cos(mt) \cdot \cos(nt) - b_m a_n \cdot \cos(mt) \cdot \sin(nt) - a_m b_n \cdot \sin(mt) \cdot \cos(nt) + a_m a_n \cdot \sin(mt) \cdot \sin(nt))$$

Wegen der oben gezeigten Relationen impliziert das:

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (\pi \cdot b_n^2 + \pi \cdot a_n^2) = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (a_n^2 + b_n^2)$$

Analog zeigt man:

$$\int_0^{2\pi} \dot{y}(t)^2 dt = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (c_n^2 + d_n^2)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = \int_0^{2\pi} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{L^2}{4\pi^2} dt = 2\pi \cdot \frac{L^2}{4\pi^2} - 0 = \frac{L^2}{2\pi}$$

Damit hat man insgesamt:

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi \cdot A &= 2\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 4\pi^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (a_n d_n - b_n c_n) \\ &= 2\pi^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot a_n - d_n)^2 + (n \cdot b_n + c_n)^2 + (n^2 - 1) \cdot (c_n^2 + d_n^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Somit hat man die isoperimetrische Ungleichung $4\pi \cdot A \leq L^2$ erhalten. Wenn man nun die Koeffizienten so wählt, dass $4\pi \cdot A = L^2$ ist, dann hat A den größtmöglichen Wert. Es soll also gelten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot a_n - d_n)^2 + (n \cdot b_n + c_n)^2 + (n^2 - 1) \cdot (c_n^2 + d_n^2) = 0$$

Das ist genau dann der Fall, wenn alle Summanden in der unendlichen Summe verschwinden. Im Fall $n = 1$ bedeutet das $a_1 = d_1$ und $b_1 = -c_1$. Und im Fall $n > 1$ muss zunächst $c_n^2 + d_n^2 = 0$ gelten, also $c_n = d_n = 0$. Damit folgt dann auch $a_n = b_n = 0$. Die parametrisierte Kurve ist nun also bestimmt:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(t) + b_1 \cdot \sin(t), \quad y(t) = \frac{c_0}{2} + c_1 \cdot \cos(t) + d_1 \cdot \sin(t) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cdot \cos(t) + a_1 \cdot \sin(t)$$

Nun gilt:

$$\left(x(t) - \frac{a_0}{2} \right)^2 + \left(y(t) - \frac{c_0}{2} \right)^2 = a_1^2 + b_1^2$$

Das bedeutet, es handelt sich bei der Parametrisierung $(x(t), y(t))$ tatsächlich um einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(\frac{a_0}{2}, \frac{c_0}{2})$ und dem Radius $r = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$. Der Beweis ist damit beendet. \square

Das Verfolgungsproblem

[Zurück zur Liste]

Satz. Sei $y(x)$ die Funktion, die die Verfolgungskurve zum sich entlang der x -Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegenden Objekt darstellt, wobei dieser im Punkt $(a, 0)$ auf der x -Achse starte. Der Verfolger hingegen bewege sich konstant mit der Geschwindigkeit w und starte auf der y -Achse im Punkt $(0, b)$. Die Tangente an der Kurve $y(x)$ läuft dabei stets durch den Punkt des verfolgten Objektes mit den Koordinaten $(a + v \cdot t, 0)$. Die Kurve hat dann in einem x - y -Koordinatensystem die folgende Gestalt:

$$x(y) = \frac{w}{v^2 - w^2} \cdot \left(y \cdot v \cdot \cosh(h(y)) + y \cdot w \cdot \sinh(h(y)) - w \cdot a - v \cdot b \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} \right)$$

Dabei ist $h(y) := \frac{v}{w} \cdot (\ln(b) - \ln(y)) + \operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)$.

Beweis. Es gilt erstens:

$$\frac{-y(x)}{a + v \cdot t - x} = y'(x) \Leftrightarrow a + v \cdot t - x = -\frac{y(x)}{y'(x)}$$

Zweitens gilt nach Voraussetzung:

$$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = w \Rightarrow \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = w^2 \Rightarrow 1 + \frac{\dot{y}(t)^2}{\dot{x}(t)^2} = 1 + y'(x(t))^2 = \frac{w^2}{\dot{x}(t)^2} \Rightarrow 1 + y'(x)^2 = \frac{w^2}{x(t(x))^2}$$

Weiter gilt:

$$t(x(t)) = t \Rightarrow t'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \Rightarrow t'(x) = \frac{1}{\dot{x}(t(x))}$$

Daraus folgt dann:

$$1 + y'(x)^2 = w^2 \cdot t'(x)^2 \Rightarrow t'(x) = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{w}$$

Die oberste Gleichung wird nun einmal nach x abgeleitet:

$$v \cdot t'(x) - 1 = -\frac{y'(x)^2 - y(x) \cdot y''(x)}{y'(x)^2}$$

Es gilt dann also:

$$\begin{aligned} v \cdot \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{w} - 1 &= -\frac{y'(x)^2 - y(x) \cdot y''(x)}{y'(x)^2} \Rightarrow y'(x)^2 \cdot \frac{v}{w} \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} - y'(x)^2 = -y'(x)^2 + y(x) \cdot y''(x) \\ &\Rightarrow y''(x) = \frac{y'(x)^2}{y(x)} \cdot \frac{v}{w} \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} \end{aligned}$$

Da die Funktion $y(x)$ unter Umständen nicht wohldefiniert ist, da sie einem x in bestimmten Fällen zwei verschiedene $y(x)$ zuordnet, vertauscht man x und y und geht zur Funktion $x(y)$ über, die dann auch eine Funktion ist. Es gilt:

$$y(x(y)) = x \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x'(y(x))} \Rightarrow y''(x) = \frac{-1 \cdot x''(y(x)) \cdot y'(x)}{x'(y(x))^2}$$

Bereits gezeigt wurde $y''(x(y)) = \frac{y'(x(y))^2}{y} \cdot \frac{v}{w} \cdot \sqrt{1 + y'(x(y))^2} = \frac{1}{x'(y)^2 \cdot y} \cdot \frac{v}{w} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x'(y)^2}} = \frac{1}{x'(y)^3 \cdot y} \cdot \frac{v}{w} \cdot \sqrt{x'(y)^2 + 1}$. Daraus folgt dann mit den anderen Gleichungen:

$$-\frac{x''(y)}{x'(y)^3} = -\frac{x''(y) \cdot y'(x(y))}{x'(y)^2} = y''(x(y)) = \frac{1}{x'(y)^3 \cdot y} \cdot \frac{v}{w} \cdot \sqrt{x'(y)^2 + 1} \Rightarrow x''(y) = -\frac{v}{w} \cdot \frac{1}{y} \cdot \sqrt{1 + x'(y)^2}$$

Weiter umgeformt hat man also:

$$\frac{x''(y)}{\sqrt{1 + x'(y)^2}} = -\frac{v}{w} \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow \operatorname{asinh}(x'(y)) = \int \frac{x''(y)}{\sqrt{1 + x'(y)^2}} dy = -\frac{v}{w} \cdot \int \frac{1}{y} dy + C_1 = -\frac{v}{w} \cdot \ln(y) + C_1$$

D.h., dass folgendes gilt:

$$x'(y) = \sinh\left(C_1 - \frac{v}{w} \cdot \ln(y)\right) = \frac{e^{C_1} \cdot y^{-\frac{v}{w}} - e^{-C_1} \cdot y^{\frac{v}{w}}}{2}$$

Das gilt wegen $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Nach unbestimmter Integration ergibt sich:

$$x(y) = \frac{\frac{e^{C_1}}{1 - \frac{v}{w}} \cdot y^{1 - \frac{v}{w}} - \frac{e^{-C_1}}{1 + \frac{v}{w}} \cdot y^{1 + \frac{v}{w}}}{2} + C_2$$

Dieses Ergebnis wird noch ein bisschen umgeformt:

$$\begin{aligned} x(y) &= \frac{\frac{e^{C_1} \cdot w}{w - v} \cdot y^{1 - \frac{v}{w}} - \frac{e^{-C_1} \cdot w}{w + v} \cdot y^{1 + \frac{v}{w}}}{2} + C_2 \\ &= \frac{e^{C_1} \cdot w \cdot (w + v)}{2 \cdot (w^2 - v^2)} \cdot y^{1 - \frac{v}{w}} - \frac{e^{-C_1} \cdot w \cdot (w - v)}{2 \cdot (w^2 - v^2)} \cdot y^{1 + \frac{v}{w}} + C_2 \\ &= \frac{w \cdot y}{w^2 - v^2} \cdot \left(e^{C_1} \cdot \frac{w + v}{2} \cdot y^{-\frac{v}{w}} - e^{-C_1} \cdot \frac{w - v}{2} \cdot y^{\frac{v}{w}} \right) + C_2 \\ &= \frac{w \cdot y}{w^2 - v^2} \cdot \left(v \cdot \cosh\left(C_1 - \frac{v}{w} \cdot \ln(y)\right) + w \cdot \sinh\left(C_1 - \frac{v}{w} \cdot \ln(y)\right) \right) + C_2 \end{aligned}$$

Es wurde hier neben $\sinh(x)$ noch $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ benutzt. Mithilfe der beiden Anfangsbedingungen werden die Konstanten C_1 und C_2 bestimmt. Im Startpunkt des Verfolgers $(0, b)$ hat die Steigung der Kurventangente an $x(y)$ den Wert $\frac{a}{b}$, also:

$$x'(b) = \frac{a}{b} = \sinh\left(C_1 - \frac{v}{w} \cdot \ln(b)\right) \Rightarrow C_1 = \frac{v}{w} \cdot \ln(b) + \operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)$$

Das setzt man schon mal ein:

$$\begin{aligned} x(y) &= \frac{w \cdot y}{w^2 - v^2} \cdot \left(v \cdot \cosh\left(\frac{v}{w} \cdot \ln(b) + \operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)\right) - \frac{v}{w} \cdot \ln(y) \right) + w \cdot \sinh\left(\frac{v}{w} \cdot \ln(b) + \operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)\right) - \frac{v}{w} \cdot \ln(y) + C_2 \\ &= \frac{w \cdot y}{w^2 - v^2} \cdot \left(v \cdot \cosh\left(\frac{v}{w} \cdot (\ln(b) - \ln(y)) + \operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)\right) + w \cdot \sinh\left(\frac{v}{w} \cdot (\ln(b) - \ln(y)) + \operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)\right) \right) + C_2 \end{aligned}$$

Weil der Verfolgerstartpunkt $(0, b)$ auf der Kurve $x(y)$ liegt, muss $x(b) = 0$ gelten, also:

$$\begin{aligned} x(b) &= \frac{w \cdot b}{w^2 - v^2} \cdot \left(v \cdot \cosh\left(\frac{v}{w} \cdot (\ln(b) - \ln(b)) + \operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)\right) + w \cdot \sinh\left(\frac{v}{w} \cdot (\ln(b) - \ln(b)) + \operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)\right) \right) + C_2 \\ &= \frac{w \cdot b}{w^2 - v^2} \cdot \left(v \cdot \cosh\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)\right) + w \cdot \sinh\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{a}{b}\right)\right) \right) + C_2 \\ &= \frac{w \cdot b}{w^2 - v^2} \cdot \left(v \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} + w \cdot \frac{a}{b} \right) + C_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

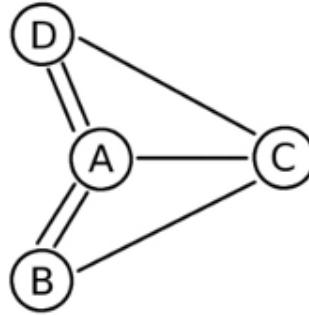
Also muss dann gelten:

$$C_2 = \frac{w}{w^2 - v^2} \cdot \left(-w \cdot a - v \cdot b \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} \right)$$

Setzt man auch C_2 in die Darstellung von $x(y)$ ein, so ergibt sich fast die behauptete Kurve. Zu Beginn wurde die Differentialgleichung $\frac{-y(x)}{a+v \cdot t-x} = -\frac{y(x)}{a+v \cdot t-x} = y'(x)$ aufgestellt. Das Minuszeichen vor $y(x)$ müsste eigentlich ein Pluszeichen sein. Um Rechenvorteile zu bekommen, wurde dennoch das Minuszeichen gewählt. Die Lösungskurve ist nun natürlich eine andere als gewünscht, nämlich die an der y -Achse gespiegelte Kurve, denn $y'(x)$ bekommt in jedem Punkt den mit -1 multiplizierten Steigungswert. $y(x)$ an der y -Achse zu spiegeln heißt $x(y)$ mit -1 zu multiplizieren. Dazu wird der Faktor $\frac{w}{w^2-v^2}$ in $x(y)$ ersetzt durch $\frac{w}{v^2-w^2}$. Dadurch erhält man dann die gewünschte Lösungskurve. \square

Das Königsberger Brückenproblem

[\[Zurück zur Liste\]](#)



Satz. Das Königsberger Brückenproblem kann man auf den oben abgebildeten Graphen abstrahieren. Es ist dort nicht möglich von einem Knoten angefangen einen Weg durch den Graphen so zu gehen, dass jede Kante genau einmal benutzt wird und man sich am Ende des Weges wieder im Anfangsknoten befindet. In diesem Graphen existiert somit kein sogenannter Eulerkreis. Denn es gilt: Es existiert in einem zusammenhängenden Graphen ein Eulerkreis genau dann, wenn jeder Knoten dort geraden Grad besitzt, d.h., wenn an jedem Knoten eine gerade Anzahl an Kanten hängt. In dem damaligen Königsberg ist es deswegen unmöglich von einem Gebiet angefangen über alle sich dort befindlichen Flussbrücken genau einmal so zu gehen, dass man zum Schluss wieder im Ausgangsgebiet landet, denn der Grad von z.B. Knoten B ist ungerade.

Beweis. Sei der Graph zusammenhängend, d.h. von jedem Knoten gibt es zu jedem anderen Knoten einen Kantenweg. „ \Rightarrow “: Sei also ein Eulerkreis im Graphen existent. Das bedeutet, es gibt eine Knotenfolge $(v_1, v_2, \dots, v_i, v_1)$, in der außer dem Startknoten v_1 jeder andere Knoten genau einmal vorkommt. In diesem Kreis wird jeder Knoten k -mal durchlaufen, d.h. jeweils über eine Kante erreicht und über eine weitere verlassen, denn man endet nur im Anfangsknoten. Daraus folgt, dass jeder Knoten einen geraden Grad besitzen muss. Da der Graph zusammenhängend ist und der Eulerkreis alle Knoten des Graphen umfasst, haben folglich alle Knoten des Graphen einen geraden Grad. Die andere Richtung „ \Leftarrow “: Alle Knoten im Graphen besitzen geraden Grad. Man startet dann von einem Knoten v_1 und benutzt solange eine Kante zum nächsten Knoten bis keine Kante mehr rausführt. Man erhält also eine Kantenfolge (k_1, \dots, k_n) , wobei jede Kante des Graphen in dieser höchstens einmal vorkommt. Der Endknoten sei mit v_n bezeichnet. Da alle Knoten geraden Grad haben, muss $v_1 = v_n$ gelten, denn jeder andere Knoten ist jeweils l -mal passierbar, weil der Grad dieser Knoten ja gerade ist. Von v_1 wurde bereits eine ungerade Anzahl an Kanten benutzt (man kann dabei nämlich v_1 noch mehrmals passiert haben). Endet man, dann deswegen nur in dem Knoten v_1 . Hat man nun den gesamten Graphen durchlaufen, ist man fertig. Existiert jedoch an einem Knoten noch eine unbenutzte Kante, dann führt aus diesem Knoten wieder ein Kantenweg heraus, der in demselben Knoten aufgrund der Geradzahligkeit der Grade endet; die zugehörige Kantenfolge (k'_1, \dots, k'_n) . Die zusammengelegten Wege $(k_1, k_2, \dots, k_j, k'_1, k'_2, \dots, k'_m, k_{j+1}, \dots, k_n)$ bilden dann wieder einen geschlossenen Weg. Hat man diesmal alle Kanten benutzt, dann ist man fertig. Ansonsten gibt es wieder einen geschlossenen Kantenzug in die

bisher zusammengelegte Kantenfolge einzufügen. Das wiederholt man bis es keine unbenutzte Kante mehr gibt. Als Ergebnis erhält man einen Kantenweg, der jede Kante des Graphen mindestens und höchstens einmal benutzt und der im Startknoten endet. Und das ist eben ein Eulerkreis. \square

Satz. In diesem Satz verlangt man nun nicht mehr, anders als im vorigen Satz, dass man bei einem Weg, der jede Kante des zusammenhängenden Graphen genau einmal benutzt, am Ende wieder im Ausgangsknoten landet. Man spricht dann nicht mehr von einem Eulerkreis, sondern von einem Eulerweg. Es gilt: Es existiert in einem zusammenhängenden Graphen ein Eulerweg genau dann, wenn genau zwei Knoten ungeraden Grad besitzen. Im damaligen Königsberg konnte man also auch keinen Eulerweg finden, denn alle vier Knoten haben ungeraden Grad und nicht genau zwei.

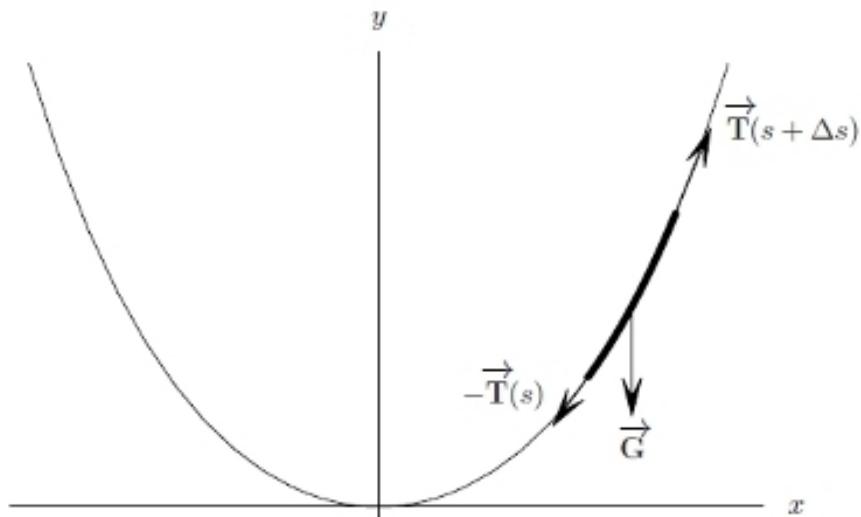
Beweis. „ \Rightarrow “: Sei ein Eulerweg im zusammenhängenden Graphen existent. Man starte dann vom Anfangsknoten, den man vielleicht noch mehrmals durchläuft (rein und raus), in dem man aber nicht endet. Weil man nur im Start- und Endknoten startet bzw. endet, werden die anderen Knoten k -mal durchlaufen. Das bedeutet, weil der Graph zusammenhängend ist und der Eulerweg alle Kanten des Graphen umfasst, dass diese anderen Knoten geraden Grad haben, anders als der Anfangs- und der Endkonten, die ungeraden Grad haben, da man diese vielleicht mehrere Male durchläuft (gerade), aber man dort startet bzw. endet (+1). Nun zur anderen Richtung „ \Leftarrow “: Der zusammenhängende Graph habe also genau zwei Knoten v_1 und v_2 ungeraden Grades. Man macht nun folgenden Trick: Es wird der Knoten v_1 mit dem Knoten v_2 durch eine Hilfskante k^* verbunden. Der daraus entstandene neue Graph ist dann zusammenhängend und hat nur Knoten geraden Grades. Nach dem vorherigen Satz existiert dann ein Eulerkreis in diesem neuen Graphen. In diesem Kreis muss irgendwo die Kante k^* vorkommen. Sei $(k_1, k_2, \dots, k_i, k^*, k_{i+2}, \dots, k_m)$ die Kantenfolge des Eulerkreises, dann ist $(k_{i+2}, \dots, k_m, k_1, k_2, \dots, k_i)$ ein Eulerweg des ursprünglichen Graphens (ohne die Hilfskante k^*), womit die Existenz des sogenannten Eulerweges gezeigt ist und damit auch dieser Satz bewiesen ist. \square

Das Kettenlinienproblem

[Zurück zur Liste]

Satz. Eine Kette, die unter der Wirkung des eigenen Gewichts in der Luft aufgehängt wird, formt sich nicht zu einem Halbkreis oder einer Parabel, sondern man bekommt als Lösung: $y(x) = \frac{1}{k} \cdot \cosh(k \cdot (x - A)) + B$ mit noch zu bestimmenden Konstanten. Dabei gilt speziell $k = \frac{\varrho \cdot g}{S}$, wobei ϱ die Dichte der Kette (pro Längeneinheit), g die Erdbeschleunigung (welche den ungefähren Zahlenwert $9,81 \frac{m}{s^2}$ hat) und S die horizontale Spannungskraft in der Kette ist, die sich aus der Beschaffenheit einer konkreten Kurve ergibt. Wird die Kettenkurve der Länge l an den beiden Punkten $\left(-\frac{w}{2}, h\right)$ und $\left(\frac{w}{2}, h\right)$ aufgehängt, dann ist die Kurve gegeben durch $y(x) = \frac{1}{k_l} \cdot \cosh(k_l \cdot x) + \left(h - \frac{1}{k_l} \cdot \cosh\left(k_l \cdot \frac{w}{2}\right)\right)$, wobei k_l eine positive reelle Zahl (größer Null) so sei, dass $\frac{2}{k_l} \cdot \sinh\left(k_l \cdot \frac{w}{2}\right) = l$ gilt, mit $l > w$, weil die Kette mindestens so lang sein muss, wie der Abstand zwischen den beiden Aufhängepunkten. Dass die Kettenkurve so aussieht, wird nun bewiesen.

Beweis. Zuerst mal eine Zeichnung, die die Physik klar macht:



Die beiden zur Kettenkurve tangentialen Spannungs Kräfte $-\vec{T}(s)$ und $\vec{T}(s+\Delta s)$, parametrisiert nach Bogenlänge, heben zusammen die Gewichtskraft, die zwischen den beiden Spannungskräften wirkt, auf, damit also die Summe aller Kräfte Null ist, was auch so sein muss, denn sonst wäre die Kette in Bewegung. Sei ϱ die Dichte der Kette pro Längeneinheit, g die Erdbeschleunigung und Δs die Länge der Kette zwischen den beiden Spannungskräften. Dann gilt $\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_{\Delta s} \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varrho \cdot \Delta s \cdot g \end{pmatrix}$. Wie oben erwähnt, muss also gelten: $-\vec{T}(s) + \vec{T}(s+\Delta s) = -\vec{G} \Rightarrow \frac{\vec{T}(s+\Delta s) - \vec{T}(s)}{\Delta s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho \cdot g \end{pmatrix}$. Daraus folgt dann mit $\Delta s \rightarrow 0$: $\vec{T}'(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho \cdot g \end{pmatrix}$. Jetzt integriert man beide Seiten und erhält dann $\vec{T}(s) = \begin{pmatrix} C_1 \\ \varrho \cdot g \cdot s + C_2 \end{pmatrix}$ mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2 . Man sieht somit, dass die Horizontalkomponente $C_1 = S$ der Spannungskraft an jedem Punkt der Kurve gleich ist, wohingegen ihre Vertikalkomponente von der Position auf der Kurve abhängt. Sie muss am tiefsten Punkt der Kettenkurve verschwinden, da die Kurve dort eine horizontale Tangente hat. Vereinbart man, dass die Bogenlänge von diesem Minimum aus gemessen wird, so verschwindet die zweite Integrationskonstante, $C_2 = 0$, und man erhält dann $\vec{T}(s) = \begin{pmatrix} S \\ \varrho \cdot g \cdot s \end{pmatrix}$. Der Vektor \vec{T} zeigt an jedem Punkt der Kettenkurve in Richtung ihrer Tangente. Was man hier sucht, ist aber eine Beschreibung der Form $y(x)$, also die Abhängigkeit der Ordinate y als Funktion der Abszisse x . Man legt den Ursprung dieses Koordinatensystems in das Minimum der Kettenkurve und parametrisiert x und y als Funktion der Bogenlänge s , so dass also gilt $\left\| \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} \right\| = 1$.

Beweis: Sei $c(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$. Es wird nun $\|c'(s)\| = 1$ gezeigt: Es gilt $s(t) = \int_{t_0}^t \|c'(\tau)\| d\tau$, also $s'(t) = \|c'(t)\|$. Nun gilt $s(t(s)) = s$, also $\frac{d}{ds}(s(t(s))) = s'(t) \cdot t'(s) = 1 = \frac{d}{ds}s$, folglich: $t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|c'(t)\|}$. Daraus folgt dann $\|c'(s)\| = \|c'(t) \cdot t'(s)\| = \|c'(t)\| \cdot \|t'(s)\| = \|c'(t)\| \cdot \left\| \frac{1}{\|c'(t)\|} \right\| = 1$. Es gelte also $\vec{T}(s) = \left\| \vec{T}(s) \right\| \cdot \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ \varrho \cdot g \cdot s \end{pmatrix}$, also dann: $\left\| \vec{T}(s) \right\| \cdot x'(s) = S$ und $\left\| \vec{T}(s) \right\| \cdot y'(s) = \varrho \cdot g \cdot s$. Damit gilt also: $x'(s) = \frac{S}{\left\| \vec{T}(s) \right\|}$ und $y'(s) = \frac{\varrho \cdot g \cdot s}{\left\| \vec{T}(s) \right\|}$. Nun gilt doch $y'(x) = \frac{d}{dx}y(s(x)) = \frac{\varrho \cdot g \cdot s}{\left\| \vec{T}(s) \right\|}$

$$y'(s) \cdot s'(x) = y'(s) \cdot \frac{1}{x'(s)} = \frac{y'(s)}{\frac{S}{x'(s)}} = \frac{\left\| \vec{T}(s) \right\|}{S} = \frac{\varrho \cdot g \cdot s}{S}$$

Also gilt nun $y'(x) \cdot \frac{S}{\varrho \cdot g} = s(x)$. Weil $s(x) = \int_0^x \sqrt{1+y'(\tilde{x})^2} d\tilde{x}$, folgt daraus $s'(x) = \sqrt{1+y'(x)^2}$. Jetzt wird bei $y'(x) \cdot \frac{S}{\varrho \cdot g} = s(x)$ auf beiden Seiten nach x abgeleitet, woraus man dann

endlich die Differentialgleichung $y''(x) \cdot \frac{S}{\varrho \cdot g} = s'(x) = \sqrt{1+y'(x)^2}$ erhält. Anders aufgeschrieben: $y''(x) = k \cdot \sqrt{1+y'(x)^2}$ mit

$k := \frac{\varrho \cdot g}{S}$. Diese DGL wird jetzt gelöst: Substituiere $z(x) = y'(x)$, dann gilt $\int \frac{z'(x)}{\sqrt{1+z(x)^2}} dx = \int k dx = k \cdot x + \tilde{A}$. Nun muss

man wissen, dass $\frac{d}{dz} \operatorname{asinh}(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ gilt, also $\int \frac{z'(x)}{\sqrt{1+z(x)^2}} dx = \operatorname{asinh}(z(x)) = k \cdot x + \tilde{A} \Rightarrow z(x) = y'(x) = \sinh(k \cdot x + \tilde{A})$.

Diesmal muss man wissen: $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$. Also folgt $y(x) = \int y'(x) dx = \int \sinh(k \cdot x + \tilde{A}) dx = \frac{1}{k} \cdot \cosh(k \cdot x + \tilde{A}) + B =$

$\frac{1}{k} \cdot \cosh(k \cdot x - k \cdot A) + B = \frac{1}{k} \cdot \cosh(k \cdot (x - A)) + B$ mit $\tilde{A} = -k \cdot A$. Nun werden die Konstanten für eine konkrete Lösungskurve bestimmt:

Es sei die Kurve befestigt an zwei Pfosten mit Abstand w in der Höhe h : Die Pfosten seien dabei die Senkrechten bei $x = -\frac{w}{2}$ und $x = \frac{w}{2}$, die die Kettenlinie in der Höhe h schneiden, also ist $A = 0$. Es muss also gelten $y\left(-\frac{w}{2}\right) = h = y\left(\frac{w}{2}\right)$. Also: $y\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1}{k} \cdot \cosh\left(k \cdot \frac{w}{2}\right) + B = h \Rightarrow B = h - \frac{1}{k} \cdot \cosh\left(k \cdot \frac{w}{2}\right)$. Also hat man schonmal $y(x) = \frac{1}{k} \cdot \cosh(k \cdot x) + \left(h - \frac{1}{k} \cdot \cosh\left(k \cdot \frac{w}{2}\right)\right)$.

Als weitere Bedingung hat man, dass die Kurve die Länge l haben soll, woraus k ermittelt wird: $l = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sqrt{1+y'(x)^2} dx =$

$$\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{w}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k} \cdot k \cdot \sinh(k \cdot x) + 0\right)^2} dx = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{w}{2} \sqrt{1 + \sinh(k \cdot x)^2} dx = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{w}{2} \sqrt{\cosh(k \cdot x)^2} dx = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{w}{2} \cosh(k \cdot x) dx \text{ und wegen}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) \text{ gilt also } l = \left[\frac{1}{k} \cdot \sinh(k \cdot x) \right]_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} = \frac{1}{k} \cdot \sinh\left(k \cdot \frac{w}{2}\right) - \frac{1}{k} \cdot \sinh\left(k \cdot \left(-\frac{w}{2}\right)\right) = \frac{1}{k} \cdot \sinh\left(k \cdot \frac{w}{2}\right) + \frac{1}{k} \cdot$$

$\sinh\left(k \cdot \frac{w}{2}\right) = \frac{2}{k} \cdot \sinh\left(k \cdot \frac{w}{2}\right)$. Sei k_l eine positive reelle Zahl (größer Null) so, dass $\frac{2}{k_l} \cdot \sinh\left(k_l \cdot \frac{w}{2}\right) = l$ gilt, dann sieht die Lösungskurve also, wie folgt, aus: $y(x) = \frac{1}{k_l} \cdot \cosh(k_l \cdot x) + \left(h - \frac{1}{k_l} \cdot \cosh\left(k_l \cdot \frac{w}{2}\right)\right)$. Ende. \square

Die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal

[Zurück zur Liste]

FRAGE: Sei eine Strecke der Länge 1 gegeben. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ kann man nach endlich vielen Konstruktionsschritten mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge a konstruieren?

WAS KANN MAN MIT ZIRKEL UND LINEAL TUN?:

Was macht man mit Zirkel und Lineal?

1. Mit dem Lineal kann man die Strecke zwischen zwei Punkten zeichnen
2. Mit dem Lineal kann man durch zwei schon konstruierte Punkte eine Gerade konstruieren
3. Mit dem Zirkel kann man einen Kreis mit bekanntem Radius um einen bekannten Punkt schlagen

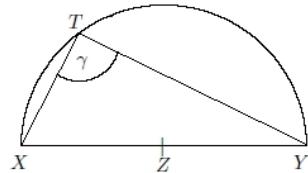
Wie bekommt man neue konstruierbare Punkte?

1. Bestimmen des Schnittpunktes zweier nicht paralleler Geraden, die jeweils durch zwei bereits konstruierte Punkte gehen
2. Die Schnittpunkte eines Kreises mit gegebenem Radius, als Länge zwischen zwei schon konstruierten Punkten, um einen bereits konstruierten Punkt, mit einer Geraden, die durch zwei bekannte Punkte läuft, ermitteln
3. Konstruktion der Schnittpunkte zweier Kreise, wobei sich die Mittelpunkte und Radien dieser beiden Kreise aus bereits konstruierten Punkten ergeben

Nur mit diesen Konstruktionsschritten erhält man neue konstruierbare Punkte. Dabei fängt man die Konstruktion neuer konstruierbarer Punkte immer mit einer gegebenen Einheitsstrecke an.

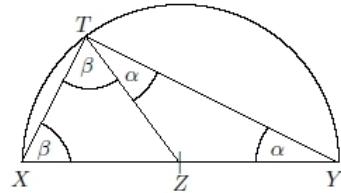
Es werden zunächst wichtige Hilfssätze bewiesen:

Satz (Thales). *Sei T ein Punkt auf einem Halbkreis mit Mittelpunkt Z , und seien X und Y die Schnittpunkte des Durchmessers durch Z mit dem Halbkreis, also*



Dann ist der Winkel $\gamma = \angle YTX$ ein rechter Winkel.

Beweis. Die Strecken \overline{XZ} , \overline{TZ} und \overline{ZY} haben dieselbe Länge, also sind die Dreiecke $\triangle XZT$ und $\triangle TZY$ gleichschenklig.



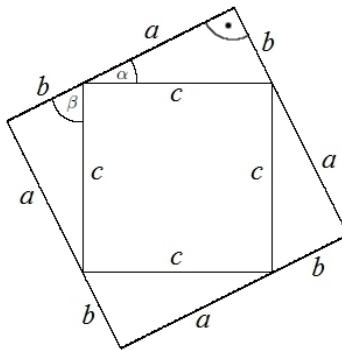
Es folgt $\angle TXZ = \angle ZTX = \beta$ und $\angle YTZ = \angle ZYT = \alpha$. Weil die Innenwinkelsumme eines Dreiecks 180° ist, folgt daraus:

$$180^\circ = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow 90^\circ = \alpha + \beta$$

Der Beweis ist damit vollständig vollbracht. □

Satz (Pythagoras). *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusequadrat.*

Beweis. Man kann ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c , wie folgt, anordnen:

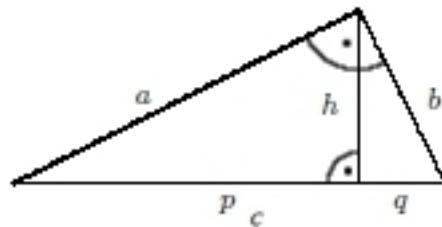


Dabei gilt $\alpha + \beta = 90^\circ$, weil das Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c ein rechtwinkliges Dreieck ist. Also ist das Quadrat mit der Seitenlänge c auch tatsächlich ein Quadrat. Der Flächeninhalt des großen Quadrates ist $(a+b)^2$, der der vier Dreiecke $\frac{a \cdot b}{2}$ und der des kleinen Quadrates ist c^2 , also gilt damit dann das folgende:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

Und das war es auch schon. \square

Satz (Höhensatz). *Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe h .*



Dann gilt $h^2 = p \cdot q$.

Beweis. Man wendet den Satz von Pythagoras auf alle Dreiecke an: Es gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

Dann gilt auch:

$$a^2 = h^2 + p^2 \text{ und } b^2 = h^2 + q^2$$

Einsetzen liefert:

$$(h^2 + p^2) + (h^2 + q^2) = p^2 + 2pq + q^2$$

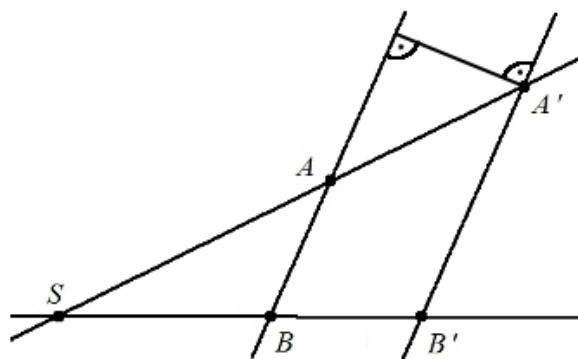
Daraus folgt dann also:

$$2h^2 = 2pq \Rightarrow h^2 = p \cdot q$$

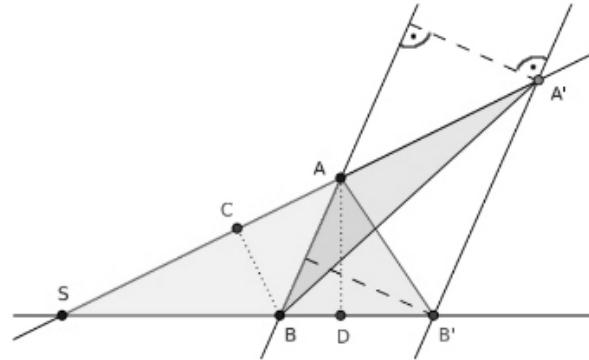
Und damit ist man hier fertig! \square

Satz (1. Strahlensatz). *Sei im folgendem Bild die Gerade durch B und A parallel zu der Geraden, die durch B' und A' geht. Es gilt dann die Formel des 1. Strahlensatzes:*

$$\frac{|\overline{SA'}|}{|\overline{SA}|} = \frac{|\overline{SB'}|}{|\overline{SB}|}$$



Beweis. Für den Beweis dieses Satzes braucht man die folgende Zeichnung:



Die Dreiecke $\triangle ABA'$ und $\triangle ABB'$ besitzen zur gemeinsamen Grundseite \overline{AB} die gleiche Höhe (gestrichelte Linien). Sie haben also die gleiche Fläche, die man hier mit dem Betrag der Dreiecke bezeichnet:

$$|\triangle ABA'| = |\triangle ABB'|$$

Dann kann man aber auch auf beiden Seiten dieser Gleichung die Fläche des Dreiecks $\triangle SBA$ dazuaddieren:

$$|\triangle ABA'| + |\triangle SBA| = |\triangle ABB'| + |\triangle SBA| \Leftrightarrow |\triangle SBA'| = |\triangle SB'A|$$

Daraus folgt dann also:

$$\frac{|\triangle SBA'|}{|\triangle SBA|} = \frac{|\triangle SB'A|}{|\triangle SBA|}$$

Die Fläche eines Dreiecks ist genau die Hälfte des Produktes aus einer Grundseite und der zugehörigen Höhe. Als Höhen dienen hier die gepunkteten Linien. Damit ergibt sich ($|\overline{AB}|$ heißt die Länge der Strecke \overline{AB}):

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot |\overline{SA'}| \cdot |\overline{BC}|}{\frac{1}{2} \cdot |\overline{SA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |\overline{SB'}| \cdot |\overline{AD}|}{\frac{1}{2} \cdot |\overline{SB}| \cdot |\overline{AD}|}$$

Durch Kürzen ergibt sich die behauptete Formel:

$$\frac{|\overline{SA'}|}{|\overline{SA}|} = \frac{|\overline{SB'}|}{|\overline{SB}|}$$

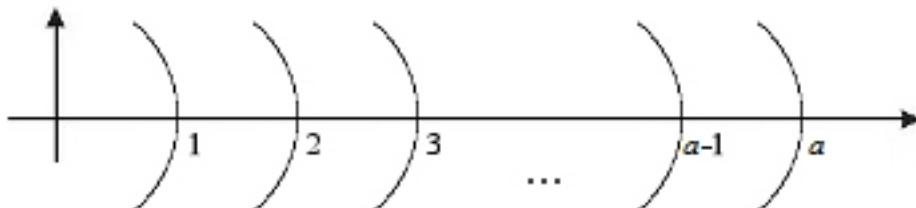
Damit ist man hier fertig! □

Lemma (Konstruierbare Zahlen). Wenn die Einheitslänge 1 festgelegt ist, dann gilt: $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Q}$ sind konstruierbar. Denn es gilt: Wenn a und b konstruierbar sind, dann auch $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, a/b ($b \neq 0$) und \sqrt{a} ($a > 0$).

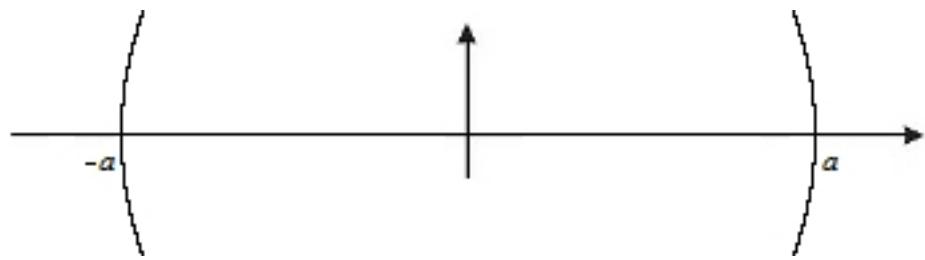
Beweis. Zu aller erst definiert man einen Punkt als eine Strecke der Länge 0. D.h. auch 0 ist konstruierbar. Aber zunächst muss man die Einheitslänge definieren:



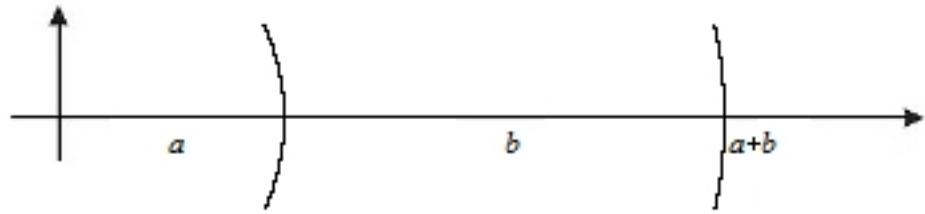
Damit kann man dann $a \in \mathbb{N}$ konstruieren:



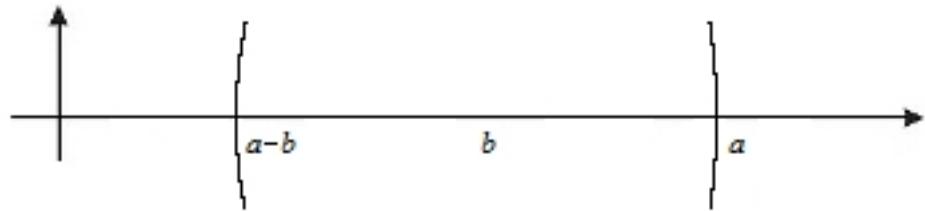
Danach kann man zu $a \in \mathbb{N}$ auch $-a \in \mathbb{Z}$ konstruieren:



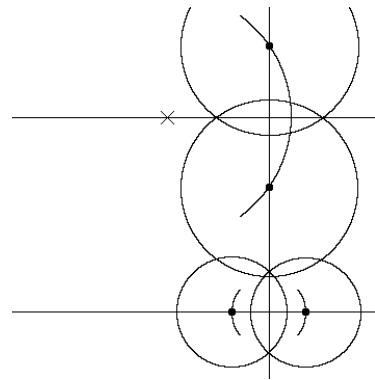
Wenn a und b konstruierbar sind, dann auch $a + b$:



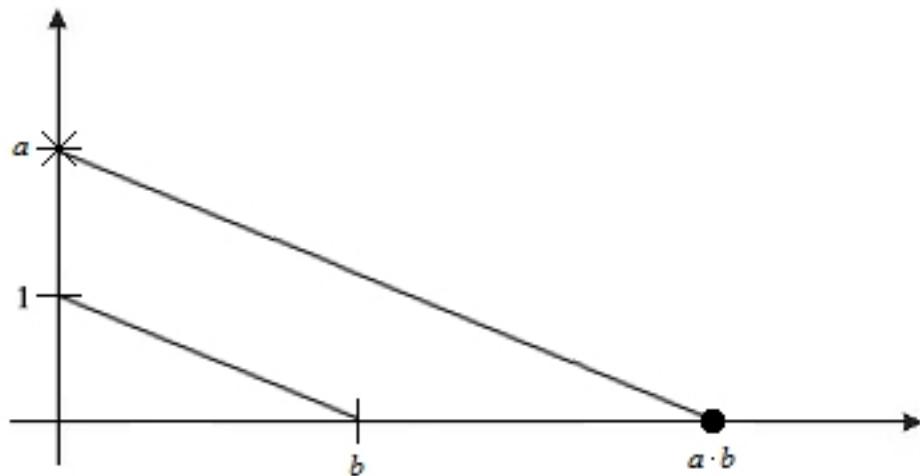
Wenn a und b konstruierbar sind, dann auch $a - b$:



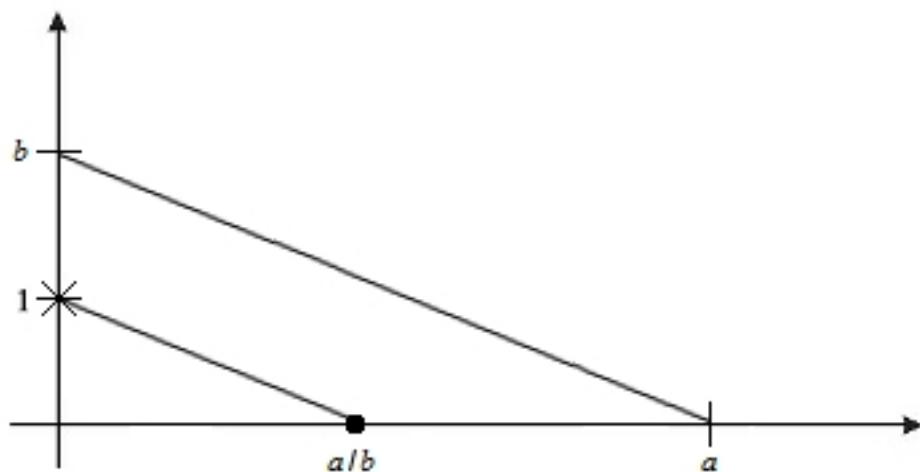
Bevor man die Multiplikation und die Division behandelt, muss man wissen, wie man zu einer Geraden eine Parallele konstruiert, die durch einen Punkt außerhalb der Geraden läuft. Es geht folgendermaßen:



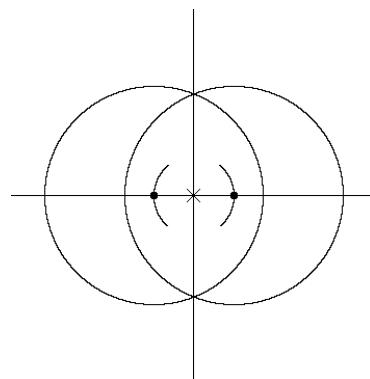
Wenn a und b konstruierbar sind, dann wegen des 1. Strahlensatzes (s.o.) auch $a \cdot b$:



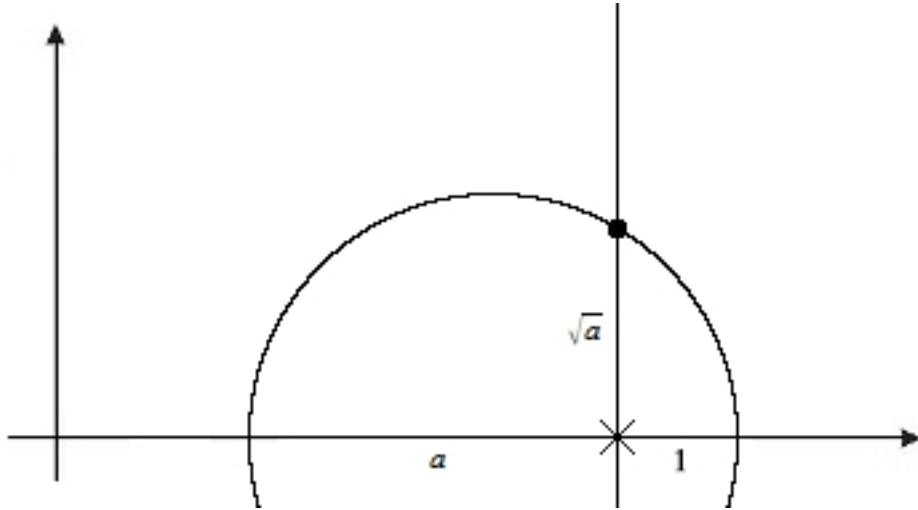
Wenn a und $b \neq 0$ konstruierbar sind, dann wegen des 1. Strahlensatzes (s.o.) auch a/b :



Zur Konstruktion der Wurzel aus einer konstruierbaren Zahl, muss man wissen, wie man die Senkrechte zu einer Geraden konstruiert, die durch einen Punkt auf der Geraden verläuft. Das geht so:



Wenn $a > 0$ konstruierbar ist, dann wegen des Satzes von Thales (s.o.) und wegen des Höhensatzes (s.o.) auch \sqrt{a} :



Man hat hier also gezeigt, dass aus der Einheitslänge aufbauend die Zahlen $n \in \mathbb{N}$ konstruierbar sind, also auch $-n \in \mathbb{Z}$; daraus folgt, dass $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sowie $-\frac{m}{n}$ konstruierbar sind, also sind alle Zahlen in \mathbb{Q} konstruierbar. \square

Satz (Eigenschaften neu konstruierter Punkte). *Ganz oben wurde verstanden, wie man neue Punkte mindestens und höchstens konstruieren kann. Sie entstehen durch Schnitt zweier Geraden, durch Schnitt zwischen Gerade und Kreis und durch Schnitt zweier Kreise. Dabei werden die Parameter der Geraden und Kreise durch bereits konstruierte Daten aus einem Körper K bestimmt. Man wird hier zeigen, dass mit diesen Konstruktionsschritten die neuen Punkte entweder im Körper K bleiben oder allenfalls in einer reell-quadratischen Erweiterung von K , nämlich $K(\sqrt{d})$, liegen.*

Beweis. Der Beweis betrachtet also die 3 Fälle:

1. Gerade schneidet Gerade: Die Gerade g_1 laufe durch $(a_1, b_1) \in K^2$ und durch $(x_1, y_1) \in K^2$ und g_2 durch $(a_2, b_2) \in K^2$ und durch $(x_2, y_2) \in K^2$. Man erhält dann:

$$g_1 = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \text{ mit } (a, b, c) = (1, 0, -a_1)\}, & a_1 = x_1 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \text{ mit } (a, b, c) = (y_1 - b_1, a_1 - x_1, b_1 \cdot x_1 - a_1 \cdot y_1)\}, & a_1 \neq x_1 \end{cases}$$

$$g_2 = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a' \cdot x + b' \cdot y + c' = 0 \text{ mit } (a', b', c') = (1, 0, -a_2)\}, & a_2 = x_2 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a' \cdot x + b' \cdot y + c' = 0 \text{ mit } (a', b', c') = (y_2 - b_2, a_2 - x_2, b_2 \cdot x_2 - a_2 \cdot y_2)\}, & a_2 \neq x_2 \end{cases}$$

Weil K ein Körper ist, gilt also $a, b, c, a', b', c' \in K$. Es wird nun also $g_1 \cap g_2$ bestimmt. Weil g_1 eine Gerade ist, sind a und b in der Geradengleichung von g_1 nicht beide gleich 0. Sei O.B.d.A. $a \neq 0$ (Der Fall $b \neq 0$ läuft analog: Man löst dann nach y statt nach x auf.), dann gilt $a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \cdot y - \frac{c}{a}$. Einsetzungsverfahren: $a' \cdot \left(-\frac{b}{a} \cdot y - \frac{c}{a}\right) + b' \cdot y + c' = 0 \Leftrightarrow y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}$. Und deswegen: $a \cdot x + b \cdot \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$. Weil g_1 und g_2 nicht parallel sein sollen, damit man auch einen Schnittpunkt erhält, gilt $0 \neq \det \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = ab' - a'b$. Man hat also gezeigt, dass gilt: $g_1 \cap g_2 = \left(\frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} \right)$. Weil $a, b, c, a', b', c' \in K$ gilt, folgt $g_1 \cap g_2 \in K^2$. Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden bleiben also im Körper K .

2. Gerade schneidet Kreis: Die Gerade g laufe durch $(x_1, y_1) \in K^2$ und durch $(x_2, y_2) \in K^2$. Der Kreis k habe den Mittelpunkt $(x_m, y_m) \in K^2$ und den Radius $r \in K$. Man erhält diesmal:

$$g = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \text{ mit } (a, b, c) = (1, 0, -x_1)\}, & x_1 = x_2 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \text{ mit } (a, b, c) = (y_2 - y_1, x_1 - x_2, y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2)\}, & x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + a' \cdot x + b' \cdot y + c' = 0 \text{ mit } (a', b', c') = (-2x_m, -2y_m, x_m^2 + y_m^2 - r^2)\}$$

Weil K ein Körper ist, gilt also $a, b, c, a', b', c' \in K$. Man setzt voraus, dass sich die Gerade g und der Kreis k schneiden, weil man ja neue Punkte konstruieren will. Wie im ersten Fall, kann in der Geradengleichung $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ nicht $a = 0 \wedge b = 0$ gelten, da man sonst keine Gerade beschreiben würde. O.B.d.A. sei $b \neq 0$ (Ist $a \neq 0$, dann löst man eben nach x statt nach y auf.), dann gilt $y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$. Diese y setzt man nun in die Kreisgleichung ein: $x^2 + \left(-\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}\right)^2 + a' \cdot x + b' \cdot \left(-\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}\right) + c = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot x^2 + \left(a' - \frac{ab'}{b} + 2 \cdot \frac{ac}{b^2}\right) \cdot x + \left(c' - \frac{b'c}{b} + \frac{c^2}{b^2}\right) = 0$. Weil $\frac{a^2}{b^2} \geq 0$ und deswegen $1 + \frac{a^2}{b^2} \neq 0$ gilt, kann man die

Gleichung auf beiden Seiten durch $1 + \frac{a^2}{b^2}$ teilen:

$$x^2 + \underbrace{\frac{a' - \frac{ab'}{b} + 2 \cdot \frac{ac}{b^2}}{1 + \frac{a^2}{b^2}}}_=:u \cdot x + \underbrace{\frac{c' - \frac{b'c}{b} + \frac{c^2}{b^2}}{1 + \frac{a^2}{b^2}}}_=:v = 0$$

Weil K ein Körper ist, gilt $u, v \in K$. Man hat also die quadratische Gleichung $x^2 + ux + v = 0$ zu lösen: Es gilt:

$$x = -\underbrace{\frac{u}{2}}_{\in K} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\underbrace{u^2 - 4v}_{\in K}}}_{\in K} \vee x = -\underbrace{\frac{u}{2}}_{\in K} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\underbrace{u^2 - 4v}_{\in K}}}_{\in K}$$

Setze $d := u^2 - 4v$. Weil sich g und k schneiden, gilt $d \geq 0$. Im Fall $d = 0$ gilt: $x = -\frac{u}{2} \in K$ und $y = -\frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{u}{2}\right) - \frac{c}{b} = \frac{au - 2c}{2b} \in K$.

Ist also $d = 0$, dann liegen die Koordinaten des Schnittpunktes in K . Im Fall $d > 0$ und $\sqrt{d} \notin K$ liegen beide x in $K(\sqrt{d})$, und wegen $y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$ liegen auch die zugehörigen y in $K(\sqrt{d})$. Gilt hingegen $\sqrt{d} \in K$, dann gilt $K(\sqrt{d}) = K$ und die beiden x sind aus K , und wegen $y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$ sind dann auch die zugehörigen y aus K . Man sieht also, dass in diesem Fall die Koordinaten der Schnittpunkte entweder alle aus K oder alle aus $K(\sqrt{d})$ sind.

3. Kreis schneidet Kreis: Der Kreis k_1 habe den Mittelpunkt $(x_1, y_1) \in K^2$ und den Radius $r_1 \in K$ und der Kreis k_2 habe den Mittelpunkt $(x_2, y_2) \in K^2$ und den Radius $r_2 \in K$. Man hat dann:

$$\begin{aligned} k_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \text{ mit } (a, b, c) = (-2x_1, -2y_1, x_1^2 + y_1^2 - r_1^2)\} \\ k_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + a' \cdot x + b' \cdot y + c' = 0 \text{ mit } (a', b', c') = (-2x_2, -2y_2, x_2^2 + y_2^2 - r_2^2)\} \end{aligned}$$

Weil K ein Körper ist, gilt also $a, b, c, a', b', c' \in K$. Nun wird $k_1 \cap k_2$ bestimmt: Man zieht nun die zweite Kreisgleichung von der ersten Kreisgleichung ab, so dass man erhält: $(a - a') \cdot x + (b - b') \cdot y + (c - c') = 0$. Falls $a = a'$ und $b = b'$, dann folgt $c = c'$, also sind die beiden Kreise gleich, was man ausschließen möchte, weil man neue Punkte will. Also gilt $a - a' \neq 0$ oder $b - b' \neq 0$. Sei $\alpha := a - a'$, $\beta = b - b'$ und $\gamma = c - c'$. Man sucht hier also Punkte die $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma = 0$ ($\alpha, \beta, \gamma \in K$ und: $\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0$) und $x^2 + y^2 + a' \cdot x + b' \cdot y + c' = 0$ erfüllen. Diese Situation entspricht algebraisch der Situation, die man im Fall 2 (Gerade schneidet Kreis) zu diskutieren hatte. Also folgt, wie dort, dass entweder alle Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Kreise in K liegen oder, dass alle aus $K(\sqrt{d'})$ sind. Der Beweis ist hiermit beendet. \square

Satz (Hauptsatz über konstruierbare Zahlen). *Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn es eine endliche Kette*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R} \text{ (Reell-quadratischer Körperturm)}$$

von Zwischenkörpern gibt mit $K_i = K_{i-1}(\sqrt{d_{i-1}}) = \{a_{i-1} + b_{i-1} \cdot \sqrt{d_{i-1}} : a_{i-1}, b_{i-1}, d_{i-1} \in K_{i-1}, \sqrt{d_{i-1}} \notin K_{i-1}\}$ (Reell-quadratischer Erweiterungskörper von K_{i-1}) so, dass $a \in K_n$ gilt. Dabei heißt $K = K_n$ iterierte reell-quadratische Erweiterung von \mathbb{Q} . Es ist klar, dass die K_i Körper sind, d.h. sie sind insbesondere bezüglich der Verknüpfungen abgeschlossen.

Beweis. \Leftarrow : Sei also der Körperturm $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in K_n$ gegeben. Behauptung: a ist konstruierbar. Nach dem Lemma (Konstruierbare Zahlen) sind alle Zahlen in $\mathbb{Q} = K_0$ konstruierbar. Nun gilt $K_1 = K_0(\sqrt{d_0}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d_0}) = \{a_0 + b_0 \cdot \sqrt{d_0} : a_0, b_0, d_0 \in \mathbb{Q}, \sqrt{d_0} \notin \mathbb{Q}\}$. Nun sind alle Zahlen in K_1 konstruierbar, denn: $a_0, b_0, d_0 \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{d_0} \notin \mathbb{Q}$ sind also konstruierbar, also nach dem Lemma (Konstruierbare Zahlen) auch $\sqrt{d_0}$ (Wurzel), also auch $b_0 \cdot \sqrt{d_0}$ (Multiplikation), also auch $a_0 \pm b_0 \cdot \sqrt{d_0}$ (Addition, Subtraktion). Weil also alle Zahlen in K_1 konstruierbar sind, sind es auch die in $K_2 = K_1(\sqrt{d_1}) = \{a_1 + b_1 \cdot \sqrt{d_1} : a_1, b_1, d_1 \in K_1, \sqrt{d_1} \notin K_1\}$. Dann sind die Zahlen von K_3 wegen $a_2, b_2, d_2 \in K_2$ und $\sqrt{d_2} \notin K_2$ konstruierbar, also auch die von K_4 , usw. Macht man so weiter, dann erhält man schließlich, dass auch alle Zahlen von K_n konstruierbar sind, also insbesondere auch das $a \in K_n$.

\Rightarrow : Sei $a \in \mathbb{R}$ konstruierbar. Behauptung: Es gibt einen reell-quadratischen Körperturm $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$ mit $a \in K_n$, wobei nochmal gilt: $K_i = K_{i-1}(\sqrt{d_{i-1}}) = \{a_{i-1} + b_{i-1} \cdot \sqrt{d_{i-1}} : a_{i-1}, b_{i-1}, d_{i-1} \in K_{i-1}, \sqrt{d_{i-1}} \notin K_{i-1}\}$. Dann gibt es eine Strecke der Länge a , deren Randpunkte aus einer Strecke der Länge 1 mit Hilfe von endlich vielen Schritten mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Seien P_0, P_1, \dots, P_r die Punkte, die bei dieser Konstruktion benötigt werden, aufgelistet in der Reihenfolge ihrer Konstruktion. Der erste Konstruktionsschritt ist vorgegeben: Man zeichnet eine Strecke der Länge 1. Man kann annehmen, dass P_0 im Koordinatenursprung liegt, also $P_0 = (0, 0)$, und man kann annehmen, dass $P_1 = (0, 1)$ ist. Die Punkte P_0 und P_1 liegen mit ihren Koordinaten in \mathbb{Q} , womit der Körperturm also startet. Der Punkt P_r ist der letzte Punkt, der für die Konstruktion der Strecke der Länge a verwendet wird. Nun kommt man zum Körperturm: P_0 und P_1 liegen in $\mathbb{Q} = K_0 = K_1$. Als nächstes wird der Punkt P_2 konstruiert, wobei dieser durch eines der drei bekannten Konstruktionsmöglichkeiten (Schnitt: Gerade-Gerade, Gerade-Kreis, Kreis-Kreis) entsteht. Die Parameter der Geraden (2 verschiedene Punkte) und Kreise (Mittelpunkt und Radius) liegen in K_1 (Alle bisher bekannte Konstruktionen stehen für die nächsten Konstruktionen zur Verfügung). Nach dem Satz (Eigenschaften neu konstruierter Punkte) liegen die Koordinaten des Schnittpunktes P_2 dann entweder in $K_2 = K_1$ oder in $K_2 = K_1(\sqrt{d_1})$. Für die Konstruktion des nächsten Punktes P_3 sind die Parameter der Geraden und Kreise aus K_2

(Wieder: Alle bisher bekannte Konstruktionen stehen für die nächsten Konstruktionen zur Verfügung). Wieder gilt nach dem Satz (Eigenschaften neu konstruierter Punkte), dass $K_3 = K_2$ oder $K_3 = K_2(\sqrt{d_2})$ gilt. Als nächstes kommt P_4 : Die Parameter der Geraden und Kreise sind nun aus K_3 , also sind die Koordinaten des Schnittpunktes P_4 nach dem Satz (Eigenschaften neu konstruierter Punkte) aus $K_4 = K_3$ oder $K_4 = K_3(\sqrt{d_3})$. Jetzt kommt P_5 , usw. Macht man so weiter, so erhält man schließlich eine Inklusionskette von Körpern: $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r$. Der Körper K_i enthält dabei die Koordinaten aller Punkte P_j mit $j \leq i$. Streicht man nun in der Folge $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r$ alle diejenigen K_i mit $K_i = K_{i+1}$, so erhält man einen reell-quadratischen Körperturm $\mathbb{Q} \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_s$, und die Koordinaten der Punkte P_0, \dots, P_r liegen in K_s . Im letzten Konstruktionschritt zeichnet man die Strecke der Länge a zwischen einem Punkt P_k , $0 \leq k < r$ und P_r (denn: a ist konstruierbar). Sei $P_k = (x, y)$ und $P_r = (c, d)$, wobei $x, y, c, d \in K_s$ gilt. Dann ist $a = \sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2} \in K_s$ $\left(\underbrace{\sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2}}_{\in K_s} \right)$. Also liegt a in K_s (falls $\sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2} \in K_s$) oder in einer reell-quadratischen Erweiterung von K_s . In beiden Fällen erhält man einen reell-quadratischen Körperturm (mit $n = s$ oder $n = s + 1$). Und das war es endlich. \square

Lemma (Für Algebraizität). *Sei K ein Unterkörper von \mathbb{R} und $K(\sqrt{d})$ eine reell-quadratische Erweiterung von K . Sei c eine Nullstelle eines Polynoms p aus $K(\sqrt{d})[x]$ vom Grad n . Dann ist c eine Nullstelle eines Polynoms vom Grad $2n$ in $K[x]$. Der Beweis geht dann folgendermaßen:*

Beweis. Sei c Nullstelle des Polynoms:

$$p = (a_0 + b_0 \cdot \sqrt{d}) + (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{d}) \cdot x + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1} \cdot \sqrt{d}) \cdot x^{n-1} + (a_n + b_n \cdot \sqrt{d}) \cdot x^n$$

Dabei gilt $a_i, b_i \in K$ für alle $0 \leq i \leq n$, und a_n und b_n sind nicht beide 0. Dann gilt:

$$(a_0 + b_0 \cdot \sqrt{d}) + (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{d}) \cdot c + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1} \cdot \sqrt{d}) \cdot c^{n-1} + (a_n + b_n \cdot \sqrt{d}) \cdot c^n = 0$$

Ausmultiplizieren und Umsortieren liefert:

$$a_0 + a_1 \cdot c + \dots + a_{n-1} \cdot c^{n-1} + a_n \cdot c^n = -\sqrt{d} \cdot (b_0 + b_1 \cdot c + \dots + b_{n-1} \cdot c^{n-1} + b_n \cdot c^n)$$

Nun quadriert man beide Seiten und erhält:

$$a_0^2 + \tilde{a}_1 \cdot c + \dots + \tilde{a}_{2n-1} \cdot c^{2n-1} + a_n^2 \cdot c^{2n} = d \cdot (b_0^2 + \tilde{b}_1 \cdot c + \dots + \tilde{b}_{2n-1} \cdot c^{2n-1} + b_n^2 \cdot c^{2n})$$

Wie die Koeffizienten \tilde{a}_i und \tilde{b}_i , $1 \leq i \leq 2n-1$, genau aussehen ist nicht wichtig. Wichtig ist nur, dass sie aus K sind, wegen der Abgeschlossenheit eines Körpers. Es folgt:

$$(a_0^2 - b_0^2 d) + (\tilde{a}_1^2 - \tilde{b}_1^2 d) \cdot c + \dots + (\tilde{a}_{2n-1}^2 - \tilde{b}_{2n-1}^2 d) \cdot c^{2n-1} + (a_n^2 - b_n^2 d) \cdot c^{2n} = 0$$

Somit ist c Nullstelle von:

$$q = (a_0^2 - b_0^2 d) + (\tilde{a}_1^2 - \tilde{b}_1^2 d) \cdot x + \dots + (\tilde{a}_{2n-1}^2 - \tilde{b}_{2n-1}^2 d) \cdot x^{2n-1} + (a_n^2 - b_n^2 d) \cdot x^{2n}$$

Es bleibt zu zeigen, dass q aus $K[x]$ den Grad $2n$ hat: Wäre nämlich $a_n^2 - b_n^2 d = 0$, dann folgt $a_n = \pm b_n \cdot \sqrt{d}$, also Widerspruch, denn es ist $a_n \in K$, aber $b_n \cdot \sqrt{d} \notin K$, denn wäre $b_n \cdot \sqrt{d} \in K$, dann auch $\frac{1}{b_n} \cdot (b_n \cdot \sqrt{d}) = \sqrt{d}$, Widerspruch. \square

Satz (Algebraizität konstruierbarer Zahlen). *Sei c konstruierbar. Dann ist c eine Nullstelle eines Polynoms vom Grad 2^n aus $\mathbb{Q}[x]$. Dann ist c auch eine Nullstelle eines Polynoms vom Grad 2^n aus $\mathbb{Z}[x]$, c ist also algebraisch.*

Beweis. Weil c eine konstruierbare Zahl ist, gilt nach dem Satz (Hauptsatz über konstruierbare Zahlen), dass es einen reell-quadratischen Körperturm

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R}$$

von Zwischenkörpern gibt mit $K_i = K_{i-1}(\sqrt{d_{i-1}}) = \{a_{i-1} + b_{i-1} \cdot \sqrt{d_{i-1}} : a_{i-1}, b_{i-1}, d_{i-1} \in K_{i-1}, \sqrt{d_{i-1}} \notin K_{i-1}\}$ so, dass $c \in K_n$ ist. Das $c \in K_n$ ist Nullstelle des Polynoms $x - c$ aus $K_n[x]$ vom Grad 1. Nach dem Lemma (Für Algebraizität) gilt, dass c eine Nullstelle eines Polynoms vom Grad $2 \cdot 1 = 2$ in $K_{n-1}[x]$ ist. Wiederholtes Anwenden von Lemma (Für Algebraizität) liefert dann, dass c Nullstelle eines Polynoms vom Grad $2^n \cdot 1 = 2^n$ in $\mathbb{Q}[x]$ ist. Wenn man das Polynom gleich Null für c eingesetzt mit dem kgV aller Koeffizienten auf beiden Seiten multipliziert, dann ist c sogar Nullstelle eines Polynoms aus $\mathbb{Z}[x]$ vom Grad 2^n , ist also algebraisch, was genau das ist, was man hier zu zeigen hatte. \square

Satz (Quadratur des Kreises). *Ein Kreis mit dem konstruierbaren Radius r hat bekanntlich den Flächeninhalt $\pi \cdot r^2$. Es ist nicht möglich mit Zirkel und Lineal das Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt zu konstruieren.*

Beweis. Es muss also das Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{\pi} \cdot r$ konstruiert werden. Weil r konstruierbar ist, ist auch $\frac{1}{r}$ konstruierbar. Wäre $\sqrt{\pi} \cdot r$ konstruierbar, wäre auch $(\sqrt{\pi} \cdot r) \cdot \frac{1}{r} = \sqrt{\pi}$ konstruierbar, also auch $\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} = \pi$. Nach dem Satz (Algebraizität konstruierbarer Zahlen) wäre π dann algebraisch. Das ist aber ein Widerspruch, denn π ist bekanntlich transzendent, also nicht algebraisch. \square

Satz (Würfelverdopplung). *Sei ein Würfel mit der konstruierbaren Kantenlänge a gegeben. Dann ist das Volumen dieses Würfels gleich a^3 . Man kann nun mit Zirkel und Lineal nicht den Würfel mit doppelten Volumen konstruieren.*

Beweis. Der Würfel doppelten Volumens hätte dann die Kantenlänge $\sqrt[3]{2} \cdot a$. Weil a konstruierbar ist, ist auch $\frac{1}{a}$ konstruierbar. Wäre also $\sqrt[3]{2} \cdot a$ konstruierbar, dann auch $(\sqrt[3]{2} \cdot a) \cdot \frac{1}{a} = \sqrt[3]{2}$. Angenommen, $\sqrt[3]{2}$ ist konstruierbar, so gäbe es nach dem Satz (Hauptsatz über konstruierbare Zahlen) einen Körper K_n , der durch sukzessive quadratische Körpererweiterungen aus \mathbb{Q} entsteht, in dem $x = \sqrt[3]{2}$ läge:

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$$

Wenn also $x = \sqrt[3]{2} \in K_n$ wäre, so gäbe es offenbar ein $x \in K_n$ mit $x^3 = 2$. Es wird nun gezeigt:

$$\exists x \in K(\sqrt{d}) : x^3 = 2 \Rightarrow \exists y \in K : y^3 = 2 (*)$$

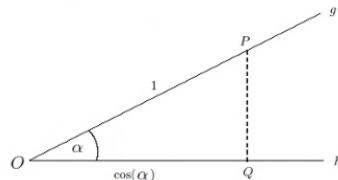
Der Beweis geht dann folgendermaßen: Angenommen, es gibt ein $x \in K(\sqrt{d})$ mit $x^3 = 2$, also $(a + b \cdot \sqrt{d})^3 - 2 = 0$ mit $a, b, d \in K$, $d > 0$, $\sqrt{d} \notin K$. Daraus erhält man dann:

$$0 = \underbrace{a^3 + 3ab^2d - 2}_{=:u} + \underbrace{b(3a^2 + b^2d)}_{=:v} \cdot \sqrt{d} = u + v \cdot \sqrt{d}$$

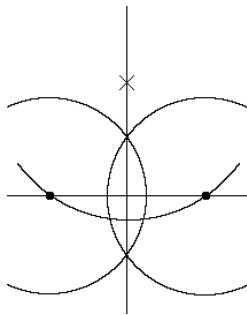
Wäre $v = b(3a^2 + b^2d)$, der Koeffizient von \sqrt{d} , ungleich Null, so wäre $\sqrt{d} = -\frac{u}{v} = -\frac{a^3 + 3ab^2d - 2}{b(3a^2 + b^2d)} \in K$, Widerspruch. Daher muss also $v = 0$ sein. Wegen $d > 0$ wäre für $b \neq 0$ mit Sicherheit $v \neq 0$. Weil aber $v = 0$ ist, folgt $b = 0$. Da $(a + b \cdot \sqrt{d})^3 - 2 = 0$ gilt, folgt wegen $b = 0$ also $(a + 0)^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow a^3 = 2$ mit $a \in K$. Mit der bewiesenen Aussage (*) bekommt man: Wenn es in einem Körper K_n eine Zahl x mit $x^3 = 2$ gäbe, so gäbe es auch so eine Zahl in K_{n-1} . Dann gibt es auch so eine in K_{n-2} , usw. Macht man so weiter, folgt am Ende, dass es in $\mathbb{Q} = K_0$ eine Zahl $z \in \mathbb{Q}$ gibt mit $z^3 = 2$. Das heißt, dass dann aber $\sqrt[3]{2}$ eine rationale Zahl ist, Widerspruch. Also: $\sqrt[3]{2} \cdot a$ ist nicht konstruierbar. \square

Lemma (1). *Ein Winkel α ist genau dann konstruierbar, wenn die Zahl $\cos(\alpha)$ konstruierbar ist.*

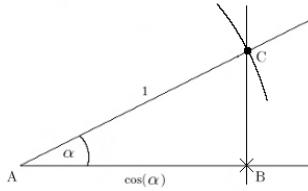
Beweis. \Rightarrow : Sei also der Winkel α konstruiert. Es wird nun gezeigt, wie man daraus $\cos(\alpha)$ konstruieren kann.



O ist der Scheitel des Winkels α , der durch die Strahlen g und h eingeschlossen wird. Man schlägt nun um O einen Kreis vom Radius 1. Dieser schneidet g im Punkt P . Dann fällt man das Lot von P auf h . Dieses schneidet h im Punkt Q . Die Strecke \overline{OQ} hat dann die Länge $\cos(\alpha)$. Es wird hier für die Vollständigkeit des Beweises nachträglich noch gezeigt, wie man das Lot von einem Punkt auf eine Gerade konstruiert: Das geht so:



\Leftarrow : Sei nun die Zahl $\cos(\alpha)$ gegeben. Nun zeigt man, wie man daraus den Winkel α konstruiert.



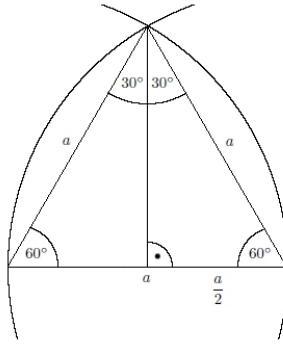
Die Strecke von Scheitelpunkt A nach Kreuz B habe die Länge $\cos(\alpha)$, die man z.B. mit einem Zirkel zeichnen kann. Man zeichnet dann die Senkrechte zur Gerade, die durch A und B verläuft, die durch das Kreuz bei B geht. Danach schlägt man einen Kreis um A mit dem Radius 1. Der Kreis schneidet dabei die Senkrechte durch B in einem Punkt C . Dann gilt $\angle CAB = \alpha$. Damit ist der Beweis auch beendet! \square

Lemma (2). Wenn $\cos(20^\circ)$ konstruierbar ist, dann ist eine Nullstelle des Polynoms $p = x^3 - 3x - 1$ konstruierbar.

Beweis. Es werden hier die folgenden bekannten Additionstheoreme benutzt:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)\end{aligned}$$

Weiter gilt: $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ und $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$. Einschub: Beweis von $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$:



Es gilt also nach der Zeichnung: $\cos(60^\circ) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$, Ende des Einschubs. Sei $\gamma = 20^\circ$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \cos(3\gamma) = \cos(2\gamma + \gamma) = \cos(2\gamma) \cdot \cos(\gamma) - \sin(2\gamma) \cdot \sin(\gamma) = \cos(\gamma + \gamma) \cdot \cos(\gamma) - \sin(\gamma + \gamma) \cdot \sin(\gamma) \\ &= [\cos(\gamma) \cdot \cos(\gamma) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\gamma)] \cdot \cos(\gamma) - [\cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma)] \cdot \sin(\gamma) \\ &= \cos(\gamma)^3 - \sin(\gamma)^2 \cdot \cos(\gamma) - \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma)^2 - \sin(\gamma)^2 \cdot \cos(\gamma) \\ &= \cos(\gamma)^3 - 3 \cdot \sin(\gamma)^2 \cdot \cos(\gamma) = \cos(\gamma)^3 - 3 \cdot (1 - \cos(\gamma)^2) \cdot \cos(\gamma) \\ &= \cos(\gamma)^3 - 3 \cdot \cos(\gamma) + 3 \cdot \cos(\gamma)^3 = 4 \cdot \cos(\gamma)^3 - 3 \cdot \cos(\gamma)\end{aligned}$$

Es folgt daraus $4 \cdot \cos(\gamma)^3 - 3 \cdot \cos(\gamma) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot \cos(\gamma)^3 - 6 \cdot \cos(\gamma) - 1 = 0$ und also

$$(2 \cdot \cos(\gamma))^3 - 3 \cdot (2 \cdot \cos(\gamma)) - 1 = 0$$

Somit ist $2 \cdot \cos(\gamma)$ eine Nullstelle von $p = x^3 - 3x - 1$. Nach Voraussetzung ist $\cos(\gamma) = \cos(20^\circ)$ konstruierbar, also ist auch $2 \cdot \cos(\gamma)$ konstruierbar. Daraus folgt dann, dass eine Nullstelle von $p = x^3 - 3x - 1$ konstruierbar ist. \square

Lemma (3). Sei K ein Unterkörper von \mathbb{R} , und sei $K(\sqrt{d})$ eine reell-quadratische Erweiterung von K . Sei c eine Nullstelle von $p = x^3 - 3x - 1$. Wenn $c \in K(\sqrt{d})$ liegt, dann gibt es eine Nullstelle c' von p in K .

Beweis. Sei c eine Nullstelle von p und sei $c \in K(\sqrt{d})$. Dann gibt es $a, b \in K$ mit $c = a + b \cdot \sqrt{d}$. Ist $b = 0$, dann ist $c' = c$ aus K und eine Nullstelle von p , und man ist hier fertig. Man kann also $b \neq 0$ annehmen. Nach Annahme gilt: $(a + b \cdot \sqrt{d})^3 - 3 \cdot (a + b \cdot \sqrt{d}) - 1 = 0 \Leftrightarrow (a^3 + 3ab^2d - 3a - 1) + (3a^2b + b^3d - 3b) \cdot \sqrt{d} = 0$. Wäre $3a^2b + b^3d - 3b \neq 0$, so könnte man nach \sqrt{d} auflösen und erhielte $\sqrt{d} \in K$, ein Widerspruch. Es gilt also $3a^2b + b^3d - 3b = 0 \Leftrightarrow 3a^2 + b^2d - 3 = 0$ und $a^3 + 3ab^2d - 3a - 1 = 0$. Also gilt: $b^2d = 3 - 3a^2$ und $a^3 + 3a \cdot b^2d - 3a - 1 = 0$. Setzt man b^2d in die andere Gleichung ein, erhält man $a^3 + 3a \cdot (3 - 3a^2) - 3a - 1 = 0 \Leftrightarrow a^3 + 9a - 9a^3 - 3a - 1 = 0 \Leftrightarrow -8a^3 + 6a - 1 = 0 \Leftrightarrow (-2a)^3 - 3 \cdot (-2a) - 1 = 0$. Somit ist $c' = -2a$ eine Nullstelle von p mit $c' = -2a \in K$. Der Beweis ist damit beendet. \square

Lemma (4). Sei c eine Nullstelle des Polynoms $p = x^3 - 3x - 1$. Dann gilt $c \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. Angenommen, es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$, so dass $c = \frac{a}{b}$ eine Nullstelle von p ist. Da 0 keine Nullstelle von $p = x^3 - 3x - 1$ ist, gilt $a \neq 0$. Man nimmt an, dass a und b ausgekürzt sind. Dann gilt: $\frac{a^3}{b^3} - \frac{3a}{b} - 1 = 0$, also $a^3 - 3ab^2 - b^3 = 0$. Es gilt also: $a^3 = b \cdot (3ab + b^2)$ und $b^3 = a \cdot (a^2 - 3b^2)$. Aus der ersten Gleichung folgt: Wenn es eine Primzahl q gibt, die b teilt, so teilt q auch a^3 und damit auch a (denn q ist eine Primzahl). Weil angenommen wurde, dass $\text{ggT}(a, b) = 1$, folgt, dass es keine Primzahl geben kann, die b teilt, also: $b = 1 \vee b = -1$. Analog folgt aus der zweiten Gleichung, dass gilt $a = 1 \vee a = -1$. Damit ist $\frac{a}{b} = 1$ oder $\frac{a}{b} = -1$. Das ist ein Widerspruch, denn weder 1 noch -1 ist eine Nullstelle von $p = x^3 - 3x - 1$. Also ist das Lemma hier bewiesen. \square

Satz (Dreiteilung beliebiger Winkel). Die Dreiteilung eines 60° -Winkels ist mit Zirkel und Lineal nicht möglich. D.h. die Winkeldrittteilung ist im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Beweis. Angenommen, eine solche Konstruktion ist möglich. Dann wäre der 20° -Winkel konstruierbar. Nach dem Lemma (1) ist dann $\cos(20^\circ)$ konstruierbar. Nach Lemma (2) ist dann also eine Nullstelle c von $p = x^3 - 3x - 1$ konstruierbar. Nach dem Satz (Hauptsatz über konstruierbare Zahlen) gibt es dann einen reell-quadratischen Körperturm $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$ mit $c \in K_n$. Wendet man das Lemma (3) wiederholt an, dann folgt, dass \tilde{c} eine Nullstelle von $p = x^3 - 3x - 1$ aus \mathbb{Q} ist. Das ist aber ein Widerspruch zu Lemma (4), denn nach diesem Lemma gilt, dass eine Nullstelle von p nicht aus \mathbb{Q} sein kann. Der Widerspruch zeigt, dass man einen 60° -Winkel mit Zirkel und Lineal nicht dreiteilen kann. Also: Fertig! \square

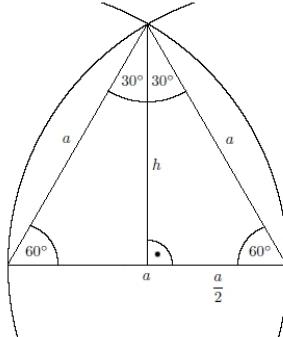
Korollar (Regelmäßiges 18-Eck). Das regelmäßige 18-Eck ist mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar.

Beweis. In dem Satz (Dreiteilung beliebiger Winkel) wurde gezeigt, dass ein Winkel von 20° mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar ist. Wegen $18 \cdot 20^\circ = 360^\circ$ ist dann also das 18-Eck nicht konstruierbar. \square

Es wurde eben also gezeigt, dass man nicht alle Winkel mit Zirkel und Lineal dritteln kann. D.h. aber nicht, dass das immer nicht geht, wie der folgende Satz zeigt:

Satz (Dreiteilung des 90° -Winkels). Den 90° -Winkel kann man mit Zirkel und Lineal dritteln.

Beweis. Man braucht hier die folgende Zeichnung:



Der Zeichnung kann man entnehmen: $\cos(30^\circ) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h}{a}$. Nun gilt: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4} \cdot a^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$. Daraus folgt also $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nach dem Lemma (Konstruierbare Zahlen) ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$ konstruierbar und nach Lemma (1) ist also auch der Winkel 30° konstruierbar. \square

Korollar (Regelmäßiges 12-Eck). Das regelmäßige 12-Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Beweis. In dem Satz (Dreiteilung des 90° -Winkels) wurde gezeigt, dass ein Winkel von 30° mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Wegen $12 \cdot 30^\circ = 360^\circ$ ist dann also das 12-Eck konstruierbar. \square

Lemma (5). Sei K ein Unterkörper von \mathbb{R} , und sei $K(\sqrt{d})$ eine reell-quadratische Erweiterung von K . Sei c eine Nullstelle von $p = y^3 + y^2 - 2y - 1$. Wenn $c \in K(\sqrt{d})$ liegt, dann gibt es eine Nullstelle c' von p in K .

Beweis. Sei c eine Nullstelle von p und sei $c \in K(\sqrt{d})$. Dann gibt es $a, b \in K$ mit $c = a + b \cdot \sqrt{d}$. Ist $b = 0$, dann ist $c' = c$ aus K und eine Nullstelle von p , und man ist hier fertig. Man kann also $b \neq 0$ annehmen. Nach Annahme gilt: $(a + b \cdot \sqrt{d})^3 + (a + b \cdot \sqrt{d})^2 - 2 \cdot (a + b \cdot \sqrt{d}) - 1 = 0 \Leftrightarrow (a^3 + a^2 - 2a + 3ab^2d + b^2d - 1) + (3a^2b + 2ab - 2b + b^3d) \cdot \sqrt{d} = 0$. Wäre $3a^2b + 2ab - 2b + b^3d \neq 0$, so könnte man nach \sqrt{d} auflösen und erhielte $\sqrt{d} \in K$, ein Widerspruch. Es gilt also $3a^2b + 2ab - 2b + b^3d = 0$ und $a^3 + a^2 - 2a + 3ab^2d + b^2d - 1 = 0$. Dann ist auch $\tilde{c} = a - b \cdot \sqrt{d}$ eine Nullstelle von $p = y^3 + y^2 - 2y - 1$, denn: $(a - b \cdot \sqrt{d})^3 + (a - b \cdot \sqrt{d})^2 - 2 \cdot (a - b \cdot \sqrt{d}) - 1 = (a^3 + a^2 - 2a + 3ab^2d + b^2d - 1) - (3a^2b + 2ab - 2b + b^3d) \cdot \sqrt{d} = 0 - 0 \cdot \sqrt{d} = 0$. Für die beiden Nullstellen $y_1 = a + b \cdot \sqrt{d}$

und $y_2 = a - b \cdot \sqrt{d}$ von $p = y^3 + y^2 - 2y - 1$ gilt wegen $b \neq 0$ also $y_1 \neq y_2$. Einschub: Wurzelsatz von Vieta: Seien x_1, x_2, x_3 die Nullstellen eines kubischen Polynoms $x^3 + rx^2 + sx + t$, also gilt $x^3 + rx^2 + sx + t = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) \cdot x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Durch Koeffizientenvergleich erhält man insbesondere also: $r = -(x_1 + x_2 + x_3) \Leftrightarrow x_3 = -r - (x_1 + x_2)$, Einschubende. Daraus folgt für die dritte Nullstelle von $p = y^3 + y^2 - 2y - 1$ also $y_3 = -1 - (y_1 + y_2) = -1 - ((a + b \cdot \sqrt{d}) + (a - b \cdot \sqrt{d})) = -1 - 2a$. Also hat man hier eine Nullstelle c' von p gefunden mit $c' = -1 - 2a \in K$. Der Beweis ist damit fertig! \square

Satz (Regelmäßiges 7-Eck). *Ein regelmäßiges 7-Eck ist mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar.*

Beweis. Die Ecken eines regelmäßigen 7-Ecks sind gegeben durch die komplexen Lösungen der Gleichung $z^7 - 1 = 0$. Die Zahl $z = 1$ ist eine Lösung dieser Gleichung. Es gilt dann $\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$ für z mit $z^7 - 1 = 0$ und $z \neq 1$. Dividiert man diese Gleichung durch $z^3 \neq 0$, so erhält man $z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$. Ferner gilt:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

Dabei sei $z = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$, also $z + \frac{1}{z} = 2 \cdot \cos(\varphi) =: y$. Damit ist klar: $z \in \mathbb{C}$ mit $z^7 - 1 = 0$ und $z \neq 1$ ist genau dann konstruierbar, wenn y oder $\cos(\varphi)$ es ist. Es gilt also:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

Wenn y als Nullstelle von $p = y^3 + y^2 - 2y - 1$ konstruierbar ist, dann gibt es nach dem Satz (Hauptsatz über konstruierbare Zahlen) einen reell-quadratischen Körperturm $Q = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$ mit $y \in K_n$. Wendet man das Lemma (5) wiederholt an, dann folgt, dass es eine Nullstelle \tilde{y} von $p = y^3 + y^2 - 2y - 1$ aus Q gibt. Das ist aber ein Widerspruch, denn wäre $\tilde{y} = \frac{m}{n} \in Q$ (m und n seien gekürzt) eine Lösung von $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$, dann folgt $m^3 + m^2n - 2mn^2 - n^3 = 0$. Also: Jeder Primteiler von m wäre auch einer von n und umgekehrt. Wegen $\text{ggT}(m, n) = 1$ dürfen m und n keine Primteiler haben, d.h. $m = 1 \vee m = -1$ und $n = 1 \vee n = -1$, folglich $\tilde{y} = \pm 1$. Aber das ist keine Lösung von $p = y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$, Widerspruch. Es gibt also keine Nullstelle von p , die aus Q ist. Also ist man somit fertig. \square

Satz (Regelmäßiges 17-Eck nach Gauß). *Ein regelmäßiges 17-Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.*

Beweis. Zunächst gilt das folgende:

$$\frac{z^{17} - 1}{z - 1} = z^0 + z^1 + z^2 + \dots + z^{15} + z^{16}$$

Sei $\zeta := e^{i \cdot \frac{2\pi}{17}}$. Also gilt wegen $\zeta - 1 \neq 0$ folglich: $\zeta^0 + \zeta^1 + \zeta^2 + \dots + \zeta^{15} + \zeta^{16} = 0$. Nun gilt: $\zeta^k = e^{i \cdot \frac{2\pi}{17} \cdot k} = \cos\left(\frac{2\pi}{17} \cdot k\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{17} \cdot k\right)$ für $k = 0, 1, \dots, 16$. Daraus folgt dann: $\sum_{k=0}^{16} \cos\left(\frac{2\pi}{17} \cdot k\right) = 0$. Sei $\alpha := \frac{2\pi}{17}$, also $\sum_{k=0}^{16} \cos(\alpha \cdot k) = 0$. Es gilt $\cos(0 \cdot \alpha) = \cos(0) = 1$ und: $\cos(16\alpha) = \cos(1\alpha), \cos(15\alpha) = \cos(2\alpha), \cos(14\alpha) = \cos(3\alpha), \dots, \cos(10\alpha) = \cos(7\alpha), \cos(9\alpha) = \cos(8\alpha)$. Beweis: $\cos(k \cdot \alpha) = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{k}{17} \cdot 2\pi\right) = \cos\left(\left(1 - \frac{17-k}{17}\right) \cdot 2\pi\right) = \cos\left(2\pi - \frac{17-k}{17} \cdot 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{17-k}{17} \cdot 2\pi\right) = \cos\left(\frac{17-k}{17} \cdot 2\pi\right) = \cos\left((17-k) \cdot \frac{2\pi}{17}\right) = \cos((17-k) \cdot \alpha)$ für $k = 1, 2, \dots, 16$. Daraus folgt:

$$\sum_{k=0}^{16} \cos(\alpha \cdot k) = \cos(0) + \sum_{k=1}^8 2 \cdot \cos(k \cdot \alpha) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 \cos(k \cdot \alpha) = -\frac{1}{2}$$

Sei nun $p = \cos(1\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(8\alpha)$ und $p' = \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha)$. Es gilt also $p + p' = -\frac{1}{2}$. Nun wird $p \cdot p'$ berechnet:

$$\begin{aligned} p \cdot p' &= \cos(1\alpha) \cdot \cos(3\alpha) + \cos(1\alpha) \cdot \cos(5\alpha) + \cos(1\alpha) \cdot \cos(6\alpha) + \cos(1\alpha) \cdot \cos(7\alpha) \\ &\quad + \cos(2\alpha) \cdot \cos(3\alpha) + \cos(2\alpha) \cdot \cos(5\alpha) + \cos(2\alpha) \cdot \cos(6\alpha) + \cos(2\alpha) \cdot \cos(7\alpha) \\ &\quad + \cos(4\alpha) \cdot \cos(3\alpha) + \cos(4\alpha) \cdot \cos(5\alpha) + \cos(4\alpha) \cdot \cos(6\alpha) + \cos(4\alpha) \cdot \cos(7\alpha) \\ &\quad + \cos(8\alpha) \cdot \cos(3\alpha) + \cos(8\alpha) \cdot \cos(5\alpha) + \cos(8\alpha) \cdot \cos(6\alpha) + \cos(8\alpha) \cdot \cos(7\alpha) \end{aligned}$$

Nun gilt das Additionstheorem $\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$, also:

$$\begin{aligned} p \cdot p' &= \frac{\cos(4\alpha) + \cos(2\alpha)}{2} + \frac{\cos(6\alpha) + \cos(4\alpha)}{2} + \frac{\cos(7\alpha) + \cos(5\alpha)}{2} + \frac{\cos(8\alpha) + \cos(6\alpha)}{2} \\ &\quad + \frac{\cos(5\alpha) + \cos(1\alpha)}{2} + \frac{\cos(7\alpha) + \cos(3\alpha)}{2} + \frac{\cos(8\alpha) + \cos(4\alpha)}{2} + \frac{\cos(9\alpha) + \cos(5\alpha)}{2} \\ &\quad + \frac{\cos(7\alpha) + \cos(1\alpha)}{2} + \frac{\cos(9\alpha) + \cos(1\alpha)}{2} + \frac{\cos(10\alpha) + \cos(2\alpha)}{2} + \frac{\cos(11\alpha) + \cos(3\alpha)}{2} \\ &\quad + \frac{\cos(11\alpha) + \cos(5\alpha)}{2} + \frac{\cos(13\alpha) + \cos(3\alpha)}{2} + \frac{\cos(14\alpha) + \cos(2\alpha)}{2} + \frac{\cos(15\alpha) + \cos(1\alpha)}{2} \end{aligned}$$

Desweiteren gilt dann:

$$\begin{aligned}
p \cdot p' &= \frac{\cos(4\alpha) + \cos(2\alpha)}{2} + \frac{\cos(6\alpha) + \cos(4\alpha)}{2} + \frac{\cos(7\alpha) + \cos(5\alpha)}{2} + \frac{\cos(8\alpha) + \cos(6\alpha)}{2} \\
&\quad + \frac{\cos(5\alpha) + \cos(1\alpha)}{2} + \frac{\cos(7\alpha) + \cos(3\alpha)}{2} + \frac{\cos(8\alpha) + \cos(4\alpha)}{2} + \frac{\cos(8\alpha) + \cos(5\alpha)}{2} \\
&\quad + \frac{\cos(7\alpha) + \cos(1\alpha)}{2} + \frac{\cos(8\alpha) + \cos(1\alpha)}{2} + \frac{\cos(7\alpha) + \cos(2\alpha)}{2} + \frac{\cos(6\alpha) + \cos(3\alpha)}{2} \\
&\quad + \frac{\cos(6\alpha) + \cos(5\alpha)}{2} + \frac{\cos(4\alpha) + \cos(3\alpha)}{2} + \frac{\cos(3\alpha) + \cos(2\alpha)}{2} + \frac{\cos(2\alpha) + \cos(1\alpha)}{2} \\
&= \frac{4 \cdot \cos(1\alpha) + 4 \cdot \cos(2\alpha) + 4 \cdot \cos(3\alpha) + 4 \cdot \cos(4\alpha) + 4 \cdot \cos(5\alpha) + 4 \cdot \cos(6\alpha) + 4 \cdot \cos(7\alpha) + 4 \cdot \cos(8\alpha)}{2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2} \cdot 4}{2} = -1
\end{aligned}$$

Es gilt also $p + p' = -\frac{1}{2}$ und $p \cdot p' = -1$. Also: $p \cdot (-\frac{1}{2} - p) = -1 \Leftrightarrow p^2 + \frac{p}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow p_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$, also gilt: $p'_{1,2} = -\frac{1}{2} - p = -\frac{2}{4} - \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} = \frac{-2 + 1 \mp \sqrt{17}}{4} = \frac{-1 \mp \sqrt{17}}{4}$. Es wird die Probe gemacht: Es gilt $\frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \neq \cos(1\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(8\alpha) = p = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$. Und: $\frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \neq \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha) = p' = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$. Sei nun $q := \cos(1\alpha) + \cos(4\alpha)$ und $r := \cos(2\alpha) + \cos(8\alpha)$. Dann gilt: $q + r = p$ und $q \cdot r$ wird jetzt ausgerechnet: $q \cdot r = \cos(1\alpha) \cdot \cos(2\alpha) + \cos(1\alpha) \cdot \cos(8\alpha) + \cos(4\alpha) \cdot \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) \cdot \cos(8\alpha)$ und mithilfe des oben benutzten Additionstheorems folgt dann also:

$$\begin{aligned}
q \cdot r &= \frac{\cos(3) + \cos(1)}{2} + \frac{\cos(9) + \cos(7)}{2} + \frac{\cos(6) + \cos(2)}{2} + \frac{\cos(12) + \cos(4)}{4} \\
&= \frac{\cos(3) + \cos(1)}{2} + \frac{\cos(8) + \cos(7)}{2} + \frac{\cos(6) + \cos(2)}{2} + \frac{\cos(5) + \cos(4)}{4} \\
&= \frac{\cos(3) + \cos(1) + \cos(8) + \cos(7) + \cos(6) + \cos(2) + \cos(5) + \cos(4)}{2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Es gilt also: $q + r = p$ und $q \cdot r = -\frac{1}{4}$, also $q \cdot (p - q) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow q^2 - pq - \frac{1}{4} = 0$. Jetzt nach q auflösen: $q_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 1}}{2}$. Nun kann man r ausrechnen: $r_{1,2} = p - q = p - \left(\frac{p \pm \sqrt{p^2 + 1}}{2}\right) = \frac{2p - p \mp \sqrt{p^2 + 1}}{2} = \frac{p \mp \sqrt{p^2 + 1}}{2}$.

Es wird wieder die Probe gemacht: $\frac{p - \sqrt{p^2 + 1}}{2} \neq \cos(1\alpha) + \cos(4\alpha) = q = \frac{p + \sqrt{p^2 + 1}}{2}$. Sei jetzt $q' := \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha)$ und $r' := \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha)$. Genau, wie bei der Berechnung von q und r , berechnet man analog, dass gilt $q' \cdot r' = -\frac{1}{4}$ und $q' + r' = p'$. Man erhält, wie eben, dass gilt: $q'_{1,2} = \frac{p' \pm \sqrt{(p')^2 + 1}}{2}$, also gilt für r' : $r' = \frac{p' \mp \sqrt{(p')^2 + 1}}{2}$. Wieder Probe: $\frac{p' - \sqrt{(p')^2 + 1}}{2} \neq \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) = q' = \frac{p' + \sqrt{(p')^2 + 1}}{2}$. Und weiter geht es: Es gilt: $\cos(\alpha) + \cos(4\alpha) = q$ und $\cos(\alpha) \cdot \cos(4\alpha) = \cos(5\alpha) + \cos(3\alpha) = \frac{q'}{2}$. Setze $a := \cos(\alpha)$ und $b := \cos(4\alpha)$. Man hat also $a+b = q$ und $a \cdot b = \frac{q'}{2}$. Also: $a \cdot (q-a) = \frac{q'}{2} \Leftrightarrow a \cdot (a-q) = -\frac{q'}{2} \Leftrightarrow a^2 - qa + \frac{q'}{2}$, also: $a_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q'}{2}} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 2q'}}{2}$. Wieder Probe: $\frac{q - \sqrt{q^2 - 2q'}}{2} \neq \cos(\alpha) = a = \frac{q + \sqrt{q^2 - 2q'}}{2}$. Es gilt also:

$$a = \cos(\alpha) = \frac{q + \sqrt{q^2 - 2q'}}{2}, q = \frac{p + \sqrt{p^2 + 1}}{2}, q' = \frac{p' + \sqrt{(p')^2 + 1}}{2}, p = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, p' = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$$

Nach dem Satz (Konstruierbare Zahlen) ist also $\cos(\alpha)$ und somit nach Lemma (1) der Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{17} \cong \frac{360^\circ}{17}$ konstruierbar. Damit ist man hier also endlich fertig! \square

Satz (Abzählbarkeit algebraischer Zahlen). *Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar. Und die Menge der transzentenden Zahlen, also der nicht algebraischen Zahlen, ist überabzählbar.*

Beweis. Algebraische Zahlen sind definiert als Nullstellen von Polynomen (ungleich Nullpolynom) mit ganzzahligen Koeffizienten. Ein Polynom n -ten Grades hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens n Nullstellen. Es wird gezeigt, dass die Menge der Polynome (ungleich Nullpolynom) mit ganzzahligen Koeffizienten abzählbar ist. Weil jedes solche Polynom nur endlich viele Nullstellen hat, folgt daraus, dass die Menge der Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten ebenfalls abzählbar ist. Dazu: Sei also $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$ für $k = 0, \dots, n$ und $a_n \neq 0$ ein Polynom n -ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Jedem solchen Polynom kann man die Zahl $h(p) = n + \sum_{k=0}^n |a_k|$ zuordnen. Es gilt dann folgendes: Die Menge

$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{p \in \mathbb{Z}[x] : h(p) = k\}$ ist eine abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen, ist also eine abzählbare Menge. Weil jedes Polynom p einen Wert $h(p)$ hat und die Polynome diesen Wert von 1 bis ∞ annehmen (nicht 0, da ungleich Nullpolynom), gilt $\{p \in \mathbb{Z}[x] : a_0 \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{p \in \mathbb{Z}[x] : h(p) = k\}$. Beweis der Endlichkeit: $h(p) = k$ bedeutet, dass der Grad eines Polynoms in $\{p \in \mathbb{Z}[x] : h(p) = k\}$ nicht größer sein kann als k und es gilt auch, dass die Beträge der Koeffizienten ebenfalls höchstens k sein können. Also ist die Menge $\{p \in \mathbb{Z}[x] : h(p) = k\}$ eine endliche Menge. Es folgt also, dass die Menge der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten (ungleich Nullpolynom) tatsächlich abzählbar ist. Sei \mathbb{A} die Menge der algebraischen Zahlen und \mathbb{T} die Menge der transzendenten Zahlen. Es gilt dann: $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$ mit $\mathbb{A} \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Da \mathbb{A} , wie eben gezeigt, abzählbar ist, muss \mathbb{T} überabzählbar sein, denn sonst wäre \mathbb{T} abzählbar, also auch \mathbb{R} , Widerspruch. Also ist der Beweis damit vollständig vollbracht. \square

Korollar (Anzahl konstruierbarer und nicht konstruierbarer Zahlen). *Die Menge der konstruierbaren Zahlen ist abzählbar und die Menge der nicht konstruierbaren Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Nach dem Satz (Algebraizität konstruierbarer Zahlen) sind alle konstruierbaren Zahlen algebraisch. Weil algebraische Zahlen abzählbar sind nach dem Satz (Abzählbarkeit algebraischer Zahlen), folgt, dass die Menge der konstruierbaren Zahlen ebenfalls abzählbar ist. Es folgt weiter, dass überabzählbar viele Zahlen nicht konstruierbar sind. \square

Der Residuensatz

[Zurück zur Liste]

Satz (Residuensatz). *Sei G ein Elementargebiet, es seien $z_1, \dots, z_k \in G$ ($z_j \neq z_l$ für $j \neq l$) und es sei dann noch $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$, heißt: f ist holomorph auf dem angegebenen Gebiet. Jedes z_j ist also eine isolierte Singularität von f . Weiter sei γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit $\{z_1, \dots, z_k\} \notin \gamma$. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \text{ind}_{\gamma}(z_j) \cdot \text{Res}_{z_j} f$$

Beweis. $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ existiert ein $R_j > 0$: $\overline{K_{R_j}(z_j)} \subseteq G$ und $\overline{K_{R_j}(z_j)} \cap \overline{K_{R_l}(z_l)} = \emptyset$ ($j \neq l$); dabei sei $K_{R_j}(z_j)$ eine offene Kreisscheibe vom Radius R_j mit Mittelpunkt z_j . Sei $j \in \{1, \dots, k\}$, dann hat f auf $\dot{K}_{R_j}(z_j)$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \cdot (z - z_j)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} \cdot (z - z_j)^{-n}}_{=: \varphi_j(z)}$$

Nach dem Satz über die Laurentzerlegung gilt dabei $\varphi_j \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_j\})$. Man definiert nun $g \in \mathcal{H}(G \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$ durch $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^k \varphi_j(z)$. Dann hat g in z_j ($j = 1, \dots, k$) eine hebbare Singularität, d.h., dass in der Laurententwicklung von g die Koeffizienten vor den $(z - z_j)^{-n}$ ($n > 0$) alle gleich 0 sind. Beweis: Sei $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^{(j)} \cdot (z - z_j)^n$, dann werden die

Koeffizienten berechnet durch $g_n^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{K_{R_j}(z_j)} \frac{g(z)}{(z - z_j)^{n+1}} dz$, also gilt für $n < 0$: $g_n^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{K_{R_j}(z_j)} \frac{f(z)}{(z - z_j)^{n+1}} dz -$

$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{K_{R_j}(z_j)} \frac{\varphi_j(z)}{(z - z_j)^{n+1}} dz - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{K_{R_j}(z_j)} \sum_{i \neq j}^k \frac{\varphi_i(z)}{(z - z_j)^{n+1}} dz = a_n^{(j)} - a_n^{(j)} - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{K_{R_j}(z_j)} \sum_{i \neq j}^k \frac{\varphi_i(z)}{(z - z_j)^{n+1}} dz = 0 - 0 = 0$,

denn es gilt $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{K_{R_j}(z_j)} \sum_{i \neq j}^k \frac{\varphi_i(z)}{(z - z_j)^{n+1}} dz = 0$ nach dem Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete (siehe unter der Überschrift:

Die Cauchy'sche Integralformel), weil $\sum_{i \neq j}^k \frac{\varphi_i(z)}{(z - z_j)^{n+1}}$ holomorph auf $K_{R_j}(z_j)$ ist, denn für $i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}$ gilt $z_i \notin K_{R_j}(z_j)$ und wegen $n < 0$ ist $\frac{1}{(z - z_j)^{n+1}} = (z - z_j)^{-n-1}$ holomorph auf $K_{R_j}(z_j)$. Also ist $g \in \mathcal{H}(G)$.

G ist ein Elementargebiet, was nach Definition bedeutet, dass g als holomorphe Funktion eine Stammfunktion Ω auf G hat, also ist deswegen

$\int_{\gamma} g(z) dz = \Omega(\gamma(b)) - \Omega(\gamma(a)) = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} \varphi_j(z) dz$, denn es gilt $\gamma(b) = \gamma(a)$ (γ ist geschlossen). Jetzt muss nur noch $\int_{\gamma} \varphi_j(z) dz = 2\pi i \cdot \text{ind}_{\gamma}(z_j) \cdot a_{-1}^{(j)}$ mit $j = 1, \dots, k$ gezeigt werden. Die Reihe für φ_j konvergiert lokal gleichmäßig, also

können Integration und Summation vertauscht werden: $\int_{\gamma} \varphi_j(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} \cdot \int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz$. Da die Funktion $\frac{1}{(z - z_j)^n}$ für $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ auf $G \setminus \{z_j\}$ die Stammfunktion $\frac{(z - z_j)^{-n+1}}{-n+1}$ hat, folgt daraus für diese n : $\int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz = 0$, denn es gilt

$\{z_1, \dots, z_k\} \notin \gamma$. Es gilt also $\int_{\gamma} \varphi_j(z) dz = a_{-1}^{(j)} \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_j} dz$. Nun gibt es für die Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ mit dem Umlaufpunkt $z_j \in G$ ein $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\gamma(t) = z_j + |\gamma(t) - z_j| \cdot e^{i \cdot \phi(t)}$ gilt. Also gilt dann das Folgende:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_j} dz &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^b \frac{1}{z_j + |\gamma(t) - z_j| \cdot e^{i \cdot \phi(t)} - z_j} \cdot \frac{d}{dt} (z_j + |\gamma(t) - z_j| \cdot e^{i \cdot \phi(t)}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^b \frac{1}{|\gamma(t) - z_j| \cdot e^{i \cdot \phi(t)}} \cdot \frac{d}{dt} (|\gamma(t) - z_j| \cdot e^{i \cdot \phi(t)}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^b \frac{|\gamma'(t)| \cdot e^{i \cdot \phi(t)} + |\gamma(t) - z_j| \cdot (i \cdot \phi'(t)) \cdot e^{i \cdot \phi(t)}}{|\gamma(t) - z_j| \cdot e^{i \cdot \phi(t)}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t) - z_j|} dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b \phi'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^b \frac{d}{dt} \ln(|\gamma(t) - z_j|) dt + \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi} \end{aligned}$$

Wegen $\gamma(b) = \gamma(a)$ ist das Integral gleich 0, folglich gilt $\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_j} dz = 2\pi i \cdot \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi} = 2\pi i \cdot \text{ind}_{\gamma}(z_j)$. Nach Definition gilt $a_{-1}^{(j)} = \text{Res}_{z_j} f$, woraus die Behauptung des Satzes folgt. \square

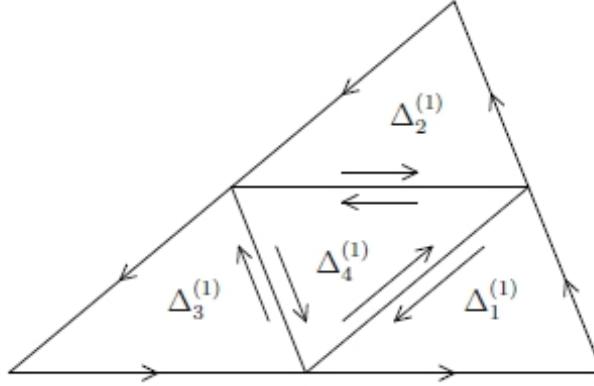
Die Cauchy'sche Integralformel

[Zurück zur Liste]

Satz (Goursat). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion sowie $\Delta \subseteq G$ ein abgeschlossenes Dreiecksgebiet. Dann gilt die folgende Identität:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

Beweis. Man schreibt $\Delta = \Delta^{(0)}$. Indem man die Seiten von Δ halbiert, unterteilt man Δ in 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_4^{(1)}$. Das ist im folgendem Bild zu sehen:



Sei $\gamma = \partial\Delta_1^{(1)} + \partial\Delta_2^{(1)} + \partial\Delta_3^{(1)} + \partial\Delta_4^{(1)}$, dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z) dz = \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z) dz$$

Denn die Integrale über die Strecken im Innern des Dreiecks heben sich gegenseitig auf, da die Strecken jeweils doppelt mit entgegengesetztem Vorzeichen durchlaufen werden. Also ist:

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \max_{1 \leq k \leq 4} \left| \int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z) dz \right|$$

Nun wählt man unter den Dreiecken $\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_4^{(1)}$ dasjenige aus, bei dem der Betrag des Integrals am größten ist, und nennt es $\Delta^{(1)}$. Dann ist:

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz \right|$$

Wiederholt man diese Prozedur, so erhält man eine Folge von Dreiecken $\Delta = \Delta^{(0)} \supseteq \Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(2)} \supseteq \Delta^{(3)} \supseteq \dots$ mit

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \text{ und } L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n} \cdot L(\partial\Delta)$$

Da alle $\Delta^{(i)}$ kompakt und nicht leer sind, enthält $\bigcap_{n \geq 0} \Delta^{(n)}$ einen Punkt z_0 , und da der Durchmesser der Dreiecke beliebig klein wird, kann es auch nur einen solchen Punkt geben. Weil f komplex-differenzierbar in z_0 ist, gibt es eine in z_0 stetige Funktion A , so dass gilt: 1. $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot (f'(z_0) + A(z))$ und 2. $A(z_0) = 0$. Die affin-lineare Funktion $\lambda(z) := f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0)$ hat auf G eine Stammfunktion, nämlich: $\Lambda(z) := (f(z_0) - z_0 \cdot f'(z_0)) \cdot z + \frac{f'(z_0)}{2} \cdot z^2$, also folgt dann $\int_{\partial\Delta^{(n)}} \lambda(z) dz = 0$ für alle n . Daraus folgt dann:

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} (z - z_0) \cdot A(z) dz \right| \leq L(\partial\Delta^{(n)}) \cdot \max_{z \in \partial\Delta^{(n)}} (|z - z_0| \cdot |A(z)|) \leq (L(\partial\Delta^{(n)}))^2 \cdot \max_{z \in \partial\Delta^{(n)}} |A(z)|$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man:

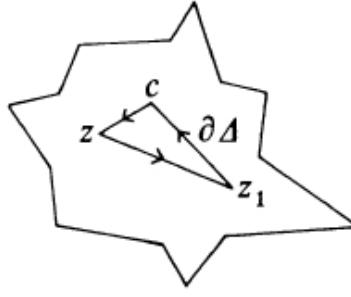
$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot (L(\partial\Delta^{(n)}))^2 \cdot \max_{z \in \partial\Delta^{(n)}} |A(z)| = (L(\partial\Delta))^2 \cdot \max_{z \in \partial\Delta^{(n)}} |A(z)| \leq (L(\partial\Delta))^2 \cdot \max_{z \in \Delta^{(n)}} |A(z)|$$

Für $n \rightarrow \infty$ strebt die rechte Seite gegen $0 = |A(z_0)|$. Das beweist den Satz! \square

Satz (Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete). *Es sei G ein Sterngebiet mit Zentrum z_1 und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf G , dann gilt die folgende Identität:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \text{ für jeden geschlossenen Weg } \gamma \text{ in } G$$

Beweis. Da G ein Sterngebiet mit Zentrum z_1 ist, gilt also $[z_1, z] \subseteq G$ für alle $z \in G$. Daher ist $F(z) := \int_{\overline{z_1 z}} f(\zeta) d\zeta$ wohldefiniert. Sei $c \in G$ fixiert und beliebig. Wird z nahe genug bei c gewählt, so liegt das Dreieck Δ mit den Eckpunkten z_1, c, z in G . Das sieht man im Bild hier:



Nach dem Satz von Goursat oben gilt also $0 = \int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = \int_{\overline{z_1 c + cz + zz_1}} f(\zeta) d\zeta$, woraus also $0 = F(c) - F(z) + \int_{\overline{cz}} f(\zeta) d\zeta = F(c) - F(z) + \int_0^1 f(c + t \cdot (z - c)) \cdot (z - c) dt = F(c) - F(z) + h(z) \cdot (z - c)$ für $z \in G$ nahe bei c , wobei hier gesetzt sei: $h(z) := \int_0^1 f(c + t \cdot (z - c)) dt$. Offensichtlich ist $h(c) = f(c)$. Es folgt dann:

$$|h(z) - h(c)| = \left| \int_0^1 f(c + t \cdot (z - c)) dt - f(c) \right| = \left| \int_0^1 f(c + t \cdot (z - c)) - f(c) dt \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(c + t \cdot (z - c)) - f(c)|$$

Weil f stetig in c ist, läuft die rechte Seite für $z \rightarrow c$ gegen 0, also $h(z) \rightarrow h(c)$, d.h. h ist stetig in c . Daraus folgt, dass der Limes des Differenzenquotienten in $h(c) = \lim_{z \rightarrow c} h(z) = \lim_{z \rightarrow c} \frac{F(z) - F(c)}{z - c}$ existiert. Da $h(c) = f(c)$ gilt, gilt also $F'(c) = f(c)$. Weil $c \in G$ beliebig war, folgt also, dass F eine Stammfunktion von f ist, also gilt

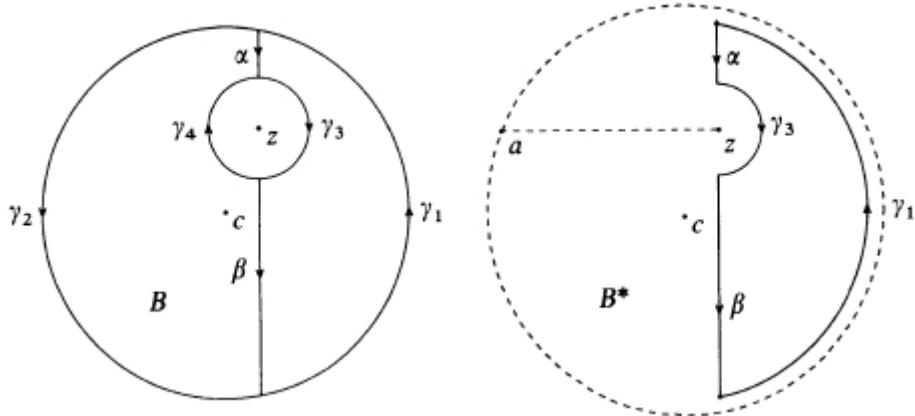
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$$

Denn die Kurve γ ist nach Voraussetzung geschlossen, also $\gamma(1) = \gamma(0)$. Fertig! \square

Satz (Zentrierungslemma). *Sei g eine Funktion, die in einem Bereich D mit eventueller Ausnahme eines festen Punktes $z \in D$ holomorph ist. Sei dann $B = K_r(c)$ eine offene Kreisscheibe vom Radius r mit Mittelpunkt c , wobei gelte: $z \in B$ und $\overline{B} \subseteq D$. Sei $S = \partial K_t(z)$ und $S \subseteq B$, dann gilt:*

$$\int_{\partial B} g(z) dz = \int_S g(z) dz$$

Beweis. Zuerst kommt ein Bild:



Es gibt eine Scheibe $B^* \supseteq B \cup \partial B$ um c , so dass g in $B^* \setminus \{z\}$ holomorph ist. Es werden nun folgende geschlossene Hilfswege betrachtet: $\gamma := \gamma_1 + \alpha + \gamma_3 + \beta$ und $\gamma' := \gamma_2 - \beta + \gamma_4 - \alpha$ (siehe Bild). Da $B^* \setminus [a, z]$ ein Sterngebiet ist, folgt nach dem Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete also: $\int_{\gamma} g dz = 0$. Analog ergibt sich dann $\int_{\gamma'} g dz = 0$. Mit $\partial B = \gamma_1 + \gamma_2$ und $S = -\gamma_3 - \gamma_4$ folgt also:

$$0 = \int_{\gamma} g dz + \int_{\gamma'} g dz = \int_{\partial B} g dz - \int_S g dz \Rightarrow \int_{\partial B} g dz = \int_S g dz$$

Und das war es dann auch! \square

Satz (Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben). *Sei $K = K_r(c)$ (Radius r , Mittelpunkt c) eine offene Kreisscheibe in \mathbb{C} und f eine holomorphe Funktion auf \overline{K} . Für jedes $z \in K$ gilt dann die folgende wichtige Identität:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Beweis. Sei $z \in K$ fixiert. Aus dem Beweis des Residuensatzes weiß man bereits, dass $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 1$ gilt. Also folgt daraus dann das Folgende:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Die Funktion $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ für $\zeta \in \overline{K} \setminus \{z\}$ mit $\varphi(z) := f'(z)$ ist holomorph auf $\overline{K} \setminus \{z\}$ und stetig auf \overline{K} . Wegen der Stetigkeit von φ um z gibt es ein $\delta > 0$ und ein $M > 0$ so, dass gilt $|\varphi(\zeta)| \leq M$ für alle $\zeta \in \overline{K}_\delta(z)$. Aus dem Zentrierungslemma folgt: $\int_{\partial K} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \varphi(\zeta) d\zeta$ für ein $\varepsilon > 0$ mit $\partial K_\varepsilon(z) \subseteq K$. Mit der Standardabschätzung folgt dann:

$$\int_{\partial K} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \varphi(\zeta) d\zeta \leq 2\pi\varepsilon \cdot \sup_{\zeta \in \partial K_\varepsilon(z)} |\varphi(\zeta)| \leq 2\pi M \cdot \varepsilon$$

Dabei muss bei $\varepsilon \rightarrow 0$ dann $\varepsilon < \delta$ gelten. Also folgt: $\int_{\partial K} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial K} \varphi(\zeta) d\zeta = 0$, also $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) = 0$. Damit ist der Beweis also vollbracht! \square

Das Noether-Theorem

[Zurück zur Liste]

Satz. *Sei die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t)$ mit $x(t) = (x_1, \dots, x_f)(t)$ und $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f)(t)$ (Ort und Geschwindigkeit), wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade ist, für ein mechanisches System gegeben. Man möchte dann das Wirkungsfunktional $S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt$ minimieren, gemäß dem Prinzip der kleinsten Wirkung für eine Bewegung von Massenpunkten. Setzt man z.B. $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = E_{kin} - E_{pot}$, dann soll die Minimierung von $S[y]$ bedeuten, dass man eine Bahn, von einem Punkt zu einem anderen, möchte, die minimal viel Energie verbraucht. Nach Variationsrechnung ist $S[y]$ genau dann extremal, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen gelten: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$. Seien nun durch $x_i \mapsto x_i^* = x_i + \varepsilon \cdot \psi_i(x, \dot{x}, t) + O(\varepsilon^2) =: x_i^*(x_1, \dots, x_f, t, \varepsilon)$ und $t \mapsto t^* = t + \varepsilon \cdot \varphi(x, \dot{x}, t) + O(\varepsilon^2) =: t^*(x_1, \dots, x_f, t, \varepsilon)$ die sehr allgemeinen kontinuierlichen Koordinatentransformationen gegeben. Ist eine Transformation so gegeben, dass das Wirkungsfunktional $S[x]$ unverändert bleibt, dann hat das nach Noether eine Erhaltungsgröße zur Folge. Solche Transformationen heißen Symmetrietransformationen.*

Beweis. Es wird zunächst untersucht unter welchen Bedingungen für eine Transformation das Wirkungsfunktional unverändert bleibt: Sei also $S^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} \mathcal{L} \left(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^* \right) dt^* = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt = S$. Es gilt:

$$S^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} \mathcal{L} \left(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^* \right) dt^* = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(x^*(t), \frac{dx^*}{dt^*}(t), t^*(t) \right) \cdot \frac{dt^*}{dt} dt$$

Sei $f(\varepsilon) := \mathcal{L} \left(x^*(t), \frac{dx^*}{dt^*}(t), t^*(t) \right) \cdot \frac{dt^*}{dt}$. Dann gilt nach Taylor: $f(\varepsilon) = \frac{f(0)}{0!} \cdot \varepsilon^0 + \frac{f'(0)}{1!} \cdot \varepsilon^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot \varepsilon^2 + \dots = f(0) + f'(0) \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Es gilt $\frac{dt^*}{dt} = 1 + \varepsilon \cdot \frac{d}{dt} \varphi(x, \dot{x}, t) + O(\varepsilon^2)$. Also folgt: $f(\varepsilon) = \mathcal{L} \left(x^*(t), \frac{dx^*}{dt^*}(t), t^*(t) \right) \cdot \frac{dt^*}{dt} = \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \cdot 1 + \frac{d}{d\varepsilon} \left(\mathcal{L} \left(x^*(t), \frac{dx^*}{dt^*}(t), t^*(t) \right) \cdot \frac{dt^*}{dt} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon$. Daraus folgt also, dass die Koordinatentransformation genau dann symmetrisch (also $S = S^*$) ist, wenn $\frac{d}{d\varepsilon} \left(\mathcal{L} \left(x^*(t), \frac{dx^*}{dt^*}(t), t^*(t) \right) \cdot \frac{dt^*}{dt} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$ (Invarianzbedingung) gilt. Man rechnet nun: $\frac{dt^*}{dt} = 1 + \varepsilon \cdot \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{1 + \varepsilon \cdot \frac{d\varphi}{dt}} \approx 1 - \varepsilon \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, denn: $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$, $x \in (-1, 1)$. Es folgt: $\frac{dx_i^*}{dt^*} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dt}{dt^*} = \left(\frac{dx_i}{dt} + \varepsilon \cdot \frac{d\psi_i}{dt} \right)$. $\left(1 - \varepsilon \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{dx_i}{dt} + \varepsilon \cdot \frac{d\psi_i}{dt} - \varepsilon \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \varepsilon^2 \cdot \frac{d\psi_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \varepsilon \cdot \frac{d\psi_i}{dt} - \varepsilon \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + O(\varepsilon^2) \approx \frac{dx_i}{dt} + \varepsilon \cdot \frac{d\psi_i}{dt} - \varepsilon \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$. Diese Ergebnisse setzt man nun in die Invarianzbedingung ein:

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\mathcal{L} \left(x_i + \varepsilon \cdot \psi_i, \frac{dx_i}{dt} + \varepsilon \cdot \frac{d\psi_i}{dt} - \varepsilon \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, t + \varepsilon \cdot \varphi \right) \right) \Big|_{\varepsilon=0}$$

\Leftrightarrow

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\mathcal{L} \left(x_i + \varepsilon \cdot \psi_i, \frac{dx_i}{dt} + \varepsilon \cdot \frac{d\psi_i}{dt} - \varepsilon \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, t + \varepsilon \cdot \varphi \right) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \cdot 1 + \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

\Leftrightarrow

$$0 = \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x_i, \dot{x}_i, t) \cdot \psi_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(x_i, \dot{x}_i, t) \cdot \left(\frac{d\psi_i}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(x_i, \dot{x}_i, t) \cdot \varphi \right) + \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

\Leftrightarrow

$$0 = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x_i, \dot{x}_i, t) \cdot \psi_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(x_i, \dot{x}_i, t) \cdot \frac{d\psi_i}{dt} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(x_i, \dot{x}_i, t) \left(\frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(x_i, \dot{x}_i, t) \cdot \varphi + \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Eine kurze Unterbrechung; es gilt: $\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i \right) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \frac{d\psi_i}{dt} + \sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \frac{d\psi_i}{dt} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \cdot \psi_i$ wegen der gültigen Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$. Also gilt weiter:

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i \right) + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \cdot \varphi$$

Unterbrechung: $\frac{d}{dt} \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \ddot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \dot{x}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \ddot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \dot{x}_i \right)$, wieder wegen der Euler-Lagrange-Gleichungen. Weiter:

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i \right) + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{d}{dt} \mathcal{L} - \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \dot{x}_i \right) \right) \cdot \varphi$$

\Leftrightarrow

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i \right) + \frac{d}{dt} \left[\left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \dot{x}_i \right) \cdot \varphi \right]$$

\Leftrightarrow

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \dot{x}_i \right) \cdot \varphi \right)$$

Es wurde also eine Erhaltungsgröße $\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \dot{x}_i \right) \cdot \varphi = \text{konst. hergeleitet.}$ □

Korollar. Aus dem Noether-Theorem oben folgt:

1. Zeittranslations-Invarianz \Rightarrow Energieerhaltung
2. Räumliche Translations-Invarianz \Rightarrow Impulserhaltung
3. Drehinvarianz \Rightarrow Drehimpulserhaltung

Beweis. Zu 1.: Sei $\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x(t) \cdot e_x + y(t) \cdot e_y + z(t) \cdot e_z$. Dann ist

$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$. Sei weiter $x^* = x$, $y^* = y$ und $z^* = z$, aber $t^* = t + \varepsilon$ (Zeittranslation). Also gilt

$\psi_i = 0$, aber $\varphi = 1$. Dann gilt: $\mathcal{L} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \dot{x}_i = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot \dot{x} \cdot \dot{x} + 2 \cdot \dot{y} \cdot \dot{y} + 2 \cdot \dot{z} \cdot \dot{z}) = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) = -E_{kin} - E_{pot} = -(E_{kin} + E_{pot}) = -E$ (negative Gesamtenergie) ist die Erhaltungsgröße.

Nun zu 2.: Sei diesmal also $x^* = x + \varepsilon$ (Räumliche Translation in x -Richtung), mit $y^* = y$ und $z^* = z$ sowie $t^* = t$, also $\psi_1 = 1$ sowie $\psi_2 = \psi_3 = 0$, und $\varphi = 0$. Damit erhält man nach dem Theorem oben, dass $\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i = m \cdot \dot{x}$ (Impuls in

x -Richtung) eine Erhaltungsgröße ist. Jetzt kommt 3.: Man wählt hier Zylinderkoordinaten: Es gilt zunächst $e_r = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$,

$e_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. In Zylinderkoordinaten ist ein Punkt schon dargestellt durch $\vec{x}(t) = r(t) \cdot e_r(t) + h(t) \cdot e_h(t)$.

Also folgt $\dot{\vec{x}} = \dot{r} \cdot e_r + r \cdot \dot{e}_r + \dot{h} \cdot e_h + h \cdot \dot{e}_h = \dot{r} \cdot e_r + r \cdot \dot{\phi} \cdot e_\phi + \dot{h} \cdot e_h + h \cdot 0 = \dot{r} \cdot e_r + r \cdot \dot{\phi} \cdot e_\phi + \dot{h} \cdot e_h$, also gilt dann: $\dot{x}^2 = \dot{r}^2 \cdot (e_r \cdot e_r) + r^2 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot (e_\phi \cdot e_\phi) + \dot{h}^2 \cdot (e_h \cdot e_h) = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\phi}^2 + \dot{h}^2$. Dann ist also $\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \mathcal{L}(r, \phi, h, t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\phi}^2 + \dot{h}^2) - V(r, \phi, h)$. Sei nun also $r^* = r$, $\phi^* = \phi + \varepsilon$ (Drehung um z -Achse) und $h^* = h$, sowie: $t^* = t$. Also gilt nach dem Theorem von Noether mit $\psi_1 = \psi_3 = 0$, aber $\psi_2 = 1$, und noch $\varphi = 0$, dass $\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i = m \cdot r^2 \cdot \dot{\phi}$ (Drehimpuls) eine Erhaltungsgröße ist. \square

Korollar (Schwerpunktsatz). *Der Schwerpunkt eines n -Teilchensystems bewegt sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit. Der Beweis geht dann folgendermaßen:*

Beweis. Für die Lagrangefunktion gilt also $\mathcal{L}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \dot{x}_i^2 - V(\dots, |\vec{x}_i - \vec{x}_j|, \dots) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(\dots, |\vec{x}_i - \vec{x}_j|, \dots)$. Sei dann $x_i^* = x_i + \varepsilon$ und $y_i^* = y_i$ sowie $z_i^* = z_i$ als auch $t^* = t$. Also gilt $\psi_{x_i} = 1$, $\psi_{y_i} = 0$, $\psi_{z_i} = 0$ und $\varphi = 0$. Nach dem Noether-Theorem folgt daraus, dass $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_{x_i} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{x}_i = \text{konst.}$ (Gesamtimpuls in x -Richtung) eine Erhaltungsgröße ist. Genauso zeigt man, dass $\sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{y}_i = \text{konst.}$ und $\sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{z}_i = \text{konst.}$ gelten. Sei $M := \sum_{i=1}^n m_i$ die Gesamtmasse (eine konstante Größe), dann ist $\vec{S} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{x}_i$ der Schwerpunkt des n -Teilchensystems. Dann folgt:

$$\frac{d}{dt} \vec{S} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{\vec{x}}_i = \frac{1}{M} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{x}_i \\ \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{y}_i \\ \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\text{konst.}_1}{M} \\ \frac{\text{konst.}_2}{M} \\ \frac{\text{konst.}_3}{M} \end{pmatrix} =: \vec{v}_{\text{konst.}}$$

Das ist also die gewünschte Behauptung. Das war es! \square

Das Euler-Produkt

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt die Formel $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$ für $s \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 1\}$.

Beweis. Zunächst wird die absolute Konvergenz der Zetafunktion gezeigt. Es gilt mit $s = a + b \cdot i$:

$$|n^{-s}| = |e^{(-a-b \cdot i) \cdot \ln(n)}| = |e^{-a \cdot \ln(n)}| \cdot |e^{-b \cdot i \cdot \ln(n)}| = |e^{-a \cdot \ln(n)}| \cdot |\cos(-b \cdot \ln(n)) + i \cdot \sin(-b \cdot \ln(n))|$$

Wegen $|\cos(-b \cdot \ln(n)) + i \cdot \sin(-b \cdot \ln(n))| = \sqrt{\cos(-b \cdot \ln(n))^2 + \sin(-b \cdot \ln(n))^2} = 1$ folgt also

$$|n^{-s}| = |e^{-a \cdot \ln(n)}| = n^{-a}$$

Nach dem Cauchy'schen Verdichtungskriterium konvergiert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ konvergiert.

Damit folgt dann also: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}|$ konvergiert genau dann, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot (2^k)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-a})^k$$

konvergiert. Nun konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-a})^k$ als geometrische Reihe genau dann, wenn $2^{1-a} < 1 \Leftrightarrow \log_2(2^{1-a}) < \log_2(1) \Leftrightarrow 1-a < 0 \Leftrightarrow a > 1$ gilt. Weil nun $\zeta(s)$ für $\Re(s) = a > 1$ definiert ist, folgt, dass die Reihe auf dem Definitonsbereich auch konvergiert, denn aus absoluter Konvergenz der Reihe folgt die normale Konvergenz, weil die absolute Reihe eine konvergente Majorante der normalen Reihe darstellt. Sei nun $\mathcal{P}_n := \{p_1, \dots, p_n\}$ die Menge der ersten n Primzahlen und $\mathbb{N}(\mathcal{P}_n) := \{N \in \mathbb{N} : N = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n} \ (k_v \geq 0)\}$. Es wird behauptet:

$$\sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_n)} \frac{1}{N^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Das wird mit vollständiger Induktion gezeigt: I.A.: Also $n = 1$:

$$\prod_{p \in \mathcal{P}_1} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-(p_1)^{-s}} = \sum_{v=0}^{\infty} ((p_1)^{-s})^v = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^v)^s} = \sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_1)} \frac{1}{N^s}$$

Jetzt kommt der Induktionsschluss (I.S.: $n \Rightarrow n+1$):

$$\prod_{p \in \mathcal{P}_{n+1}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1-p^{-s}} \right) \cdot \frac{1}{1-(p_{n+1})^{-s}} \stackrel{I.V.}{=} \left(\sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_n)} \frac{1}{N^s} \right) \cdot \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(p_{n+1}^v)^s} \right) = \sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_{n+1})} \frac{1}{N^s}$$

Wegen absoluter Konvergenz sind die gliedweisen Multiplikationen und die Umordnungen erlaubt. Es gilt also $\sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_n)} \frac{1}{N^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1-p^{-s}}$. Jetzt lässt man auf beiden Seiten n gegen ∞ laufen. Nun gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_n)} \frac{1}{N^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Weil diese Reihe, wie schon nachgewiesen, konvergiert, folgt also die Behauptung des Satzes. \square

Das Gauß-Integral

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Beweis. $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ heißt Gammafunktion. Es wird $\Gamma(\frac{1}{2})$ auf zwei Arten berechnet:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt \\ &= \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{\infty}} (x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x^2} \cdot 2x dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2x dx \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Als nächstes wird die Gauß'sche Produktdarstellung der Gammafunktion hergeleitet:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

Nun wird mehrfach partiell integriert:

$$\begin{aligned}
\int_0^n t^{x-1} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt &= \left[\frac{t^x}{x} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right]_0^n - \int_0^n \frac{t^x}{x} \cdot n \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) dt \\
&= 0 + \frac{1}{x} \cdot \int_0^n t^x \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left(\left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \right]_0^n - \int_0^n \frac{t^{x+1}}{x+1} \cdot (n-1) \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) dt \right) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left(0 + \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^n \frac{t^{x+1}}{x+1} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} dt \right) \\
&= \frac{1}{x \cdot (x+1)} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^n t^{x+1} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} dt \\
&= \frac{1}{x \cdot (x+1)} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \left(\left[\frac{t^{x+2}}{x+2} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} \right]_0^n - \int_0^n \frac{t^{x+2}}{x+2} \cdot (n-2) \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-3} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) dt \right) \\
&= \frac{1}{x \cdot (x+1)} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \left(0 + \frac{n-2}{n} \cdot \int_0^n \frac{t^{x+2}}{x+2} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-3} dt \right) \\
&= \frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n^2} \cdot \int_0^n t^{x+2} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-3} dt
\end{aligned}$$

Nach weiteren $n-3$ partiellen Integrationen hat man:

$$\begin{aligned}
\int_0^n t^{x-1} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt &= \frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+(n-1))} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1}{n^{n-1}} \cdot \int_0^n t^{x+(n-1)} dt \\
&= \frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \left[\frac{t^{x+n}}{x+n} \right]_0^n \\
&= \frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \frac{n^{x+n}}{x+n} \\
&= \frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} \cdot \frac{n!}{n^{n-1}} \cdot n^{x+n-1} \\
&= \frac{n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst wurde also gezeigt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)}$$

Mit dieser Darstellung kann man nun $\Gamma(\frac{1}{2})$ auf andere Weise bestimmen:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}+1) \cdot (\frac{1}{2}+2) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}+n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2n+1}{2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{(n!)^2 \cdot (2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1))^2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{(1^2 \cdot 2^2) \cdot (2^2 \cdot 2^2) \cdot (3^2 \cdot 2^2) \cdot \dots \cdot (n^2 \cdot 2^2)}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n+1)^2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^n \frac{2i \cdot 2i}{(2i-1) \cdot (2i+1)}} \\
&= 2 \cdot \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1}} \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^{\infty} \frac{(2i)^2}{(2i-1) \cdot (2i+1)}} \\
&= 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Darstellungen für $\Gamma(\frac{1}{2})$ folgt die Behauptung. \square

Es geht aber auch sehr viel kürzer:

Beweis.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \left(4 \cdot \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \cdot \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \right)^{\frac{1}{2}} = \left(4 \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv \right)^{\frac{1}{2}}$$

Und das ist dann gleich zu:

$$\left(4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-((r \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\varphi))^2)} \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} dr d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r dr d\varphi \right)^{\frac{1}{2}}$$

Und weiter gleich zu:

$$\left(-2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot (-2 \cdot r) dr d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(-2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{-\infty} e^t dt d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^0 e^t dt d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [e^t]_{-\infty}^0 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}}$$

Also folgt daraus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \left(2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 \cdot [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

□

Das Wallis-Produkt

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$.

Beweis. Man untersucht die Folge $i_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^k dx$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Je zwei Glieder von i_k sind rekursiv verknüpft durch $i_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} \cdot i_k$ mit den Anfangsbedingungen $i_0 = \frac{\pi}{2}$ und $i_1 = 1$. Man erhält dies durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} i_{k+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{k+2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{k+1} \cdot \sin(x) dx \\ &= \left[\sin(x)^{k+1} \cdot (-\cos(x)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((k+1) \cdot \sin(x)^k \cdot \cos(x)) \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= (k+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^k \cdot \cos(x)^2 dx \\ &= (k+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^k \cdot (1 - \sin(x)^2) dx \\ &= (k+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^k - \sin(x)^{k+2} dx \\ &= (k+1) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^k dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{k+2} dx \right) \\ &= (k+1) \cdot (i_k - i_{k+2}) \end{aligned}$$

Eine Umordnung des Resultates $i_{k+2} = (k+1) \cdot (i_k - i_{k+2})$ ergibt $i_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} \cdot i_k$. Nun kann man die Quotientenfolge $\frac{i_k}{i_{k+1}}$ abschätzen durch $1 \leq \frac{i_k}{i_{k+1}} \leq 1 + \frac{1}{k+1}$. Das ist gleichbedeutend mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{i_k}{i_{k+1}} = 1$. Denn sei $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, dann gilt $0 \leq \sin(x) \leq 1$. Also folgt $\sin(x)^{k+1} \leq \sin(x)^k$ sowie $\sin(x)^{k+2} \leq \sin(x)^{k+1}$ und daraus $1 \leq \frac{i_k}{i_{k+1}}$ und $\frac{i_k}{i_{k+1}} \leq \frac{i_k}{i_{k+2}}$. Wegen der Rekursionsformel gilt $\frac{i_k}{i_{k+2}} = \frac{k+2}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1}$. Zusammenfassend hat man also $1 \leq \frac{i_k}{i_{k+1}} \leq \frac{i_k}{i_{k+2}} = 1 + \frac{1}{k+1}$. Es gilt also tatsächlich $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{i_k}{i_{k+1}} = 1$. Es wird nun die Wallis-Folge definiert: $w_k := \frac{i_{2k}}{i_{2k+1}}$. Nun gilt:

$$\frac{w_k}{w_{k-1}} = w_k \cdot (w_{k-1})^{-1} = \frac{i_{2k}}{i_{2k+1}} \cdot \frac{i_{2(k-1)+1}}{i_{2(k-1)}} = \frac{i_{2k}}{i_{2k+1}} \cdot \frac{i_{2k-1}}{i_{2k-2}} = \frac{i_{2k-1}}{i_{2k+1}} \cdot \frac{i_{2k}}{i_{2k-2}} = \left(\frac{i_{2k+1}}{i_{2k-2}} \right)^{-1} \cdot \frac{i_{2k}}{i_{2k-2}} = \frac{(2k-1)+2}{(2k-1)+1} \cdot \frac{(2k-2)+1}{(2k-2)+2}$$

Also gilt $\frac{w_k}{w_{k-1}} = \frac{(2k+1) \cdot (2k-1)}{2k \cdot 2k} = \frac{(2k-1) \cdot (2k+1)}{(2k)^2} =: r_k$. Die Rekursionsgleichung $w_k = w_{k-1} \cdot r_k$ wird nun näher betrachtet:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 \cdot r_1 \\ w_2 &= w_1 \cdot r_2 = w_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \\ w_3 &= w_2 \cdot r_3 = w_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \\ &\vdots \\ w_k &= w_0 \cdot \prod_{n=1}^k r_n \end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{w_k} = \frac{1}{w_0} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (r_n)^{-1}$ mit $w_0 = \frac{i_0}{i_1} = \frac{\pi}{2}$. Die Erkenntnis über den Quotienten $\frac{i_k}{i_{k+1}}$ liefert $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{i_{2k}}{i_{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{i_k}{i_{k+1}} = 1$. Daraus folgt wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{w_k} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} w_k}$:

$$1 = \frac{2}{\pi} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Und das ist die Behauptung des Satzes. □

Die divergente harmonische Reihe

[Zurück zur Liste]

Satz (Divergenz der harmonischen Reihe). *Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$.*

Beweis. Zunächst gilt $\ln(e^t) = t \Rightarrow \ln'(e^t) \cdot e^t = 1 \Rightarrow \ln'(e^t) = \frac{1}{e^t} \Rightarrow \ln'(e^{\ln(x)}) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} \Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{x}$. Daraus folgt dann $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Weil $\frac{1}{x}$ wegen $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ für alle $x \in [1, \infty)$ also streng monoton fallend ist, folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ auf $[n, n+1]$ gilt $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$. Also folgt damit: $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Nun ist aber $\ln(x)$ auf $[1, \infty)$ stetig und wegen $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ streng monoton steigend. Des Weiteren ist $\ln(x)$ nach oben unbeschränkt, denn wäre $\ln(x) \leq C$ für alle $x \in [1, \infty)$, dann gibt es aber ein $x' \in [1, \infty)$ mit $x' = e^{C+1}$, so dass also folgt $\ln(x') = \ln(e^{C+1}) = C+1 > C$, Widerspruch. Also ist $\ln(x)$ nach oben unbeschränkt. Zusammengefasst ist also bewiesen, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$. Wegen $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hat man für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ also eine divergente Minorante gefunden, also gilt die Behauptung des Satzes. □

Satz (Euler-Mascheroni-Konstante). *Es gibt ein $\gamma \in [0, 1]$ mit $\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \right)$.*

Beweis. Weil $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ für alle $x \in [1, \infty)$ gilt, ist also $\frac{1}{x}$ dort streng monoton fallend. Daraus folgt dann, dass für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ gilt: Auf $[n, n+1]$ ist $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$. Daraus folgt dann also: $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n} \leq \int_1^N \frac{1}{x} dx = \ln(N) \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$ und daraus folgt dann $\frac{1}{N} \leq \ln(N) - \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} - \ln(N) \leq -\frac{1}{N} \Rightarrow -1 + \left(1 + \frac{1}{N}\right) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \leq -\frac{1}{N} + \left(1 + \frac{1}{N}\right)$, also gilt $\frac{1}{N} \leq \gamma_N := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \leq 1$. Es folgt daraus, dass γ_N für $N \rightarrow \infty$ nach unten durch $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0$ beschränkt ist. Nun gilt: $\gamma_{N-1} - \gamma_N = \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \ln(N-1) \right) - \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \right) = -\frac{1}{N} - \ln(N-1) + \ln(N) = \int_{N-1}^N \frac{1}{x} dx - \frac{1}{N} = \int_{N-1}^N \frac{1}{x} - \frac{1}{N} dx > 0$, also gilt damit $\gamma_{N-1} > \gamma_N$ für alle $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, d.h. γ_N ist monoton fallend. Weil γ_N nach unten durch 0 beschränkt ist und monoton fallend ist, folgt, dass γ_N für $N \rightarrow \infty$ konvergiert. D.h. dann, dass der folgende Limes existiert: $\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \right)$, wobei gilt: $\gamma \in [0, 1]$. Also: Fertig! □

Satz (Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe). *Obwohl $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ gilt, ist aber:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln(2)$$

Beweis. Zu Beginn gilt erstmal folgendes:

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - 2 \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

Aus dem vorherigen Satz folgt, dass $a_N := \left(\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \ln(2N) \right) - \gamma$ und $a'_N := \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \right) - \gamma$ Nullfolgen sind. Daraus folgt dann: $\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} = \ln(2N) + \gamma + a_N$ und $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + a'_N$. Also:

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = (\ln(2N) + \gamma + a_N) - (\ln(N) + \gamma + a'_N) = \ln(2N) - \ln(N) + (a_N - a'_N) = \ln\left(\frac{2N}{N}\right) + (a_N - a'_N)$$

Man hat also schließlich:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{2N}{N}\right) + \lim_{N \rightarrow \infty} (a_N - a'_N) = \ln(2) + \lim_{N \rightarrow \infty} a_N - \lim_{N \rightarrow \infty} a'_N = \ln(2) + 0 - 0 = \ln(2)$$

Damit ist also bewiesen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \ln(2)$ gilt. Ende. \square

Der Riemann'sche Umordnungssatz

[Zurück zur Liste]

Satz (Riemann'scher Umordnungssatz). *Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so findet man zu jeder beliebigen Zahl $s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ eine Umordnung $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ der Glieder mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)} = s$.*

Beweis. Sei zunächst $s \notin \{-\infty, \infty\}$. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$. O.B.d.A. kann man annehmen, dass $a_k \neq 0$ für alle k gilt, denn das Streichen der Nullen in $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ändert nichts an der Konvergenz und den Grenzwert dieser Reihen. Sei nun:

$$a_k^+ := \frac{|a_k| + a_k}{2} = \max(a_k, 0) \text{ und } a_k^- := \frac{|a_k| - a_k}{2} = \max(-a_k, 0)$$

Es ist ersichtlich, dass die Zahlen a_k^+, a_k^- alle nichtnegativ sind, und es gilt dann: $a_k \stackrel{*1}{=} a_k^+ - a_k^-$ und $|a_k| \stackrel{*2}{=} a_k^+ + a_k^-$. Wäre eine der beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ konvergent, so würde aus $*_1$ folgen, dass auch die andere konvergiert. Aus $*_2$ würde dann folgen, dass auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, Widerspruch zur Voraussetzung. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ sind also beide divergent. Nun:

$$\begin{aligned} \{+p_k\} &:= \text{Teilfolge aller positiven Glieder von } \{a_k\} \text{ (entsteht durch Streichung der Nullen in } \{a_k^+\}) \\ \{-q_k\} &:= \text{Teilfolge aller negativen Glieder von } \{a_k\} \text{ (entsteht durch Streichung der Nullen in } \{a_k^-\}) \end{aligned}$$

Also sind auch die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$ divergent. Da $a_k \neq 0$ für alle k gilt, tritt jedes Glied der Folge $\{a_k\}$ in nur genau einer der beiden Teilstufen $\{p_k\}$ und $\{-q_k\}$ auf. Daraus folgt:

Es existiert ein kleinster Index n_0 mit $\sum_{k=0}^{n_0} p_k > s$,
dann ein kleinster Index n_1 mit $\sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} (-q_k) < s$,
und wieder ein kleinster Index n_2 mit $\sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} (-q_k) + \sum_{k=n_0+1}^{n_2} p_k > s$,
und dann wieder ein kleinster Index n_3 mit $\sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} (-q_k) + \sum_{k=n_0+1}^{n_2} p_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} (-p_k) < s$, usw.

Die so entstandene Reihe

$$p_0 + \dots + p_{n_0} + (-q_0) + \dots + (-q_{n_1}) + p_{n_0+1} + \dots + p_{n_2} + (-q_{n_1+1}) + \dots + (-q_{n_3}) + \dots$$

ist offensichtlich eine Umordnung der Ausgangsreihe und wird mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$ bezeichnet. Mithilfe der Minimaleigenschaft der Indizes $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$ kann man die Differenz zwischen s und den Teilsummen betragsmäßig durch $p_{n_0}, q_{n_1}, p_{n_2}, q_{n_3}, \dots$ nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} |s - [p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n_0}]| &\leq p_{n_0} \\ |s - [p_0 + \dots + p_{n_0} + (-q_0) + \dots + (-q_{n_1})]| &\leq q_{n_1} \\ |s - [p_0 + \dots + p_{n_0} + (-q_0) + \dots + (-q_{n_1}) + p_{n_0+1} + \dots + p_{n_2}]| &\leq p_{n_2} \\ |s - [p_0 + \dots + p_{n_0} + (-q_0) + \dots + (-q_{n_1}) + p_{n_0+1} + \dots + p_{n_2} + (-q_{n_1+1}) + \dots + (-q_{n_3})]| &\leq q_{n_3} \end{aligned}$$

Das sieht man so: $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n_0} > s \geq p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n_0-1}$, also: $0 > s - [p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n_0}] \geq -p_{n_0}$, also $0 < [p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n_0}] - s \leq p_{n_0}$. Bei den anderen zeigt man das analog. Da aber die Folgen $(q_{n_1}, q_{n_3}, q_{n_5}, \dots)$ und

$(p_{n_0}, p_{n_2}, p_{n_4}, \dots)$ aufgrund der notwendigen Bedingung für die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gegen 0 streben, folgt $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)} = s$. Sei nun $s \in \{-\infty, \infty\}$. Man wähle

$$\begin{aligned} m_1 \text{ so groß, dass } p_1 + p_2 + \dots + p_{m_1} &> 1 + q_1, \\ \text{dann } m_2 \text{ so, dass } p_1 + p_2 + \dots + p_{m_1} + \dots + p_{m_2} &> 2 + q_1 + q_2, \\ \text{und allgemein: } p_1 + p_2 + \dots + p_{m_v} &> v + q_1 + q_2 + \dots + q_v \end{aligned}$$

Dann gilt also:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{m_1} - q_1 + p_{m_1+1} + \dots + p_{m_2} - q_2 + \dots + p_{m_v} - q_v > v$$

Die Partialsummen dieser umgeordneten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$ sind unbeschränkt, also divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n(k)}$ gegen $+\infty = s$. Analog kann man eine Umordnung konstruieren, dass die umgeordnete Reihe gegen $-\infty = s$ divergiert. \square

Der Fundamentalsatz der Algebra

[Zurück zur Liste]

Satz. Jedes nicht konstante Polynom besitzt im Bereich der komplexen Zahlen mindestens eine Nullstelle.

Beweis. Ein nicht-konstantes komplexes Polynom $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ lässt sich darstellen in der Form $P(z) = Q(z) \cdot z + a_0$ mit $a_0 \in \mathbb{C}$, $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$. Nimmt man nun an, $P(z)$ sei ohne Nullstelle, so lässt sich für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stets schreiben:

$$\frac{1}{z} = \frac{P(z)}{z \cdot P(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{z \cdot P(z)}$$

Nun bildet man für jedes $r \in \mathbb{N}$ das Wegintegral der auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gebildeten Kehrfunktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ über den Kreislinienweg $\gamma_r(t) = r \cdot e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) und erhält:

$$2\pi i = \int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_r} \frac{Q(z)}{P(z)} dz + a_0 \cdot \int_{\gamma_r} \frac{1}{z \cdot P(z)} dz$$

Aufgrund der angenommenen Nullstellenfreiheit von $P(z)$ ist $z \mapsto \frac{Q(z)}{P(z)}$ holomorph, womit sich infolge des Cauchy'schen Integralsatzes weiter ergibt:

$$2\pi i = 0 + a_0 \cdot \int_{\gamma_r} \frac{1}{z \cdot P(z)} dz$$

und daraus:

$$2\pi \leq |a_0| \cdot L(\gamma_r) \cdot \max_{|z|=r} \frac{1}{|z \cdot P(z)|} = |a_0| \cdot 2\pi r \cdot \max_{|z|=r} \frac{1}{|z| \cdot |P(z)|} = |a_0| \cdot 2\pi \cdot \max_{|z|=r} \frac{1}{|P(z)|}$$

Dies gilt für beliebige $r \in \mathbb{N}$. Nun ist jedoch $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ und damit folgt aus der letzten Ungleichung unmittelbar $2\pi \leq 0$, was sicher falsch ist. Damit ist die angenommene Nullstellenfreiheit von $P(z)$ zum Widerspruch geführt und $P(z)$ muss eine Nullstelle haben. Also ist man hier fertig! \square

Der RSA-Algorithmus

[Zurück zur Liste]

Satz (Euler-Fermat). Unter der Bedingung $\text{ggT}(a, n) = 1$ gilt $a^{\varphi(n)} \pmod{n} = 1$.

Beweis. Sei $\{r_1, \dots, r_{\varphi(n)}\}$ die Menge der Zahlen (kleiner als n), die teilerfremd sind zu n . Diese Zahlen sind multiplikativ modulo n invertierbar, denn für alle $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $x \cdot r_i \pmod{n} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Diese sind für diese x paarweise verschieden, denn ansonsten gelte für $x \neq x'$: $x \cdot r_i \pmod{n} = x' \cdot r_i \pmod{n} \Leftrightarrow (x - x') \cdot r_i \pmod{n} = 0$, also folgt $n \mid x - x'$ wegen $\text{ggT}(r_i, n) = 1$. Das ist aber ein Widerspruch, weil $|x - x'| < n$ gilt. Folglich gibt es also ein $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ so, dass gilt $x \cdot r_i \pmod{n} = 1$, also sind die r_i invertierbar. Für jedes a mit $\text{ggT}(a, n) = 1$ ist $r \mapsto a \cdot r$ eine Permutation von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times := \{r_1, \dots, r_{\varphi(n)}\}$, denn wegen $\text{ggT}(a, n) = \text{ggT}(r_i, n) = 1$ ist auch $a \cdot r_i$ teilerfremd zu n , d.h. $a \cdot r_i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, also ist die Abbildung schon mal wohldefiniert. Sie ist auch injektiv: Ist $a \cdot r \pmod{n} = a \cdot r' \pmod{n}$, dann gibt es ein ganze Zahl k so, dass gilt $a \cdot (r - r') = k \cdot n$. Wegen $\text{ggT}(a, n) = 1$ folgt $n \mid r - r'$, also $r - r' \pmod{n} = 0 \Leftrightarrow r \pmod{n} = r' \pmod{n}$. Aus der Injektivität von $r \mapsto a \cdot r$ folgt also $|a \cdot (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| \geq |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$. Außerdem gilt wegen $a \cdot r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ für $r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ auch $|a \cdot (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| \leq |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$, folglich ist die Abbildung bijektiv. Da die Multiplikation kommutativ ist, folgt:

$$\left(\prod_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \right) \pmod{n} = \left(\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (a \cdot r_i) \right) \pmod{n} = \left(\left(\prod_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \right) \cdot a^{\varphi(n)} \right) \pmod{n}$$

Aufgrund der Invertierbarkeit der r_i modulo n , folgt daraus $1 = a^{\varphi(n)} \pmod{n}$. \square

Satz. Zunächst hat man einen Klartext m , der durch Potenzieren mit einem öffentlichen Schlüssel c verschlüsselt wird. Potenziert man diesen verschlüsselten Text m^c mit dem privaten Schlüssel d , so erhält man wieder den Klartext m . Der Algorithmus arbeitet also korrekt. Dabei gelten folgende Voraussetzungen: $n = p \cdot q$ mit $p, q \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und d sei so gewählt, dass $c \cdot d \bmod \varphi(n) = 1$ ist, wobei $c, d \in \mathbb{Z}/\varphi(n)\mathbb{Z}$ gilt.

Beweis. Es gilt $(m^c)^d \bmod p - m \bmod p = 0 \Leftrightarrow (m^{c \cdot d} - m) \bmod p = 0$, denn es gilt $c \cdot d \bmod \varphi(n) = 1$, also gibt es eine ganze Zahl k so, dass $c \cdot d = 1 + k \cdot \varphi(n)$ gilt. Nun wird der Satz von Euler-Fermat angewandt. Dafür müssen aber m und p teilerfremd sein. Sind sie es nicht, dann gilt $p \mid m$, weil $p \in \mathbb{P}$ ist, also folgt $m \bmod p = 0$. Wenn p ein Teiler von m ist, dann auch von $m^{c \cdot d}$. In diesem Fall gilt also $(m^{c \cdot d} - m) \bmod p = 0$. Sei nun also $\text{ggT}(m, p) = 1$. Dann gilt wegen des Satzes oben $m^{\varphi(p)} \bmod p = 1$. Für $\varphi(p) = p - 1$ ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} m^{c \cdot d} \bmod p &= m^{1+k \cdot \varphi(n)} \bmod p \\ &= m \cdot m^{k \cdot \varphi(n)} \bmod p \\ &= m \cdot m^{k \cdot (p-1) \cdot (q-1)} \bmod p \\ &= m \cdot (m^{p-1})^{k \cdot (q-1)} \bmod p \\ &= (m \bmod p \cdot (m^{p-1})^{k \cdot (q-1)} \bmod p) \bmod p \\ &= (m \bmod p \cdot (m^{p-1} \bmod p)^{k \cdot (q-1)} \bmod p) \bmod p \\ &= (m \bmod p \cdot 1^{k \cdot (q-1)} \bmod p) \bmod p \\ &= m \bmod p \end{aligned}$$

Also auch in diesem Fall gilt $(m^{c \cdot d} - m) \bmod p = 0$. Ganz genauso zeigt man $(m^{c \cdot d} - m) \bmod q = 0$. Da die beiden Primzahlen p und q die Zahl $m^{c \cdot d} - m$ teilen, teilt auch ihr Produkt $n = p \cdot q$ diese Zahl. Es folgt dann $(m^{c \cdot d} - m) \bmod n = 0 \Leftrightarrow m^{c \cdot d} \bmod n = m \bmod n$, die Behauptung des Satzes. \square

Das Räuber-Beute-Modell

[Zurück zur Liste]

Definition. Unter einem Ersten Integral zu einem \mathcal{C}^1 -Vektorfeld v auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ versteht man eine \mathcal{C}^1 -Funktion $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die auf der Spur jeder Integralkurve einen konstanten Wert hat. Anders formuliert: Eine Funktion E derart, dass jede Integralkurve von v in einer Niveaumenge von E verläuft.

Lemma (Erstes Integral). Eine \mathcal{C}^1 -Funktion $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein Erstes Integral zum Vektorfeld v , wenn die Ableitung $\partial_v E$ längs v verschwindet. D.h. es gilt: $\partial_v E(x) = E'(x) \cdot v(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i E(x) \cdot v_i(x) = 0$.

Beweis. Sei $\partial_v E = 0$ und $\varphi : I \rightarrow \Omega$ eine Integralkurve. Dann gilt $E(\varphi(t))'(t) = E'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = E'(\varphi(t)) \cdot v(\varphi(t)) = 0$. E ist also konstant auf der Spur von φ . Sei umgekehrt E konstant auf jeder Integralkurve. Man wähle dann zu $x \in \Omega$ eine Integralkurve mit $\varphi(0) = x$. Da E auf der Spur von φ konstant ist, folgt $\partial_v E(x) = E(\varphi(t))' = 0$. Da $E(\varphi(t))$ konstant ist, reicht es $x = \varphi(0)$ zu setzen. \square

Lemma (Gronwall). Es sei $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall I mit $g \geq 0$. Für ein t_0 und alle $t \in I$ erfülle g die Ungleichung $g(t) \leq A \cdot \left| \int_{t_0}^t g(s) ds \right| + B$ mit Konstanten $A, B \geq 0$. Dann gilt für alle $t \in I$: $g(t) \leq B \cdot e^{A \cdot |t-t_0|}$.

Beweis. Man betrachtet wegen der Betragsstriche in der zu zeigenden Ungleichung $t > t_0$. Ist nämlich $t = t_0$, dann folgt aus der vorausgesetzten Ungleichung $g(t_0) \leq B$. Das beweist die Behauptung für $t = t_0$. Sei von nun an also $t > t_0$. Es ist nur etwas zu zeigen für t , wo $g(t) > 0$ ist für mindestens einem Wert auf $(t_0, t]$, dann ist wegen der Stetigkeit sogar eine ganze Umgebung um diesen Wert ungleich Null. Denn ist $g(t) = 0$ für alle Werte aus $(t_0, t]$, dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Bezeichne $G(t) := A \cdot \int_{t_0}^t g(s) ds + B$. Dann gilt $\dot{G}(t) = A \cdot g(t) \leq A \cdot G(t)$, also $\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} \leq A \Rightarrow \ln\left(\frac{G(t)}{G(t_0)}\right) = \ln(G(t)) - \ln(G(t_0)) = \int_{G(t_0)}^{G(t)} \frac{1}{x} dx = \int_{t_0}^t \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} dt \leq \int_{t_0}^t A dt = A \cdot (t - t_0)$, also folgt: $\frac{G(t)}{G(t_0)} \leq e^{A \cdot (t - t_0)}$, folglich: $G(t) \leq G(t_0) \cdot e^{A \cdot (t - t_0)} = B \cdot e^{A \cdot (t - t_0)}$, also folgt damit $g(t) \leq G(t) \leq B \cdot e^{A \cdot (t - t_0)}$, die Behauptung. \square

Satz (Eindeutigkeitssatz). Das dynamische System $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sei lokal Lipschitz-stetig bezüglich x . Stimmen zwei Integralkurven $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von F in einem Punkt $t_0 \in I$ überein, so gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ auf ganz I . F ist ein zeitabhängiges Vektorfeld, für das man ihre Integralkurven betrachtet. Unten braucht man nur die Aussage über Integralkurven zu einem nicht zeitabhängigen Vektorfeld. Dieser spezielle Fall ist mit diesem Satz bewiesen.

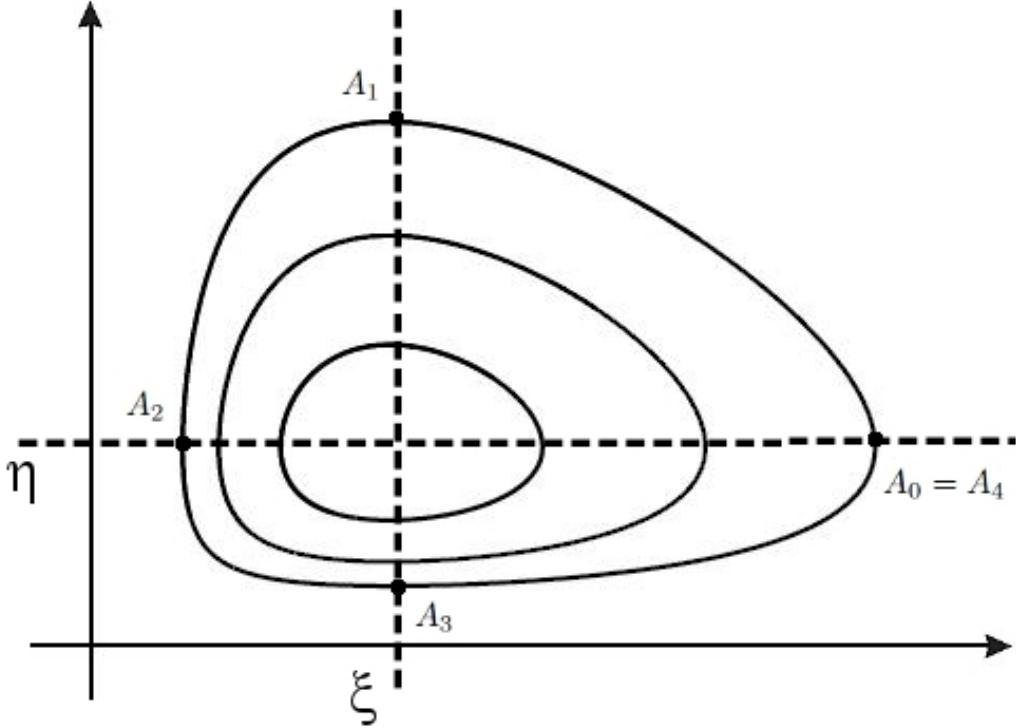
Beweis. Es sei $I' \subseteq I$ die Menge der Punkte $t \in I$ mit $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Aus Stetigkeitsgründen ist I' abgeschlossen in I , denn sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in I' mit $t_n \rightarrow t \in I$. Dann gilt $\psi(t_n) := \varphi_1(t_n) - \varphi_2(t_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von ψ gilt dann $\psi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(t_n) = 0$, also $t \in I'$, d.h. I' ist tatsächlich abgeschlossen in I . Man zeigt nun, dass I' auch offen in I ist. Sei $t_0 \in I'$ und $J \times V \subseteq U$ eine Umgebung von $(t_0, \varphi_1(t_0))$, in der F Lipschitz-stetig bezüglich x ist, etwa mit der Konstanten L . Es sei wieder $\psi := \varphi_2 - \varphi_1$. Es gilt $\psi(t_0) = 0$. Nach Voraussetzung gilt $\dot{\varphi}_{1,2}(t) = F(t, \varphi_{1,2}(t))$ mit $\varphi_{1,2}(t_0) = 0$, also: $\dot{\varphi}_{1,2}(t) = \varphi_{1,2}(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_{1,2}(s)) ds$, folglich: $\psi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \varphi_2(t_0) - \varphi_1(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_2(s)) - F(s, \varphi_1(s)) ds = \int_{t_0}^t F(s, \varphi_2(s)) - F(s, \varphi_1(s)) ds$. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit: $\|\psi(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t F(s, \varphi_2(s)) - F(s, \varphi_1(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|F(s, \varphi_2(s)) - F(s, \varphi_1(s))\| ds \right| \leq L \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)\| ds \right| = L \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\psi(s)\| ds \right|$. Nach dem Lemma von Gronwall ist $\psi = 0$ in $J \cap I$, also umfasst I' die Menge $J \cap I$. Es wurde also gezeigt: Für $t_0 \in I'$ existiert eine Umgebung J von t_0 mit $J \cap I \subseteq I'$, d.h. I' ist offen. Weil I' offen und abgeschlossen in I und ungleich der leeren Menge und I zusammenhängend ist, folgt $I = I'$. I zusammenhängend braucht man: Wäre $a < b < c < d$ und $I = [a, b] \cup [c, d]$ (I nicht zusammenhängend), dann wäre $I' = [a, b]$ nicht-leer, offen und abgeschlossen in I , aber $I' \neq I$. Ist also I zusammenhängend, dann gibt es keine nicht-leere, offene und abgeschlossene echte Teilmenge von I . \square

Satz. Für den Bestand von Räubern und Beutetieren in einem biologisch abgeschlossenen System gelten die folgenden gekoppelten Differentialgleichungen, die die Wechselwirkung zwischen den beiden Populationen modelliert:

$$\dot{x} = a(y) \cdot x \wedge \dot{y} = -b(x) \cdot y$$

Man sieht also, dass die Wachstumsraten $\frac{\dot{x}}{x}$ und $\frac{\dot{y}}{y}$ vom momentanen Potential des Partners abhängen. Unter gewissen Annahmen an a und b stellt sich heraus, dass die Lösungen φ des Systems in \mathbb{R}_+^2 verlaufen, wenn nur $\varphi(0) \in \mathbb{R}_+^2$ gilt. Die Lösung bleibt in diesem Quadranten und ist periodisch. Dieses Differentialgleichungssystem ist auch bekannt als die sogenannten Lotka-Volterra-Gleichungen.

Beweis. Man macht zunächst mal die Voraussetzung, dass $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton fallende C^1 -Funktionen sind mit je einer positiven Nullstelle: $a(\eta) = 0, b(\xi) = 0$ mit $\xi, \eta \in \mathbb{R}_+$. Die kritischen Punkte des Systems sind $(0, 0)$ und $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2$, denn, wenn man diese Werte als Lösung einsetzt, hat man $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$. Es sind also triviale Lösungen des Differentialgleichungssystems. Weitere Lösungen sind $(c \cdot e^{a(0) \cdot t}, 0)$ und $(0, c \cdot e^{-b(0) \cdot t})$ mit $c \in \mathbb{R}$, welche auf der x - bzw. y -Achse verlaufen. Diese beiden Lösungen sind Integralkurven zu dem nicht zeitabhängigen Vektorfeld $v(x, y) = (a(y) \cdot x, -b(x) \cdot y)$. Nach dem Eindeutigkeitssatz (s.o.) über Integralkurven gilt: Wenn eine Lösung φ des Differentialgleichungssystems mit $\varphi(0) \in \mathbb{R}_+^2$ die x - oder y -Achse schneiden würde, dann wäre φ gleich den Integralkurven auf den Achsen, was aber nicht sein kann, weil $\varphi(0) \in \mathbb{R}_+^2$ gilt. Fazit: Ist eine Integralkurve einmal im positiven Quadranten, dann bleibt sie da auch. Auf \mathbb{R}_+^2 gibt es ein Erstes Integral der Bauart $E(x, y) = F(x) + G(y)$. Nach dem Lemma (Erstes Integral) ist E genau dann ein Erstes Integral, wenn $\frac{\partial}{\partial x} E(x, y) \cdot v_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} E(x, y) \cdot v_2(x, y) = 0$, also $F'(x) \cdot (a(y) \cdot x) + G'(y) \cdot (-b(x) \cdot y) = 0$. Diese Bedingung wird erfüllt, falls $F'(x) = -\frac{b(x)}{x}$ und $G'(y) = -\frac{a(y)}{y}$ gilt. Daher definiert man: F sei die Stammfunktion zu $-\frac{b(x)}{x}$ auf \mathbb{R}_+ mit $F(\xi) = 0$ und G sei die Stammfunktion zu $-\frac{a(y)}{y}$ auf \mathbb{R}_+ mit $G(\eta) = 0$. Man sieht leicht, dass F in $(0, \xi]$ streng monoton fällt und in $[\xi, \infty)$ streng monoton wächst. G hat die analoge Eigenschaft mit η anstelle von ξ . Ferner gilt $F(u), G(u) \rightarrow \infty$ sowohl für $u \rightarrow 0$ als auch $u \rightarrow \infty$. Konsequenz: E hat in (ξ, η) ein isoliertes Minimum mit $E(\xi, \eta) = 0$. Jede Niveaumenge $E^{-1}(\alpha)$, $\alpha > 0$, ist eine kompakte Teilmenge des Quadranten \mathbb{R}_+^2 und enthält auf jeder der beiden Geraden $x = \xi$ und $y = \eta$ genau zwei Punkte (siehe Zeichnung unten).



Es sei nun $\varphi = (x, y)$ die maximale Integralkurve mit $\varphi(0) = A_0$, $A_0 \in E^{-1}(\alpha)$, $\alpha > 0$. φ verläuft dann in $E^{-1}(\alpha)$, also in einem Kompaktum (das Urbild kompakter Mengen unter stetigen Funktionen ist kompakt!), und ist daher für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, denn eine maximale Integralkurve endlicher Lebensdauer verlässt jedes Kompaktum. Beweis: Sei $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine maximale Integralkurve des bezüglich x lokal Lipschitz-stetigen dynamischen Systems $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ (zeitabhängiges Vektorfeld; man braucht hier nur nicht zeitabhängiges Vektorfeld!) Im Fall $\beta < \infty$ gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subseteq U$ in jedem Intervall (γ, β) ein $\tau \in (\gamma, \beta)$ mit $(\tau, \varphi(\tau)) \notin K$. Eine analoge Aussage gilt im Fall $\alpha > -\infty$. Angenommen, für alle $t \in (\gamma, \beta)$ gilt $(t, \varphi(t)) \in K$. Man behauptet dann zunächst, dass φ auf $(\alpha, \beta]$ stetig fortgesetzt werden kann. Dazu genügt es zu zeigen, dass φ auf $(\alpha, \beta]$ gleichmäßig stetig ist, was aber aus der für alle $t_1, t_2 \in (\gamma, \beta)$ gültigen Abschätzung $\|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\varphi}(s) ds \right\| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \|F(s, \varphi(s))\| \right| \leq \|F\|_K \cdot |t_2 - t_1|$ folgt. Die stetige Fortsetzung von φ auf $(\alpha, \beta]$ werde mit $\tilde{\varphi}$ bezeichnet. Es wird jetzt gezeigt, dass auch $\tilde{\varphi}$ eine Integralkurve von F ist. Da K abgeschlossen ist, liegt $(\beta, \tilde{\varphi}(\beta))$ in K , also in U . Ferner gilt für beliebige $t, t_0 \in (\alpha, \beta)$: $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, \tilde{\varphi}(s)) ds$ (*). Wegen der Stetigkeit von $\tilde{\varphi}$ auf $(\alpha, \beta]$ gilt (*) auch noch in $t = \beta$. Damit folgt, dass $\tilde{\varphi} : (\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Differentialgleichung $\dot{x} = F(t, x)$ löst im Widerspruch zur Maximalität der Lösung $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Man zeigt nun: Es gibt ein $t_1 \in (0, \infty)$ so, dass gilt: (i) x fällt streng monoton in $[0, t_1]$ und y wächst dort streng monoton; (ii) $\varphi(t_1) = A_1$. Beweis: Sei $t_1 := \sup\{t : x > \xi \text{ in ganz } [0, t]\}$. Nach der zweiten Differentialgleichung ist dann $\dot{y} > 0$ in $[0, t_1]$, y also streng monoton wachsend. Es folgt $y > y(0) = \eta$ in $(0, t_1)$. Nach der ersten Differentialgleichung ist somit $\dot{x} < 0$ in $(0, t_1)$, x also streng monoton fallend. Es wird nun gezeigt: $t_1 < \infty$. Dazu wähle man irgendein $\varepsilon \in (0, t_1)$. Für $t \in (\varepsilon, t_1)$ gilt dann $y(t) \geq y(\varepsilon) > \eta$ und damit $a(y(t)) \leq a(y(\varepsilon)) =: \lambda < 0$. Nach der ersten Differentialgleichung ergibt sich für diese t weiter $x(t) \leq e^{\lambda \cdot (t-\varepsilon)} \cdot x(\varepsilon)$. Denn: $\dot{x} = a(y) \cdot x \leq a(y(\varepsilon)) = \lambda \cdot x$. Hiernach und wegen $x(t) > \xi > 0$ für alle $t \in [0, t_1]$ muss $t_1 < \infty$ sein, denn wäre $t_1 = \infty$, dann folgte aus $x(t) \leq e^{\lambda \cdot (t-\varepsilon)} \cdot x(\varepsilon)$ wegen $\lambda < 0$, dass gilt $x(t_1) = 0$, im Widerspruch zu $x(t) > \xi > 0$ für alle $t \in [0, t_1]$. Aus der Definition von t_1 folgt nun sofort $x(t_1) = \xi$ und damit $\varphi(t_1) = A_1$. Wie eben, zeigt man die Existenz von Parameterstellen $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ mit $\varphi(t_k) = A_k$, $k = 2, 3, 4$. Insbesondere gilt mit $T = t_4$: $\varphi(T) = A_4 = A_0 = \varphi(0)$. Also ist der Satz bewiesen: Jede maximale Integralkurve φ mit $\varphi(0) \in \mathbb{R}_+^2$ verläuft für alle Zeit in diesem Quadranten und ist periodisch. Es zeigt sich, dass keine Räuber oder Beutetiere aussterben. Bevor man z.B. viele Räuber und viele Beutetiere hat, muss man bis dahin erst bestimmte andere Populationsverhältnisse durchlaufen. \square

Der Satz von Schröder-Bernstein

[Zurück zur Liste]

Satz. Seien A und B Mengen mit einer Injektion $f : A \rightarrow B$ und einer Injektion $g : B \rightarrow A$. Dann sind A und B bijektiv.

Beweis. Sei zunächst $C_0 := A \setminus g(B)$ und für $n \geq 0$: $C_{n+1} := g(f(C_n))$. Definiere dann $C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Für jedes $x \in A$ definiert

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in C \\ g^{-1}(x), & x \notin C \end{cases}$$

eine wohldefinierte bijektive Abbildung von A nach B . Die Wohldefiniertheit sieht man so: Ein $x \in A$ ist entweder in C oder in \overline{C} , also $A = C \cup \overline{C}$. Für alle $x \in C \subseteq A$ ist $f(x)$ natürlich definiert, aber auch $g^{-1}(x)$ für $x \in \overline{C}$, denn aus $x \notin C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ folgt $x \notin C_0 = A \setminus g(B)$, d.h., weil $x \in A$ ist, folgt $x \in g(B)$; dieses x wird also von einem Abbildungsfeil der Abbildung g von der Menge B aus getroffen, also existiert $g^{-1}(x)$. Die Abbildung h ist injektiv, denn: Weil f nach Voraussetzung injektiv ist, ist für zwei verschiedene $x, y \in C$ dann $f(x) \neq f(y)$. Und da g eine wohldefinierte Abbildung ist, also jedem Element aus B genau ein Element aus A zuordnet, kann es nicht sein, dass es zwei verschiedene $x, y \in \overline{C}$ gibt mit $g^{-1}(x) = g^{-1}(y)$. Auch kann es nicht ein $x \in C$ und ein $y \in \overline{C}$ geben so, dass $f(x) = g^{-1}(y)$ gilt, denn sonst wäre $(g \circ f)(x)$ wegen $x \in C$ ein Element aus C , aber es gilt $(g \circ f)(x) = y \notin C$, also ein Widerspruch. Die Surjektivität von h : Es soll also $B = f(C) \cup g^{-1}(\overline{C})$ gezeigt werden. Sei $b \in B$ beliebig. Dann gibt es zwei Fälle. 1. Fall: $\forall x \in A : f(x) \neq b$. Das heißt also $b \notin f(C)$. Es muss gezeigt werden, dass gilt $b \in g^{-1}(\overline{C}) \Leftrightarrow g(b) \in \overline{C}$. Wäre $g(b) \in C$, dann gebe es ein $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so, dass für ein $c \in C_0$ gilt: $g(b) = (g \circ f)^i(c)$, daraus folgt $b = f((g \circ f)^{i-1}(c))$, also $b \in f(A)$ und das ist ein Widerspruch zu Fall 1. Nun der 2. Fall: $\exists x \in A : f(x) = b$ und weil f injektiv ist, gilt sogar $\exists! x \in A : f(x) = b$. Sei also x_0 das eindeutige Element aus A mit $f(x_0) = b$. Entweder ist $x_0 \in C$ oder $x_0 \in \overline{C}$. Ist $x_0 \in C$, dann ist $b \in f(C)$. Ist $x_0 \in \overline{C}$, dann gilt $x_0 \notin C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = C_0 \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (g \circ f)(C_n)$. Also ist $x_0 \notin C_n$ für alle $n \geq 0$. Es gilt schon mal $(g \circ f)(x_0) = g(b) \notin C_0 = A \setminus g(B)$. Da $g \circ f$ als Verkettung injektiver Abbildungen ebenfalls injektiv ist, folgt aus $x_0 \notin C_n$ dann $(g \circ f)(x_0) \notin (g \circ f)(C_n)$, denn ansonsten folgte aus $(g \circ f)(x_0) = (g \circ f)(c)$ mit einem $c \in C_n$ wegen der Injektivität von $g \circ f$, dass gilt $x_0 = c \in C_n$, Widerspruch. Insgesamt wurde also $(g \circ f)(x_0) \notin C$ geschlossen, also $g(b) \in \overline{C}$, d.h. $b \in g^{-1}(\overline{C})$. In jedem Fall gilt also $B \subseteq f(C) \cup g^{-1}(\overline{C})$ und sowieso gilt $f(C) \cup g^{-1}(\overline{C}) \subseteq B$. Damit ist also auch die Surjektivität bewiesen. \square

Die Summe der reziproken Quadratzahlen

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt die folgende Identität: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Beweis. Zunächst gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Daraus folgt dann:

$$\frac{3}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Weil $\int_0^1 x^{2n} dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$ gilt, folgt:

$$\frac{3}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{2n} dx \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n} dx \cdot \int_0^1 y^{2n} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (x^2 \cdot y^2)^n dx dy$$

Wegen $q \cdot \sum_{n=0}^m q^n - \sum_{n=0}^m q^n = q^{m+1} - 1$, also $\sum_{n=0}^m q^n = \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$ und deswegen $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}$, wenn $|q| < 1$ gilt, kann man dann folgendermaßen fortfahren:

$$\frac{3}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (x^2 \cdot y^2)^n dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (x^2 \cdot y^2)^n dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - x^2 \cdot y^2} dx dy = \int_{(0,1) \times (0,1)} \frac{1}{1 - x^2 \cdot y^2} d(x, y)$$

Nun muss nur noch ein Integral ausgewertet werden, was mithilfe der Transformationsformel geschieht:

$$x = \frac{\sin(u)}{\cos(v)}, \quad y = \frac{\sin(v)}{\cos(u)}$$

Das ist eine Substitution der Variablen, für die gilt:

$$\Phi : D := \left\{ (u, v) : u, v > 0 \wedge u + v < \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \{(x, y) : 0 < x, y < 1\} =: Q \text{ ist ein Diffeomorphismus.}$$

Also gilt folgendes:

$$\frac{3}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_Q \frac{1}{1 - x^2 - y^2} d(x, y) = \int_D \frac{1}{1 - \left(\frac{\sin(u)}{\cos(v)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(v)}{\cos(u)}\right)^2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \right| d(u, v)$$

Die Funktionaldeterminante lautet:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\cos(u)}{\cos(v)} & \sin(v) \cdot \frac{\sin(u)}{(\cos(u))^2} \\ \sin(u) \cdot \frac{\sin(v)}{(\cos(v))^2} & \frac{\cos(v)}{\cos(u)} \end{pmatrix} = 1 - \left(\frac{\sin(u)}{\cos(v)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(v)}{\cos(u)}\right)^2$$

Weil D ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(0, \frac{\pi}{2})$ ist, gilt dann:

$$\frac{3}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_D 1 d(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

Damit ist die Behauptung also bewiesen. \square

Die transzendenten Zahlen

[Zurück zur Liste]

Lemma (Gruppenweise Symmetrie). *Sei $J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ symmetrisch in $\alpha_{n_t+1}, \dots, \alpha_{n_t+1}$ ($t \in \{0, \dots, r-1\}$) mit $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_r = n$. Dann gibt es für $J \in \mathbb{Z}[\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1} | \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}]$ also ein Polynom $P \in \mathbb{Z}[e_{1,1}, \dots, e_{n_1-n_0,1} | e_{1,2}, \dots, e_{n_2-n_1,2} | \dots | e_{1,r}, \dots, e_{n_r-n_{r-1},r}]$, wobei $e_{1,t+1}, \dots, e_{n_t+1-n_t,t+1}$ die elementarsymmetrischen Polynome in $\alpha_{n_t+1}, \dots, \alpha_{n_t+1}$ mit $t \in \{0, \dots, r-1\}$ seien, so, dass gilt:*

$$\begin{aligned} J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= J(\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1} | \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}) \\ &= P(e_{1,1}, \dots, e_{n_1-n_0,1} | e_{1,2}, \dots, e_{n_2-n_1,2} | \dots | e_{1,r}, \dots, e_{n_r-n_{r-1},r}) \end{aligned}$$

Und das wird jetzt bewiesen:

Beweis. Sei $P(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]$ symmetrisch in a_1, \dots, a_n und b_1, \dots, b_m seien irgendwelche Variablen. Dann kann man P auffassen als $P'(a_1, \dots, a_n)$ aus $(\mathbb{Z}[b_1, \dots, b_m])[a_1, \dots, a_n]$. Nach dem Hauptsatz über elementarsymmetrische Polynome gibt es dann ein Polynom $Q' \in (\mathbb{Z}[b_1, \dots, b_m])[e_1, \dots, e_n]$, wobei e_1, \dots, e_n die elementarsymmetrischen Polynome in a_1, \dots, a_n seien, so, dass gilt $P'(a_1, \dots, a_n) = Q'(e_1, \dots, e_n)$. Nun gilt $P'(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ und $Q'(e_1, \dots, e_n)$ kann man auffassen als $Q(e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_m]$, wenn man die Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[b_1, \dots, b_m]$ in P' und Q' mit den anderen Variablen ausmultipliziert. Also gilt dann:

$$P(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = Q(e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_m) = Q(e_1(a_1, \dots, a_n), \dots, e_n(a_1, \dots, a_n), b_1, \dots, b_m)$$

Das wird im Folgenden gebraucht: Weil $J(\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1} | \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r})$ symmetrisch in $\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1}$ ist, gibt es ein Polynom P_1 mit:

$$\begin{aligned} J(\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1} | \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}) &= \\ P_1(e_{1,1}, \dots, e_{n_1-n_0,1} | \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}) & \end{aligned}$$

Da P_1 , genauso wie J , symmetrisch in $\alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2}$ ist, gibt es ein Polynom P_2 mit:

$$\begin{aligned} P_1(e_{1,1}, \dots, e_{n_1-n_0,1} | \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}) &= \\ P_2(e_{1,1}, \dots, e_{n_1-n_0,1} | e_{1,2}, \dots, e_{n_2-n_1,2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}) & \end{aligned}$$

Das macht man so weiter, bis: Da P_{r-1} , genauso wie J , symmetrisch in $\alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}$ ist, gibt es ein Polynom P_r mit:

$$\begin{aligned} P_{r-1}(e_{1,1}, \dots, e_{n_1-n_0,1} | e_{1,2}, \dots, e_{n_2-n_1,2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}) &= \\ P_r(e_{1,1}, \dots, e_{n_1-n_0,1} | e_{1,2}, \dots, e_{n_2-n_1,2} | \dots | e_{1,r}, \dots, e_{n_r-n_{r-1},r}) & \end{aligned}$$

Man hat also $J(\dots) = P_1(\dots) = P_2(\dots) = P_3(\dots) = \dots = P_{r-1}(\dots) = P_r(\dots)$. Setzt man $P := P_r$, dann folgt die Behauptung dieses Lemmas! \square

Lemma (Rational und ganz-algebraisch). Eine rationale Zahl, die ganz-algebraisch ist, ist eine ganze Zahl.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$, dann gibt es ein $u \in \mathbb{Z}$ und ein $v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $\alpha = \frac{u}{v}$. Insbesondere kann man u und v so wählen, dass u und v teilerfremd sind, ansonsten kürze den Bruch. Weil α nach Voraussetzung ganz-algebraisch ist, gibt es ein normiertes Polynom $h(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ mit $h(\alpha) = 0$. Es gilt also:

$$h(\alpha) = 0 = \left(\frac{u}{v}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^1 + a_0 \Rightarrow 0 \cdot v^n = u^n + a_{n-1} \cdot u^{n-1} \cdot v^1 + \dots + a_1 \cdot u^1 \cdot v^{n-1} + a_0 \cdot v^n$$

Daraus folgt dann: $-u^n = v \cdot \underbrace{(a_{n-1} \cdot u^{n-1} + a_{n-2} \cdot u^{n-2} \cdot v^1 + \dots + a_1 \cdot u^1 \cdot v^{n-2} + a_0 \cdot v^{n-1})}_{\in \mathbb{Z}}$. Wäre $v \neq 1$, dann gäbe es eine Primzahl $q \neq 1$ mit $q \mid v$. Weil $v \mid u^n$ gilt, folgt $q \mid u^n$, also $q \mid u$ (denn: $q \nmid u \Rightarrow q \nmid u^n$). Man hat also $q \mid u$ und $q \mid v$ ($q \neq 1$), also sind u und v nicht teilerfremd, Widerspruch. Also muss $v = 1$ sein, also $\alpha = \frac{u}{v} = \frac{u}{1} = u \in \mathbb{Z}$. \square

Satz (Lindemann-Weierstraß). Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ algebraische Zahlen ungleich 0 und $\omega_1, \dots, \omega_m$ paarweise verschiedene algebraische Zahlen, dann gilt:

$$\lambda_1 \cdot e^{\omega_1} + \dots + \lambda_m \cdot e^{\omega_m} \neq 0$$

Der etwas aufwendige Beweis geht, wie im Folgenden:

Beweis. Annahme: $\lambda_1 \cdot e^{\omega_1} + \dots + \lambda_m \cdot e^{\omega_m} = 0$. Der Beweis wird in mehreren Schritten vollzogen:

Annahme 1:

Da $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ algebraische Zahlen sind, ist λ_i ($i = 1, \dots, m$) Nullstelle eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten. Sei $\lambda_i = \lambda_{1,i}$ und dann $\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, \dots, \lambda_{d(i),i}$ alle Nullstellen dieses Polynoms. Also sind $\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, \dots, \lambda_{d(i),i}$ ($i = 1, \dots, m$) vollständige Nullstellensysteme eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten. Sei dann S die Menge aller Funktionen τ , die aus jeder der Sequenzen $(1, \dots, d(1)), (1, \dots, d(2)), \dots, (1, \dots, d(m))$ ein Element auswählt, so dass also für alle $1 \leq i \leq m$ dann $\tau(i)$ eine Zahl von 1 bis $d(i)$ ist. Definiere nun:

$$Q(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{d(1),1} | \dots | \lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{d(m),m} | e^{\omega_1}, \dots, e^{\omega_m}) = \prod_{\tau \in S} (\lambda_{\tau(1),1} \cdot e^{\omega_1} + \lambda_{\tau(2),2} \cdot e^{\omega_2} + \dots + \lambda_{\tau(m),m} \cdot e^{\omega_m}) = 0$$

Es ist gleich 0, weil für ein Faktor gilt $\tau(i) = 1$ für alle $i = 1, \dots, m$. Und das bedeutet dann nämlich:

$$\lambda_{\tau(1),1} \cdot e^{\omega_1} + \lambda_{\tau(2),2} \cdot e^{\omega_2} + \dots + \lambda_{\tau(m),m} \cdot e^{\omega_m} = \lambda_{1,1} \cdot e^{\omega_1} + \lambda_{1,2} \cdot e^{\omega_2} + \dots + \lambda_{1,m} \cdot e^{\omega_m} = \lambda_1 \cdot e^{\omega_1} + \lambda_2 \cdot e^{\omega_2} + \dots + \lambda_m \cdot e^{\omega_m} = 0$$

Es gilt nun das Folgende:

$$\prod_{\tau \in S} (\lambda_{\tau(1),1} \cdot e^{\omega_1} + \dots + \lambda_{\tau(m),m} \cdot e^{\omega_m}) = \prod_{j=1}^{d(i)} \prod_{\tau \in S} (\lambda_{\tau(1),1} \cdot e^{\omega_1} + \dots + \lambda_{j,i} \cdot e^{\omega_i} + \dots + \lambda_{\tau(m),m} \cdot e^{\omega_m})$$

Man sieht daran, dass Q symmetrisch in $\lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{d(i),i}$ ($i = 1, \dots, m$) ist. Wie im Beweis von Lemma (Gruppenweise Symmetrie) folgt dann, dass es ein Polynom Q' gibt mit:

$$Q(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{d(1),1} | \dots | \lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{d(m),m} | e^{\omega_1}, \dots, e^{\omega_m}) = Q'(e_{1,1}, \dots, e_{d(1),1} | \dots | e_{1,m}, \dots, e_{d(m),m} | e^{\omega_1}, \dots, e^{\omega_m})$$

Dabei sind $e_{1,i}, \dots, e_{d(i),i}$ die elementarsymmetrischen Polynome in $\lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{d(i),i}$ ($i = 1, \dots, m$). Nun gilt (s.o.):

$$(x - \lambda_{1,i}) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_{d(i),i}) = x^{d(i)} + (-1)^1 \cdot e_{1,i} \cdot x^{d(i)-1} + (-1)^2 \cdot e_{2,i} \cdot x^{d(i)-2} + \dots + (-1)^{d(i)} \cdot e_{d(i),i} \cdot x^0 \in \mathbb{Q}[x]$$

Also sind alle elementarsymmetrische Polynome $e_{1,i}, \dots, e_{d(i),i}$ ($i = 1, \dots, m$) aus \mathbb{Q} . Daraus folgt, dass in

$$\begin{aligned} 0 &= Q(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{d(1),1} | \dots | \lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{d(m),m} | e^{\omega_1}, \dots, e^{\omega_m}) = \prod_{i_1=1}^{d(1)} \dots \prod_{i_m=1}^{d(m)} (\lambda_{i_1,1} \cdot e^{\omega_1} + \lambda_{i_2,2} \cdot e^{\omega_2} + \dots + \lambda_{i_m,m} \cdot e^{\omega_m}) \\ &= \sum_{\substack{j_1+\dots+j_m=|S|=d(1)\dots+d(m) \\ (j_1,\dots,j_m \in \mathbb{N} \geq 0)}} \lambda(j_1, \dots, j_m) \cdot e^{j_1 \cdot \omega_1 + \dots + j_m \cdot \omega_m} =: \beta''_1 \cdot e^{\alpha'_1} + \dots + \beta''_{n'} \cdot e^{\alpha'_{n'}} \end{aligned}$$

die Koeffizienten $\lambda(j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{Z}[\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{d(1),1} | \dots | \lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{d(m),m}]$ alle aus \mathbb{Q} sind. Dabei seien $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'}$ die verschiedenen Zahlen aus den $j_1 \cdot \omega_1 + \dots + j_m \cdot \omega_m$. Also sind $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'}$ paarweise verschiedene algebraische Zahlen. Weiterhin sind β''_i ($i = 1, \dots, n'$) Summen von einigen $\lambda(j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{Q}$, also $\beta''_i \in \mathbb{Q}$ für alle $i \in \{1, \dots, n'\}$. Weil es ein $l \in \mathbb{N} \neq 0$ gibt, so, dass $l\beta''_1 = \beta'_1, \dots, l\beta''_{n'} = \beta'_{n'} \in \mathbb{Z}$ gilt, kann man von nun an annehmen, dass die Widerspruchsannahme so aussieht:

$$\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_1} + \dots + \beta'_{n'} \cdot e^{\alpha'_{n'}} = l \cdot 0 = 0 \text{ mit } \beta'_1, \dots, \beta'_{n'} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } \alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'} \text{ paarweise verschiedene algebraische Zahlen}$$

Es wird noch gezeigt, dass es mindestens ein $\beta'_i \neq 0$ ($i \in \{1, \dots, n'\}$) gibt und dass die Summe $\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_1} + \dots + \beta'_{n'} \cdot e^{\alpha'_{n'}}$ nicht trivial 0 ist. Es wird eine lexikographische Ordnung für komplexe Zahlen definiert: Für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ gilt $c_1 \not\preceq c_2$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}(c_1) < \operatorname{Re}(c_2)$ oder $\operatorname{Re}(c_1) = \operatorname{Re}(c_2)$, aber $\operatorname{Im}(c_1) < \operatorname{Im}(c_2)$. Da $\omega_1, \dots, \omega_m$ paarweise verschiedene algebraische Zahlen aus \mathbb{C} sind, existiert o.B.d.A. die Ordnung $\omega_1 \not\preceq \dots \not\preceq \omega_m$ (sonst nummeriere um). Daraus folgt $j_1 \cdot \omega_1 + \dots + j_m \cdot \omega_m \not\preceq |S| \cdot \omega_m = (d(1) \cdot \dots \cdot d(m)) \cdot \omega_m$ für alle $(j_1, \dots, j_m) \neq (0, \dots, 0, |S|)$ mit $j_1 + \dots + j_m = |S| = d(1) \cdot \dots \cdot d(m)$ und $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}^{>0}$. Ist o.B.d.A. $\alpha'_1 \not\preceq \dots \not\preceq \alpha'_{n'}$ (sonst nummeriere um) ($\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'}$ sind paarweise verschieden), dann gilt $\alpha'_{n'} = |S| \cdot \omega_m$, also ist $\beta''_{n'} = \lambda(0, \dots, 0, |S|) = \left(\prod_{i_m=1}^{d(m)} \lambda_{i_m, m} \right)^{\frac{|S|}{d(m)}} \in \mathbb{Q}$ ungleich 0, weil $\prod_{i_m=1}^{d(m)} \lambda_{i_m, m} \neq 0$ ist. Nochmal: Die β''_i ($i = 1, \dots, n'$) sind Summen von einigen $\lambda(j_1, \dots, j_m)$, aber wegen $j_1 \cdot \omega_1 + \dots + j_m \cdot \omega_m \not\preceq |S| \cdot \omega_m$ gilt $\beta''_i = \lambda(0, \dots, 0, |S|) + 0$. Also ist auch $\beta'_{n'} = l \cdot \beta''_{n'} \neq 0$. Damit ist dann gezeigt, dass es mindestens ein $\beta'_i \neq 0$ ($i \in \{1, \dots, n'\}$) gibt. Wegen $j_1 \cdot \omega_1 + \dots + j_m \cdot \omega_m \not\preceq |S| \cdot \omega_m$, kann $\lambda(0, \dots, 0, |S|) \cdot e^{|S| \cdot \omega_m}$ von keinem der anderen Summanden $\lambda(j_1, \dots, j_m) \cdot e^{j_1 \cdot \omega_1 + \dots + j_m \cdot \omega_m}$ mit $(j_1, \dots, j_m) \neq (0, \dots, 0, |S|)$ wegsubtrahiert werden, also ist die Summe $\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_1} + \dots + \beta'_{n'} \cdot e^{\alpha'_{n'}}$ nicht trivial. $\prod_{i_m=1}^{d(m)} \lambda_{i_m, m} \neq 0$, Beweis: $\lambda_{i_m, m}$ ist für $i_m = 1, \dots, d(m)$ ein vollständiges Nullstellensystem eines normierten Polynoms p mit rationalen Koeffizienten. $\lambda_{1, m} = \lambda_m$ ist also Nullstelle von p . Wäre 0 nun n -fach konjugiert zu λ_m , dann betrachte $\frac{p(x)}{(x-0)^n} = q(x)$. $q(x)$ ist immer noch ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten, das $\lambda_{1, m} = \lambda_m$ als Nullstelle hat, aber nicht mehr die 0. Man kann also davon ausgehen, dass $\lambda_{i_m, m} \neq 0$ für alle $i_m = 1, \dots, d(m)$ gilt, also $\prod_{i_m=1}^{d(m)} \lambda_{i_m, m} \neq 0$, Beweis-Ende. Das war es hier!

Annahme 2:

Zuerst kommt Folgendes: Ein Minimalpolynom m_α einer algebraischen Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ ist das Polynom ungleich zum Nullpolynom kleinsten Grades mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, dass α als Nullstelle hat. Es gilt dann:

- 1.) Ein Minimalpolynom hat keine mehrfachen Nullstellen.
- 2.) Das Minimalpolynom m_α teilt jedes Polynom mit rationalen Koeffizienten, das α als Nullstelle hat.
- 3.) Das Minimalpolynom einer algebraischen Zahl ist eindeutig.
- 4.) Zwei verschiedene Minimalpolynome haben keine gemeinsamen Nullstellen.

Beweis: 1.): Angenommen, m_α hat eine mehrfache Nullstelle β , dann kann man schreiben: $m_\alpha(x) = (x - \beta)^m \cdot p(x)$, wobei $p(x)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist und $m \geq 2$ gleich der Vielfachheit von β ist. Leitet man $m_\alpha(x)$ nach der Produktregel ab, so erhält man ein Polynom kleineren Grades als $m_\alpha(x)$, nämlich: $m \cdot (x - \beta)^{m-1} \cdot p(x) + (x - \beta)^m \cdot p'(x)$. Also hat man ein Polynom kleineren Grades als m_α gefunden, dass α als Nullstelle hat, Widerspruch zur Minimalität von m_α . Also kann ein Minimalpolynom keine mehrfachen Nullstellen haben. 2.): Sei m_α das Minimalpolynom von α und $p(x)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten und mit $p(\alpha) = 0$. Wegen der Minimalität von m_α gilt $\operatorname{grad}(m_\alpha) \leq \operatorname{grad}(p)$. Dann gilt: $m_\alpha \mid p$, denn: Man macht eine Polynomdivision: $p(x) = q(x) \cdot m_\alpha(x) + r(x)$ mit $q, r \in \mathbb{Q}[x]$ und $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(m_\alpha)$. Also folgt: $0 = p(\alpha) = q(\alpha) \cdot m_\alpha(\alpha) + r(\alpha) = q(\alpha) \cdot 0 + r(\alpha) = r(\alpha)$. Es muss dann $r \equiv 0$ gelten, denn sonst hätte man mit r ein Polynom kleineren Grades als m_α gefunden, das α als Nullstelle hat. Also ist die Polynomdivision ohne Rest, also gilt $m_\alpha \mid p$. 3.): Seien zwei Minimalpolynome m_α und m'_α einer algebraischen Zahl α gegeben, dann folgt wegen 2.) dann $m_\alpha \mid m'_\alpha$ und $m'_\alpha \mid m_\alpha$, also, weil die Leitkoeffizienten von m_α und m'_α gleich 1 sind, folgt dann $m_\alpha = m'_\alpha$. Zu 4.): Seien m_a und $m_{a'}$ zwei Minimalpolynome, die eine gemeinsame Nullstelle β haben, also $m_\beta \mid m_a$ und $m_\beta \mid m_{a'}$, nach 2.) oben. Daraus folgt dann $\operatorname{grad}(m_\beta) \leq \operatorname{grad}(m_a)$ und $\operatorname{grad}(m_\beta) \leq \operatorname{grad}(m_{a'})$. Zunächst werden m_β und m_a behandelt. Fallunterscheidung: 1. Fall ($\operatorname{grad}(m_\beta) = \operatorname{grad}(m_a)$): Man macht dann eine Polynomdivision: $m_a(x) = p(x) \cdot m_\beta(x) + r(x)$ mit $p, r \in \mathbb{Q}[x]$ und $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(m_\beta)$. Wegen $m_\beta \mid m_a$ folgt $r \equiv 0$. Wegen $\operatorname{grad}(m_\beta) = \operatorname{grad}(m_a)$ folgt $\operatorname{grad}(p) = 0$, also ist p eine Konstante. Wäre $p \neq 1$, dann wäre wegen der Normiertheit von m_β dann m_a nicht normiert, Widerspruch, also muss $m_a = 1 \cdot m_\beta + 0 = m_\beta$ gelten. Analog zeigt man $m_{a'} = m_\beta$, also $m_a = m_{a'}$. 2. Fall ($\operatorname{grad}(m_\beta) < \operatorname{grad}(m_a)$): Wegen $m_\beta \mid m_a$ gibt es ein p mit $p(x) \cdot m_\beta(x) = m_a(x)$. Weil $\operatorname{grad}(m_\beta) < \operatorname{grad}(m_a)$ gilt, muss dann gelten $\operatorname{grad}(p) > 0$. Als Minimalpolynom gilt für m_β dann $\operatorname{grad}(m_\beta) > 0$. Weil $\operatorname{grad}(m_\beta) > 0$ gilt, folgt $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(m_a)$. Insgesamt hat man also: $0 < \operatorname{grad}(p), \operatorname{grad}(m_\beta) < \operatorname{grad}(m_a)$. Nun gilt: $p(a) \cdot m_\beta(a) = m_a(a) = 0 \Rightarrow p(a) = 0 \vee m_\beta(a) = 0$. In jedem Fall hat man also ein Polynom kleineren Grades als von $\operatorname{grad}(m_a)$ gefunden, dass a als Nullstelle hat, Widerspruch. Genauso schließt man den Fall $\operatorname{grad}(m_\beta) < \operatorname{grad}(m_{a'})$ aus. Der 2. Fall ist also ausgeschlossen, es gilt nur der 1. Fall. Es wurde also bewiesen: Seien m_a und $m_{a'}$ zwei Minimalpolynome, die eine gemeinsame Nullstelle β haben, dann gilt $m_a = m_{a'}$. Die Kontraposition dieser Aussage ist dann die Aussage, die man beweisen wollte. Jetzt geht es los mit der Annahme 2: Die Widerspruchsannahme aus Annahme 1 sieht doch so aus:

$$\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_1} + \dots + \beta'_{n'} \cdot e^{\alpha'_{n'}} = 0 \text{ mit } \beta'_1, \dots, \beta'_{n'} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } \alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'} \text{ paarweise verschiedene algebraische Zahlen}$$

Man multipliziert: $m := m_{\alpha'_1}$, dann $m := m_{\alpha'_1} \cdot (m_{\alpha'_2} \vee 1)$, falls $m_{\alpha'_2}$ ungleich ist zu $m_{\alpha'_1}$, ansonsten multipliziert man mit 1. Dann kommt $m = m_{\alpha'_1} \cdot (m_{\alpha'_2} \vee 1) \cdot (m_{\alpha'_3} \vee 1)$, usw., bis als letztes $m_{\alpha'_{n'}}$ dranmultipliziert wird, falls wieder $m_{\alpha'_{n'}}$ ungleich ist zu den bisherigen dranmultiplizierten Minimalpolynomen, ansonsten multipliziert man mit 1. Nach Konstruktion sind $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'}$ Nullstellen von m , wobei m nach Konstruktion ein Polynom mit rationalen Koeffizienten mit Leitkoeffizient 1 ist. Seien $\alpha'_{(n'+1)}, \dots, \alpha'_{N'}$ die übrigen Nullstellen von m . Weil m ein Produkt von paarweise verschiedenen Minimalpolynomen ist und ein

Minimalpolynom keine mehrfachen Nullstellen hat, folgt, dass $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'}, \alpha'_{(n'+1)}, \dots, \alpha'_{N'}$ paarweise verschieden sind und, dass $(x - \alpha'_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha'_{n'}) \cdot (x - \alpha'_{(n'+1)}) \cdot \dots \cdot (x - \alpha'_{N'}) \in \mathbb{Q}[x]$ gilt. Daraus folgt, dass die elementarsymmetrischen Polynome in $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'}, \alpha'_{(n'+1)}, \dots, \alpha'_{N'}$ aus \mathbb{Q} sind, also: $e'_i(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'}, \alpha'_{(n'+1)}, \dots, \alpha'_{N'}) \in \mathbb{Q}$ für alle $i \in \{1, \dots, N'\}$. Man betrachtet nun das folgende wichtige Produkt:

$$\Omega(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) := \prod_{\sigma \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(1)}} + \dots + \beta'_{n'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(n')}} + \beta'_{n'+1} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(n'+1)}} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(N')}} \right)$$

Dabei soll gelten $\beta'_{n'+1} = \dots = \beta'_{N'} = 0$. Bei $\sigma(i) = i$ für alle $i \in \{1, \dots, N'\}$ gilt dann $\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(1)}} + \dots + \beta'_{n'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(n')}} + \beta'_{n'+1} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(n'+1)}} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(N')}} = \beta'_1 \cdot e^{\alpha'_1} + \dots + \beta'_{n'} \cdot e^{\alpha'_{n'}} + 0 \cdot e^{\alpha'_{n'+1}} + \dots + 0 \cdot e^{\alpha'_{N'}} = \beta'_1 \cdot e^{\alpha'_1} + \dots + \beta'_{n'} \cdot e^{\alpha'_{n'}} = 0$, nach Annahme 1, also gilt dann:

$$\prod_{\sigma \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(1)}} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(N')}} \right) = 0 \text{ mit } \beta'_{n'+1} = \dots = \beta'_{N'} = 0$$

Dieses Produkt hat $N'!$ Faktoren und ausmultipliziert ist es eine Summe von Summanden der Form $\beta'_{h_1, \dots, h_{N'}} \cdot e^{h_1 \cdot \alpha'_1 + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{N'}}$ über alle $(h_1, \dots, h_{N'}) \in (\mathbb{N}_0)^{N'}$ mit $h_1 + \dots + h_{N'} = N'!$, wobei $\beta'_{h_1, \dots, h_{N'}}$ aus \mathbb{Z} ist, weil $\beta'_{h_1, \dots, h_{N'}}$ aus Summen, Produkte oder Summen von Produkten von Elementen aus $\{\beta'_1, \dots, \beta'_{N'}\} \subseteq \mathbb{Z}$ besteht. Es wird nun gezeigt, dass bei festem $(h_1, \dots, h_{N'}) \in (\mathbb{N}_0)^{N'}$ die Menge $\{A_\tau := h_1 \cdot \alpha'_{\tau(1)} + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{\tau(N')} : \tau \in S_{N'}\}$ ein vollständiges Nullstellensystem bildet, also ist es eine Menge aller Nullstellen eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten. Beweis: Es gilt zunächst das Folgende:

$$(x - A_{\tau_1}) \cdot \dots \cdot (x - A_{\tau_{N'!}}) = x^{N'!} + e_1(A_{\tau_1}, \dots, A_{\tau_{N'!}}) \cdot x^{N'!-1} + \dots + e_{N'!}(A_{\tau_1}, \dots, A_{\tau_{N'!}}) \cdot x^0$$

Dabei sind die e_i ($i = 1, \dots, N'!$) die elementarsymmetrischen Polynome in $A_{\tau_1}, \dots, A_{\tau_{N'!}}$. Nun gilt doch offensichtlicherweise $E_i(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) := e_i(A_{\tau_1}, \dots, A_{\tau_{N'!}}) \in \mathbb{Z}[\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}]$ für alle $i \in \{1, \dots, N'!\}$. Eine Tauschung der $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}$ bewirkt eine Tauschung der $A_{\tau_1}, \dots, A_{\tau_{N'!}}$, und weil die e_i symmetrisch in $A_{\tau_1}, \dots, A_{\tau_{N'!}}$ sind, folgt, dass die $E_i(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) \in \mathbb{Z}[\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}]$ symmetrisch sind in $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}$. Nach dem Hauptsatz über elementarsymmetrische Polynome, gibt es also ein Polynom Q_i aus $\mathbb{Z}[e'_1, \dots, e'_{N'}]$ mit $E_i(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) = Q_i(e'_1, \dots, e'_{N'})$. Weil oben gezeigt wurde, dass $e'_j(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) \in \mathbb{Q}$ ($j = 1, \dots, N'$) ist, folgt $E_i(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) \in \mathbb{Q}$, also $(x - A_{\tau_1}) \cdot \dots \cdot (x - A_{\tau_{N'!}}) \in \mathbb{Q}[x]$, was zu beweisen war. Es wurde also gezeigt, dass $h_1 \cdot \alpha'_{\tau(1)} + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{\tau(N')}$ für alle $\tau \in S_{N'}$ konjugiert sind bzgl. eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten. Als nächstes wird gezeigt, dass in $\Omega(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) = \sum_{h_1 + \dots + h_{N'} = N'!} \beta'_{h_1, \dots, h_{N'}} \cdot e^{h_1 \cdot \alpha'_1 + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{N'}}$ die $e^{h_1 \cdot \alpha'_{\tau(1)} + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{\tau(N')}} (\tau \in S_{N'})$ gleiche Vorfaktoren haben. Es gilt $\{h_1 \cdot \alpha'_1 + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{N'} : h_1 + \dots + h_{N'} = N'!\} = \bigcup_{\substack{h_1 + \dots + h_{N'} = N'! \\ h_1 \leq \dots \leq h_{N'}}} \{h_{\tau(1)} \cdot \alpha'_1 + \dots + h_{\tau(N')} \cdot \alpha'_{N'} : \tau \in S_{N'}\} = \bigcup_{\substack{h_1 + \dots + h_{N'} = N'! \\ h_1 \leq \dots \leq h_{N'}}} \{h_1 \cdot \alpha'_{\tau(1)} + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{\tau(N')} : \tau \in S_{N'}\}$. Weiter gilt mit $\beta'_{n'+1} = \dots = \beta'_{N'} = 0$:

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha'_{\tau(1)}, \dots, \alpha'_{\tau(N')}) &= \prod_{\sigma \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(\tau(1))}} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(\tau(N'))}} \right) = \prod_{\gamma=\sigma \circ \tau: \tau \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\gamma(1)} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\gamma(N')} \right) \\ &= \prod_{\gamma \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\gamma(1)} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\gamma(N')} \right) = \Omega(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) \end{aligned}$$

Wegen $\Omega(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) = \Omega(\alpha'_{\tau(1)}, \dots, \alpha'_{\tau(N')})$ folgt also:

$$\sum_{h_1 + \dots + h_{N'} = N'!} \beta'_{h_1, \dots, h_{N'}} \cdot e^{h_1 \cdot \alpha'_1 + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{N'}} = \sum_{h_1 + \dots + h_{N'} = N'!} \beta'_{h_1, \dots, h_{N'}} \cdot e^{h_1 \cdot \alpha'_{\tau(1)} + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{\tau(N')}}$$

Umgeschrieben gilt dann also das Folgende

$$\Omega(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}) = \sum_{h_1 + \dots + h_{N'} = N'!} \beta'_{h_1, \dots, h_{N'}} \cdot x_1^{h_1} \cdot \dots \cdot x_{N'}^{h_{N'}} = \sum_{h_1 + \dots + h_{N'} = N'!} \beta'_{h_1, \dots, h_{N'}} \cdot x_{\tau(1)}^{h_1} \cdot \dots \cdot x_{\tau(N')}^{h_{N'}} \text{ mit } x_i = e^{\alpha'_i}$$

Wegen des Identitätssatzes für Polynome in mehreren Unbestimmten folgt, dass die Summanden $\beta'_{h_1, \dots, h_{N'}} \cdot x_{\tau(1)}^{h_1} \cdot \dots \cdot x_{\tau(N')}^{h_{N'}}$ mit gleichen Vorfaktoren auch in $\sum_{h_1 + \dots + h_{N'} = N'!} \beta'_{h_1, \dots, h_{N'}} \cdot x_1^{h_1} \cdot \dots \cdot x_{N'}^{h_{N'}}$ zu finden sind, sonst gelte nicht $\sum_{h_1 + \dots + h_{N'} = N'!} \beta'_{h_1, \dots, h_{N'}}$. $x_1^{h_1} \cdot \dots \cdot x_{N'}^{h_{N'}} = \sum_{h_1 + \dots + h_{N'} = N'!} \beta'_{h_1, \dots, h_{N'}} \cdot x_{\tau(1)}^{h_1} \cdot \dots \cdot x_{\tau(N')}^{h_{N'}}$ mit $x_i = e^{\alpha'_i}$. Wichtig dabei ist, dass dort $x_1^{h_1} \cdot \dots \cdot x_{N'}^{h_{N'}}$ und $x_{\tau(1)}^{h_1} \cdot \dots \cdot x_{\tau(N')}^{h_{N'}}$ den gleichen Vorfaktor $\beta'_{h_1, \dots, h_{N'}}$ haben, und das gilt für alle $\tau \in S_{N'}$. Daraus folgt also, dass die $x_1^{h_1} \cdot \alpha'_{\tau(1)} + \dots + h_{N'} \cdot \alpha'_{\tau(N')}$ in $\Omega(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'})$ für alle $\tau \in S_{N'}$ gleiche Vorfaktoren haben. Um einen Widerpruch für den Beweis dieses Satzes zu erreichen, muss noch wichtigerweise bewiesen werden, dass in $\prod_{\sigma \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(1)}} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(N')}} \right) = 0$ mit $\beta'_{n'+1} = \dots = \beta'_{N'} = 0$ die linke Seite nicht trivial 0 ist. Wie in Annahme 1 braucht man hier die lexicographische Ordnung für komplexe Zahlen. Weil $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N'}$ paarweise verschieden sind, gilt o.B.d.A. $\alpha'_1 \not\leq \dots \not\leq \alpha'_{N'}$ (sonst nummeriere um). In

$\prod_{\sigma \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(1)}} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(N')}} \right)$ wählt man aus jeder Klammer eine e -Funktion mit einem von Null ungleichen Vorfaktor dessen Exponent in der Klammer lexikographisch am größten ist. Sei $a_{i,\max}$ der in der i -ten Klammer größte Exponent dessen e -Funktion einen von Null verschiedenen Vorfaktor hat. a_i bezeichne einen Exponenten aus der i -ten Klammer dessen e -Funktion einen von Null verschiedenen Vorfaktor hat. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{N'!} a_i \not\geq \sum_{i=1}^{N'!} a_{i,\max} =: a_{\max} \text{ für alle } (a_1, \dots, a_{N'!}) \neq (a_{1,\max}, \dots, a_{N'!,\max})$$

Daraus folgt, dass $b \cdot e^{a_{\max}}$ mit $b \neq 0$ (ein Produkt von Elementen aus $\{\beta'_1, \dots, \beta'_{n'}\} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) durch keine andere e -Funktion von der Form $b^* \cdot e^{a_1 + \dots + a_n}$ (b^* ist Summe, Produkt oder Summe von Produkten von Elementen aus $\{\beta'_1, \dots, \beta'_{n'}\} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) aus der Summe, die durch Ausmultiplizierung des Produktes $\prod_{\sigma \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(1)}} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(N')}} \right)$ entsteht, wegsubtrahiert werden kann. Also ist $\prod_{\sigma \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(1)}} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(N')}} \right)$ nicht trivial 0, was man zeigen wollte. Man setzt nun Folgendes:

$$\prod_{\sigma \in S_{N'}} \left(\beta'_1 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(1)}} + \dots + \beta'_{N'} \cdot e^{\alpha'_{\sigma(n')}} + 0 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(n'+1)}} + \dots + 0 \cdot e^{\alpha'_{\sigma(N')}} \right) =: \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot e^{\alpha_i} = 0$$

Beim Ausmultiplizieren des Produktes links seien e -Funktionen mit gleichem Exponenten maximal zusammengefasst. Man hat damit bisher bewiesen, dass es $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_r = n$ gibt, so dass für alle t mit $0 \leq t < n$ gilt: $\alpha_{n_t+1}, \dots, \alpha_{n_{t+1}}$ ist ein vollständiges Nullstellensystem eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, wobei zusätzlich $\beta_{n_t+1} = \beta_{n_t+2} = \dots = \beta_{n_{t+1}}$ (alle aus \mathbb{Z}) gilt. Es wird nun bewiesen, dass alle in $\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot e^{\alpha_i}$ auftretende Exponenten als paarweise verschieden angenommen werden können. Dabei gibt es dann 4 Fälle:

Fall 1:

Sei $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$. Alle e -Funktionen haben den gleichen Vorfaktor $k \in \mathbb{Z}$. Es sei $\omega_1, \dots, \omega_l$ ein vollständiges Nullstellensystem eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, bezeichnet als w . Wenn $\omega_1, \dots, \omega_l$ paarweise verschieden sind, dann ist man fertig. Trete also ω_{i_1} ($i_1 \in \{1, \dots, l\}$) dann genau $2 \leq \lambda_1$ -fach als Nullstelle in w auf. Dann gilt $(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \mid w$ ($m_{\omega_{i_1}}$ sei das Minimalpolynom von ω_{i_1}). Das bedeutet, dass die Konjugierten von ω_{i_1} bzgl. des Minimalpolynoms von ω_{i_1} vom Grad g_1 ebenfalls mindestens λ_1 -fach als Nullstelle in w auftauchen, und zwar genau λ_1 -mal, denn käme eine Konjugierte von ω_{i_1} bzgl. des Minimalpolynoms von ω_{i_1} , bezeichnet als $\omega_{i_1,j}$ ($j = 2, \dots, g_1$) mit $\omega_{i_1,1} = \omega_{i_1}$, λ' -fach ($\lambda' > \lambda_1$) als Nullstelle in w vor, dann würde folgen: $(m_{\omega_{i_1,j}})^{\lambda'} \mid w$. Da $m_{\omega_{i_1,j}} = m_{\omega_{i_1}}$ gilt, weil $m_{\omega_{i_1,j}}$ und $m_{\omega_{i_1}}$ die gemeinsame Nullstelle $\omega_{i_1,j}$ haben, folgt $(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda'} \mid w$, was bedeuten würde, dass ω_{i_1} mehr als λ_1 -fach als Nullstelle in w auftaucht, Widerpruch, denn ω_{i_1} taucht nach Voraussetzung genau λ_1 -fach als Nullstelle in w auf. Man kann dann also das Folgende aufschreiben:

$$k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} = (k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1) + \left(\underbrace{(\lambda_1 \cdot k) \cdot e^{\omega_{i_1,1}} + \dots + (\lambda_1 \cdot k) \cdot e^{\omega_{i_1,g_1}}}_{=: M_1} \right)$$

In M_1 sind die Exponenten $\omega_{i_1,1}, \dots, \omega_{i_1,g_1}$ als vollständiges Nullstellensystem des Minimalpolynoms $m_{\omega_{i_1}}$ paarweise verschieden und jede e -Funktion hat den gleichen Vorfaktor $\lambda_1 \cdot k \in \mathbb{Z}$. In $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1$ sind die übrigbleibenden Exponenten der e -Funktionen ein vollständiges Nullstellensystem des Polynoms $\frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1}}$ mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1. Mal angenommen, die Exponenten in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1$ sind jetzt paarweise verschieden. Die e -Funktionen haben dann alle den gleichen Vorfaktor, nämlich $k \in \mathbb{Z}$. Es muss noch gezeigt werden, dass die Exponenten-Vorkommen in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1$ disjunkt sind zu den Exponenten-Vorkommen $\omega_{i_1,1}, \dots, \omega_{i_1,g_1}$. Keine der Exponenten $\omega_{i_1,1}, \dots, \omega_{i_1,g_1}$ tauchen in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1$ auf, weil diese Exponenten-Vorkommen in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1$ mittels $-M_1$ vollständig raussubtrahiert wurden. Keine der Exponenten aus $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1$ tauchen in $\omega_{i_1,1}, \dots, \omega_{i_1,g_1}$ auf, denn: Ist ein Exponent in $\omega_{i_1,1}, \dots, \omega_{i_1,g_1}$ zu finden, dann ist dieser Exponent nicht in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1$, weil dort mittels $-M_1$ das Exponenten-Vorkommen $\omega_{i_1,1}, \dots, \omega_{i_1,g_1}$ vollständig raussubtrahiert ist. Heißt im Umkehrschluss: Ist ein Exponent in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1$, dann nicht in $\omega_{i_1,1}, \dots, \omega_{i_1,g_1}$. Sollte es in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1$ jedoch immer noch Exponenten geben, die mehrfach vorkommen, dann wende man den Vorgang von eben nochmal an. Es wird noch einmal ausgeführt: Sei der Exponent ω_{i_2} genau $2 \geq \lambda_2$ -fach als Nullstelle in $\frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1}}$ zu finden, also gilt dann $(m_{\omega_{i_2}})^{\lambda_2} \mid \frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1}}$. Seien $\omega_{i_2,1}, \dots, \omega_{i_2,g_2}$ mit $\omega_{i_2,1} = \omega_{i_2}$ alle Konjugierten bzgl. des Minimalpolynoms $m_{\omega_{i_2}}$, dann kann man genauso, wie es oben getan wurde, wieder schreiben:

$$\begin{aligned} k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} &= (k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2) + \\ &\quad \left(\underbrace{(\lambda_1 \cdot k) \cdot e^{\omega_{i_1,1}} + \dots + (\lambda_1 \cdot k) \cdot e^{\omega_{i_1,g_1}}}_{=: M_1} \right) + \left(\underbrace{(\lambda_2 \cdot k) \cdot e^{\omega_{i_2,1}} + \dots + (\lambda_2 \cdot k) \cdot e^{\omega_{i_2,g_2}}}_{=: M_2} \right) \end{aligned}$$

Man wiederholt diesen Vorgang bis ein d erreicht ist, wo $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d$ nur noch paarweise verschiedene Exponenten hat, also bis $\frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot (m_{\omega_{i_d}})^{\lambda_d}}$ keine mehrfache Nullstellen mehr hat. Man hat dann also:

$$(k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d) + M_1 + M_2 + \dots + M_d$$

Was hat man damit erreicht?: Die Exponenten in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d$ sind paarweise verschieden und ein vollständiges Nullstellensystem des Polynoms $\frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdots (m_{\omega_{i_d}})^{\lambda_d}}$, was rationale Koeffizienten und Leitkoeffizient 1 hat. Die e -Funktionen in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d$ haben immer den Vorfaktor $k \in \mathbb{Z}$. Die Exponenten in M_r ($r = 1, \dots, d$) bilden ein vollständiges Nullstellensystem des Minimalpolynoms $m_{\omega_{i_r}}$, sind also paarweise verschieden. Die e -Funktionen in M_r haben immer den gleichen Vorfaktor $\lambda_r \cdot k \in \mathbb{Z}$. Das Wichtigste ist nun, dass in $(k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d) + M_1 + M_2 + \dots + M_d$ alle auftretenden Exponenten paarweise verschieden sind, was jetzt gezeigt wird: Nach Voraussetzung ist ω_{i_r} für alle $r \in \{1, \dots, d\}$ nun genau λ_r -fache Nullstelle von $\frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdots (m_{\omega_{i_{r-1}}})^{\lambda_{r-1}}}$, also gilt dann folglich $(m_{\omega_{i_r}})^{\lambda_r} \mid \frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdots (m_{\omega_{i_{r-1}}})^{\lambda_{r-1}}}$. Hätten M_u und M_v ($u, v = 1, \dots, d$ und $u \neq v$) einen Exponenten gemeinsam, dann gelte $m_{\omega_{i_u}} = m_{\omega_{i_v}}$ und das kann nicht sein, denn: Sei $r \in \{2, \dots, d\}$ und $x \in \{1, \dots, r-1\}$. Gelte $m_{\omega_{i_r}} = m_{\omega_{i_x}}$. Aus $(m_{\omega_{i_r}})^{\lambda_r} \mid \frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdots (m_{\omega_{i_{r-1}}})^{\lambda_{r-1}}}$ folgt dann $(m_{\omega_{i_x}})^{\lambda_r} \mid \frac{w \cdot (m_{\omega_{i_{x+1}}}^{\lambda_{x+1}} \cdots (m_{\omega_{i_{r-1}}}^{\lambda_{r-1}})}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdots (m_{\omega_{i_{r-1}}})^{\lambda_{r-1}}} = \frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdots (m_{\omega_{i_x}})^{\lambda_x}}$, also $(m_{\omega_{i_x}})^{\lambda_x+\lambda_r} \mid \frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdots (m_{\omega_{i_{x-1}}})^{\lambda_{x-1}}}$, also ist ω_{i_x} mehr als λ_x -fache Nullstelle, denn $\lambda_r \geq 2$, von dem folgenden: $\frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdots (m_{\omega_{i_{x-1}}})^{\lambda_{x-1}}}$, Widerpruch, denn ω_{i_x} ist genau λ_x -fache Nullstelle von $\frac{w}{(m_{\omega_{i_1}})^{\lambda_1} \cdots (m_{\omega_{i_{x-1}}})^{\lambda_{x-1}}}$, also gilt für alle $r \in \{2, \dots, d\}$ und für alle $x \in \{1, \dots, r-1\}$: $m_{\omega_{i_r}} \neq m_{\omega_{i_x}}$. Also kann oben nicht gelten $m_{\omega_{i_u}} = m_{\omega_{i_v}}$, also haben M_u und M_v keine gemeinsame Exponenten. Es muss jetzt noch gezeigt werden, dass alle M_r ($r = 1, \dots, d$, Erinnerung: Die Exponenten in M_r sind schonmal paarweise verschieden!) keine gemeinsame Exponenten mit $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d$ haben: Für alle $r \in \{1, \dots, d\}$ gilt: Keine der Exponenten in M_r sind in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d$ zu finden, weil diese Exponenten-Vorkommen mittels $-M_r$ in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d$ vollständig raussubtrahiert sind. Keine der Exponenten aus $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d$ sind in M_r zu finden, denn ist ein Exponent in M_r zu finden, dann nicht mehr in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d$, weil dort mittels $-M_r$ das Exponenten-Vorkommen aus M_r vollständig raussubtrahiert ist. Heißt im Umkehrschluss: Ist ein Exponent in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - M_1 - M_2 - \dots - M_d$ zu finden, dann nicht in M_r . Soviel also dazu!

Fall 2:

Seien $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ (immer Vorfaktor $k \in \mathbb{Z}$ und $\omega_1, \dots, \omega_l$ ist ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. des Polynoms w_1 mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1) und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ (immer Vorfaktor $k' \in \mathbb{Z}$ und $\omega'_1, \dots, \omega'_h$ ist ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. des Polynoms w_2 mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1) gegeben. Haben $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ keine Exponenten gemeinsam, dann ist man fertig! Man nimmt also an, dass $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ mindestens einen Exponenten gemeinsam haben. Sei dieser Exponent mit Ω_1 bezeichnet. m_{Ω_1} sei vom Grad G_1 . Die Nullstellen von m_{Ω_1} seien $\Omega_{1,1}, \dots, \Omega_{1,G_1}$, mit $\Omega_{1,1} = \Omega_1$. Ω_1 tauche in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ genau $1 \geq \mu_1$ -mal auf und in $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ genau $1 \geq \mu'_1$ -mal auf. Dann kann man, wie im Fall 1, das Folgende schreiben:

$$(k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}) + (k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}) = (k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - N_1) + (k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h} - N_{1'}) + \left(\underbrace{(\mu_1 \cdot k) \cdot e^{\Omega_{1,1}} + \dots + (\mu_1 \cdot k) \cdot e^{\Omega_{1,G_1}}}_{=: N_1} \right) + \left(\underbrace{(\mu'_1 \cdot k') \cdot e^{\Omega_{1,1}} + \dots + (\mu'_1 \cdot k') \cdot e^{\Omega_{1,G_1}}}_{=: N_{1'}} \right)$$

Und das ist gleich zu:

$$(k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - N_1) + (k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h} - N_{1'}) + ((\mu_1 \cdot k + \mu'_1 \cdot k') \cdot e^{\Omega_{1,1}} + \dots + (\mu_1 \cdot k + \mu'_1 \cdot k') \cdot e^{\Omega_{1,G_1}})$$

Diesen Vorgang wiederholt man bis $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - N_1 - N_2 - \dots - N_d$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h} - N_{1'} - N_{2'} - \dots - N_{d'}$ keine gemeinsame Exponenten mehr haben. Dabei gilt $\Omega_{i,1} = \Omega_i$ und $\Omega_{i,1}, \dots, \Omega_{i,G_i}$ sind alle Konjugierte bzgl. des Minimalpolynoms m_{Ω_i} . Und es gilt $N_i = (\mu_i \cdot k) \cdot e^{\Omega_{i,1}} + \dots + (\mu_i \cdot k) \cdot e^{\Omega_{i,G_i}}$ und $N_{i'} = (\mu'_i \cdot k') \cdot e^{\Omega_{i,1}} + \dots + (\mu'_i \cdot k') \cdot e^{\Omega_{i,G_i}}$. Weil N_i und $N_{i'}$ ($i = 1, \dots, d$) identische Exponenten haben, kann man die beiden zusammenfassen. Man hat nun also:

$$(k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}) + (k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}) = (k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - N_1 - N_2 - \dots - N_d) + (k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h} - N_{1'} - N_{2'} - \dots - N_{d'}) + (N_1 + N_{1'}) + (N_2 + N_{2'}) + \dots + (N_d + N_{d'})$$

Was hat man damit erreicht?: Die Exponenten in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - N_1 - N_2 - \dots - N_d$ bilden ein vollständiges Nullstellensystem eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, nämlich: $\frac{w_1}{(m_{\Omega_1})^{\mu_1} \cdots (m_{\Omega_d})^{\mu_d}}$, Die Exponenten in $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h} - N_{1'} - N_{2'} - \dots - N_{d'}$ bilden ein vollständiges Nullstellensystem eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, nämlich: $\frac{w_2}{(m_{\Omega_1})^{\mu'_1} \cdots (m_{\Omega_d})^{\mu'_d}}$. Die Exponenten in $N_i + N_{i'}$ ($i = 1, \dots, d$) bilden ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. des Minimalpolynoms m_{Ω_i} (d.h. sie sind paarweise verschieden), und alle Vorfaktoren in $N_i + N_{i'}$ sind gleich $\mu_i \cdot k + \mu'_i \cdot k' \in \mathbb{Z}$. Wie in Fall 1 zeigt man, dass für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ die Exponentenmenge von $N_i + N_{i'}$ disjunkt ist zu der von $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - N_1 - N_2 - \dots - N_d$ und zu der von $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h} - N_{1'} - N_{2'} - \dots - N_{d'}$, und man zeigt,

wie in Fall 1, dass die $N_i + N_{i'}$ ($i = 1, \dots, d$) disjunkte Exponentenmengen haben. Erinnerung: Nach Konstruktion gilt auch, dass die Exponentenmengen von $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - N_1 - N_2 - \dots - N_d$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h} - N_{1'} - N_{2'} - \dots - N_{d'}$ disjunkt sind. Das war es also auch schon!

Fall 3:

Seien $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ (immer Vorfaktor $k \in \mathbb{Z}$ und $\omega_1, \dots, \omega_l$ ist ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. des Minimalpolynoms m , also sind $\omega_1, \dots, \omega_l$ paarweise verschieden) und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ (immer Vorfaktor $k' \in \mathbb{Z}$ und $\omega'_1, \dots, \omega'_h$ ist ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. des Minimalpolynoms m' , also sind $\omega'_1, \dots, \omega'_h$ paarweise verschieden) gegeben. Mal angenommen, $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ haben keinen Exponenten gemeinsam, dann ist man fertig. Haben also $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ mindestens einen Exponenten, bezeichnet als γ , gemeinsam, dann gilt $m = m_\gamma = m'$ (denn: m_γ und m, m' haben die gemeinsame Nullstelle γ), also $m = m'$. Daraus folgt also $l = h$ und $\omega_1 = \omega'_1, \dots, \omega_l = \omega'_l$. Also kann man dann schreiben:

$$\begin{aligned}(k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}) + (k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}) &= (k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}) + (k' \cdot e^{\omega_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega_l}) \\ &= (k + k') \cdot e^{\omega_1} + \dots + (k + k') \cdot e^{\omega_l}\end{aligned}$$

Was hat man damit erreicht?: In $(k + k') \cdot e^{\omega_1} + \dots + (k + k') \cdot e^{\omega_l}$ sind alle Vorfaktoren gleich $k + k' \in \mathbb{Z}$ und $\omega_1, \dots, \omega_l$ bilden ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. des Minimalpolynoms m , also sind $\omega_1, \dots, \omega_l$ insbesondere paarweise verschieden.

Fall 4:

Seien $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ (immer Vorfaktor $k \in \mathbb{Z}$ und $\omega_1, \dots, \omega_l$ ist ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. des Polynoms w mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1) und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ (immer Vorfaktor $k' \in \mathbb{Z}$ und $\omega'_1, \dots, \omega'_h$ ist ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. des Minimalpolynoms m' , also sind $\omega'_1, \dots, \omega'_h$ paarweise verschieden) gegeben. Mal angenommen, $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ haben keinen Exponenten gemeinsam, dann ist man fertig. Haben also $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ mindestens einen Exponenten, bezeichnet als γ , gemeinsam, dann sei λ die Vielfachheit der Nullstelle γ von w , dann gilt $(m_\gamma)^\lambda \mid w$, wobei m_γ das Minimalpolynom von γ sei. Weil m' und m_γ die Nullstelle γ gemeinsam haben, folgt $m' = m_\gamma$. Seien die Nullstellen von m_γ bezeichnet als $\Omega_1, \dots, \Omega_g$ mit $\Omega_1 = \gamma$. Wegen $m' = m_\gamma$, folgt also $g = h$ und $\Omega_1 = \omega'_1, \dots, \Omega_g = \omega'_g$. Man kann also schreiben:

$$\begin{aligned}(k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}) + (k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}) &= (k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - A) + \underbrace{\left((\lambda \cdot k) \cdot e^{\Omega_1} + \dots + (\lambda \cdot k) \cdot e^{\Omega_g} \right)}_{=:A} + \\ (k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}) &= (k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - A) + ((\lambda \cdot k) \cdot e^{\Omega_1} + \dots + (\lambda \cdot k) \cdot e^{\Omega_g}) + (k' \cdot e^{\Omega_1} + \dots + k' \cdot e^{\Omega_g}) = \\ (k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - A) + ((\lambda \cdot k + k') \cdot e^{\Omega_1} + \dots + (\lambda \cdot k + k') \cdot e^{\Omega_g})\end{aligned}$$

Was hat man damit erreicht?: Die Exponenten in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - A$ bilden ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. eines Polynomes mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, nämlich $\frac{w}{(m_\gamma)^\lambda} = \frac{w}{(m_{\Omega_1})^\lambda}$. In $(\lambda \cdot k + k') \cdot e^{\Omega_1} + \dots + (\lambda \cdot k + k') \cdot e^{\Omega_g}$ hat man immer den gleichen Vorfaktor $\lambda \cdot k + k' \in \mathbb{Z}$ und $\Omega_1, \dots, \Omega_g$ bilden ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. des Minimalpolynoms $m_\gamma = m_{\Omega_1}$, also sind diese Exponenten auch paarweise verschieden. Wie in Fall 1 zeigt man, dass die Exponentenmenge $\{\Omega_1, \dots, \Omega_g\}$ disjunkt ist zur Exponentenmenge von $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - A$.

Allgemeiner Fall:

Zunächst macht man sich klar, dass sich $\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot e^{\alpha_i}$ als Summe von Termen der Form $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ ($k \in \mathbb{Z}$ und $\omega_1, \dots, \omega_l$ ist ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1) darstellt. Es werden hier Bezeichnungen eingeführt: Ein Term der Form $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$, dessen Exponenten ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, welches kein Minimalpolynom ist, bezeichnet als w , darstellen, nenne man W -Term. Ein Term der Form $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$, dessen Exponenten ein vollständiges Nullstellensystem bzgl. eines Minimalpolynoms, bezeichnet als m , darstellen, nenne man M -Term. Fall 1 sorgt dafür, dass jeder W -Term paarweise verschiedene Exponenten hat. Dabei entstehen M -Terme. Fall 2 wendet man solange an (endlich oft!), bis alle W -Terme disjunkte Exponentenmengen haben. Dabei entstehen wieder M -Terme. Wegen Fall 1 haben im Beweis von Fall 2 nun $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ paarweise verschiedene Exponenten, was offensichtlicherweise auch weiterhin für $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - N_1 - N_2 - \dots - N_d$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h} - N_{1'} - N_{2'} - \dots - N_{d'}$ gilt. Dabei gilt, dass die Vorfaktoren der e -Funktionen in $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ immer $k \in \mathbb{Z}$ und in $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ immer $k' \in \mathbb{Z}$ sind. Im Beweis von Fall 2 gilt, weil $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ und $k' \cdot e^{\omega'_1} + \dots + k' \cdot e^{\omega'_h}$ wegen Fall 1 paarweise verschiedene Exponenten haben, dass sogar $\mu_i = \mu'_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, d$ gilt. Mit Fall 3 erreicht man, dass zwei M -Terme, dessen Exponenten paarweise verschieden sind, disjunkte Exponentenmengen haben, denn ansonsten kann man sie zusammenfassen. Mithilfe von Fall 4 sorgt man dann dafür, dass die Exponentenmenge jedes M -Terms, dessen Exponenten paarweise verschieden sind, disjunkt ist zu jeder Exponentenmenge eines W -Terms. Also ist die Exponentenmenge jedes W -Terms disjunkt zu allen Exponentenmengen eines M -Terms, denn sonst gäbe es eine Exponentenmenge eines M -Term, welches nicht disjunkt ist zur Exponentenmenge eines W -Terms, Widerspruch. Im Beweis von Fall 4 hat $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l}$ wegen Fall 1 paarweise verschiedene Exponenten, was dann auch für $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - A$ gilt. In $k \cdot e^{\omega_1} + \dots + k \cdot e^{\omega_l} - A$ sind die Vorfaktoren der e -Funktionen dort alle gleich $k \in \mathbb{Z}$. Also ist bewiesen: Es gibt $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_r = n$, so dass für alle t mit $0 \leq t < n$ gilt: $\alpha_{n_{t+1}}, \dots, \alpha_{n_{t+1}}$ ist ein vollständiges Nullstellensystem eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, wobei

zusätzlich $\beta_{n_t+1} = \beta_{n_t+2} = \dots = \beta_{n_{t+1}}$ (alle aus \mathbb{Z}) gilt. Zusammen mit dieser Eigenschaft gilt zusätzlich: Alle in $\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot e^{\alpha_i}$ auftretende Exponenten können als paarweise verschieden angenommen werden! Das war es.

Vorbereitungen:

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sind algebraisch. Es gibt dann eine natürliche Zahl ℓ so, dass $\ell\alpha_1, \dots, \ell\alpha_n$ ganz-algebraisch sind. Beweis: Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch, dann gibt es ein normiertes Polynom $h(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$ mit $h(\alpha) = 0$. Da alle a_i aus \mathbb{Q} sind, gibt es ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so, dass $m \cdot a_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt. Es gilt also

$$h(\alpha) = 0 = \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \alpha^1 + a_0 \Rightarrow m^n \cdot 0 = m^n \cdot \alpha^n + m^n \cdot a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \dots + m^n \cdot a_1 \cdot \alpha^1 + m^n \cdot a_0$$

Und die rechte Seite ist dann gleich zu:

$$0 = (m \cdot \alpha)^n + \underbrace{m^1 \cdot a_{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} \cdot (m \cdot \alpha)^{n-1} + \underbrace{m^2 \cdot a_{n-2}}_{\in \mathbb{Z}} \cdot (m \cdot \alpha)^{n-2} + \dots + \underbrace{m^{n-1} \cdot a_1}_{\in \mathbb{Z}} \cdot (m \cdot \alpha)^1 + \underbrace{m^n \cdot a_0}_{\in \mathbb{Z}}$$

Man hat also ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten gefunden, das $m \cdot \alpha$ als Nullstelle hat. Also ist $m \cdot \alpha$ ganz-algebraisch. Wähle nun für alle $i = 1, \dots, n$ zu α_i ein $\ell_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so, dass $\ell_i \alpha_i$ ganz-algebraisch ist. Sei dann $\ell := \text{kgV}(\ell_1, \dots, \ell_n)$. Es gibt dann $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $\ell = k_1 \cdot \ell_1 = k_2 \cdot \ell_2 = \dots = k_n \cdot \ell_n$. Also gilt dann $\ell \alpha_i = k_i \cdot (\ell_i \alpha_i)$ ($i = 1, \dots, n$). Weil $k_i \in \mathbb{N}$ und $\ell_i \alpha_i$ ganz-algebraisch sind, so ist es auch $k_i \cdot (\ell_i \alpha_i) = (k_i \cdot \ell_i) \cdot \alpha_i = \ell \alpha_i$, Beweis-Ende. Es sei für $i = 1, \dots, n$ folgende Hilfsfunktion definiert:

$$f_i(x) = \ell^{np} \cdot \frac{(x - \alpha_1)^p \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)^p}{x - \alpha_i}$$

Wie man leicht nachweist, gilt: $f_i^{(j)}(\alpha_k) = 0$ für $j < p-1$ und $p! \mid f_i^{(j)}(\alpha_k)$ für $j > p-1$. Für $j = p-1$ und $k \neq i$ ist $f_i^{(j)}(\alpha_k) = f_i^{(p-1)}(\alpha_k) = 0$. Für $j = p-1$ und $k = i$ ist $f_i^{(j)}(\alpha_k) = f_i^{(p-1)}(\alpha_i) = \ell^{np} \cdot (p-1)! \cdot \prod_{m=1}^n (\alpha_i - \alpha_m)^p$. Nach

Konstruktion von $f_i(x)$ ist $f_i^{(j)}(\alpha_k)$ und sogar $\frac{f_i^{(j)}(\alpha_k)}{(p-1)!}$ ganz-algebraisch. Sei $I_i(c) = \int_{\overline{0c}} e^{c-u} \cdot f_i(u) du$. Dabei sei $\widetilde{0c}$ ein Weg in der Gauß'schen Zahlenebene, der bei 0 beginnt und bei c endet. Da der Integrand $e^{c-u} \cdot f_i(u)$ des Kurvenintegrals holomorph ist, ist das Kurvenintegral wegunabhängig. Man kann also den speziellen Weg $\overline{0c}$ (Strecke von 0 nach c) wählen, ohne, dass sich der Wert des Kurvenintegrals ändert. Also:

$$I_i(c) = \int_{\overline{0c}} e^{c-u} \cdot f_i(u) du = \int_{\overline{0c}} e^{c-u} \cdot f_i(u) du$$

Weiterhin sei $J_i = \beta_1 \cdot I_i(\alpha_1) + \dots + \beta_n \cdot I_i(\alpha_n)$ und $J = J_1 \cdot \dots \cdot J_n$.

Die algebraische Abschätzung von $|J|$ nach unten:

Es wird mehrfach die partielle Integration ausgeführt:

$$\begin{aligned} I_i(c) &= \int_{\overline{0c}} e^{c-u} \cdot f_i(u) du = \int_{\overline{0c}} e^{c-u} \cdot f_i(u) du = \int_0^1 e^{c-t \cdot c} \cdot f_i(t \cdot c) \cdot (t \cdot c)' dt = \int_0^1 e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i(t \cdot c) \cdot c dt \\ &= \left[\frac{1}{-c} \cdot e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i(t \cdot c) \cdot c \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{-c} \cdot e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i^{(1)}(t \cdot c) \cdot c \cdot c dt = \left[-e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i(t \cdot c) \right]_0^1 + \int_0^1 e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i^{(1)}(t \cdot c) \cdot c dt \\ &= (-f_i(c) + e^c \cdot f_i(0)) + \left[\frac{1}{-c} \cdot e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i^{(1)}(t \cdot c) \cdot c \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{-c} \cdot e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i^{(2)}(t \cdot c) \cdot c \cdot c dt \\ &= (-f_i(c) + e^c \cdot f_i(0)) + (-f_i^{(1)}(c) + e^c \cdot f_i^{(1)}(0)) + \int_0^1 e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i^{(2)}(t \cdot c) \cdot c dt \\ &= (-f_i(c) + e^c \cdot f_i(0)) + (-f_i^{(1)}(c) + e^c \cdot f_i^{(1)}(0)) + \left[\frac{1}{-c} \cdot e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i^{(2)}(t \cdot c) \cdot c \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{-c} \cdot e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i^{(3)}(t \cdot c) \cdot c \cdot c dt \\ &= (-f_i(c) + e^c \cdot f_i(0)) + (-f_i^{(1)}(c) + e^c \cdot f_i^{(1)}(0)) + (-f_i^{(2)}(c) + e^c \cdot f_i^{(2)}(0)) + \int_0^1 e^{c \cdot (1-t)} \cdot f_i^{(3)}(t \cdot c) \cdot c dt = \dots \end{aligned}$$

Macht man so weiter, so erhält man: $I_i(c) = e^c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} f_i^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{\infty} f_i^{(k)}(c)$. Weil f_i ein Polynom vom Grad $np-1$ ist, gilt also sogar:

$$I_i(c) = e^c \cdot \sum_{k=0}^{np-1} f_i^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{np-1} f_i^{(k)}(c)$$

$$\begin{aligned} J_i &= \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot I_i(\alpha_k) = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot \left(e^{\alpha_k} \cdot \sum_{j=0}^{np-1} f_i^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{np-1} f_i^{(j)}(\alpha_k) \right) = \sum_{k=1}^n \left(\beta_k \cdot e^{\alpha_k} \cdot \sum_{j=0}^{np-1} f_i^{(j)}(0) \right) - \sum_{k=1}^n \left(\beta_k \cdot \sum_{j=0}^{np-1} f_i^{(j)}(\alpha_k) \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{np-1} f_i^{(j)}(0) \right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \beta_k \cdot e^{\alpha_k} \right)}_{=0} - \sum_{j=0}^{np-1} \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot f_i^{(j)}(\alpha_k) = - \sum_{j=0}^{np-1} \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot f_i^{(j)}(\alpha_k) \end{aligned}$$

Denn: $\sum_{k=1}^n \beta_k \cdot e^{\alpha_k} = 0$ ist die Widerspruchssannahme. Aus Vorbereitungen oben, weiß man, dass die Primzahl p alle $f_i^{(j)}(\alpha_k)$ teilt (es gilt nämlich: $p \mid 0$), also auch $\beta_k \cdot f_i^{(j)}(\alpha_k)$, nur $f_i^{(p-1)}(\alpha_i)$ nicht. Sei p echt größer als β_i , dann gilt $p \nmid \beta_i$, also auch $p \nmid \beta_i \cdot f_i^{(p-1)}(\alpha_i)$.

Weil nun aber $J_i = - \sum_{j=0}^{np-1} \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot f_i^{(j)}(\alpha_k)$ ist, folgt also $p \nmid J_i$, also $J_i \neq 0$, denn gelte $J_i = 0$, dann würde $p \mid J_i$ gelten. Beweis von $p \nmid f_i^{(p-1)}(\alpha_i)$: Mal angenommen, die ganz-algebraische Zahl $f_i^{(p-1)}(\alpha_i) = \ell^{np} \cdot (p-1)! \cdot \prod_{\substack{m=1 \\ (m \neq i)}}^n (\alpha_i - \alpha_m)^p$ wird von der ganz-algebraischen Zahl $p \in \mathbb{Z}$ geteilt, dann gibt es also eine ganz-algebraische Zahl λ so, dass $\ell^{np} \cdot (p-1)! \cdot \prod_{\substack{m=1 \\ (m \neq i)}}^n (\alpha_i - \alpha_m)^p = \lambda \cdot p = \ell^p \cdot (p-1)! \cdot \delta_i^p$ mit $\delta_i := \prod_{\substack{m=1 \\ (m \neq i)}}^n (\ell\alpha_i - \ell\alpha_m)$. Weil die Summe und das Produkt ganz-algebraischer Zahlen nun ganz-algebraisch ist, ist δ_i also ganz-algebraisch. δ_i ist also Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1. Sei $\delta_i = \delta^{(1)}$ und $\delta^{(2)}, \delta^{(3)}, \dots, \delta^{(l)}$ alle anderen Nullstellen dieses Polynoms. Wegen $\prod_{j=1}^l (x - \delta^{(j)}) \in \mathbb{Z}[x]$ folgt dann $d_i := \delta^{(1)} \cdot \delta^{(2)} \cdots \delta^{(l)} \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: $\lambda \cdot p \cdot \Delta = \lambda \cdot p \cdot (\delta^{(2)} \cdot \delta^{(3)} \cdots \delta^{(m)})^p = \ell^p \cdot (p-1)! \cdot (\delta^{(1)} \cdot \delta^{(2)} \cdots \delta^{(m)})^p = \ell^p \cdot (p-1)! \cdot d_i^p$, wobei $\Delta := (\delta^{(2)} \cdot \delta^{(3)} \cdots \delta^{(m)})^p$ (ganz-algebraisch) sei, und es war $\ell, p, d_i \in \mathbb{Z}$, alle ungleich 0. Es gibt dann also eine ganz-algebraische Zahl $\lambda' = \lambda \cdot \Delta$ so, dass gilt $\lambda' \cdot p = \ell^p \cdot (p-1)! \cdot d_i^p$. Weil λ' ganz-algebraisch ist und $\lambda' = \frac{\ell^p \cdot (p-1)! \cdot d_i^p}{p} \in \mathbb{Q}$ gilt, folgt nach Lemma (Rational und ganz-algebraisch) oben: $\lambda' = k(p) \in \mathbb{Z}$, also teilt $p \in \mathbb{Z}$ die Zahl $\ell^p \cdot (p-1)! \cdot d_i^p = (p-1)! \cdot (\ell d_i)^p \in \mathbb{Z}$. Der Primfaktor p ist nicht in $(p-1)!$ enthalten. Macht man p echt größer als die ganze Zahl ℓd_i , dann ist der Primfaktor p auch nicht in ℓd_i enthalten, also auch nicht in $(\ell d_i)^p$, und das ist ein Widerpruch, denn es gilt doch $\lambda' \cdot p = \ell^p \cdot (p-1)! \cdot d_i^p$, also müsste der Primfaktor p in $(p-1)! \cdot (\ell d_i)^p$ aber enthalten sein. Beweis-Ende. Festzuhalten ist also:

$$J_i \neq 0 \Rightarrow |J_1| \cdots |J_n| = |J_1 \cdots J_n| = |J| \neq 0$$

Nach Annahme 2 oben gilt $\beta_1 \cdot e^{\alpha_1} + \dots + \beta_n \cdot e^{\alpha_n} = 0$ ($\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{Z}$), wobei es natürliche Zahlen $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_r = n$ gibt so, dass für $t \in \{0, \dots, r-1\}$ gilt, dass $\alpha_{n_t+1}, \dots, \alpha_{n_{t+1}}$ ein vollständiges Nullstellensystem eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. Weiter gilt $\beta_{n_t+1} = \beta_{n_t+2} = \dots = \beta_{n_{t+1}}$. Daraus folgt:

$$J_i = - \sum_{j=0}^{np-1} \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot f_i^{(j)}(\alpha_k) = - \sum_{j=0}^{np-1} \sum_{t=0}^{r-1} \beta_{n_t+1} \cdot f_i^{(j)}(\alpha_{n_t+1}) + \dots + \beta_{n_{t+1}} \cdot f_i^{(j)}(\alpha_{n_{t+1}})$$

Und das ist gleich zu:

$$J_i = - \sum_{j=0}^{np-1} \sum_{t=0}^{r-1} \beta_{n_t+1} \cdot (f_i^{(j)}(\alpha_{n_t+1}) + \dots + f_i^{(j)}(\alpha_{n_{t+1}}))$$

Sei σ eine Permutation, die n_t+1, \dots, n_{t+1} tauscht und die anderen festhält. Dann gilt:

$$J = J_{\sigma(1)} \cdot J_{\sigma(2)} \cdots J_{\sigma(n)} = \prod_{i=1}^n \left(- \sum_{j=0}^{np-1} \sum_{t=0}^{r-1} \beta_{n_t+1} \cdot (f_{\sigma(i)}^{(j)}(\alpha_{\sigma(n_t+1)}) + \dots + f_{\sigma(i)}^{(j)}(\alpha_{\sigma(n_{t+1})})) \right)$$

D.h. J ist symmetrisch in $\alpha_{n_t+1}, \dots, \alpha_{n_{t+1}}$ ($t \in \{0, \dots, r-1\}$). Man hat also eine gruppenweise Symmetrie. Nach dem Lemma (Gruppenweise Symmetrie) gibt es nun für $J \in \mathbb{Z}[\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1} | \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}]$ also ein Polynom $P \in \mathbb{Z}[e_{1,1}, \dots, e_{n_1-n_0,1} | e_{1,2}, \dots, e_{n_2-n_1,2} | \dots | e_{1,r}, \dots, e_{n_r-n_{r-1},r}]$, wobei $e_{1,t+1}, \dots, e_{n_{t+1}-n_t,t+1}$ die elementarsymmetrischen Polynome in $\alpha_{n_t+1}, \dots, \alpha_{n_{t+1}}$ mit $t \in \{0, \dots, r-1\}$ seien, so, dass gilt:

$$\begin{aligned} J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= J(\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1} | \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2} | \dots | \alpha_{n_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{n_r}) \\ &= P(e_{1,1}, \dots, e_{n_1-n_0,1} | e_{1,2}, \dots, e_{n_2-n_1,2} | \dots | e_{1,r}, \dots, e_{n_r-n_{r-1},r}) \end{aligned}$$

Weil die elementarsymmetrischen Polynome aus \mathbb{Q} sind (denn: $\alpha_{n_t+1}, \dots, \alpha_{n_{t+1}}$ ist für alle $t = 0, \dots, r-1$ ein vollständiges Nullstellensystem eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten, d.h. $(x - \alpha_{n_t+1}) \cdots (x - \alpha_{n_{t+1}}) = x^{n_{t+1}-n_t} + (-1)^1 \cdot e_{1,t+1} \cdot x^{n_{t+1}-n_t-1} + (-1)^2 \cdot e_{2,t+1} \cdot x^{n_{t+1}-n_t-2} + \dots + (-1)^{n_{t+1}-n_t} \cdot e_{n_{t+1}-n_t,t+1} \cdot x^0 \in \mathbb{Q}[x]$), folgt $J \in \mathbb{Q}$. Weil

$J_i = - \sum_{j=0}^{np-1} \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot f_i^{(j)}(\alpha_k)$ ganz-algebraisch ist (denn nach Vorbereitungen oben sind $\beta_k \in \mathbb{Z}$ und $f_i^{(j)}(\alpha_k)$ ganz-algebraisch), ist es auch $J = J_1 \cdot J_2 \cdots J_n$. Nach dem Lemma (Rational und ganz-algebraisch) ist also $J \in \mathbb{Z}$. Nun ist $\mathbb{Q} \ni \frac{J}{(p-1)!^n} =$

$\prod_{i=1}^n \left(- \sum_{j=0}^{np-1} \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot \frac{f_i^{(j)}(\alpha_k)}{(p-1)!} \right)$ ganz-algebraisch (denn nach Vorbereitungen oben sind $\beta_k \in \mathbb{Z}$ und $\frac{f_i^{(j)}(\alpha_k)}{(p-1)!}$ ganz-algebraisch),

also gilt nach Lemma (Rational und ganz-algebraisch) dann $\frac{J}{(p-1)!^n} \in \mathbb{Z}$, also $(p-1)!^n \mid |J|$, also $(p-1)! \mid |J|$, also folgt die wichtige Abschätzung:

$$(p-1)! \leq |J| \stackrel{s.o.}{\neq} 0$$

Das ist dann die algebraische Abschätzung von $|J|$ nach unten.

Die analytische Abschätzung von $|J|$ nach oben:

$$\begin{aligned} |I_i(c)| &= \left| \int_{\overline{0c}} e^{c-u} \cdot f_i(u) du \right| = \left| \int_0^1 e^{c-t \cdot c} \cdot f_i(t \cdot c) \cdot (t \cdot c)' dt \right| \leq \int_0^1 \left| e^{c-t \cdot c} \right| \cdot |f_i(t \cdot c)| \cdot |c| dt \leq \int_0^1 e^{|c-t \cdot c|} \cdot |f_i(t \cdot c)| dt \cdot |c| \\ &\leq \int_0^1 e^{|c|} \cdot |f_i(t \cdot c)| dt \cdot |c| = \int_0^1 |f_i(t \cdot c)| dt \cdot |c| \cdot e^{|c|} \leq \sup_{t \in [0,1]} |f_i(t \cdot c)| \cdot (1-0) \cdot |c| \cdot e^{|c|} = \sup_{u \in \overline{0c}} |f_i(u)| \cdot |c| \cdot e^{|c|} \end{aligned}$$

Denn es gilt: $|e^z| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}$ und e^x ist streng monoton steigend auf \mathbb{R} . Es gilt hier nochmal: $f_i(u) = \ell^{np} \cdot \frac{(u - \alpha_1)^p \cdot \dots \cdot (u - \alpha_n)^p}{u - \alpha_i} = \sum_{k=0}^{np-1} a_{k,i} \cdot u^k$, dann definiere $\bar{f}_i(u) = \sum_{k=0}^{np-1} |a_{k,i}| \cdot u^k$, dann gilt:

$$|f_i(u)| = \left| \sum_{k=0}^{np-1} a_{k,i} \cdot u^k \right| \leq \sum_{k=0}^{np-1} |a_{k,i}| \cdot |u|^k \leq \sum_{k=0}^{np-1} |a_{k,i}| \cdot |c|^k = \bar{f}_i(|c|)$$

Denn es wird $f_i(u)$ für $u \in \overline{0c}$ betrachtet und $\sum_{k=0}^{np-1} |a_{k,i}| \cdot x^k$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$. Also: $\sup_{u \in \overline{0c}} |f_i(u)| \leq \bar{f}_i(|c|)$. Also gilt dann: $|I_i(c)| \leq \sup_{u \in \overline{0c}} |f_i(u)| \cdot |c| \cdot e^{|c|} \leq |c| \cdot e^{|c|} \cdot \bar{f}_i(|c|)$. Daraus folgt:

$$|J_i| = |\beta_1 \cdot I_i(\alpha_1) + \dots + \beta_n \cdot I_i(\alpha_n)| = \sum_{k=1}^n |\beta_k| \cdot |I_i(\alpha_k)| \leq \sum_{k=1}^n |\beta_k| \cdot |\alpha_k| \cdot e^{|\alpha_k|} \cdot \bar{f}_i(|\alpha_k|)$$

Sei $C' := \max_{1 \leq k \leq n} (|\beta_k| \cdot |\alpha_k| \cdot e^{|\alpha_k|})$, also: $|J_i| \leq C' \cdot \sum_{k=1}^n \bar{f}_i(|\alpha_k|)$. Die Koeffizienten von $\bar{f}_i(x)$ sind sicher kleiner-gleich als die Koeffizienten von $\hat{f}_i(x) = \ell^{np} \cdot \frac{(x + |\alpha_1|)^p \cdot \dots \cdot (x + |\alpha_n|)^p}{x + |\alpha_i|}$, was man so sieht, wenn man $\bar{f}_i(x)$ und $\hat{f}_i(x)$ ausmultipliziert und bei den entsprechenden Koeffizienten die Dreiecksungleichung anwendet. Also gilt dann: $\bar{f}_i(|\alpha_k|) \leq \hat{f}_i(|\alpha_k|)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten dann die folgenden Abschätzungen:

$$\hat{f}_i(x) \leq \ell^{np} \cdot (x + \max(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|))^{np-1} \Rightarrow \bar{f}_i(|\alpha_k|) \leq \hat{f}_i(|\alpha_k|) \leq \ell^{np} \cdot (|\alpha_k| + \max(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|))^{np-1}$$

Definiere: $C'' := \ell^{np}$ und $C_k := |\alpha_k| + \max(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|)$, also gilt:

$$|J_i| \leq C' \cdot \sum_{k=1}^n \bar{f}_i(|\alpha_k|) \leq C' \cdot \sum_{k=1}^n C'' \cdot C_k^{np-1} = (C' \cdot C'') \cdot \sum_{k=1}^n C_k^{np-1}$$

Sei $K' := C' \cdot C''$ und $K := \max(C_1, \dots, C_n)$, also:

$$|J_i| \leq K' \cdot \sum_{k=1}^n K^{np-1} = K' \cdot (n \cdot K^{np-1}) = (K' \cdot n) \cdot K^{np-1}$$

Sei $L' := K' \cdot n$ und $L := K$, also: $|J_i| \leq L' \cdot L^{np-1}$. Mit $M := \max(L', L)$ folgt dann: $|J_i| \leq M^{np} = (M^n)^p$. Sei $C_{(i)} := M^n$, also $|J_i| \leq C_{(i)}^p$, also: $|J| = |J_1 \cdot \dots \cdot J_n| = |J_1| \cdot \dots \cdot |J_n| \leq \prod_{i=1}^n C_{(i)}^p = \left(\prod_{i=1}^n C_{(i)} \right)^p$. Mit $C := \prod_{i=1}^n C_{(i)}$ folgt dann daraus die wichtige Abschätzung:

$$0 \stackrel{s.o.}{\neq} |J| \leq C^p$$

Das ist dann die analytische Abschätzung von $|J|$ nach oben. Dabei galt hier immer: $C', C'', C_k, K', K, L', L, M, C_{(i)}, C \in \mathbb{R}^{>0}$.

Der Widerspruch:

Man weiß nun also $(p-1)! \leq |J|$ und $|J| \leq C^p$, also $(p-1)! \leq C^p$. Und das ist ein Widerspruch. Denn: Man wähle ein $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß so, dass gilt: $\frac{|C|}{N} \leq \frac{1}{2}$. Für $p \geq N$ gilt dann:

$$0 \leq \frac{|C|^p}{p!} = \frac{|C|}{p} \cdot \frac{|C|^{p-1}}{(p-1)!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{|C|}{p-1} \cdot \frac{|C|^{p-2}}{(p-2)!} \leq \frac{1}{2^2} \cdot \frac{|C|^{p-2}}{(p-2)!} \leq \dots \leq \frac{1}{2^{p-N}} \cdot \frac{|C|^N}{N!} = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{|2 \cdot C|^N}{N!} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

Denn N ist fest. Es folgt also: $\left| \frac{C^p}{p!} - 0 \right| \leq \frac{|C|^p}{p!} \rightarrow 0$. Also gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $p \geq K$ gilt: $\frac{|C|^p}{p!} < \frac{1}{p}$, also $(p-1)! > |C|^p = C^p$, denn für das C von oben (analytische Abschätzung) gilt: $|C| = C$ wegen $C \in \mathbb{R}^{>0}$. Und deswegen hat man den Widerspruch zu $(p-1)! \leq C^p$. Das ist der Beweis des Satzes. \square

Korollar. Es gelten folgende Behauptungen:

1. Wenn eine Zahl transzendent ist, dann ist sie auch irrational.
2. Die Euler'sche Zahl e und π sind transzendent.
3. Sei $0 \neq \alpha$ algebraisch, dann sind e^α , $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ transzendent.
4. Wenn $0,1 \neq \alpha$ algebraisch ist, dann ist $\ln(\alpha)$ transzendent.

Beweis. Zu 1.: Sei eine Zahl α rational, also $\alpha \in \mathbb{Q}$, dann ist $x - \alpha$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, welches α als Nullstelle hat. Also ist α algebraisch. Umkehrschluss: Ist α transzendent, also nicht algebraisch, dann ist α nicht rational, also irrational. Nach dem Satz von Lindemann-Weierstraß gilt: Seien λ_1, λ_2 algebraische Zahlen ungleich 0 und ω_1, ω_2 verschiedene algebraische Zahlen, dann gilt: $\lambda_1 \cdot e^{\omega_1} + \lambda_2 \cdot e^{\omega_2} \neq 0$. Zu 2.: Sei also e algebraisch, dann setze $\lambda_1 = e$,

$\lambda_2 = -1$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, dann gilt: $\lambda_1 \cdot e^{\omega_1} + \lambda_2 \cdot e^{\omega_2} = e \cdot e^0 + (-1) \cdot e^1 = e - e = 0$, im Widerpruch zum Lindemann-Weierstraß-Theorem. Also muss e transzendent sein. Angenommen, π ist algebraisch. Weil die imaginäre Einheit i und die Zahl 2 algebraisch sind, folgt, dass auch $i \cdot \pi$ und $2 \cdot i \cdot \pi$ algebraisch sind. Setze dann: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\omega_1 = i \cdot \pi$, $\omega_2 = 2 \cdot i \cdot \pi$, dann gilt: $\lambda_1 \cdot e^{\omega_1} + \lambda_2 \cdot e^{\omega_2} = 1 \cdot e^{i \cdot \pi} + 1 \cdot e^{2 \cdot i \cdot \pi} = -1 + 1 = 0$ und das ist ein Widerpruch zum Lindemann-Weierstraß-Theorem, also ist π transzendent. Zu 3.: Angenommen, e^α ist algebraisch, dann setze: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = e^\alpha$, $\omega_1 = \alpha$, $\omega_2 = 0$, dann gilt: $\lambda_1 \cdot e^{\omega_1} + \lambda_2 \cdot e^{\omega_2} = -1 \cdot e^\alpha + e^\alpha = -e^\alpha + e^\alpha = 0$, im Widerspruch zum Lindemann-Weierstraß-Theorem. Also ist e^α transzendent. Angenommen, $\cos(\alpha)$ ist algebraisch, dann ist wegen $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, also $|\sin(\alpha)| = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$, auch $\sin(\alpha)$ algebraisch, denn die Wurzel einer algebraischen Zahl ist algebraisch, was man so sieht: Sei a algebraisch, dann gibt es ein Polynom $p(x)$ mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1 so, dass gilt $p(a) = 0$. Dann ist $p^*(x) := p(x^2)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1 mit $p^*(\sqrt{a}) = 0$, also ist \sqrt{a} algebraisch. Ist $\sin(\alpha)$ algebraisch, dann ist wegen $|\cos(\alpha)| = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$ auch $\cos(\alpha)$ algebraisch. Also: Ist einer von beiden, $\cos(\alpha)$ oder $\sin(\alpha)$, algebraisch, dann sind es beide, also ist auch $\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) = e^{i \cdot \alpha}$ algebraisch, denn i ist algebraisch. Das ist ein Widerspruch, denn $e^{i \cdot \alpha}$ ist transzendent, weil $i \cdot \alpha \neq 0$ algebraisch ist. Also müssen beide, $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$, transzendent sein. Zu 4.: Mal angenommen, $\ln(\alpha)$ ist algebraisch, dann setze $a = \ln(\alpha) \neq 0$. Weil $a \neq 0$ algebraisch ist, so ist nach 3. dann $e^a = e^{\ln(\alpha)} = \alpha$ transzendent, Widerspruch, weil α nach Voraussetzung algebraisch ist. Also ist $\ln(\alpha)$ transzendent. Ende! \square

Satz (Abgeschlossenheitssatz für die algebraischen Zahlen). *Seien a_0, \dots, a_{k-1} algebraische Zahlen. Sei $x \in \mathbb{C}$ derart, dass*

$$x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0$$

gilt. Dann ist x eine algebraische Zahl.

Beweis. Da die a_i ($i = 0, \dots, k-1$) nach Voraussetzung algebraisch sind, gibt es $n_i \in \mathbb{N}$ und $b_{i,j} \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq j < n_i$ so, dass gilt $a_i^{n_i} + b_{i,n_i-1} \cdot a_i^{n_i-1} + \dots + b_{i,1} \cdot a_i^1 + b_{i,0}$. Sei dann $p = k \cdot n_0 \cdot n_1 \cdot \dots \cdot n_{k-1}$ und z_1, z_2, \dots, z_p eine Aufzählung aller Produkte der Form $x^e \cdot a_0^{e_0} \cdot a_1^{e_1} \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}}$ mit $0 \leq e < k$, $0 \leq e_0 < n_0, \dots, 0 \leq e_{k-1} < n_{k-1}$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq p$: (#) $x \cdot z_i$ ist eine Linearkombination von z_1, z_2, \dots, z_p mit rationalen Koeffizienten, d.h. es gibt $c_{i,1}, \dots, c_{i,p} \in \mathbb{Q}$ mit $x \cdot z_i = c_{i,1} \cdot z_1 + \dots + c_{i,p} \cdot z_p$. Beweis von (#): Sei $z_i = x^e \cdot a_0^{e_0} \cdot a_1^{e_1} \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}}$ für gewisse e, e_0, \dots, e_{k-1} . Gilt $e+1 < k$, so ist $x \cdot z_i$ sogar gleich ein $z_{i'}$, also $x \cdot z_i = 1 \cdot z_{i'}$ mit $1 \in \mathbb{Q}$. Sei also $e+1 = k$. Man ersetzt nun in $x \cdot z_i = x^k \cdot a_0^{e_0} \cdot a_1^{e_1} \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}}$ die Potenz x^k durch $-a_{k-1} \cdot x^{k-1} - \dots - a_1 \cdot x^1 - a_0 (= x^k)$ und multipliziert aus. Also:

$$x \cdot z_i = -x^{k-1} \cdot a_0^{e_0} \cdot a_1^{e_1} \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}+1} - \dots - x^1 \cdot a_0^{e_0} \cdot a_1^{e_1+1} \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}} - x^0 \cdot a_0^{e_0+1} \cdot a_1^{e_1} \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}}$$

Gilt in dieser Summe für $a_l^{e_l+1}$ ($l = 0, \dots, k-1$), dass $e_l+1 < n_l$ gilt, dann gilt $-x^l \cdot a_0^{e_0} \cdot \dots \cdot a_l^{e_l+1} \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}} \in \{-z_1, -z_2, \dots, -z_p\}$ mit $-1 \in \mathbb{Q}$. Gilt aber $e_l+1 = n_l$, dann wird $a_l^{e_l+1} = a_l^{n_l}$ ($l = 0, \dots, k-1$) durch $-b_{l,n_l-1} \cdot a_l^{n_l-1} - \dots - b_{l,1} \cdot a_l^1 - b_{l,0} (= a_l^{n_l})$ ersetzt. Also hat man dann das Folgende:

$$-x^l \cdot a_0^{e_0} \cdot \dots \cdot a_l^{n_l} \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}} = -x^l \cdot a_0^{e_0} \cdot \dots \left(-b_{l,n_l-1} \cdot a_l^{n_l-1} - \dots - b_{l,1} \cdot a_l^1 - b_{l,0} \right) \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}}$$

Und das ist also gleich zu:

$$\underbrace{b_{l,n_l-1} \cdot x^l \cdot a_0^{e_0} \cdot \dots \cdot a_l^{n_l-1} \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}}}_{\in \{z_1, z_2, \dots, z_p\}} + \dots + \underbrace{b_{l,1} \cdot x^l \cdot a_0^{e_0} \cdot \dots \cdot a_l^1 \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}}}_{\in \{z_1, z_2, \dots, z_p\}} + \underbrace{b_{l,0} \cdot x^l \cdot a_0^{e_0} \cdot \dots \cdot a_l^0 \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{e_{k-1}}}_{\in \{z_1, z_2, \dots, z_p\}}$$

Also ist (#) bewiesen. Seien $c_{i,j} \in \mathbb{Q}$, wie in (#), und sei $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ die zugehörige Matrix. Sei E_p ($p \times p$ -Matrix) die Einheitsmatrix und es gelte $\vec{z} = (z_1, \dots, z_p)^T$. Nach (#) gilt $(C - x \cdot E_p) \cdot \vec{z} = 0$. Da \vec{z} nicht der Nullvektor ist (denn: $x^0 \cdot a_0^0 \cdot a_1^0 \cdot \dots \cdot a_{k-1}^0 = 1$), folgt, dass die Spalten der Matrix $C - x \cdot E_p$ linear abhängig sind, also folgt $\det(C - x \cdot E_p) = 0$. Aus der Entwicklung der Determinante folgt, dass x eine Lösung von $x^p + r_{p-1} \cdot x^{p-1} + \dots + r_1 \cdot x^1 + r_0 = 0$ mit gewissen rationalen Koeffizienten r_{p-1}, \dots, r_0 ist (Dass $\det(C - x \cdot E_p) \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad p ist, macht man sich mit der Determinantenformel $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ klar, nämlich so: $\det(C - x \cdot E_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^p (c_{i,\sigma(i)} - \delta_{i,\sigma(i)} \cdot x)$ mit $\delta_{i,j} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{i,j} = 0$ für $i \neq j$). Also ist x algebraisch, was zu zeigen war. \square

Korollar. *Mindestens eine der Zahlen $e + \pi$ und $e \cdot \pi$ ist transzendent.*

Beweis. Angenommen, $e + \pi$ und $e \cdot \pi$ sind beide algebraisch, dann auch $a := -(e + \pi)$ und $b := e \cdot \pi$. Man betrachtet dann das Polynom $P(x) := (x - e) \cdot (x - \pi) = x^2 - (e + \pi)x + e \cdot \pi = x^2 + ax + b$, welches also algebraische Koeffizienten hat. Also sind nach dem Satz (Abgeschlossenheitssatz für die algebraischen Zahlen) oben die Nullstellen von P algebraisch. Nun gilt aber $P(e) = P(\pi) = 0$, also wären e und π algebraisch, Widerpruch, denn e und π sind transzendent. Folglich können $e + \pi$ und $e \cdot \pi$ nicht beide algebraisch sein. \square

Satz (Liouville). *Sei α eine algebraische Zahl vom Grad $n \geq 2$. Dann gibt es ein $K > 0$ so, dass für alle $p \in \mathbb{Z}$ und für alle $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $\frac{p}{q} \neq \alpha$ dann das Folgende gilt:*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{K}{q^n}$$

Beweis. Ist $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (also $|\operatorname{Im}(\alpha)| > 0$), dann gilt $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \left(\operatorname{Re}(\alpha) - \frac{p}{q} \right) + i \cdot \operatorname{Im}(\alpha) \right| = \sqrt{\left(\operatorname{Re}(\alpha) - \frac{p}{q} \right)^2 + (\operatorname{Im}(\alpha))^2} \geq \sqrt{(\operatorname{Im}(\alpha))^2} = |\operatorname{Im}(\alpha)| \geq \frac{|\operatorname{Im}(\alpha)|}{q^n}$, denn wegen $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt doch $q^n \geq 1$. Also ist man hier fertig. Sei also von nun an $\alpha \in \mathbb{R}$. Falls $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > r$ für ein $r > 0$ gilt, dann ist man fertig, denn $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > r \geq \frac{r}{q^n}$, also $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{r}{q^n}$, wegen $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei also von nun an $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq r$. Da α eine algebraische Zahl vom Grad $n \geq 2$ ist, gibt es ein Minimalpolynom $f_0 \in \mathbb{Q}[x]$ von α , nämlich: $f_0(x) = x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + b_1 \cdot x^1 + b_0$ mit $b_{n-1}, \dots, b_1, b_0 \in \mathbb{Q}$ und $\operatorname{grad}(f_0) \geq 2$, also $f_0(\alpha) = 0$. Angenommen, es gilt $f_0\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, dann kann man wegen $\operatorname{grad}(f_0) \geq 2$ schreiben: $f_0(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) \cdot h(x)$ mit $x - \frac{p}{q}, h \in \mathbb{Q}[x]$ und $\operatorname{grad}\left(x - \frac{p}{q}\right), \operatorname{grad}(h) < \operatorname{grad}(f_0)$. Also würde folgen $0 = f_0(\alpha) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right) \cdot h(\alpha)$. Wegen $\frac{p}{q} \neq \alpha$ folgt $h(\alpha) = 0$, also hat man ein Polynom kleineren Grades als das des Minimalpolynoms f_0 gefunden, welches α als Nullstelle hat, Widerspruch. Also gilt $f_0\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Durch Multiplikation von f_0 mit dem Hauptnenner der b_i ($i = 1, \dots, n-1$) erhält man ein Polynom $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$ mit Koeffizienten aus \mathbb{Z} , wobei weiterhin $\operatorname{grad}(f) = \operatorname{grad}(f_0) \geq 2$ und $f(\alpha) = 0$ sowie $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ gilt. Wegen $\alpha \neq \frac{p}{q}$ folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) - 0 = f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \cdot f'(\xi)$$

für eine Stelle ξ , die sich zwischen $\frac{p}{q}$ und α befindet. Zusammen mit $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq r$ folgt für ξ dann $|\xi - \alpha| \leq r$, also $\xi \in [\alpha - r, \alpha + r]$.

Da f' als Polynom stetig ist, folgt, dass f' auf $[\alpha - r, \alpha + r]$ beschränkt ist, also $f'(\xi) \leq M$ ($M > 0$). Nun gilt $q^n \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) = q^n \cdot \left(a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^1 + a_0\right) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot q^1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \cdot p^1 + a_0 \in \mathbb{Z}$. Weil $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ gilt, folgt also $\left| q^n \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq 1$, also $\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \cdot M \geq \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \cdot |f'(\xi)| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{q^n}$, also $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{M}$. Insgesamt gilt also $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{r}{q^n}$ oder $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{M}$. Setzt man $K := \min\left\{r, \frac{1}{M}\right\}$ ($K > 0$), dann gilt im Allgemeinen: $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{K}{q^n}$. Das war es dann auch schon! \square

Korollar. Die Liouville-Konstante $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$ ist transzendent.

Beweis. Sei $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$. Setze dann $\frac{p_k}{q_k} := \sum_{i=0}^k \frac{1}{10^{i!}} \in \mathbb{Q}$ mit $q_k := 10^{k!} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, also $p_k = \sum_{i=0}^k \frac{10^{k!}}{10^{i!}} \in \mathbb{Z}$. Weiter gilt $\alpha \neq \frac{p_k}{q_k}$ für alle k . Angenommen, α ist eine algebraische Zahl vom Grad $n \geq 2$, dann gibt es nach dem Satz (Liouville) oben ein $K > 0$ so, dass für alle k gilt: $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{K}{q_k^n}$. Nun gilt aber das Folgende:

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} - \sum_{i=0}^k \frac{1}{10^{i!}} \right| = \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} \right| = \frac{1}{10^{(k+1)!}} + \left(\frac{1}{10^{(k+1)!}} \right)^{k+2} + \left(\frac{1}{10^{(k+1)!}} \right)^{(k+2) \cdot (k+3)} + \dots \\ &\stackrel{k \geq 0}{\leq} \frac{1}{10^{(k+1)!}} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) = \frac{S}{q_k^{k+1}} \end{aligned}$$

Dabei gilt $S := 1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} \right) - \frac{1}{10^1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{1}{10^1} = \frac{91}{90}$. Insgesamt folgt also:

$$\frac{S}{q_k^{k+1}} \geq \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{K}{q_k^n} \Rightarrow \left(\frac{1}{q_k} \right)^{k+1-n} = \frac{q_k^n}{q_k^{k+1}} \geq \frac{K}{S} =: C > 0$$

Weil $\left(\frac{1}{q_k} \right)^{k+1-n} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt, gibt es ein k groß genug so, dass $\left(\frac{1}{q_k} \right)^{k+1-n} < C$ gilt, Widerspruch. Also ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$ transzendent oder eine algebraische Zahl vom Grad $n = 1$, welche also rational ist. Weil $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$ aber weder abbrechend noch periodisch ist, also nicht rational ist, folgt also, dass die Liouville-Konstante transzendent ist. \square

Der Satz von Fermat-Wiles für Kuben

[Zurück zur Liste]

Lemma (Schlüssellemma). Sei s ungerade mit $s^3 = a^2 + 3b^2$ und $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$. Dann gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} s &= u^2 + 3v^2 \\ a &= u \cdot (u^2 - 9v^2) \\ b &= 3v \cdot (u^2 - v^2) \end{aligned}$$

Dabei gilt $\operatorname{ggT}(u, v) = 1$, $3 \nmid u$ und $u \not\equiv v \pmod{2}$.

Satz (Euler). Die Gleichung $X^3 + Y^3 = Z^3$ besitzt keine ganzzahlige Lösung (X, Y, Z) mit $X \cdot Y \cdot Z \neq 0$.

Beweis. Sei $\lambda := \text{ggT}(X, Y)$. Dann gilt $(\lambda \cdot X')^3 + (\lambda \cdot Y')^3 = \lambda^3 \cdot ((X')^3 + (Y')^3) = Z^3$, also gilt $\lambda^3 \mid Z^3$. Es wird gezeigt, dass dann $\lambda \mid Z$ gilt: Sei $\alpha := \text{ggT}(\lambda, Z)$, dann gilt $\text{ggT}\left(\frac{\lambda}{\alpha}, \frac{Z}{\alpha}\right) = 1$, also folgt $\text{ggT}\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3, \left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3\right) = 1$, denn: Sei $p \neq 1$ ein gemeinsamer Primfaktor von $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3$ und $\left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3$, d.h. es gilt $p \mid \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3$ und $p \mid \left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3$, also gilt $p \mid \frac{\lambda}{\alpha}$ und $p \mid \frac{Z}{\alpha}$, denn die Kontraposition davon gilt. Weil $\text{ggT}\left(\frac{\lambda}{\alpha}, \frac{Z}{\alpha}\right) = 1$ gilt, ist also $p = 1$, Widerspruch, also muss $\text{ggT}\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3, \left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3\right) = 1$ gelten. Nun gilt $Z^3 = k \cdot \lambda^3$, denn: $\lambda^3 \mid Z^3$, also $\left(\alpha \cdot \frac{Z}{\alpha}\right)^3 = k \cdot \left(\alpha \cdot \frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \Leftrightarrow \alpha^3 \cdot \left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3 = k \cdot \alpha^3 \cdot \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3 = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \cdot k$. Es folgt $\text{ggT}\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3, k\right) = 1$, weil: Wäre $\text{ggT}\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3, k\right) = \beta > 1$, dann folgt $\beta \mid \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3$ und $\beta \mid \left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3$ wegen $\left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3 = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \cdot k$ mit $\beta \mid k$, also wäre $\text{ggT}\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3, \left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3\right) \geq \beta > 1$, also Widerspruch zu $\text{ggT}\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3, \left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3\right) = 1$. Aus $\left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3 = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \cdot k$ und $\text{ggT}\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3, k\right) = 1$ folgt, dass es ein $q \in \mathbb{Z}$ gibt mit $q^3 = k$, denn wegen $\text{ggT}\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3, k\right) = 1$ liegen die Primfaktoren von $\left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3$ mit durch 3 teilbaren Exponenten mit ganzem Exponenten entweder in der Primfaktorzerlegung von $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3$ oder in der von k . Daraus folgt dann $\left(\frac{Z}{\alpha}\right)^3 = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \cdot k = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \cdot q^3 = \left(\frac{\lambda}{\alpha} \cdot q\right)^3$, also $\frac{Z}{\alpha} = \frac{\lambda}{\alpha} \cdot q \Leftrightarrow Z = \lambda \cdot q$, folglich $\lambda \mid Z$, was man zeigen wollte. Es gilt also $(X')^3 + (Y')^3 = \left(\frac{Z}{\lambda}\right)^3 = (Z')^3$ mit $\frac{Z}{\lambda} \in \mathbb{Z}$, wobei man nun erreicht hat, dass X' und Y' teilerfremd sind. Was man mit X und Y gemacht hat, kann man auch mit den Paaren X', Z' und Y'', Z'' machen, ohne die bisherige Teilerfremdheit anderer neuer Paare zu verlieren, so dass man also paarweise teilerfremde Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ ($x \cdot y \cdot z \neq 0$) erhält. Die drei Zahlen müssen paarweise verschieden sein, denn wäre z.B. $x = y$, dann folgt aus $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, dass gilt $2x^3 = (-z)^3$, also $-z = \sqrt[3]{2} \cdot x \notin \mathbb{Z}$, also Widerspruch. Keine zwei Variablen aus x, y, z können gerade sein, wegen der paarweisen Teilerfremdheit. ungerade³ + ungerade³ = gerade, gerade³ + ungerade³ = ungerade³ + gerade³ = ungerade und es geht nicht: gerade³ + gerade³ = gerade. Es gilt: $z^3 = \text{gerade} \Leftrightarrow z = \text{gerade}$, denn: gerade³ = gerade und ungerade³ = ungerade. Es ist also so, dass immer genau zwei Variablen ungerade sind und genau eine gerade. Durch Umbenennung der Variablen kann man also o.B.d.A annehmen, dass bei $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ dann x und y ungerade sind und z gerade ist. Von allen solchen Lösungen, die $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ erfüllen, mit $x \cdot y \cdot z \neq 0$ und x, y ungerade und z gerade sowie x, y, z paarweise verschieden, sucht man sich die Lösung heraus, die mit minimalem $|z|$ gegeben ist. Es wird dann gefunden, dass es von Null verschiedene, paarweise teilerfremde ganze Zahlen l, m, n gibt mit n gerade, so dass gilt $l^3 + m^3 + n^3 = 0$, ABER: $|n| < |z|$, was ein Widerspruch zur Minimalität von $|z|$ darstellt, der die Behauptung des Satzes beweist. Also los: Da $x+y$ und $x-y$ gerade sind, weil x und y ungerade sind, gibt es also ganze Zahlen a, b so, dass $2a = x+y$ und $2b = x-y$. Somit ist dann $x = a+b$ und $y = a-b$ und demnach ist $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\text{ggT}(a, b) = 1$ und a, b sind von verschiedener Parität. Denn: Wäre $b = 0$, so folgt $0 = 2 \cdot 0 = x-y$, also $x = y$, Widerspruch, da x und y verschieden sind. Wäre $a = 0$, so folgt aus $2a = x+y$, dass gilt $x = -y$, also $x^3 + y^3 + z^3 = (-y)^3 + y^3 + z^3 = -y^3 + y^3 + z^3 = z^3 = 0$, also $z = 0$, Widerspruch. Wäre $\text{ggT}(a, b) \neq 1$, dann folgt, dass es eine ganze Zahl $\gamma > 1$ gibt mit $\gamma \mid a$ und $\gamma \mid b$, also folgt daraus $\gamma \mid a+b$ und $\gamma \mid a-b$ ($x = a+b$ und $y = a-b$), also wäre schließlich $\text{ggT}(x, y) \neq 1$, Widerspruch. Wären a und b nicht von verschiedener Parität, so wären beide gerade oder beide ungerade. Wären beide gerade, dann wäre $\text{ggT}(a, b) \geq 2$, also $\text{ggT}(a, b) \neq 1$, Widerspruch. Wären beide ungerade, dann wäre $a+b = x$ gerade und $a-b = y$ gerade, also $\text{ggT}(x, y) \geq 2$, also: $\text{ggT}(x, y) \neq 1$, Widerspruch. Fölglich gilt jetzt also das Folgende:

$$\begin{aligned} -z^3 &= x^3 + y^3 \\ &= (a+b)^3 + (a-b)^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ &= 2a^3 + 6ab^2 \\ &= 2a \cdot (a^2 + 3b^2) \end{aligned}$$

Nun ist $-z^3$ gerade, weil z gerade ist. Also folgt $8 \mid z^3$. $a^2 + 3b^2$ ist ungerade, denn: Ist a gerade und b ungerade, dann ist a^2 gerade und b^2 ungerade, also $3b^2$ ungerade. Also ist $a^2 + 3b^2 = \text{gerade} + \text{ungerade} = \text{ungerade}$. Ist a ungerade und b gerade, dann ist a^2 ungerade und $3b^2$ gerade, also auch in diesem Fall ist $a^2 + 3b^2$ ungerade. Aus $-z^3 = 2a \cdot (a^2 + 3b^2)$ und $a^2 + 3b^2$ ungerade, folgt wegen $8 \mid z^3$, dass gilt $8 \mid 2a$, also $4 \mid a$. Folglich ist a gerade und damit b ungerade. Es wird nun gezeigt, dass $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2)$ entweder 1 oder 3 ist. Wenn p^k ($k \geq 1$) die Potenz einer Primzahl $p > 1$ ist, die $2a$ und $a^2 + 3b^2$ teilt, dann ist $p \neq 2$, denn $a^2 + 3b^2$ ist ungerade, hat also nicht den Primfaktor 2 in seiner Primfaktorzerlegung. Es folgt $p^k \mid a$, denn $p^k \nmid 2$. Also gilt auch $p^k \mid a^2$. Wegen $p^k \mid a^2$ und $p^k \mid a^2 + 3b^2$ folgt $p^k \mid 3b^2$. Nun gilt $p \nmid b$, denn sonst gilt $p \mid a$ und $p \mid b$ mit $2 \neq p > 1$, also $\text{ggT}(a, b) \neq 1$, Widerspruch. Wegen $p \nmid b$ folgt aus $p^k \mid 3b^2$, dass $p^k \mid 3$ gilt. Ist p ein Primfaktor, also ungleich 1, so folgt $k = 1$ und $p = 3$, also $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2) = 3$. Ist $p \neq 3$, dann folgt $k = 1$ und $p = 1$, Widerspruch dazu, dass p ein gemeinsamer Primfaktor von $2a$ und $a^2 + 3b^2$ ist, d.h. es gilt in diesem Fall $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2) = 1$. Also: 1. Fall: $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2) = 1$: Es gilt dann $3 \nmid a$, denn sonst folgt $3 \mid 2a$ und wegen $3 \mid a$ auch $3 \mid a^2$; weil $3 \mid 3b^2$ gilt, folgt also $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2) \neq 1$, Widerspruch. Aus $-z^3 = 2a \cdot (a^2 + 3b^2)$ folgt mit $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2) = 1$, dass $2a$ und $a^2 + 3b^2$ dritte Potenzen sind, denn die Primfaktoren von $-z^3$ mit durch 3 teilbaren Exponenten liegen mit ihren gesamten Exponenten entweder in der Primfaktorzerlegung von $2a$ oder in der von $a^2 + 3b^2$, sonst

wäre $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2) \neq 1$, Widerspruch. Also hat man jetzt: $2a = r^3$ und $a^2 + 3b^2 = s^3$, wobei s ungerade ist, weil $a^2 + 3b^2$ ungerade ist. Nach dem Schlüssellemma (oben) gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $s = u^2 + 3v^2$, $a = u \cdot (u^2 - 9v^2)$ und $b = 3v \cdot (u^2 - v^2)$. Dann ist v ungerade (und also ungleich Null), weil $b = v \cdot [3 \cdot (u^2 - v^2)]$ sonst gerade wäre, im Widerspruch dazu, dass b ungerade ist. Weiter ist u gerade, denn sonst folgt $s = u^2 + 3v^2$ ungerade + ungerade = gerade, aber s ist ungerade. Es gilt $u \neq 0$, sonst wäre $a = 0$. Es gilt weiter $3 \nmid u$, sonst folgt mit $a = u \cdot (u^2 - 9v^2)$, dass auch $3 \mid a$ gilt, Widerspruch. Wichtig ist: $\text{ggT}(u, v) = 1$. Denn wäre $\delta > 1$ eine Zahl mit $\delta \mid u$ und $\delta \mid v$, dann folgt $\delta \mid a$ wegen $a = u \cdot [u^2 - 9v^2]$ und $\delta \mid b$ wegen $b = v \cdot [3 \cdot (u^2 - v^2)]$, also $\text{ggT}(a, b) \neq 1$, Widerspruch. Jetzt wird gezeigt, dass $2u, u + 3v$ und $u - 3v$ paarweise teilerfremd sind: Mal angenommen, $p > 1$ ist ein gemeinsamer Primfaktor von $u + 3v$ und $u - 3v$, daraus folgt $p \mid 2u$ und $p \mid 6v$, also $p \mid 2 \vee p \mid u$ und $p \mid 6 \vee p \mid v$. Angenommen: $p = 2$, dann folgt $2 \mid u + 3v$, aber $u + 3v$ ist ungerade, weil u gerade ist und v ungerade, also $p \neq 2$, also $p \mid u$ (denn: $p \mid 2 \vee p \mid u$), dann gilt also $p \nmid v$, sonst wäre $\text{ggT}(u, v) \neq 1$. Folglich: $p \mid 6$ (denn: $p \mid 6 \vee p \mid v$), also $p = 2$ oder $p = 3$. $p = 2$ wurde bereits ausgeschlossen. Sei $p = 3$; es gilt, wie oben gezeigt, dass gilt $p \mid u$, aber es gilt $3 \nmid u$. Es gilt also, dass $u + 3v$ und $u - 3v$ keine gemeinsamen Primfaktoren haben, sie sind also teilerfremd. Angenommen, $p > 1$ ist ein gemeinsamer Primfaktor von $2u$ und $u + 3v$. Also: $p \mid 2 \vee p \mid u$ und $p \mid u + 3v$. $p = 2$ kann nicht sein, weil $u + 3v$ ungerade ist, also $p \mid u$ (denn: $p \mid 2 \vee p \mid u$). Wegen $p \mid u + 3v$ und $p \mid u$ folgt dann $p \mid 3v$; es folgt $p \mid 3 \vee p \mid v$. Es gilt $p \nmid v$, denn sonst gelte $p \mid u \wedge p \mid v$, also $\text{ggT}(u, v) \neq 1$. Daraus folgt $p \mid 3$, also $p = 3$. Es kann $p = 3$ auch nicht sein, weil $3 \nmid u$ gilt, Widerspruch zu $p \mid u$, also haben $2u$ und $u + 3v$ keine gemeinsamen Teiler (> 1), sind also teilerfremd. Die Teilerfremdheit von $2u$ und $u - 3v$, zeigt man völlig analog zur Teilerfremdheit von $2u$ und $u + 3v$. Es sind also die ganzen Zahlen $2u, u + 3v$ und $u - 3v$ paarweise teilerfremd, und zusammen mit $r^3 = 2a = 2u \cdot (u + 3v) \cdot (u - 3v)$ folgt, dass $2u, u + 3v$ und $u - 3v$ dritte Potenzen sind, also: $2u = -n^3, u - 3v = l^3, u + 3v = m^3$ mit l, m, n verschieden von Null (wegen $3 \nmid u$) und paarweise teilerfremd, denn: $1 = \text{ggT}(2u, u - 3v) = \text{ggT}((-n)^3, l^3)$. Angenommen, $p > 1$ ist ein gemeinsamer Primteiler von $-n$ und l , dann folgt $p \mid (-n)^3$ und $p \mid l^3$. Wegen $\text{ggT}((-n)^3, l^3) = 1$ folgt also $p = 1$, Widerspruch dazu, dass p ein Primteiler ist. $-n$ und l haben also keinen gemeinsamen Primteiler, sind also teilerfremd. Wegen $\text{ggT}(2u, u + 3v) = \text{ggT}((-n)^3, m^3) = 1$ und $\text{ggT}(u - 3v, u + 3v) = \text{ggT}(l^3, m^3) = 1$ folgt, wie eben: $\text{ggT}(-n, m) = \text{ggT}(n, m) = 1 = \text{ggT}(l, m)$. Nun ist $l^3 + m^3 + n^3 = (u - 3v) + (u + 3v) + (-2u) = 0$, wobei n gerade ist. Nun wird gezeigt, dass $|n| < |z|$ gilt: Folgende Rechnung liefert den Widerspruch für den Fall $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2) = 1$:

$$\begin{aligned}|z|^3 &= |2a \cdot (a^2 + 3b^2)| \\&= |2a| \cdot (a^2 + 3b^2) \\&= |2 \cdot [u \cdot (u^2 - 9v^2)]| \cdot (a^2 + 3b^2) \\&= |2u \cdot (u^2 - 9v^2)| \cdot (a^2 + 3b^2) \\&= |-n^3 \cdot (u^2 - 9v^2)| \cdot (a^2 + 3b^2) \\&\geq |-n^3 \cdot (u^2 - 9v^2)| \cdot 3 \\&\geq |-n^3| \cdot 3 \\&> |n^3|\end{aligned}$$

Denn es gilt $\mathbb{Z} \ni u^2 + 9v^2 = (u - 3v) \cdot (u + 3v) = l^3 \cdot m^3 \neq 0$ und $b \neq 0$, weil b ungerade ist, also $a^2 + 3b^2 \geq 3$. Nun: 2. Fall: $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2) = 3$: Man setzt zunächst $a := 3c$, denn $3 \mid 2a \Rightarrow 3 \mid a$. Weil a gerade ist, ist c gerade. Wegen $8 \mid 2a \Rightarrow 4 \mid a$ und $a = 3c$ folgt $4 \mid c$. Wegen $3 \mid a$ darf nicht $3 \mid b$ gelten, denn sonst wäre $\text{ggT}(a, b) \neq 1$, also: $3 \nmid b$. Demnach gilt:

$$\begin{aligned}-z^3 &= x^3 + z^3 \\&= (a + b)^3 + (a - b)^3 \\&= (3c + b)^3 + (3c - b)^3 \\&= b^3 + 9b^2c + 27bc^2 + 27c^3 - b^3 + 9b^2c - 27bc^2 + 27c^3 \\&= 54c^3 + 18b^2c \\&= 18c \cdot (3c^2 + b^2)\end{aligned}$$

Dabei gilt $\text{ggT}(18c, 3c^2 + b^2) = 1$. Beweis: Oben wurde gezeigt, dass c gerade ist. Weil b ungerade ist und c gerade, folgt, dass $3c^2 + b^2$ ungerade ist. Man findet wegen $3 \nmid b \Rightarrow 3 \nmid b^2$ heraus: $3 \nmid 3c^2 + b^2$, denn es gilt $3 \mid 3c^2$, aber $3 \nmid b^2$. Es gilt weiter $\text{ggT}(a, b) = 1$, also auch $\text{ggT}(b, c) = 1$, denn: $c = \frac{a}{3}$; sei p ein gemeinsamer Primteiler von b und $c = \frac{a}{3}$, also $p \mid b$ und $p \mid \frac{a}{3}$, daraus folgt $p \mid b$ und $p \mid a$, also $p = 1$ (wegen $\text{ggT}(a, b) = 1$), Widerspruch, also haben b und c keine gemeinsamen Primteiler, sind also teilerfremd. Nun zum Beweis von $\text{ggT}(18c, 3c^2 + b^2) = 1$: Sei p ein gemeinsamer Primteiler von $18c$ und $3c^2 + b^2$. Es gilt $p \neq 2$, weil $2 \nmid 3c^2 + b^2$, weil $3c^2 + b^2$ ungerade ist, und es gilt $p \neq 3$, denn $3 \nmid 3c^2 + b^2$ (siehe oben). Da $p \mid 18c$, folgt $p \mid 18 \vee p \mid c$. Weil $p \neq 2$ und $p \neq 3$ gilt, folgt $p \nmid 18 = 2 \cdot 3^2$, also $p \mid c \Rightarrow p \mid 3c^2$. Aus $p \mid 3c^2$ und $p \mid 3c^2 + b^2$ folgt $p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b$, also $\text{ggT}(b, c) \geq p > 1$, Widerspruch. Damit ist $\text{ggT}(18c, 3c^2 + b^2) = 1$ bewiesen. Deswegen und weil $-z^3 = 18c \cdot (3c^2 + b^2)$ gilt, gilt, wie oben, der Schluss, dass $18c$ und $3c^2 + b^2$ dritte Potenzen sind: $18c = r^3$ und $3c^2 + b^2 = s^3$, wobei s ungerade ist und $3 \mid r$, weil $3 \mid r^3$ (3 ist eine Primzahl). Nach dem Schlüssellemma gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit: $s = u^2 + 3v^2$, $b = u \cdot (u^2 - 9v^2)$ und $c = 3v \cdot (u^2 - v^2)$. Dann ist u ungerade, sonst wäre b gerade. Also ist auch $u \neq 0$. Weiter ist $v \neq 0$, da $c \neq 0$. v ist gerade, sonst wäre b gerade. Es gilt vor allem $\text{ggT}(u, v) = 1$, sonst wäre $\text{ggT}(b, c) \neq 1$. Es wird nun bewiesen, dass $2v, u + v$ und $u - v$ paarweise teilerfremd sind: Sei p ein

gemeinsamer Primteiler von $u + v$ und $u - v$. Es folgt $p \mid 2u \wedge p \mid 2v$. Weil $p \neq 2$ ist (denn $p \mid u + v$, und $u + v$ ist ungerade), folgt $p \mid u \wedge p \mid v$, also $\text{ggT}(u, v) \neq 1$, Widerspruch. Also haben $u + v$ und $u - v$ keine gemeinsamen Primteiler, sind also teilerfremd. Sei nun p ein gemeinsamer Primteiler von $2v$ und $u + v$, also $p \mid 2v$ und $p \mid u + v$, es folgt dann $p \neq 2$, weil $u + v$ ungerade ist. Also gilt $p \mid v$. Weil $p \mid v$ und $p \mid u + v$ gilt, folgt $p \mid u$, also $\text{ggT}(u, v) \neq 1$, Widerspruch. $2v$ und $u + v$ sind teilerfremd. Genauso, wie eben, zeigt man die Teilerfremdheit von $2v$ und $u - v$. Aus $r^3 = 18c = 18 \cdot 3v \cdot (u^2 - v^2) = 54 \cdot v \cdot (u + v) \cdot (u - v)$ leitet man ab, dass $\left(\frac{r}{3}\right)^3 = 2v \cdot (u + v) \cdot (u - v)$ gilt. Daraus folgt, dass $2v, u + v$ und $u - v$ dritte Potenzen sind: $2v = -n^3, u + v = l^3$ und $u - v = -m^3$. Folglich ist $l^3 + m^3 + n^3 = (u + v) - (u - v) - 2v = 0$ mit l, m, n von Null verschieden und n ist gerade. Jetzt wird gezeigt, dass $|n| < |z|$ gilt: Folgende Rechnung liefert den Widerspruch für den Fall $\text{ggT}(2a, a^2 + 3b^2) = 3$:

$$\begin{aligned} |z|^3 &= 18 \cdot |c| \cdot (3c^2 + b^2) \\ &= 18 \cdot |3v \cdot (u^2 - v^2)| \cdot (3c^2 + b^2) \\ &= 54 \cdot |v \cdot (u^2 - v^2)| \cdot (3c^2 + b^2) \\ &= 27 \cdot |2v| \cdot |u^2 - v^2| \cdot (3c^2 + b^2) \\ &= 27 \cdot |-n^3| \cdot |u^2 - v^2| \cdot (3c^2 + b^2) \\ &= 27 \cdot |n|^3 \cdot |u^2 - v^2| \cdot (3c^2 + b^2) \\ &> |n|^3 \end{aligned}$$

Denn es gilt $\mathbb{Z} \ni u^2 - v^2 = (u + v) \cdot (u - v) = l^3 \cdot (-m^3) = -l^3 \cdot m^3 \neq 0$ und wegen $b \neq 0$ (denn: b ist ungerade) folgt $3c^2 + b^2 \geq 1$. Damit ist der Satz also vollständig bewiesen. \square

Als nächstes wird das Schlüssellemma bewiesen!

Lemma (Menge S). *Sei S die Menge der ganzen Zahlen der Form $a^2 + 3b^2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Dann ist S bezüglich der Multiplikation abgeschlossen, was später gebraucht wird.*

Beweis.

$$\begin{aligned} (a^2 + 3b^2) \cdot (c^2 + 3d^2) &= a^2c^2 + 3a^2d^2 + 3b^2c^2 + 9b^2d^2 \\ &= (a^2c^2 \pm 6abcd + 9b^2d^2) \mp 6abcd + 3 \cdot (a^2d^2 + b^2c^2) \\ &= (ac \pm 3bd)^2 + 3 \cdot (a^2d^2 \mp 2abcd + b^2c^2) \\ &= (ac \pm 3bd)^2 + 3 \cdot (ad \mp bc)^2 \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Lemma (1). *Sei p eine Primzahl ≥ 5 , dann gilt:*

$$p \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{N} : -3 \equiv w^2 \pmod{p}$$

Beweis. \Rightarrow : Nach Voraussetzung gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p - 1 = 3n$. Wegen $p \geq 5$ ist $2 \leq n < p - 1$. Die Kongruenz $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ hat in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ genau n Lösungen. Also existiert ein $y \in \mathbb{N}$, $y \not\equiv 0 \pmod{p}$ mit $y^n \not\equiv 1 \pmod{p}$. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt: $y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Setze $x = y^n$, dann gilt: $x \not\equiv 1 \pmod{p}$ und $x^3 = (y^n)^3 = y^{3n} = y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, d.h. $p \mid x^3 - 1 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$, aber $p \nmid x - 1$. Also gilt $p \mid x^2 + x + 1$. Setze nun $w = 2x + 1$:

$$\begin{aligned} w^2 + 3 &= (2x + 1)^2 + 3 \\ &= 4x^2 + 4x + 4 \\ &= 4 \cdot (x^2 + x + 1) \\ &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

D.h., es gilt $-3 \equiv w^2 \pmod{p}$.

\Leftarrow : Sei also ein $w \in \mathbb{N}$ mit $-3 \equiv w^2 \pmod{p}$ gegeben. Wegen $\text{ggT}(2, p) = 1$ gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $w - 1 = 2x + py$. Es folgt also $w \equiv (2x + 1) \pmod{p}$, und daher gilt außerdem $4 \cdot (x^2 + x + 1) = (2x + 1)^2 + 3 = w^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$, nach Voraussetzung. Wegen $p \neq 2$ ist $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Angenommen, es gilt $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, dann gilt ferner $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ und damit ist auch $(x+1) \cdot (x-1) \equiv 0 \pmod{p}$. Daher muss entweder $x+1 \equiv 0 \pmod{p}$ oder $x-1 \equiv 0 \pmod{p}$ gelten. Fall 1: $x+1 \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow x \equiv -1 \pmod{p}$. Einsetzen ergibt: $x^2 + x + 1 \equiv 1 \pmod{p}$, ferner gilt $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ und daher muss $p = 1$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $p \geq 5$. Fall 2: $x-1 \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{p}$. Einsetzen ergibt: $x^2 + x + 1 \equiv 3 \pmod{p}$ und da $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ gilt, muss $p = 3$ gelten. Dies ist aber ebenfalls ein Widerspruch zu $p \geq 5$. Die Annahme ist also falsch und es gilt $x^2 \not\equiv 1 \pmod{p}$, und damit auch $x \not\equiv 1 \pmod{p}$. Dividiert man $p - 1$ durch 3 mit Rest, so erhält man: $p - 1 = 3q + r$ mit $q \geq 0$ und $0 \leq r < 3$. Nun gilt $x^3 - 1 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1) \equiv 0 \pmod{p}$, also $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, wenn

$\text{ggT}(x, p) = 1$. Man muss also ausschließen, dass $x \bmod p = 0$ gilt. Wäre also $x = k \cdot p$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$, dann folgt $w - 1 = 2kp + py$, also $w - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, also $w \equiv 1 \pmod{p}$, also $w^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Weil $-3 \equiv w^2 \pmod{p}$ gilt, folgt $p = 4$, aber 4 ist keine Primzahl. Es gilt also: $1 \equiv x^{p-1} \equiv x^{3q+r} \equiv (x^3)^q \cdot x^r \equiv x^r \pmod{p}$, weil $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ gilt. Wegen $x^2 \not\equiv 1 \pmod{p}$ und $x \not\equiv 1 \pmod{p}$, wie oben gezeigt wurde, folgt also $r = 0$ und daher gilt $3 \mid p - 1$, d.h. $p \equiv 1 \pmod{3}$. Der Beweis ist damit beendet. \square

Lemma (2). Wenn k eine von Null verschiedene ganze Zahl ist, p eine Primzahl mit $p = c^2 + 3d^2 \in S$ und $pk = a^2 + 3b^2 \in S$, dann gilt $p \mid ac \pm 3bd$ und $p \mid ad \mp bc$ und $k = \left(\frac{ac \pm 3bd}{p}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{ad \mp bc}{p}\right)^2 \in S$.

Beweis. Es gilt zunächst das Folgende:

$$\begin{aligned} k &= \frac{pk}{p} \\ &= \frac{a^2 + 3b^2}{c^2 + 3d^2} \\ &= \frac{(a^2 + 3b^2) \cdot (c^2 + 3d^2)}{(c^2 + 3d^2)^2} \\ &= \left(\frac{ac \pm 3bd}{c^2 + 3d^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{ad \mp bc}{c^2 + 3d^2}\right)^2 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt nämlich aus Lemma (Menge S). Weiter gilt:

$$\begin{aligned} (ac + 3bd) \cdot (ac - 3bd) &= a^2 c^2 - 9b^2 d^2 \\ &= a^2 c^2 + 3a^2 d^2 - 3a^2 d^2 - 9b^2 d^2 \\ &= a^2 \cdot (c^2 + 3d^2) - 3 \cdot (a^2 + 3b^2) \cdot d^2 \\ &= a^2 c^2 + a^2 3d^2 - 3pkd^2 \\ &= a^2 c^2 + 3a^2 d^2 - 3 \cdot (c^2 + 3d^2) \cdot kd^2 \\ &= a^2 c^2 + 3a^2 d^2 - 3kc^2 d^2 - 9kd^4 \\ &= (a^2 - 3kd^2) \cdot (c^2 + 3d^2) \end{aligned}$$

Wegen $p = c^2 + 3d^2$ gilt also $p \mid (ac + 3bd) \cdot (ac - 3bd)$. Und weil p eine Primzahl ist, folgt: $p \mid ac + 3bd \vee p \mid ac - 3bd$. Im ersten Fall ist $\frac{ac + 3bd}{p} \in \mathbb{Z}$, folglich auch $3 \cdot \left(\frac{ad - bc}{p}\right)^2 = k - \left(\frac{ac + 3bd}{p}\right)^2 \in \mathbb{Z}$. Demnach ist auch $\frac{ad - bc}{p} \in \mathbb{Z}$ und $\left(\frac{ac + 3bd}{p}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{ad - bc}{p}\right)^2 \in S$. Einschub: Beweis von $\frac{ad - bc}{p} \in \mathbb{Z}$: Es gilt nochmal $3 \cdot \left(\frac{ad - bc}{p}\right)^2 = k - \left(\frac{ac + 3bd}{p}\right)^2$, also $3 \mid k - \left(\frac{ac + 3bd}{p}\right)^2 \in \mathbb{Z}$, also $\left(\frac{ad - bc}{p}\right)^2 \in \mathbb{Z}$. Sei $\alpha := ad - bc \in \mathbb{Z}$ und $\beta := p \in \mathbb{Z}$. Es gilt also $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \in \mathbb{Z}$, also gibt es eine positive ganze Zahl q (denn: α^2 und β^2 sind positiv) mit $\alpha^2 = q \cdot \beta^2$, also $|\alpha| = \sqrt{q} \cdot |\beta|$, also $\frac{|\alpha|}{|\beta|} = \sqrt{q}$. Man kann annehmen, dass der Bruch $\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ vollständig gekürzt ist, also $\text{ggT}(|\alpha|, |\beta|) = 1$. Es gilt nun $\alpha^2 = \beta \cdot (q \cdot \beta)$, also $\beta \mid \alpha^2 \Rightarrow \text{ggT}(\alpha^2, \beta) = \beta$. Weil aber $1 = \text{ggT}(\alpha, \beta) = \text{ggT}(|\alpha|, |\beta|) = \text{ggT}(\alpha^2, \beta) = \beta$ gilt, gilt also $\beta = 1$. Es gibt nun zwei Fälle: $\beta = 1$ oder $\beta \neq 1$. Ist $\beta = 1$, dann ist \sqrt{q} ganzzahlig, also $|\beta| \mid |\alpha|$, folglich $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Z}$. Ist $\beta \neq 1$, dann ist \sqrt{q} irrational, also auch $|\alpha| = |\beta| \cdot \sqrt{q} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, demnach gilt auch $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, Widerspruch. Also tritt dieser Fall nicht ein - Einschubende. Im Fall $p \mid ac - 3bd$ schließt man analog. \square

Lemma (3). Wenn p eine Primzahl ist, dann ist $p \in S$ genau dann, wenn $p = 3$ oder $p \equiv 1 \pmod{3}$.

Beweis. \Rightarrow : Sei p eine Primzahl mit $p \in S$. Offensichtlich ist $p = 3 \in S$ und auch $p = 1 \in S$ mit $1 = p \equiv 1 \pmod{3}$. Sei also von nun an $a^2 + 3b^2 = p \neq 3$ und $p \neq 1, 2 \notin S$; sei also $a^2 + 3b^2 = p \geq 5$. Es muss dann $b \neq 0$ gelten, sonst wäre $p = a^2$ und weil $p \neq 1$ gilt, gilt auch $a \neq 1$, also wäre a ein echter Teiler von p , Widerspruch. Klarerweise gilt $p \equiv a^2 \pmod{3}$ wegen $3 \mid 3b^2$. Es muss $3 \nmid a$ gelten, sonst folgt $3 \mid a^2$ und daraus $p \equiv 0 \pmod{3}$, Widerspruch dazu, dass p eine Primzahl ist. Wegen $3 \nmid a$ ist $a \pmod{3} = 1 \vee a \pmod{3} = 2$, also $p \equiv a^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Damit ist die eine Richtung gezeigt.

\Leftarrow : Ist $p = 3$, dann ist $p \in S$, auch: $p = 1 \in S$ ($p \equiv 1 \pmod{3}$). Sei also $p \neq 3$ und $p \neq 1$, also $p \geq 5$. Sei dann $p \equiv 1 \pmod{3}$. Nach dem Lemma (1) gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ so, dass $-3 \equiv t^2 \pmod{p}$ gilt. Man wähle nun dass t so klein, dass gilt $p \mid t^2 + 3$, aber $p \nmid u^2 + 3$ für alle $0 < u < t$. Zunächst gilt: $0 < t \pmod{p} < p$, und dabei > 0 , weil sonst $-3 \equiv 0 \pmod{p}$ gelten würde, also $p = 3$; das wurde aber ausgeschlossen. Gilt nicht $0 < t < \frac{p}{2}$, dann gilt $\frac{p}{2} < t < p$, also $-\frac{p}{2} > -t > -p$, also $p - \frac{p}{2} > p - t > p - p$, also $0 < p - t < \frac{p}{2}$. Man wählt also in diesem Fall $t^* = p - t$ und weil $t^* = p - t \equiv -t \pmod{p}$ gilt, ist dann immer noch $-3 \equiv (t^*)^2 \pmod{p}$ erfüllt. Für t^* gilt also nochmal $0 < t^* < \frac{p}{2}$ und $p \mid (t^*)^2 + 3$. Weil t minimal ist mit $p \mid t^2 + 3$, folgt $0 < t \leq t^* < \frac{p}{2}$. Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot p = t^2 + 3 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 3 < p^2$, also $0 < m < p$. Es wird nun gezeigt, dass für jedes $T \geq 1$ ($T \neq 0$, sonst $-3 \equiv 0 \pmod{p}$, also $p = 3$, Widerspruch) höchstens eine Primzahl $p \neq 1, 2, 3$ (also $p \geq 5$) existiert so, dass gilt $p \mid T^2 + 3$, aber $p \nmid u^2 + 3$ für jedes u mit $1 \leq u < T$: Mal angenommen, es gibt ein $T \geq 1$ mit $p \neq p'$ so, dass gilt: $p \mid T^2 + 3$ und $p' \mid T^2 + 3$, sowie $p \nmid u^2 + 3$ und $p' \nmid u^2 + 3$ für jedes u mit $1 \leq u < T$. Dann gilt $T^2 + 3 = m \cdot p = m' \cdot p'$. Wegen der Minimalität von T für p und p' gilt dann $0 < m < p$ und $0 < m' < p'$ (siehe oben). Aus $m \cdot p = m' \cdot p'$ folgt: $p \mid m'$ (denn p kann nicht p' teilen und p ist eine Primzahl), also $p \leq m' < p'$, und es folgt: $p' \mid m$ (wie eben), also $p' \leq m < p$. Es folgt insgesamt also $p < p'$ und $p > p'$, Widerspruch. Es kann also so ein T

nicht geben mit $p \neq p'$, also muss, wenn es so ein T gibt, sein: $p = p'$. Nun geht es weiter: Angenommen, es existiert eine Primzahl p mit $p \equiv 1 \pmod{3}$ so, dass $p \notin S$ gilt. Man nimmt das kleinstmögliche p (mit $p \equiv 1 \pmod{3}$), das diese Bedingung erfüllt. Sei $t \geq 1$ die kleinstmögliche ganze Zahl, so dass $p \mid t^2 + 3$ gilt. Weil ja $p \equiv 1 \pmod{3}$ und $p \geq 5$ vorausgesetzt ist, gibt es also überhaupt ein $t \geq 1$ mit $p \mid t^2 + 3$; man kann sich also unter allen möglichen $t \in \mathbb{N}^{>1}$ das kleinste mit jener Eigenschaft auswählen. Sei also t minimal für p , also $p \mid t^2 + 3$ und $p \nmid u^2 + 3$ für alle $u < t$. Dann gilt wegen der Eindeutigkeitsaussage: $q \mid t^2 + 3$ und $q \nmid u^2 + 3$ für alle $u < t$ folgt $q = p$. Es gilt also: $0 < t < \frac{p}{2}$ und $t^2 + 3 = m \cdot p$ mit $0 < m < p$. Wenn p' irgendeine Primzahl ist, die m teilt, also $m = p' \cdot m'$ (also $0 < m' < m$), dann gilt $t^2 + 3 = p \cdot m = p \cdot (p' \cdot m') = p' \cdot (p \cdot m)$, also $-3 \equiv t^2 \pmod{p'}$, also nach Lemma (1): $p' \equiv 1 \pmod{3}$. Des Weiteren gilt dann $p' \leq m < p$ und somit gilt $p' \in S$, denn p mit $p \equiv 1 \pmod{3}$ ist das kleinste p mit $p \equiv 1 \pmod{3}$ so, dass $p \notin S$ gilt. Wegen $p' \cdot (p \cdot m') = p \cdot m = t^2 + 3 = t^2 + 3 \cdot 1^2 \in S$ folgt nach Lemma (2), dass wegen $p' \in S$ dann $p \cdot m' \in S$ gilt. Wenn $m' = 1$ ist, dann ist $p \cdot 1 = p \in S$, was man zeigen wollte. Ansonsten sei p'' eine Primzahl, die m' teilt, also $m' = m'' \cdot p''$ (folglich $0 < m'' < m' < m$). Also gilt $t^2 + 3 = p \cdot m = p \cdot (p' \cdot m') = p \cdot (p' \cdot (m'' \cdot p'')) = (p \cdot p' \cdot m'') \cdot p''$, also $-3 \equiv t^2 \pmod{p''}$, also nach Lemma (1): $p'' \equiv 1 \pmod{3}$. Weiter gilt $p'' \leq m' < m < p$ und also $p'' \in S$. Und es gilt: $p'' \cdot (p \cdot m'') = p \cdot m' \in S$ und wegen $p'' \in S$ folgt also $p \cdot m'' \in S$. Falls $m'' = 1$, dann folgt das ersehnte $p \in S$. Ansonsten sei p''' eine Primzahl, die m'' teilt, usw. Weil diese $m^{(n)}$ immer kleiner werden, aber immer > 0 , dann muss irgendwann für ein n^* gelten $m^{(n^*)} = 1$, also $1 \cdot p = m^{(n^*)} \cdot p \in S$. Und das war auch schon alles. \square

Lemma (4). Sei $m = u^2 + 3v^2$ (also $m \in S$), mit $u, v \neq 0$ und $\text{ggT}(u, v) = 1$. Wenn p eine ungerade Primzahl ist (also gilt: $p \neq 2$) und $p \mid m$ gilt, dann ist $p \in S$.

Beweis. Sei also $u, v \neq 0$. Wegen $p \mid m$ folgt $m \equiv 0 \pmod{p}$ und somit gilt $u^2 \equiv -3v^2 \pmod{p}$. Weil klarerweise $1 \in S$ und $3 \in S$ und $p = 2$ ausgeschlossen ist, sei nun also $p \geq 5$. Ferner gilt wegen $p \mid m$ auch noch $p \nmid v$, denn sonst würde auch $p \mid u$ gelten und dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung $\text{ggT}(u, v) = 1$. Da wegen $p \nmid v$ ($v \neq 0$) gilt $\text{ggT}(v, p) = 1$, folgt nach dem Satz von Euler-Fermat: $v^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Setzt man nun $v' := v^{p-2}$, dann gilt $(v \cdot v') \equiv 1 \pmod{p}$. Daher ist dann $(u \cdot v')^2 \equiv u^2 \cdot v'^2 \equiv -3v^2 \cdot v'^2 \equiv -3 \cdot (v \cdot v')^2 \equiv -3 \pmod{p}$. Nach dem Lemma (1) gilt deswegen $p \equiv 1 \pmod{3}$, und nach Lemma (3) folgt dann also $p \in S$, was nämlich hier zu beweisen war. \square

Lemma (5). Wenn p eine Primzahl ist und $p \in S$ gilt, dann ist die Darstellung von p in der Form $p = a^2 + 3b^2$ (mit der wichtigen Bedingung, dass gilt: $a \geq 0$ und $b \geq 0$) eindeutig.

Beweis. Man verwendet hier das Lemma (2) mit $k = 1$: Es gilt demnach $p = a^2 + 3b^2 = c^2 + 3d^2$, wobei gilt: $a, c \geq 0$ und $b, d > 0$. Folglich gilt: $1 = \left(\frac{ac \pm 3bd}{p}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{ad \mp bc}{p}\right)^2$, also $\frac{ad \mp bc}{p} = 0$ und $\frac{ac \pm 3bd}{p} = 1$. daraus folgt damit: $p = ac \pm 3bd$ und $ad \mp bc = 0 \Leftrightarrow ad = \mp bc$. Daraus ergibt sich dann folgendes:

$$\begin{aligned} pd &= acd \pm 3bd^2 \\ &= \pm bc^2 \pm 3bd^2 \\ &= \pm b \cdot (c^2 + 3d^2) \\ &= \pm bp \end{aligned}$$

Also gilt $pd = \pm bp$, also $d = \pm b$, also: $ad = \pm bc = \pm b \cdot c = dc \Leftrightarrow a = c$. Es gilt schonmal $p = a^2 + 3b^2 = c^2 + 3d^2 = a^2 + 3d^2$, also $3b^2 = 3d^2 \Leftrightarrow b^2 = d^2$. Wegen $b, d > 0$ folgt also auch $b = d$. \square

Lemma (6). Sei $m = u^2 + 3v^2 \geq 3$ und $\text{ggT}(u, v) = 1$. Wenn m ungerade ist und $m = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$ (wobei p_1, \dots, p_n Primzahlen sind mit $e_i \geq 1$), dann existieren ganze Zahlen a_i und b_i ($i = 1, \dots, n$) so, dass gilt: $p_i = a_i^2 + 3b_i^2$ und

$$u + v \cdot \sqrt{-3} = \prod_{i=1}^n (a_i + b_i \cdot \sqrt{-3})^{e_i}$$

Beweis. Der Beweis läuft durch Induktion über ungerade m : Induktionsanfang $m = 3$: 3 ist ungerade und es gilt für $3 = m = u^2 + 3v^2 \geq 3$, dass $u = 0$ und $v = 1$ ist; dann ist auch $1 = \text{ggT}(0, 1) = \text{ggT}(u, v)$. Weiter: $m = 3 = 3^1 = p_1^{e_1}$. Setzt man nun $a_1 = 0$ und $b_1 = 1$, dann gilt: $p_1 = a_1^2 + 3b_1^2 = 0^2 + 3 \cdot 1^2 = 3$, und: $u + v \cdot \sqrt{-3} = 0 + 1 \cdot \sqrt{-3} = (0 + 1 \cdot \sqrt{-3})^1 = (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{-3})^{e_1}$. Der Induktionsanfang gilt also schonmal. Sei also von nun an $m > 3$ und m ungerade. Induktionsannahme: Es gelte die Behauptung für alle ungeraden Zahlen, die kleiner sind als das ungerade m und die ≥ 3 sind. Sei $\text{ggT}(u, v) = 1$. Dann ist $u \neq 0$ oder $v \neq 0$, sonst wäre $\text{ggT}(u, v) \neq 1$. Ist $u \neq 0$ und $v = 0$, dann darf nicht $u > 1$ sein, sonst ist $\text{ggT}(u, v) \neq 1$, also $u = 1$ und $v = 0$, also $m = 1^2 + 3 \cdot 0^2 = 1$, also $m < 3$, Widerspruch. Also: Ist $u \neq 0$, dann auch $v \neq 0$. Ist $v \neq 0$ und $u = 0$, dann muss $v \leq 1$ sein, sonst $\text{ggT}(u, v) \neq 1$. Also $v = 1$ und $u = 0$, also $m = 0^2 + 3 \cdot 1^2 = 3$, man hat aber $m > 3$ vorausgesetzt. Also gilt: $v \neq 0$, dann ist auch $u \neq 0$. Weil gilt: $u \neq 0$ oder $v \neq 0$, folgt $u, v \neq 0$. Sei also $m > 3$ mit $m = u^2 + 3v^2$, sowie $\text{ggT}(u, v) = 1$ und $u, v \neq 0$. Sei dann p eine Primzahl, die m teilt, also gilt $m = pk$. Weil m ungerade ist, kann also $p = 2$ nicht sein, d.h. p ist eine ungerade Primzahl, die m teilt. Nach Lemma (4) ist dann $p \in S$, hat also die Form $p = a^2 + 3b^2$, wobei nach Lemma (5) die positiven Zahlen $|a|$ und $|b|$ eindeutig festgelegt sind. Nun kann man sagen, dass alle ungeraden Primzahlen $q \in S$ die Behauptung dieses Lemmas erfüllen, denn: Ist $q = 1 \in S$, dann ist $1 = q = u^2 + 3v^2 = 1^2 + 3 \cdot 0^2$ und $\text{ggT}(u, v) = \text{ggT}(1, 0) = 1$, und 1 ist ungerade. Nun:

$1^2 + 3 \cdot 0^2 = a_1^2 + 3b_1^2 = p_1 = p_1^1 = q$ und man hat: $1 + 0 \cdot \sqrt{-3} = u + v \cdot \sqrt{-3} = (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{-3})^{e_1} = (1 + 0 \cdot \sqrt{-3})^1$. Man weiß: $q = 2 \notin S$ und 2 ist keine ungerade Primzahl. Sei also $q \geq 3$, also q eine ungerade Primzahl, und $q \in S$. Weil $3 \leq q \in S$, gilt also $q = u^2 + 3v^2$ ($|u|$ und $|v|$ sind dabei eindeutig festgelegt) und $\text{ggT}(u, v) = 1$, sonst wäre q keine Primzahl. q ist ungerade und es gilt $q = p_1^1$, sowie: $q = p_1 = a_1^2 + 3b_1^2 = u^2 + 3v^2$, wobei also wegen der Eindeutigkeit nach Lemma (5) gilt: $|a_1| = |u|$ und $|a_2| = |v|$. Es gilt dann: $u + v \cdot \sqrt{-3} = (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{-3})^1$. Wegen $S \ni m = u^2 + 3v^2$, $m = pk \in S$ und $p = a^2 + 3b^2 \in S$, folgt nach Lemma (2): $k = c^2 + 3d^2 \in S$, wobei $c = \frac{ua \pm 3vb}{p}$ und $d = \frac{ub \mp va}{p}$ gilt. Man weiß nun: $(a \pm b \cdot \sqrt{-3}) \cdot (c \mp d \cdot \sqrt{-3}) = (ac + 3bd) \pm (bc - ad) \cdot \sqrt{-3}$, wobei dann auch gilt:

$$\begin{aligned} ac + 3bd &= \frac{a \cdot (ua \pm 3vb)}{p} + \frac{3b \cdot (ub \mp va)}{p} \\ &= \frac{1}{p} \cdot (ua^2 \pm 3vab + 3ub^2 \mp 3vab) \\ &= u \cdot \frac{1}{p} \cdot (a^2 + 3b^2) \\ &= u \cdot \frac{1}{p} \cdot p \\ &= u \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt auch das folgende:

$$\begin{aligned} \pm(bc - ad) &= \pm \left(\frac{b \cdot (ua \pm 3vb)}{p} - \frac{a \cdot (ub \mp va)}{p} \right) \\ &= \pm \frac{1}{p} \cdot (uab \pm 3vb^2 - uab \pm va^2) \\ &= v \cdot \frac{1}{p} \cdot (3b^2 + a^2) \\ &= v \cdot \frac{1}{p} \cdot p \\ &= v \end{aligned}$$

Man hat also herausgefunden, dass gilt:

$$(a \pm b \cdot \sqrt{-3}) \cdot (c \mp d \cdot \sqrt{-3}) = u + v \cdot \sqrt{-3}$$

Es gilt nochmal $m = pk$. Ist $k = 1$, dann gilt $3 < m = p$, und für Primzahlen gilt ja die Behauptung dieses Lemmas hier; es ist hier also nichts weiter zu zeigen. Im Fall $k \neq 1$ ist also $k \neq 2$, sonst wäre m eine gerade Zahl, Widerspruch. Also gilt in diesem Fall $3 \leq k < m$. Nun gilt $k = c^2 + 3d^2$, k ist ungerade, sonst wäre wegen $m = pk$ das m gerade. Und es gilt $\text{ggT}(c, d) = 1$, weil sonst wegen $u = ac + 3bd$ und $v = \pm(bc - ad)$ dann also auch $\text{ggT}(u, v) \neq 1$ wäre. Nach der Induktionsannahme gilt die Behauptung dieses Lemmas für k mit $3 \leq k < m$. Also lässt sich $c \mp d \cdot \sqrt{-3}$ in der angegebenen Form ausdrücken. Da $(a \pm b \cdot \sqrt{-3}) \cdot (c \mp d \cdot \sqrt{-3}) = u + v \cdot \sqrt{-3}$ gilt, folgt, dass sich auch m so darstellen lässt. Ende. \square

Lemma (Beweis des Schlüssellemmas). *Sei E die Menge aller Tripel (u, v, s) so, dass: s ist ungerade, $\text{ggT}(u, v) = 1$ und $s^3 = u^2 + 3v^2$. Sei F die Menge aller Paare (t, w) so, dass: $\text{ggT}(t, w) = 1$, $3 \nmid t$ und $t \not\equiv w \pmod{2}$. Dann hat die Abbildung $\phi : F \rightarrow \mathbb{Z}^3$, gegeben durch $\phi(t, w) = (u, v, s)$ mit*

$$\begin{aligned} u &= t \cdot (t^2 - 9w^2) \\ v &= 3w \cdot (t^2 - w^2) \\ s &= t^2 + 3w^2 \end{aligned}$$

das Bild E , d.h. es gilt dann $\text{bild}(\phi) = E$.

Beweis. \supseteq : Sei also die Menge F gegeben. Es gilt also $\text{ggT}(t, w) = 1$, $3 \nmid t$ und $t \not\equiv w \pmod{2}$. Es wird jetzt gezeigt, dass $\phi(F) \subseteq E$ gilt: Es gilt zunächst das folgende:

$$\begin{aligned} u^2 + 3v^2 &= [t \cdot (t^2 - 9w^2)]^2 + 3 \cdot [3w \cdot (t^2 - w^2)]^2 \\ &= t^6 - 18t^4w^2 + 81t^2w^4 + 27t^4w^2 - 54t^2w^4 + 27w^6 \\ &= t^6 + 9t^4w^2 + 27t^2w^4 + 27w^6 \\ &= (t^2 + 3w^2)^3 \\ &= s^3 \end{aligned}$$

Wegen $t \not\equiv w \pmod{2}$ sind t und w nicht beide gerade und nicht beide ungerade. Daraus folgt wegen $s^3 = (t^2 + 3w^2)^3$, dass s^3 ungerade ist, denn s^3 ist ungerade $\Leftrightarrow s$ ist ungerade. Es muss jetzt nur noch $\text{ggT}(u, v) = 1$ gezeigt werden. Zunächst: Angenommen, $\text{ggT}(t^2 - 9w^2, t^2 - w^2) \neq 1$, dann gibt es eine Primzahl $1 \neq p$ mit $p \mid t^2 - 9w^2$ und $p \mid t^2 - w^2$, also auch $p \mid 9t^2 - 9w^2$ und wegen

$p \mid t^2 - 9w^2$ folgt damit $p \mid 8t^2$. Es gilt $p \mid t^2 - w^2$, und wenn $p \mid t$, also auch $p \mid t^2$, dann folgt $p \mid w^2$, also $p \mid w$, also hat man $p \mid t$ und $p \mid w$, also $\text{ggT}(t, w) \neq 1$, Widerspruch. Also muss gelten $p \nmid t$, und wegen $p \mid 8t^2$, folgt also $p = 2$. Nun kann aber $p = 2$ auch nicht sein, denn es gilt ja $p \mid t^2 - w^2$ und weil t und w nach Voraussetzung unterschiedliche Parität haben, ist also $t^2 - w^2$ ungerade, also kann $p = 2$ die Zahl $t^2 - w^2$ nicht teilen, Widerspruch. Also gilt jetzt: $\text{ggT}(t^2 - 9w^2, t^2 - w^2) = 1$. Nun kann man $\text{ggT}(u, v) = 1$ zeigen: Sei $1 \neq q$ eine Primzahl von der Primfaktorzerlegung von u . Wegen $u = t \cdot (t^2 - 9w^2)$ gilt also: $q \mid t$ oder $q \mid t^2 - 9w^2$. Nun gibt es 2 Fälle: $q \mid t$ oder $q \nmid t$. Fall 1: $q \mid t$: Dann ist $q \neq 3$, weil nach Voraussetzung $3 \nmid t$ gilt. Weiter gilt $q \nmid w$, denn sonst gilt $q \mid t$ und $q \mid w$, also $\text{ggT}(t, w) \neq 1$, Widerspruch. Weil also $q \mid t$, aber $q \nmid w$, folgt also $q \mid t^2$, aber $q \nmid w^2$ und daraus ergibt sich damit $q \nmid t^2 - w^2$. Weil also $q \neq 3$, $q \nmid w$ und $q \nmid t^2 - w^2$ gilt, folgt also wegen $v = 3w \cdot (t^2 - w^2)$, dass $q \nmid v$ gilt. Fall 2: $q \nmid t$, also, weil $q \mid t$ oder $q \mid t^2 - 9w^2$ gilt, folgt $q \mid t^2 - 9w^2$. Dann muss aber $q \nmid 3w \Rightarrow q \nmid 9w^2$ gelten, denn sonst folgt mit $q \mid t^2 - 9w^2$, dass $q \mid t^2 \Rightarrow q \mid t$, aber $q \mid t$ ist ein Widerspruch zur Annahme dieses Falles. Es gilt also $q \nmid 3w$. Da $\text{ggT}(t^2 - 9w^2, t^2 - w^2) = 1$ gilt, folgt zusammen mit $q \mid t^2 - 9w^2$, dass gilt $q \nmid t^2 - w^2$, sonst wäre $\text{ggT}(t^2 - 9w^2, t^2 - w^2) \neq 1$. Wegen $q \nmid 3w$ und $q \nmid t^2 - w^2$ folgt also $q \nmid v$. Man hat also insgesamt gezeigt: $(q \mid t \Rightarrow q \nmid v) \wedge (q \nmid t \Rightarrow q \nmid v)$. Also gilt immer $q \nmid v$. Es folgt schließlich $\text{ggT}(u, v) = 1$, was man zeigen wollte. Es gilt also $\phi(t, w) = (u, v, s) \in E$ für alle $(t, w) \in F$.

\subseteq : Es wird also die entgegengesetzte Inklusion gezeigt, nämlich $E \subseteq \text{bild}(\phi)$. Gegeben sei nun also ein Tripel $(u, v, s) \in E$. Man hat als Voraussetzung: s ist ungerade, $\text{ggT}(u, v) = 1$ und $s^3 = u^2 + 3v^2$. Um zu zeigen, dass $E \subseteq \text{bild}(\phi)$ gilt, muss man für alle $y \in E$ ein $x \in F$ finden, so dass $\varphi(x) = y$ gilt. Wenn man also ein $x = (t, w) \in F$ definiert hat, muss man zeigen, dass auch $x \in F$ ist, und dass $\phi(x) = y = (u, v, s)$ ist. Sei zuerst $u^2 + 3v^2 = s^3$ mit s^3 ungerade (da s ungerade ist, nach Voraussetzung) und $s^3 = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$, also gilt $e_i = 3 \cdot e'_i$. Nach dem Lemma (6) existieren a_i, b_i mit $i = 1, \dots, n$ so, dass gilt $p_i = a_i^2 + 3b_i^2$ und: $u + v \cdot \sqrt{-3} = \prod_{i=1}^n (a_i + b_i \cdot \sqrt{-3})^{e'_i}$. Nun wird $(t, w) \in \mathbb{Z}^2$ definiert: t und w seien definiert durch die Beziehung: $\prod_{i=1}^n (a_i + b_i \cdot \sqrt{-3})^{e'_i} = t + w \cdot \sqrt{-3}$. Also gilt dann: $u + v \cdot \sqrt{-3} = (t + w \cdot \sqrt{-3})^3$. Es wird nun ausgerechnet: $(t + w \cdot \sqrt{-3})^3 = t^3 + 3t^2w\sqrt{-3} - 9tw^2 - 3\sqrt{-3}w^3 = (t^3 - 9tw^2) + (3t^2w - 3w^2) \cdot \sqrt{-3}$. Man hat also:

$$u + v \cdot \sqrt{-3} = [t \cdot (t^2 - 9w^2)] + [3w \cdot (t^2 - w^2)] \cdot \sqrt{-3}$$

Nach Koeffizientenvergleich ergibt sich also: $u = t \cdot (t^2 - 9w^2)$ und $v = 3w \cdot (t^2 - w^2)$. Denn: $\alpha + \beta \cdot \sqrt{-3} = a + b \cdot \sqrt{-3} \Rightarrow \alpha = a$ und $\beta = b$ mit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{Z}$. Beweis: Angenommen, es gilt $\alpha - a \neq 0$ oder $b - \beta \neq 0$. Wegen $\alpha - a = (b - \beta) \cdot \sqrt{-3}$ gilt: $\alpha - a \neq 0 \Leftrightarrow b - \beta \neq 0$. Gilt also: $\alpha - a \neq 0$ oder $b - \beta \neq 0$, dann folgt $\alpha - a, b - \beta \neq 0$, und daraus folgt $\mathbb{Q} \ni \frac{\alpha - a}{b - \beta} = \sqrt{-3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, Widerspruch. Nun muss man was wissen über komplexe Zahlen: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + y \cdot i \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} := x - y \cdot i$ die zu z konjugierte komplexe Zahl. Es gilt da $\forall z, w \in \mathbb{C}: \bar{z} \cdot \bar{w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, also auch $\bar{z^n} = \bar{z}^n$. Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned} s^3 &= u^2 + 3v^2 \\ &= (u + v \cdot \sqrt{-3}) \cdot (u - v \cdot \sqrt{-3}) \\ &= (u + v \cdot \sqrt{-3}) \cdot \overline{(u + v \cdot \sqrt{-3})} \\ &= (t + w \cdot \sqrt{-3})^3 \cdot \overline{(t + w \cdot \sqrt{-3})^3} \\ &= (t + w \cdot \sqrt{-3})^3 \cdot \overline{(t + w \cdot \sqrt{-3})^3} \\ &= [(t + w \cdot \sqrt{-3}) \cdot \overline{(t + w \cdot \sqrt{-3})}]^3 \\ &= [(t + w \cdot \sqrt{-3}) \cdot (t - w \cdot \sqrt{-3})]^3 \\ &= [t^2 + 3w^2]^3 \end{aligned}$$

Es folgt somit $s = t^2 + 3w^2$. Weil s ungerade ist (nach Voraussetzung), ergibt sich aus $s = t^2 + 3w^2$, dass t und w nicht die gleiche Parität haben, d.h. es sind nicht beide gerade und nicht beide ungerade. Dann gilt noch $3 \nmid t$, denn, wenn $3 \mid t$ gilt, folgt $3 \mid t \cdot (t^2 - 9w^2) = u$ und $3 \mid 3 \cdot w(t^2 - w^2) = v$, also $\text{ggT}(u, v) \geq 3$, Widerspruch zur Voraussetzung, dass gilt: $\text{ggT}(u, v) = 1$. Es fehlt noch $\text{ggT}(t, w) = 1$ zu zeigen: Wäre $\text{ggT}(t, w) \neq 1$, dann gäbe es einen Primfaktor $p \neq 1$, der t und w teilt. Dann gilt: $p \mid u$ wegen $u = t \cdot (\dots)$ und $p \mid v$ wegen $v = 3w \cdot (\dots)$, also wäre $\text{ggT}(u, v) \neq 1$, Widerspruch, also gilt dann tatsächlich $\text{ggT}(t, w) = 1$. Man hat also $\phi(t, w) = (u, v, s)$ gezeigt. Ende. \square

Aus diesem, letzten Lemma folgt also insbesondere: Ist s ungerade und $s^3 = u^2 + 3v^2$ mit $\text{ggT}(u, v) = 1$. Dann schreibt sich s in der Form $s = t^2 + 3w^2$ mit $u = t \cdot (t^2 - 9w^2)$ und $v = 3w \cdot (t^2 - w^2)$. Dabei gilt für $t, w \in \mathbb{Z}$: $\text{ggT}(t, w) = 1$, $3 \nmid t$ und $t \not\equiv w \pmod{2}$. Das Schlüssellemma ist damit also bewiesen.

Die Darstellung als Summe zweier Quadrate

[Zurück zur Liste]

Lemma. Für Primzahlen $p = 4m + 1$ hat die Gleichung $s^2 = -1$ in \mathbb{F}_p zwei Lösungen, für $p = 2$ gibt es genau eine solche Lösung, während es für $p = 4m + 3$ keine Lösung gibt.

Beweis. Eine Primzahl $p \neq 2$ hat entweder die Darstellung $p = 4m + 1$ oder $p = 4m + 3$, denn bei $p = 4m + 0$ und $p = 4m + 2$ wäre die Primzahl durch 4 bzw. 2 teilbar, was nicht sein kann. Für $p = 2$ ist $s = 1$ die einzige Lösung. Für ungerades p betrachten wir die Äquivalenzrelation auf \mathbb{F}_p^* , die durch die Äquivalenzklassen $[x] = \{x, -x, x^{-1}, -x^{-1}\}$ gegeben ist. Man betrachtet dann die Fälle, in denen die Äquivalenzklassen nicht 4 Elemente haben: 1. Möglichkeit: $x = -x$. Wegen $x = -x$ ist dann $2x = x + (-x) = 0 \stackrel{p \neq 2}{\Rightarrow} x = 0$, was kein Element aus \mathbb{F}_p^* ist, also kann dieser Fall nicht auftreten. 2. Möglichkeit: $x = x^{-1}$. Wegen $x = x^{-1} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = p - 1$ erhält man in diesem Fall mit $\{1, p - 1\}$ eine Äquivalenzklasse der Größe 2, die auf alle Fälle auftritt. 3. Möglichkeit: $x = -x^{-1}$. Hier ist $x = -x^{-1} \Leftrightarrow x^2 = -1$. Diese Gleichung ist entweder unlösbar oder besitzt die Lösungen x_0 und $p - x_0$, die verschieden sind, denn sonst gelte $x_0 = p - x_0 \Rightarrow p = 2x_0$, was wegen $p \neq 2$ nicht sein kann. Damit hat man nun \mathbb{F}_p^* in Äquivalenzklassen der Größe 4 und in ein oder zwei Äquivalenzklassen der Größe 2 partitioniert. Da \mathbb{F}_p^* gerade $p - 1$ Elemente hat, gibt es im Fall $p = 4m + 3$, also $p - 1 = 4m + 2$, nur eine zweielementige Äquivalenzklasse, nämlich $\{1, p - 1\}$, womit die dritte Möglichkeit nicht eintreten kann und damit $s^2 = -1$ keine Lösung hat. Ist $p = 4m + 1 \Leftrightarrow p - 1 = 4m = 4(m - 1) + 2 + 2$, so gibt es zwei Äquivalenzklassen der Größe 2, also tritt die dritte Möglichkeit ein und x_0 und $p - x_0$ sind gerade die zwei verschiedenen Lösungen von $s^2 = -1$. \square

Satz. Jede Primzahl der Form $p = 4m + 1$ ist Summe zweier Quadratzahlen, das heißt, es existieren $x, y \in \mathbb{N}_0$ mit $p = x^2 + y^2$.

Beweis. Sei s eine Lösung von $s^2 = -1 \pmod{p}$, die nach dem Lemma existiert. Es werden dann die Paare $(x', y') \in \{0, \dots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor\}^2 =: D$, von denen es $(\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1)^2$ gibt, betrachtet. Wegen $|x| + 1 > x$ mit $x = \sqrt{p}$ sieht man, dass $|D| > p$ gilt. Damit kann $f : D \rightarrow \mathbb{F}_p$, $(x', y') \mapsto x' - sy'$ nicht injektiv sein, womit es zwei verschiedene Paare (x', y') und (x'', y'') gibt mit $x' - sy' \equiv x'' - sy'' \pmod{p} \Leftrightarrow x' - x'' \equiv s(y' - y'')$. Sei nun $x := |x' - x''|$ und $y := |y' - y''|$. Es folgt damit aus der obigen Gleichung $x \equiv \pm sy \pmod{p}$ und weiter $x^2 \equiv s^2 y^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$, was $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$ impliziert. Da (x', y') und (x'', y'') verschieden waren, können nicht sowohl x als auch y gleich 0 sein, also ist $x^2 + y^2 > 0$. Wegen $x, y \in \{0, \dots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor\}$ und damit $x^2, y^2 \leq \lfloor \sqrt{p} \rfloor^2 < p$ erhält man zuletzt $x^2 + y^2 < 2p$, was wegen $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$ bedeutet, dass $x^2 + y^2$ gleich p sein muss, womit die Behauptung des Satzes bewiesen ist. \square

Satz. Eine natürliche Zahl n ist genau dann Summe zweier Quadratzahlen, wenn die Primfaktoren $p = 4m + 3$ von n mit geradem Exponenten auftreten.

Beweis. Eine Zahl heiße darstellbar, wenn sie die Summe zweier Quadrate ist. „ \Leftarrow “: Seien also die Primfaktoren $p = 4m + 3$ von n mit geradem Exponenten auftretend. Die Primfaktoren $p = 4m + 1$ der natürlichen Zahl n sind nach dem vorangegangenen Satz darstellbar, genauso wie $1 = 0^2 + 1^2$ und $2 = 1^2 + 1^2$. Wegen $(x^2 + y^2) \cdot (a^2 + b^2) = x^2 a^2 + y^2 b^2 + x^2 b^2 + y^2 a^2 = (x^2 a^2 + 2xayb + y^2 b^2) + (x^2 b^2 - 2xbya + y^2 a^2) = (xa + yb)^2 + (xb - ya)^2$ ist auch das Produkt darstellbarer Zahlen darstellbar und nach $(x^2 + y^2) \cdot a^2 = (xa)^2 + (ya)^2$ sind auch quadratische Vielfache darstellbarer Zahlen darstellbar. Da die Primfaktoren p der Form $(4m + 3)$ mit geradem Exponenten auftreten, sind sie also quadratisch. Es folgt also, dass die Primfaktorzerlegung von n darstellbar ist. „ \Rightarrow “: Sei also $n = x^2 + y^2$ darstellbar. Für einen Primteiler $p = 4m + 3$ von n sei zunächst $x \pmod{p} \neq 0$ angenommen. Dann könnte man ein x' finden mit $xx' \equiv 1 \pmod{p}$. Dann würde gelten $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 1 + x'^2 + y^2 = 1 + (x'y)^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (x'y)^2 \equiv -1 \pmod{p}$, was nach dem Lemma nicht möglich ist, also muss p ein Teiler von x (und analogerweise auch von y) sein. Damit folgt $p^2 \mid n$ und $\frac{n}{p^2} = \left(\frac{x}{p}\right)^2 + \left(\frac{y}{p}\right)^2$ ist darstellbar. Also gilt entweder $p \nmid \frac{n}{p^2}$ oder $p^2 \mid \frac{n}{p^2}$. Rekursiv erhält man, dass p in der Primfaktorzerlegung von n mit geradem Exponenten auftauchen muss. \square

Die Partition von Zahlen

[Zurück zur Liste]

Definition (Partitionsfunktion). Man betrachtet die Partitionsfunktion $p(n)$, die angibt, wieviele Möglichkeiten es gibt, ein $n \in \mathbb{N}$ als Summe von Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$ darzustellen. Dabei soll gelten: 1. Die Reihenfolge der Summanden wird nicht beachtet, 2. Die Anzahl der Summanden ist nicht festgelegt und 3. Summanden dürfen mehrfach vorkommen.

Satz (Umordnungssatz). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit Grenzwert A . Dann konvergiert jede Umordnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, also jede Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)}$ für jede bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, ebenfalls gegen A .

Beweis. Sei $\tau : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ bijektiv. Es muss gezeigt werden: $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} = A$. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\sum_{k=0}^\infty |a_k|$ konvergiert, gibt es zu ε ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\sum_{k=n_0}^\infty |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Daraus folgt $\left| A - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=n_0}^\infty a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^\infty |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da τ bijektiv ist, kann man $N \in \mathbb{N}_0$ so wählen, dass $\{0, 1, \dots, n_0-1\} \subseteq \{\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(N)\}$ gilt. Dann gilt für alle $m \geq N$: $\left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - A \right| = \left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n_0-1} a_k - A \right| \leq \sum_{k=n_0}^\infty |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Das war es! \square

Satz (Produktsatz). *Seien $\sum_{k=1}^m a_k^i$ ($i = 1, \dots, m$) m absolut konvergente Reihen und $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^m$ eine bijektive Abbildung. Dann ist $\sum_{k=1}^\infty a_{\varphi_1(k)}^1 \cdot a_{\varphi_2(k)}^2 \cdots \cdot a_{\varphi_m(k)}^m$ eine absolut konvergente Reihe, wobei $\varphi(k) = (\varphi_1(k), \dots, \varphi_m(k))$ für alle k sei. Es gilt dann die folgende Identität:*

$$\sum_{k=1}^\infty a_{\varphi_1(k)}^1 \cdot a_{\varphi_2(k)}^2 \cdots \cdot a_{\varphi_m(k)}^m = \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^1 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^2 \right) \cdots \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^m \right)$$

Man darf also unter den gegebenen Voraussetzungen gliedweise ausmultiplizieren!

Beweis. Man wählt eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^m$ zunächst so, dass gilt $\{\varphi(1), \dots, \varphi(n^m)\} = \{1, 2, \dots, n\}^m$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann für jedes n nun $\sum_{k=1}^{n^m} |a_{\varphi_1(k)}^1| \cdot |a_{\varphi_2(k)}^2| \cdots \cdot |a_{\varphi_m(k)}^m| = \left(\sum_{k=1}^n |a_k^1| \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k^2| \right) \cdots \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k^m| \right)$, also $\sum_{k=1}^{n^m} |a_{\varphi_1(k)}^1| \cdot |a_{\varphi_2(k)}^2| \cdots \cdot |a_{\varphi_m(k)}^m| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k^1| \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k^2| \right) \cdots \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k^m| \right)$, also hat das monoton wachsende $\sum_{k=1}^n |a_{\varphi_1(k)}^1| \cdot |a_{\varphi_2(k)}^2| \cdots \cdot |a_{\varphi_m(k)}^m|$ eine konvergente Majorante, konvergiert also absolut, also konvergiert $\sum_{k=1}^\infty a_{\varphi_1(k)}^1 \cdot a_{\varphi_2(k)}^2 \cdots \cdot a_{\varphi_m(k)}^m$. Wegen $\sum_{k=1}^n a_{\varphi_1(k)}^1 \cdot a_{\varphi_2(k)}^2 \cdots \cdot a_{\varphi_m(k)}^m = \left(\sum_{k=1}^n a_k^1 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \cdots \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^m \right)$ folgt mithilfe des Grenzwertübergangs $n \rightarrow \infty$ dann: $\sum_{k=1}^\infty a_{\varphi_1(k)}^1 \cdot a_{\varphi_2(k)}^2 \cdots \cdot a_{\varphi_m(k)}^m = \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^1 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^2 \right) \cdots \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^m \right)$. Man hat oben die Bijektion φ eingeschränkt. Das wird jetzt in Ordnung gebracht: Sei $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^m$ eine beliebige Bijektion, so ist auch $\varphi^{-1} \circ \psi$ eine Bijektion von \mathbb{N} nach \mathbb{N}^m . Dann gilt: $\sum_{k=1}^\infty a_{\varphi_1((\varphi^{-1} \circ \psi)(k))}^1 \cdot a_{\varphi_2((\varphi^{-1} \circ \psi)(k))}^2 \cdots \cdot a_{\varphi_m((\varphi^{-1} \circ \psi)(k))}^m = \sum_{k=1}^\infty a_{\psi_1(k)}^1 \cdot a_{\psi_2(k)}^2 \cdots \cdot a_{\psi_m(k)}^m$. Die Summanden $a_{\varphi_1(k)}^1 \cdot a_{\varphi_2(k)}^2 \cdots \cdot a_{\varphi_m(k)}^m$ ($k \in \mathbb{N} \neq 0$) wurden also umgeordnet, und nach dem Umordnungssatz ändert sich der Grenzwert der unendlichen Reihe nicht, also gilt auch $\sum_{k=1}^\infty a_{\psi_1(k)}^1 \cdot a_{\psi_2(k)}^2 \cdots \cdot a_{\psi_m(k)}^m = \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^1 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^2 \right) \cdots \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^m \right)$. \square

Satz (Vertauschung von Limes und Summe). *Es sei $(a_n^{(i)})_{n,i \in \mathbb{N}}$ eine Doppelfolge mit $0 \leq a_n^{(i)} < +\infty$ für $n, i \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(a_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigt. Es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)} \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann folgt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^\infty a_n^{(i)} = \sum_{i=0}^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$$

Beweis. Weil $a_n^{(i)}$ in n monoton steigt, gilt $a_n^{(i)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{(i)}$ für alle $n, i \in \mathbb{N}$, also $\sum_{i=0}^m a_n^{(i)} \leq \sum_{i=0}^m \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{(i)}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Folglich gilt dann auch $\sum_{i=0}^\infty a_n^{(i)} \leq \sum_{i=0}^\infty \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{(i)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließlich gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^\infty a_n^{(i)} \leq \sum_{i=0}^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$. Sei $x < \sum_{i=0}^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x < \sum_{i=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$. Wegen $\sum_{i=0}^m a_n^{(i)} \leq \sum_{i=0}^\infty a_n^{(i)}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m a_n^{(i)} = x$. Wäre $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^\infty a_n^{(i)} = x < \sum_{i=0}^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$, dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^\infty a_n^{(i)} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^\infty a_n^{(i)}$, Widerspruch, also muss gelten: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^\infty a_n^{(i)} \geq \sum_{i=0}^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$. Zusammen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^\infty a_n^{(i)} \leq \sum_{i=0}^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$ folgt also die Behauptung des Satzes und man ist hier fertig! \square

Lemma (Quotientenkriterium). *Es sei $\sum_{k=0}^\infty a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für fast alle k , dann gilt:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^\infty a_k \text{ konvergiert absolut.}$$

Beweis. Sei $a := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$. Man kann also ein $\varepsilon > 0$ wählen, dass auch noch $q := a + \varepsilon < 1$ gilt. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = a$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < a + \varepsilon = q$ für alle $k \geq k_0$, und damit $|a_{k+1}| < q \cdot |a_k|$. Daraus ergibt sich für alle $k \geq k_0$: $|a_k| < q \cdot |a_{k-1}| < q^2 \cdot |a_{k-2}| < \dots < q^{k-k_0} \cdot |a_{k_0}|$. Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty q^{k-k_0} \cdot |a_{k_0}|$ eine konvergente Majorante von $\sum_{k=0}^\infty |a_k|$, denn $\sum_{k=0}^\infty q^{k-k_0} \cdot |a_{k_0}| = q^{-k_0} \cdot |a_{k_0}| \cdot \sum_{k=0}^\infty q^k = q^{-k_0} \cdot |a_{k_0}| \cdot \frac{1}{1-q}$ wegen $q < 1$. \square

Satz (Satz von Euler). *Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$: $\prod_{k=1}^\infty \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=1}^\infty \sum_{l=0}^\infty (x^k)^l = \sum_{k=0}^\infty p(k) \cdot x^k$, mit $p(0) = 1$.*

Beweis. Zunächst wird ein informaler Beweis gegeben: Bekanntermaßen gilt: $\sum_{l=0}^{\infty} x^l = \frac{1}{1-x}$ für alle $x \in [0, 1)$. Man betrachtet nun $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (x^k)^l$:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} &= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (x^k)^l \\ &= (1 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + x^{1+1+1+1} + \dots) \cdot \\ &\quad (1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + x^{2+2+2+2} + \dots) \cdot \\ &\quad (1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + x^{3+3+3+3} + \dots) \cdot \\ &\quad \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k \end{aligned}$$

Hier darf man aber nicht einfach gliedweise ausmultiplizieren. Jetzt kommt der formale Beweis, der dieses Problem löst: Sei also $x \in [0, 1)$, dann betrachtet man $F_m(x) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1-x^k}$ und $F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x)$. Es gilt, dass $F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$ und $\prod_{k=1}^{\infty} 1 - x^k$ auch wirklich konvergieren. Beweis: Es konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - x^k)$ absolut für $x \in [0, 1)$ nach dem

$$\text{Quotientenkriterium (siehe Lemma oben), denn es gilt: } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(1 - x^{k+1})}{\ln(1 - x^k)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{d}{dk} \ln(1 - x^{k+1})}{\frac{d}{dk} \ln(1 - x^k)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1} \cdot \ln(x)}{x^{k+1} - 1}}{\frac{x^k \cdot \ln(x)}{x^k - 1}} \right| =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| x \cdot \frac{x^k - 1}{x^{k+1} - 1} \right| = \left| x \cdot \frac{-1}{-1} \right| = |x| = x < 1, \text{ weil in } \frac{|\ln(1 - x^{k+1})|}{|\ln(1 - x^k)|} \text{ für } k \rightarrow \infty \text{ Zähler und Nenner gegen 0 laufen. Also konvergiert}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - x^k) \text{ absolut, also konvergiert es auch. Jetzt folgt: } g_0 = e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - x^k)} = \lim_{l \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=1}^l \ln(1 - x^k)} = \lim_{l \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^l 0 - \ln(1 - x^k)} =$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^l \ln(1 - \ln(1 - x^k))} = \lim_{l \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^l \ln\left(\frac{1}{1 - x^k}\right)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^l \frac{1}{1 - x^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}. \text{ Wegen } g'_0 = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - x^k)} = \prod_{k=1}^{\infty} 1 - x^k \text{ folgt}$$

auch die Konvergenz von $\prod_{k=1}^{\infty} 1 - x^k$. Weiter: $(F_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ ist eine monotone Folge, denn wegen $0 \leq x < 1$ folgt $1 - x^{m+1} \leq 1$,

also $\frac{1}{1 - x^{m+1}} \geq 1$ und damit: $F_{m+1}(x) = \frac{1}{1 - x^{m+1}} \cdot F_m(x) \geq F_m(x)$. Daraus folgt: $F_m(x) \leq F(x)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und für festes $x \in [0, 1)$. Sei $p_m(n)$ die Anzahl der Partitionen von n , wobei die Summanden alle kleiner-gleich m sind. Es gilt dann $F_m(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_m(k) \cdot x^k$. Siehe dazu folgende Rechnung hier:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1-x^k} &= \prod_{k=1}^m \sum_{l=0}^{\infty} (x^k)^l \\ &= (1 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + x^{1+1+1+1} + \dots) \cdot \\ &\quad (1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + x^{2+2+2+2} + \dots) \cdot \\ &\quad (1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + x^{3+3+3+3} + \dots) \cdot \\ &\quad \dots \\ &= (1 + x^m + x^{m+m} + x^{m+m+m} + x^{m+m+m+m} + \dots) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k) \cdot x^k \end{aligned}$$

Hier hingegen darf man nach dem Produktsatz oben gliedweise ausmultiplizieren und damit sehen, dass $F_m(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_m(k) \cdot x^k =$

$\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k) \cdot x^k$ ($p_m(0) = 1$) gilt. Denn man hat endlich viele unendliche Reihen, die für $x \in [0, 1)$ absolut konvergieren. Weiter:

Für $m \geq k$ gilt nach Definition der Partitionsfunktion $p_m(k) = p(k)$. Außerdem: $p_m(k) \leq p(k)$ für alle $m < k$. D.h. es gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(k) = p(k)$. Nun teilt man F_m als Reihe in zwei Summanden auf: $F_m(x) = \sum_{k=0}^m p_m(k) \cdot x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k) \cdot x^k =$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^m p(k) \cdot x^k}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k) \cdot x^k}_{\geq 0}, \text{ denn } p_m(k) = p(k) \text{ für } m \geq k. \text{ Es folgt: } \sum_{k=0}^m p(k) \cdot x^k \leq F_m(x) \leq F(x), \text{ also ist } \sum_{k=0}^m p(k) \cdot x^k$$

als beschränkte Reihe mit positiven Summanden absolut konvergent. Daraus folgt, dass auch $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m p(k) \cdot x^k \leq F(x)$ gilt, also

$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k \leq F(x)$. Es gilt nun:

$$F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k) \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} p_m(k) \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k \leq F(x)$$

Gezeigt ist also: $F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k$ Es muss noch begründet werden, warum man eben Limes und Summe tauschen durfte: Sei $a_m^{(k)} := p_m(k) \cdot x^k$ für festes $x \in [0, 1)$. Es gilt $0 \leq a_m^{(k)} < +\infty$ und $a_m^{(k)}$ wächst monoton in m wegen

$p_m(k) \cdot x^k \leq p_{m+1}(k) \cdot x^k$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m^{(k)} = p(k) \cdot x^k$. Es existiert der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} a_m^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k) \cdot x^k$, denn $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k$ ist eine konvergente Majorante. Man wende nun das $a_m^{(k)}$ auf den Satz (Vertauschung von Limes und Summe) an. Das ist das Ende des Beweises hier. \square

Satz (Euler's Pentagonalzahlensatz). *Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$: $\prod_{k=1}^{\infty} 1 - x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot (x^{\omega(k)} + x^{\omega(-k)})$, wobei hier gilt: $\omega(k) = \frac{3k^2 - k}{2}$, also $\omega(-k) = \frac{3k^2 + k}{2}$ (Pentagonalzahlen).*

Beweis. Man schreibt zunächst $\prod_{k=1}^{\infty} 1 - x^k = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} a(l) \cdot x^l$. Die Konvergenz von $\prod_{k=1}^{\infty} 1 - x^k$ für $x \in [0, 1)$ wurde im Satz von Euler oben bewiesen. $a(l)$ entsteht dadurch, dass eine Partition von l in ungleiche Teile einen Koeffizienten $+1$ oder -1 vor dem Term x^l bewirkt. Der Koeffizient ist $+1$, wenn x^l das Produkt einer geraden Anzahl von Faktoren ist, und -1 , wenn x^l das Produkt einer ungeraden Anzahl von Faktoren ist. Es gilt also $a(l) = p_g(l) - p_u(l)$, wobei $p_g(l)$ die Anzahl von Partitionen von l in ungleiche Teile gerader Anzahl und $p_u(l)$ die Anzahl von Partitionen von l in ungleiche Teile ungerader Anzahl ist. Im Folgenden wird gezeigt, dass $p_g(n) = p_u(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, außer, wenn n eine Pentagonalzahl ist. Es gilt also $\prod_{m=1}^{\infty} 1 - x^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_g(n) - p_u(n)) \cdot x^n$. Es wird jetzt gezeigt, dass $p_g(n) = p_u(n)$ gilt, außer wenn n eine Pentagonalzahl ist. Dazu betrachtet man den Graphen einer Partition von n in ungleiche Teile. Man sagt, dass der Graph in Standardform ist, wenn die Zeilen in absteigender Reihenfolge sortiert sind, so wie in Abbildung 1 unten. Die längste Verbindung zwischen Punkten in der letzten Reihe wird Basis genannt, die Anzahl der Punkte wird mit b bezeichnet. Es gilt also $b \geq 1$. Die längste Verbindung im 45° -Winkel, die am Ende der ersten Reihe beginnt, wird Schräge genannt, die Anzahl der Punkte wird mit s bezeichnet. Es gilt $s \geq 1$. In Abbildung 1 unten ist $b = 2$ und $s = 4$.

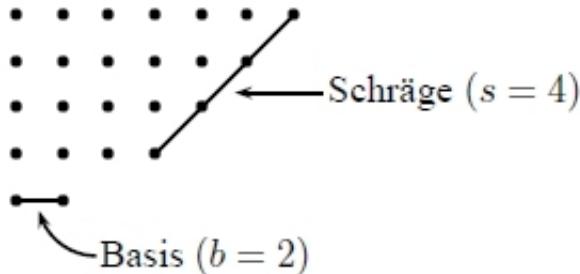


Abbildung 1

Jetzt werden zwei Operationen A und B auf dem Graphen definiert. Operation A verschiebt die Basis so, dass sie parallel zur Schräge liegt. Operation B verschiebt die Schräge unter die Basis. Illustriert ist das in Abbildung 2 und 3:

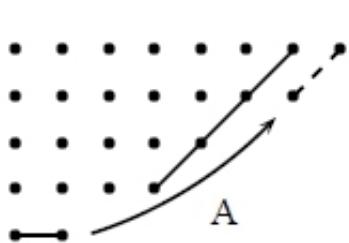


Abbildung 2

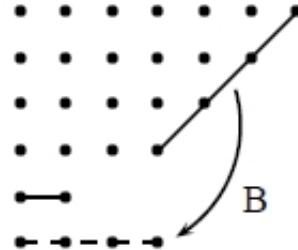


Abbildung 3

Man nennt eine solche Operation zulässig, wenn der neu entstandene Graph wieder in Standardform ist, also aus ungleichen Teilen besteht, die in absteigender Reihenfolge sortiert sind. Wenn A zulässig ist, erhält man eine neue Partition von n in ungleiche Teile, es gibt aber ein Teil weniger als vorher. Wenn B zulässig ist, erhält man ebenfalls eine neue Partition von n in ungleiche Teile, es gibt ein Teil mehr als zuvor. Wenn also für jede Partition von n entweder A oder B zulässig ist, dann sind jeweils zwei Partitionen über A und B verbunden. Es folgt $p_g(n) = p_u(n)$, da eine ungerade Partition durch A oder B in eine gerade Partition übergeht und umgekehrt. Um zu bestimmen, ob A oder B zulässig ist, betrachtet man drei Fälle:

- 1. Fall** Wenn $b < s$ ist, gilt $b \leq s - 1$. Operation A ist zulässig, Operation B nicht, denn B zerstört die Standardform. Siehe dazu die Abbildung 2 und 3 oben.

2. Fall Wenn $b = s$ ist, ist Operation B nicht zulässig, da der entstandene Graph nicht in Standardform ist. Operation A ist erlaubt, außer in den Fällen, in denen Basis und Schrägen überlappen. Siehe Abbildung 4.

3. Fall Wenn $b > s$ ist, ist Operation A nicht zulässig. B hingegen wohl, außer in dem Fall, dass $b = s + 1$ gilt, und Basis und Schrägen überlappen. Diese Situation ist in Abbildung 5 zu sehen.

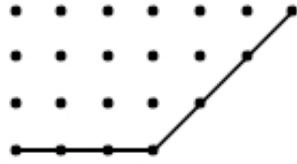


Abbildung 4

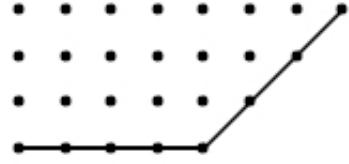


Abbildung 5

Es folgt also, dass entweder A oder B zulässig ist, außer in den beiden Ausnahmefällen. Man betrachtet nun den ersten Ausnahmefall, wie er in Abbildung 4 gezeigt ist. Sei k die Anzahl der Reihen im Graph, also $k = s = b$. Demnach lässt sich n folgendermaßen berechnen: $n = \sum_{i=0}^{k-1} k + i = \frac{3k^2 - k}{2} = \omega(k)$. Für dieses n gibt es also genau eine Extrapartition, die sich nicht paaren lässt, die anderen Partitionen mit der gleichen Anzahl an Punkten $n = \omega(k)$ lassen sich paaren (Eine Partition in ungleiche Teile mit ungerader Anzahl an Zeilen mit einer Partition in ungleiche Teile mit gerader Anzahl an Zeilen und umgekehrt), seien dies p Paare. Ist k gerade, dann gilt: $p_g(n) - p_u(n) = p_g(\omega(k)) - p_u(\omega(k)) = (p+1) - p$, und wenn k ungerade ist, dann gilt $p_g(n) - p_u(n) = p_g(\omega(k)) - p_u(\omega(k)) = p - (p+1) = -1$, also gilt $p_g(\omega(k)) - p_u(\omega(k)) = (-1)^k$. Im anderen Ausnahmefall (siehe Abbildung 5) hat man wegen $b = s + 1$ und $k = s$, also $b = k + 1$, in jeder Reihe einen zusätzlichen Punkt, also $n = \frac{3k^2 - k}{2} + k = \frac{3k^2 + k}{2} = \omega(-k)$, also folgt analog zu eben: $p_g(\omega(-k)) - p_u(\omega(-k)) = (-1)^k$. Damit ist bewiesen, dass $\prod_{k=1}^{\infty} 1 - x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{\omega(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{\omega(-k)}$ gilt. \square

Satz (Euler's Rekursionsformel für $p(n)$). Es gilt die folgende Formel: $p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot (p(n - \omega(k)) + p(n - \omega(-k)))$ für alle $n \geq 1$. Dabei sei $p(0) = 1$ und $p(n) = 0$ für alle $n < 0$.

Beweis. Es folgt aus den Sätzen oben:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\prod_{m=1}^{\infty} 1 - x^m \right) \cdot \left(\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^m} \right) = \left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (x^{\omega(k)} + x^{\omega(-k)}) \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k \right) = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (x^{\omega(k)} + x^{\omega(-k)}) \right) \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m (-1)^k \cdot (x^{\omega(k)} + x^{\omega(-k)}) \cdot p(m-k) \cdot x^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot (x^{\omega(k)} + x^{\omega(-k)}) \cdot p(m-k) \cdot x^{m-k} \end{aligned}$$

Man sammelt nun die Koeffizienten von x^n : Da für $m > n$ die Potenzen von x in der Doppelsumme echt größer als n sind, reicht es die folgende Reihe zu betrachten:

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot p(m-k) \cdot x^{m-k} \cdot (x^{\omega(k)} + x^{\omega(-k)})$$

$m = n$:

$$(-1)^1 \cdot p(n-1) \cdot x^{n-1} \cdot (x^1 + x^2) \quad (-1)^1 \cdot p(n-2) \cdot x^{n-2} \cdot (x^1 + x^2) \quad (-1)^1 \cdot p(n-3) \cdot x^{n-3} \cdot (x^1 + x^2)$$

$$(-1)^2 \cdot p(n-2) \cdot x^{n-2} \cdot (x^5 + x^7) \quad (-1)^2 \cdot p(n-3) \cdot x^{n-3} \cdot (x^5 + x^7) \quad (-1)^2 \cdot p(n-4) \cdot x^{n-4} \cdot (x^5 + x^7)$$

$$(-1)^3 \cdot p(n-3) \cdot x^{n-3} \cdot (x^{12} + x^{15}) \quad (-1)^3 \cdot p(n-4) \cdot x^{n-4} \cdot (x^{12} + x^{15}) \quad (-1)^3 \cdot p(n-5) \cdot x^{n-5} \cdot (x^{12} + x^{15})$$

\vdots

\vdots

$m = n - 2$:

$$(-1)^1 \cdot p(n-3) \cdot x^{n-3} \cdot (x^1 + x^2) \quad (-1)^1 \cdot p(n-4) \cdot x^{n-4} \cdot (x^1 + x^2)$$

$$(-1)^2 \cdot p(n-4) \cdot x^{n-4} \cdot (x^5 + x^7) \quad (-1)^2 \cdot p(n-5) \cdot x^{n-5} \cdot (x^5 + x^7) \quad (-1)^2 \cdot p(n-6) \cdot x^{n-6} \cdot (x^5 + x^7)$$

$$(-1)^3 \cdot p(n-5) \cdot x^{n-5} \cdot (x^{12} + x^{15}) \quad (-1)^3 \cdot p(n-6) \cdot x^{n-6} \cdot (x^{12} + x^{15}) \quad (-1)^3 \cdot p(n-7) \cdot x^{n-7} \cdot (x^{12} + x^{15})$$

\vdots

$m = n - 3$:

$m = n - 4$:

$$(-1)^1 \cdot p(n-4) \cdot x^{n-4} \cdot (x^1 + x^2) \quad (-1)^1 \cdot p(n-5) \cdot x^{n-5} \cdot (x^1 + x^2) \quad (-1)^1 \cdot p(n-6) \cdot x^{n-6} \cdot (x^1 + x^2)$$

$$(-1)^2 \cdot p(n-5) \cdot x^{n-5} \cdot (x^5 + x^7) \quad (-1)^2 \cdot p(n-6) \cdot x^{n-6} \cdot (x^5 + x^7) \quad (-1)^2 \cdot p(n-7) \cdot x^{n-7} \cdot (x^5 + x^7)$$

$$(-1)^3 \cdot p(n-6) \cdot x^{n-6} \cdot (x^{12} + x^{15}) \quad (-1)^3 \cdot p(n-7) \cdot x^{n-7} \cdot (x^{12} + x^{15}) \quad (-1)^3 \cdot p(n-8) \cdot x^{n-8} \cdot (x^{12} + x^{15})$$

\vdots

\vdots

$m = n - 5$:

\vdots

Und immer so weiter! Das Muster da oben ist wohl klar geworden. Aus einem Koeffizientenvergleich folgt wegen $1 = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) \cdot x^k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot (x^{\omega(k)} + x^{\omega(-k)}) \cdot p(m-k) \cdot x^{m-k}$, dass der Koeffizient von x^n ($n \geq 1$) gleich 0 ist, also:

$$\begin{aligned} 0 &= p(n) + (-1)^1 \cdot p(n-1) + (-1)^1 \cdot p(n-2) \\ &\quad + (-1)^2 \cdot p(n-5) + (-1)^2 \cdot p(n-7) \\ &\quad + (-1)^3 \cdot p(n-12) + (-1)^3 \cdot p(n-15) \\ &\quad + (-1)^4 \cdot p(n-22) + (-1)^4 \cdot p(n-26) + \dots \end{aligned}$$

Dabei sei oben immer gewesen: $\omega(1) = 1, \omega(-1) = 2, \omega(2) = 5, \omega(-2) = 7, \omega(3) = 12, \omega(-3) = 15, \omega(4) = 22, \omega(-4) = 26, \dots$, also gilt wirklich: $p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot (p(n-\omega(k)) + p(n-\omega(-k))), p(0) = 1$ und $p(n) = 0 \forall n < 0$. \square

Die Summe von Potenzen

[Zurück zur Liste]

Satz. Die Taylorreihe zu $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ hat um den Entwicklungspunkt 0 den Konvergenzradius 2π .

Beweis. Man betrachte f als komplexe Funktion $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}, f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. $z = 0$ ist eine hebbare Singularität, denn: Weil für

$$z \rightarrow 0 \text{ Zähler und Nenner von } f \text{ gegen 0 gehen, ist die Regel von l'Hospital anwendbar, also: } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dz} z}{\frac{d}{dz}(e^z - 1)} =$$

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z} = 1$. Weil z und $e^z - 1$ holomorph sind, ist es auch $\frac{z}{e^z - 1}$ für $z \neq k \cdot 2\pi i$ ($k \in \mathbb{Z} \neq 0$). Weiter ist f in $z = 0$ sogar holomorph, was man folgendermaßen einsehen kann: $f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \frac{z}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}}$, also $\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{1}{z} \cdot \left(-1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}} \right) = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}} \right) = \frac{-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{k!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}}$, also: $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{k!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}} = \frac{-\frac{1}{2!} - 0}{1 + 0} = -\frac{1}{2}$. Nun

ist $K_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - 0| < r\}$ für $r = 2\pi$ die größte offene Kreisscheibe um 0, die die nächsten nicht hebbaren Singularitäten von f nämlich $\pm 1 \cdot 2\pi i$ nicht beinhaltet. f ist auf $K_{2\pi}(0)$ holomorph. Es gilt dann bekanntermaßen für $r < 2\pi$ die Cauchy'sche Integralformel: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$ mit $|z| < r$. Jetzt gilt dann: $\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{f(w)}{w} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \cdot z^n$ (konvergent für $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$, also $|z| < |w| = r$). Man hat also:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \cdot z^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right) \cdot z^n$$

Denn aus der Analysis weiß man, dass man, weil die Reihe unter dem Integral gleichmäßig konvergiert, Integral und Summe vertauschen darf. Es wird jetzt gezeigt, dass gilt: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$, denn: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw \Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w|=r} \frac{d^n}{dz^n} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w|=r} f(w) \cdot \frac{n!}{(w-z)^{n+1}} dw \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{(w-0)^{n+1}} dw$, also die Behauptung. Dass $\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{w-z} = \frac{n!}{(w-z)^{n+1}}$ gilt, zeigt man leicht mit vollständiger Induktion. Es wurde also gezeigt, dass für alle z mit $|z| < 2\pi$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n$ konvergiert gegen $f(z)$. Da der reelle Fall im komplexen Fall enthalten ist, folgt die Behauptung des Satzes und der Beweis ist damit beendet. \square

Definition (Bernoulli-Zahlen). Wegen des Satzes oben kann man in einer Umgebung der 0 die Taylor-Entwicklung von $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ (reell) betrachten. Man setzt dafür an:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n$$

Die Koeffizienten B_n heißen dann Bernoulli-Zahlen.

Satz. Für die Bernoulli-Zahlen gilt die folgende Rekursionsgleichung: $\sum_{n=0}^m \binom{m+1}{n} \cdot B_n = 0$. Es gilt für alle $n \geq 1$: $B_{2n+1} = 0$.

Beweis. Bekannt ist, dass gilt $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Man rechnet nun:

$$f(x) = \frac{x}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1} = \frac{x}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \right)^{-1}$$

Daraus folgt dann also, dass gilt:

$$1 = f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \right)$$

Dieses Produkt kann man ausmultiplizieren:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} \frac{B_n}{n! \cdot (k+1)!} \cdot x^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \frac{B_n}{n! \cdot (m-n+1)} \cdot x^m$$

Mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b! \cdot (a-b)!}$ bekommt man also:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\sum_{n=0}^m \binom{m+1}{n} \cdot B_n}{(m+1)!} \right] \cdot x^m = 1$$

Unmittelbar folgt $B_0 = 1$. Ein Koeffizientenvergleich liefert nun $\frac{\sum_{n=0}^m \binom{m+1}{n} \cdot B_n}{(m+1)!} = 0$, also $\sum_{n=0}^m \binom{m+1}{n} \cdot B_n = 0$. Dies ist eine rekursive Gleichung zur Bestimmung von B_m aus der Kenntnis von B_0 bis B_{m-1} . Es wird nun bewiesen, dass $B_{2k+1} = 0$ für alle $k \geq 1$: Sei dazu definiert:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ und } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Offenbar gilt $\cosh(-x) = \cosh(x)$ und $\sinh(-x) = -\sinh(x)$. Folglich ist $h(x) = \frac{x}{2} \cdot \frac{\cosh(x/2)}{\sinh(x/2)}$ mit $h(-x) = h(x)$, also ist h eine gerade Funktion. Es gilt dann:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{\cosh(x/2)}{\sinh(x/2)} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 + e^x}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \cdot \frac{2 + e^x - 1}{e^x - 1} = \frac{2x + x \cdot (e^x - 1)}{2 \cdot (e^x - 1)} = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n$$

Daraus folgt dann:

$$h(x) = \frac{x}{2} \cdot \frac{\cosh(x/2)}{\sinh(x/2)} = \frac{x}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}x \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n$$

Denn man berechnet leicht $B_0 = 1$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$. Aus $h(-x) = h(x)$ folgt:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot (-x)^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

Also gilt dann: $2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = 0$, woraus leicht $\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ für alle $n \geq 1$ folgt, also $B_{2n+1} = 0$. \square

Satz (Summe von Potenzen). Es gilt: $\sum_{k=1}^n k^l = \frac{1}{l+1} \cdot \sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \cdot (n+1)^{l-m+1} \cdot B_m$ für $l \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Beweis. Mithilfe der bekannten geometrischen Summenformel hat man: $\sum_{k=0}^n e^{kx} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} \cdot f(x)$. Nun gilt:

$$\frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \cdot (n+1))^k}{k!} \right) - 1}{x} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x \cdot (n+1))^k}{k!}}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (n+1)^k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot x^k$$

Also gilt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{kx} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot x^k \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} \cdot x^m \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k+m=l} \frac{(n+1)^{k+1} \cdot B_m}{(k+1)! \cdot m!} \cdot x^{k+m} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{(n+1)^{l-m+1} \cdot B_m}{(l-m+1)! \cdot m!} \cdot x^l = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{\sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \cdot (n+1)^{l-m+1} \cdot B_m}{(l+1)!} \right] \cdot x^l \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber:

$$\sum_{k=0}^n e^{kx} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(kx)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{k^l}{l!} \right] \cdot x^l$$

Aus einem Koeffizientenvergleich folgt dann also:

$$\frac{\sum_{k=1}^n k^l}{l!} = \frac{\sum_{m=0}^l \binom{l+1}{m} \cdot (n+1)^{l-m+1} \cdot B_m}{(l+1)!}$$

Durch Multiplikation mit $l!$ auf beiden Seiten folgt die Behauptung des Satzes hier! \square

Der Banach'sche Fixpunktsatz

[\[Zurück zur Liste\]](#)

Satz. Sei $f : M \rightarrow M$ eine kontrahierende Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes in sich. Das heißt, es gilt für den metrischen Raum (M, d) : Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq C < 1$ so, dass für alle $x, y \in M$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq C \cdot d(x, y)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt, also ein $x \in M$ mit $f(x) = x$.

Beweis. Zunächst zur Existenz: Man wählt ein $x_0 \in M$ beliebig und definiert durch $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) rekursiv eine Folge. Es wird nun gezeigt, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist: Man schätzt ab: $d(x_i, x_{i+1}) = d(f(x_{i-1}), f(x_{i-2})) \leq C \cdot d(x_{i-1}, x_{i-2})$ und nach nochmaliger Anwendung: $d(x_i, x_{i-1}) \leq C^2 \cdot d(x_{i-2}, x_{i-3})$. Mittels vollständiger Induktion kann man dann zeigen: $d(x_i, x_{i-1}) \leq C^{i-1} \cdot d(x_1, x_0) = C^{i-1} \cdot d(f(x_0), x_0)$. Nach mehrmaliger Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt sich $d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} d(x_i, x_{i-1})$, also gilt dann: $d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} C^{i-1} \cdot d(f(x_0), x_0) = d(f(x_0), x_0) \cdot \sum_{i=n}^{n+k-1} C^i \leq d(f(x_0), x_0) \cdot \sum_{i=n}^{\infty} C^i = d(f(x_0), x_0) \cdot \left(\frac{1}{1-C} - \frac{C^{(n-1)+1} - 1}{C-1} \right) = d(f(x_0), x_0) \cdot \frac{C^n}{1-C}$. Dieser Ausdruck wird in Abhängigkeit von n beliebig klein, weswegen es sich bei (x_n) um eine Cauchy-Folge handelt, die konvergiert, da M vollständig ist. Sei nun $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ der Grenzwert der Folge. Wegen der Definition der Folge (x_n) gilt sicher $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Die Kontraktionsbedingung von f impliziert Lipschitz-Stetigkeit mit der Lipschitzkonstanten $C < 1$. Daher ist f damit auch stetig, also $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x)$. Weil $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gilt, folgt $f(x) = x$ und x ist der gesuchte Fixpunkt. Nun zur Eindeutigkeit: Seien x und y Fixpunkte von f . Dann gilt $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq C \cdot d(x, y)$. Also gilt dann $(1 - C) \cdot d(x, y) \leq 0$. Weil $1 - C > 0$ und $d(x, y) \geq 0$ gilt, folgt $d(x, y) = 0$, also $x = y$. \square

Der Satz von Bolzano-Weierstraß

[\[Zurück zur Liste\]](#)

Satz. Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Wegen der Beschränktheit der Folge gibt es reelle Zahlen $c < d$ mit $a_n \in [c, d]$ für alle n . Man konstruiert nun induktiv eine Intervallschachtelung $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ so, dass $I_k = [c_k, d_k]$ unendlich viele Folgenglieder a_n enthält, sowie eine zugehörige Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $n_{k+1} > n_k$ und $a_{n_k} \in I_k$. Induktionsanfang: Wähle $I_0 = [c_0, d_0]$ mit $c_0 := c$ und $d_0 := d$ sowie ein $a_{n_0} \in I_0$. Induktionsschritt: Sei $I_k = [c_k, d_k]$ bereits konstruiert und $m_k := \frac{1}{2} \cdot (c_k + d_k)$ der Mittelpunkt. Da I_k unendlich viele Folgenglieder enthält, können nicht beide Teileintervalle $[c_k, m_k]$ und $[m_k, d_k]$ nur endlich viele Folgenglieder enthalten. Setze $I_{k+1} := [c_{k+1}, d_{k+1}]$ mit $c_{k+1} := c_k$ und $d_{k+1} := m_k$, falls $[c_k, m_k]$ unendlich viele Folgenglieder enthält, ansonsten $I_{k+1} := [c_{k+1}, d_{k+1}]$ mit $c_{k+1} := m_k$ und $d_{k+1} := d_k$. Offenbar gilt $I_{k+1} \subseteq I_k$ und $|I_{k+1}| = \frac{1}{2} \cdot |I_k| = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot |I_0|$. Da die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in I_{k+1}\}$ unendlich ist, enthält sie ein Element $m > n_k$. Setze $n_{k+1} := m$, d.h. es gilt $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ und $n_{k+1} > n_k$. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $h \in \mathbb{R}$ mit $h \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $I_k \subseteq [h - \varepsilon, h + \varepsilon]$ für alle $k \geq N$, d.h. $|a_{n_k} - h| \leq \varepsilon$ für alle $k \geq N$. Das bedeutet also $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = h$. Schlussendlich ist der Satz damit bewiesen. \square

Die Stirling'sche Näherungsformel

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt die folgende Formel:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Beweis. Bereits bekannt ist die Wallis'sche Produktformel:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)^2}{(2j-1) \cdot (2j+1)} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)^4}{(2j-1) \cdot (2j) \cdot (2j) \cdot (2j+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} \cdot (n!)^4}{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)}$$

Daraus folgt also nach Ziehen der Wurzel:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{n + \frac{1}{2}}}$$

Man betrachtet nun die Folge $x_n := \frac{n! \cdot e^n}{\sqrt{n} \cdot n^n}$. Diese Folge ist offenbar durch 0 nach unten beschränkt. Es wird nun gezeigt, dass x_n monoton fällt, womit dann die Konvergenz gezeigt ist. Man betrachtet dazu den folgenden Quotienten:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n! \cdot e^n}{\sqrt{n} \cdot n^n} \cdot \frac{\sqrt{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot e^{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Logarithmieren liefert dann:

$$\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = -1 + (n + \frac{1}{2}) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Nun gilt für $|z| < 1$ die Reihenentwicklung

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = 2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{5}z^5 + \frac{2}{7}z^7 + \dots$$

Für positives z folgt somit:

$$2z \leq \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \leq 2 \cdot \left(z + \frac{z^3}{3} \cdot (1+z^2+z^4+z^6+\dots)\right) = 2 \cdot \left(z + \frac{z^3}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (z^2)^k\right)$$

Also gilt dann:

$$2z \leq \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \leq 2 \cdot \left(z + \frac{z^3}{3} \cdot \frac{1}{1-z^2}\right) = 2z + \frac{2}{3} \cdot \frac{z^3}{1-z^2}$$

Mit $z := \frac{1}{2n+1}$ ergibt sich dann:

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1) \cdot ((2n+1)^2 - 1)}$$

Man erhält also:

$$1 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4n^2 + 4n} \Leftrightarrow 0 \leq -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4n^2 + 4n}$$

Daraus folgt dann:

$$0 \leq \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Aus der linken Ungleichung ergibt sich die Monotonie und aus der rechten Ungleichung folgt wegen $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ die wichtige Abschätzung:

$$\ln(x_n) - \frac{1}{12n} \leq \ln(x_{n+1}) - \frac{1}{12 \cdot (n+1)} \Rightarrow \ln(x_n) - \frac{1}{12n} \leq \ln(x_{n+m}) - \frac{1}{12 \cdot (n+m)}$$

Also hat man dann:

$$\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+m}}\right) \leq \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right)$$

Lässt man m gegen ∞ laufen, bekommt man (x sei der Limes von x_n):

$$0 \leq \ln\left(\frac{x_n}{x}\right) \leq \frac{1}{12n} \Rightarrow 1 \leq \frac{x_n}{x} \leq e^{\frac{1}{12n}}$$

Insgesamt hat man also gezeigt:

$$x \leq \frac{n! \cdot e^n}{\sqrt{n} \cdot n^n} \leq x \cdot e^{\frac{1}{12n}}$$

Jetzt muss nur noch x berechnet werden. Es gilt ja $n! = \frac{x_n \cdot n^{\frac{n+1}{2}}}{e^n}$ und also:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{n + \frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} \cdot x_n^2 \cdot n^{2n+1} \cdot e^{2n}}{e^{2n} \cdot x_{2n} \cdot (2n)^{2n+2} \cdot \sqrt{n + \frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{x_{2n}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Es ist also $x = \sqrt{2\pi}$ und es gilt schließlich:

$$\sqrt{2\pi} \leq \frac{n! \cdot e^n}{\sqrt{n \cdot n^n}} \leq \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{1}{12n}}$$

Damit ist also die Behauptung des Satzes bewiesen. \square

Die Fouriertransformation

[Zurück zur Liste]

Satz. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für fast alle $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \cdot e^{ixt} dx$$

Gleichheit besteht in jedem Punkt t , in dem f stetig ist. Es ist hier $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-ixt} dt$ die Fouriertransformierte von f . $\hat{f}(x)$ gibt Auskunft darüber, wie stark eine Schwingung der Frequenz x an der Überlagerung von Schwingungen zur Funktion f amplitudenmäßig beteiligt ist.

Beweis. Eine Folge $\delta_k \in L^1(\mathbb{R})$ heißt Diracfolge, wenn sie folgende drei Eigenschaften hat: (D1) Für alle k gilt $\delta_k \geq 0$, (D2) Für alle k gilt $\int_{\mathbb{R}} \delta_k(t) dt = 1$ und (D3) Für alle $K_r(0) := \{t \in \mathbb{R} : |t - 0| < r\}$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus K_r(0)} \delta_k(t) dt = 0$. Sei definiert:
 $\delta_1(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ und $\delta_k(t) = k \cdot \delta_1(k \cdot t)$, $k \in \mathbb{N}$. Klarerweise ist (D1) erfüllt. Aber es gilt auch (D2), denn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(t) dt = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \cdot t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = 1$$

Es wurde hier die Koordinatentransformation $s := \frac{k \cdot t}{\sqrt{2}}$ benutzt. Nun zu (D3): $\int_{\mathbb{R} \setminus K_r(0)} \delta_k(t) dt = \int_{-\infty}^{-r} \delta_k(t) dt + \int_r^{\infty} \delta_k(t) dt$. Weil δ_k symmetrisch zur y -Achse ist, folgt: $\int_{\mathbb{R} \setminus K_r(0)} \delta_k(t) dt = 2 \cdot \int_r^{\infty} \delta_k(t) dt = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{k \cdot r}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-s^2} ds$. Wegen $r > 0$ folgt $\frac{k \cdot r}{\sqrt{2}} \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$. Also gilt: Für $k \rightarrow \infty$ folgt $\int_{\frac{k \cdot r}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-s^2} ds = \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds - \int_0^{\frac{k \cdot r}{\sqrt{2}}} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{k \cdot r}{\sqrt{2}}} e^{-s^2} ds \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$, also (D3) gezeigt. Es gilt $\hat{\delta}_1 = \delta_1$, Beweis dieser Aussage: Es gilt nochmal $\delta_1(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$,

also: $\hat{\delta}_1(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-ixt} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{2} + ixt - \frac{x^2}{2}\right)} dt$. Jetzt benutzt man die Substitutionsregel und verkettet

mit $t(s) := s \cdot \sqrt{2} - ix$, also $t'(s) = \sqrt{2}$, und man erhält dann: $\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{ix}{\sqrt{2}}\right)^2} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \cdot \sqrt{2} ds =$

$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \cdot \sqrt{2} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \delta_1(x)$. Weiter:

$$\delta_k(x) = k \cdot \delta_1(k \cdot x) = k \cdot \hat{\delta}_1(k \cdot x) = \frac{k}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-ikxt} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2k^2}} \cdot e^{-ixs} ds$$

Die Faltung von f mit δ_k ergibt unter Berücksichtigung von $\delta_k(t-x) = \delta_k(x-t)$:

$$\begin{aligned}
(f * \delta_k)(t) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \cdot \delta_k(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta_k(t-x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta_k(x-t) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2k^2}} \cdot e^{-i \cdot (x-t) \cdot s} ds \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\frac{s^2}{2k^2}} \cdot e^{-i \cdot (x-t) \cdot s} ds \right) dx
\end{aligned}$$

Der messbare Integrand dieses Doppelintegrals hat als Funktion von $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die integrierbare Majorante $|f(x)| \cdot e^{-s^2}$. Folglich kann nach dem Satz von Fubini die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden und man erhält durch Auswertung des inneren Integrals:

$$\begin{aligned}
(f * \delta_k)(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\frac{s^2}{2k^2}} \cdot e^{-i \cdot (x-t) \cdot s} dx \right) ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ixs} dx \right) \cdot e^{-\frac{s^2}{2k^2}} \cdot e^{its} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot e^{-\frac{s^2}{2k^2}} \cdot e^{its} ds
\end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ konvergieren die Integranden punktweise gegen $\hat{f}(s) \cdot e^{its}$ und werden durch die integrierbare Funktion \hat{f} majorisiert. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz (Satz von Lebesgue) konvergiert also:

$$(f * \delta_k)(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot e^{its} ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

Es wird nun gezeigt, dass gilt $\|f * \delta_k - f\|_1 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Wenn das gilt, dann folgt, dass es eine Teilfolge $(f * \delta_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ gibt, welche fast überall gegen f konvergiert. Beweis dieser Aussage: Sei zunächst $f * \delta_k =: f_k$. Weil $\|f_k - f\|_1 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt, ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -Cauchyfolge. Also gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$. Daher existiert auch eine Teilfolge $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ so, dass $\|f_{k_n} - f_m\|_1 < \frac{1}{2^n}$ für alle $m \geq k_n$. Definiert man $g_n := f_{k_n} - f_{k_{n+1}}$, so gilt für alle $1 \leq l < \infty$: $\left\| \sum_{n=1}^l |g_n| \right\|_1 \stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \sum_{n=1}^l \|g_n\|_1 \stackrel{k_{n+1} \geq k_n}{\leq} \sum_{n=1}^l \frac{1}{2^n} < 1$. Weil $\sum_{n=1}^l |g_n|$ monoton gegen $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ läuft, gilt nach dem Satz der monotonen Konvergenz $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \right\|_1 \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^l \|g_n\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Das bedeutet, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ fast überall absolut konvergent ist, also konvergent ist. Es gilt $f_{k_1} - f_{k_n} = \sum_{j=1}^{n-1} g_j$ (Teleskopsumme). Daraus folgt direkt, dass

f_{k_n} für $n \rightarrow \infty$ fast überall gegen $f_{k_1} - \sum_{n=1}^{\infty} g_n =: g$ konvergiert. Man hat also eine konvergente Teilfolge gefunden. Es wird jetzt gezeigt, dass $g \in L^1(\mathbb{R})$ ($\|g\|_1 < \infty$) ist und, dass $\|f_k - g\|_1 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_{k_n} - f_m\|_1 < \varepsilon$ für alle $k_n, m \geq n_0$. Man wendet nun das Lemma von Fatou auf die Folge $(|f_{k_n} - f_m|)_{n \in \mathbb{N}}$ an und erhält für alle $m \geq n_0$: $\int |g - f_m| d\mu = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_{k_n} - f_m| d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |f_{k_n} - f_m| d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_{k_n} - f_m\|_1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varepsilon = \varepsilon$. Also gilt auch $\|g - f_k\|_1 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Wegen $\|g\|_1 \leq \|g - f_{k_1}\|_1 + \|f_{k_1}\|_1$ ist also $\|g\|_1 < \infty$ (also: $g \in L^1(\mathbb{R})$), denn wegen $f_{k_1} \in L^1(\mathbb{R})$ (denn: $f_{k_1} = f * \delta_{k_1}$ mit $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\delta_{k_1} \in L^1(\mathbb{R})$) ist schonmal $\|f_{k_1}\|_1 < \infty$. Weiter: $\|f_{k_1} - g\|_1 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_1 \leq$

$\lim_{l \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^l g_n \right\|_1 \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^l \|g_n\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$. Weil $\|f_k - f\|_1 \rightarrow 0$ und $\|f_k - g\|_1 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt, folgt, dass fast überall gilt $f = g$, also gibt es eine Teilfolge $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass gilt: f_{k_n} konvergiert für $n \rightarrow \infty$ fast überall gegen f (Ende des Beweises der Aussage oben). Jetzt wird aber auch gezeigt, dass gilt $\|f * \delta_k - f\|_1 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$: Die Behauptung wird zunächst für Treppenfunktionen $f = \sum_{k=1}^s r_k \cdot \mathbf{1}_{I_k}$ ($r_k \in \mathbb{R}$) gezeigt. Aus Linearitätsgründen genügt es hierzu sie für $f = \mathbf{1}_I$

(I ist ein Intervall) zu zeigen: Es wird $\|\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I * \delta_k\|_1$ abgeschätzt. Wegen der Eigenschaft (D2) von δ_k gilt $\mathbf{1}_I(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_I(x) \cdot \delta_k(y) dy$. Es gilt dann $\|\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I * \delta_k\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I * \delta_k| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_I(x) \cdot \delta_k(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_I(x-y) \cdot \delta_k(y) dy \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(y) \cdot (\mathbf{1}_I(x) - \mathbf{1}_I(x-y)) dy \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(y) \cdot |\mathbf{1}_I(x) - \mathbf{1}_I(x-y)| dy \right) dx$, wobei $\delta_k \geq 0$ benutzt wurde. Das Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt mit $q_y(x) := |\mathbf{1}_I(x) - \mathbf{1}_I(x-y)|$ dann $\|\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I * \delta_k\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(y) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} q_y(x) dx \right) dy$. Dabei ist q_y die charakteristische Funktion der Menge $I_y := [I \cup (y+I)] \setminus [I \cap (y+I)]$. Es sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Man wählt dann ein $r > 0$ so, dass $v(I_y) < \varepsilon$ für alle $y \in K := K_r(0) = \{t \in \mathbb{R} : |t| < r\}$. Dann gilt $\int_{-\infty}^{\infty} q_y(x) dx < \varepsilon$

für $y \in K$. Nun gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(y) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} q_y(x) dx \right) dy = \int_K \delta_k(y) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} q_y(x) dx \right) dy + \int_{\mathbb{R} \setminus K} \delta_k(y) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} q_y(x) dx \right) dy \leq \varepsilon \cdot \int_K \delta_k(y) dy + 2 \cdot v(I) \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus K} \delta_k(y) dy$ wegen $\int_{-\infty}^{\infty} q_y(x) dx = v(I_y) \leq 2 \cdot v(I)$. Weil $\int_K \delta_k(y) dy \leq 1$ gilt, folgt zusammen mit der Eigenschaft (D3) von δ_k , dass gilt: $\|\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I * \delta_k\|_1 \leq 2 \cdot \varepsilon$ für alle hinreichend große k . Sei jetzt $f \in L^1(\mathbb{R})$ beliebig. Sei wieder $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man wähle dann eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$ und ein N derart, dass für alle $k \geq N$ gilt $\|\varphi - \varphi * \delta_k\|_1 < \varepsilon$. Für diese k gilt dann: $\|f - f * \delta_k\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - \varphi * \delta_k\|_1 + \|(\varphi - f) * \delta_k\|_1 \leq 2 \cdot \varepsilon + \|\varphi - f\|_1 \cdot \|\delta_k\|_1 \leq 2 \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot 1 = 3\varepsilon$, wobei hier $\|\delta_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \delta_k(t) dt = 1$ benutzt wurde. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt ist, folgt die behauptete Konvergenzaussage, dass $\|f - f * \delta_k\|_1 = \|f * \delta_k - f\|_1 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Wegen dieser Konvergenz gibt es also eine Teilfolge $(f * \delta_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$, die fast überall gegen f konvergiert. Weil $(f * \delta_k)(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot e^{its} ds$, $t \in \mathbb{R}$, gilt, folgt, dass auch $(f * \delta_{k'})(t) \xrightarrow[k' \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot e^{its} ds$, $t \in \mathbb{R}$, gilt. Daraus folgt dann, dass fast überall gilt $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot e^{its} ds$. Sei f stetig in $t_* \in \mathbb{R}$. Da die Gleichung $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \cdot e^{itx} dx$ fast überall gilt, gibt es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $t_k \rightarrow t_*$ ($k \rightarrow \infty$), so dass in allen t_k jene Gleichung gilt. Ferner definiert das Integral in jener Gleichung als parameterabhängiges Integral eine in t_* stetige Funktion. Es folgt also die Gültigkeit von $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \cdot e^{itx} dx$ in t_* , denn wegen der Stetigkeit beider Seiten in t_* folgt aus $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \cdot e^{it_k x} dx$, dass gilt $f(\lim_{k \rightarrow \infty} t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \cdot e^{i \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} t_k x} dx$, also $f(t_*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \cdot e^{it_* x} dx$. Das war es auch schon! \square

Das Gesetz der großen Zahlen

[Zurück zur Liste]

Satz. Seien $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i = \mu$ und $\text{Var}X_i = \sigma^2$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt die folgende Formel:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \mu$$

Das arithmetische der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n konvergiert in L^2 und in Wahrscheinlichkeit gegen den Erwartungswert.

Beweis. Sei $S_n = X_1 + \dots + X_n$ die Summe der ersten n Zufallsvariablen. Dann gilt für den Erwartungswert und die Varianz der Summe $\mathbb{E}S_n = n\mu$ und $\text{Var}S_n = n\sigma^2$, wobei im Fall der Varianz die stochastische Unabhängigkeit der Zufallsvariablen benutzt wurde. Die Konvergenz in L^2 :

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{S_n}{n} - \mu \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[(S_n - \mathbb{E}S_n)^2 \right] \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\text{Var}S_n}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Damit ist also $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \mu$ gezeigt. Stochastische Konvergenz: Für eine Zufallsvariable $Z \geq 0$ gilt für alle $a > 0$: $\mathbb{P}[Z \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}Z}{a}$.

Beweis: Es gilt $Z(\omega) \geq \begin{cases} a, & Z(\omega) \geq a \\ 0, & Z(\omega) < a \end{cases}$. Es gilt also $Z \geq a \cdot \mathbf{1}_{\{Z \geq a\}}$. Für den Erwartungswert gilt daher:

$$\mathbb{E}Z \geq \mathbb{E}[a \cdot \mathbf{1}_{\{Z \geq a\}}] = a \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z \geq a\}}] = a \cdot \mathbb{P}[Z \geq a]$$

Sei f eine monoton steigende Funktion, dann gilt:

$$\mathbb{P}[Z \geq a] = \mathbb{P}[f(Z) \geq f(a)] \leq \frac{\mathbb{E}[f(Z)]}{f(a)}$$

Sei nun $f(x) = x^2$, dann gilt unter der Voraussetzung von $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(Z_n - Z)^2] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, dass gilt

$$\mathbb{P}[|Z_n - Z| \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[(Z_n - Z)^2]}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Damit also ist gezeigt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right] = 0$$

Der Beweis des Satzes ist hiermit beendet. \square

Die AGH-Ungleichung

[Zurück zur Liste]

Satz. Das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel erfüllen folgende Ungleichung:

$$\bar{x}_A := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n x_j \geq \bar{x}_G := \left(\prod_{j=1}^n x_j \right)^{\frac{1}{n}} \geq \bar{x}_H := \frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}}$$

Dabei gilt, dass die x_j positive reelle Zahlen sind.

Beweis. Es wird nun gesetzt: $y_j := \frac{1}{x_j}$ ($j = 1, \dots, n$). Es gilt:

$$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \Leftrightarrow \frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}} \leq \left(\prod_{j=1}^n x_j \right)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \frac{n}{\sum_{j=1}^n y_j} \leq \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^n y_j \right)^{\frac{1}{n}}} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_j \geq \left(\prod_{j=1}^n y_j \right)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \bar{y}_A \geq \bar{y}_G$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\bar{x}_A \geq \bar{x}_G$ gilt: Beweis durch vollständige Induktion über n : I.A.: Für $n = 1$ ist die Sache klar. Sei $n = 2$, dann gilt $\left[\frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) \right]^2 - x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4} \cdot (x_1 - x_2)^2 \geq 0$. Sei nun also die Behauptung für n richtig. O.B.d.A. sei x_{n+1} das maximale Element von x_1, \dots, x_n, x_{n+1} und \bar{x}_A das arithmetische Mittel von x_1, \dots, x_n . Dann gilt $x_{n+1} - \bar{x}_A \geq 0$. Aus der Benoulli'schen Ungleichung ($(1+x)^n \geq 1 + nx$, $n \geq 0$ und $x \geq -1$) folgt:

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{(n+1) \cdot \bar{x}_A} \right)^{n+1} = \left(\frac{n \cdot \bar{x}_A + x_{n+1}}{(n+1) \cdot \bar{x}_A} \right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1) \cdot \bar{x}_A + x_{n+1} - \bar{x}_A}{(n+1) \cdot \bar{x}_A} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1} - \bar{x}_A}{(n+1) \cdot \bar{x}_A} \right)^{n+1}$$

Nun wird die Bernoulli'sche Ungleichung angewendet:

$$\left(1 + \frac{x_{n+1} - \bar{x}_A}{(n+1) \cdot \bar{x}_A} \right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{x_{n+1} - \bar{x}_A}{(n+1) \cdot \bar{x}_A} = 1 + \frac{x_{n+1} - \bar{x}_A}{\bar{x}_A} = \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}_A} + \frac{x_{n+1} - \bar{x}_A}{\bar{x}_A} = \frac{x_{n+1}}{\bar{x}_A}$$

Man hat nun also:

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{(n+1) \cdot \bar{x}_A} \right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{\bar{x}_A}$$

Jetzt multipliziert man auf beiden Seiten mit \bar{x}_A^{n+1} :

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} \geq \bar{x}_A^n \cdot x_{n+1} \stackrel{I.V.}{\geq} (x_1 \cdot \dots \cdot x_n) \cdot x_{n+1}$$

Wenn man nun auf beiden Seiten die n -te Wurzel zieht, folgt die Behauptung. □

Die Tschebyscheff'sche Ungleichung

[Zurück zur Liste]

Satz. Sei $E(X)$ der Erwartungswert und $\text{Var}(X)$ die Varianz einer Zufallsvariablen X . Dann gilt:

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

Beweis. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - E(X))^2 \cdot P(X = y) dy \\ &= \int_{|y - E(X)| < a} (y - E(X))^2 \cdot P(X = y) dy + \int_{|y - E(X)| \geq a} (y - E(X))^2 \cdot P(X = y) dy \\ &\geq \int_{|y - E(X)| \geq a} (y - E(X))^2 \cdot P(X = y) dy \\ &\geq \int_{|y - E(X)| \geq a} a^2 \cdot P(X = y) dy \\ &= a^2 \cdot \int_{|y - E(X)| \geq a} P(X = y) dy \\ &= a^2 \cdot P(|X - E(X)| \geq a) \end{aligned}$$

Also gilt doch:

$$\frac{\text{Var}(X)}{a^2} \geq P(|X - E(X)| \geq a)$$

und der Beweis ist erbracht. □

Die Anzahl der k-Partitionen

[Zurück zur Liste]

Satz. Die Anzahl der k -Partitionen einer n -elementigen Menge ist gleich $S(n, k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n$.

Beweis. Die Zahlen $S(n, k)$ nennt man auch Stirling-Zahlen zweiter Art. Zunächst wird die Anzahl der surjektiven Abbildungen von einer n -elementigen Menge M in eine k -elementige Menge N ermittelt, denn das Urbild einer solchen Abbildung repräsentiert eine Partition von M in k Teilmengen, wobei die Reihenfolge der k Mengen jedoch berücksichtigt wird. Denn behält man die Abbildungspfeile bei und permutiert nur die k Elemente in N , dann hat man zwar eine andere surjektive Abbildung, aber dieselbe Partition in k Mengen. Deswegen muss man noch durch $k!$ teilen, um die Anzahl der k -Partitionen von N zu erhalten. Die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M nach N wird mit der Siebformel von Sylvester berechnet, die folgendermaßen aussieht:

$$\left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, m\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Diese Formel beweist man ganz einfach mit vollständiger Induktion über m . O.B.d.A. sei die Menge N fest aufsteigend durchnummierter. Sei dann A_i die Menge aller Abbildungen f von M nach $N = \{n_1, \dots, n_k\}$, die n_i nicht treffen, d.h. für kein Element $m \in M$ ist $f(m) = n_i$. A_i hat so viele Elemente, wie es Abbildungen von M nach $N \setminus \{n_i\}$ gibt, also $(k-1)^n$. Für r Durchschnitte solcher Mengen gilt $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}| = (k-r)^n$, da ja bestimmte r Elemente in N nicht getroffen werden. Jede nicht surjektive Abbildung f von M nach N ist in mindestens einer der A_i enthalten, denn mindestens ein Element in N wird nicht getroffen. Und die Vereinigung der A_i ($i = 1, \dots, k$) besteht aus nicht surjektiven Abbildungen. Um die Anzahl der nicht surjektiven Abbildungen zu berechnen, muss man berücksichtigen, dass die A_i nicht disjunkt sind. Es muss also die Siebformel von Sylvester benutzt werden. Nun ist die Anzahl aller Abbildungen von M nach N abzüglich aller nicht surjektiven Abbildungen gleich der Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : M \rightarrow N$. Für die Anzahl aller surjektiven Abbildungen gilt also die Formel:

$$|A_0| - \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = k^n - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = k^n + \sum_{r=1}^k (-1)^{(r+1)-1} \cdot \left(\binom{k}{r} \cdot (k-r)^n \right) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n$$

Denn die Anzahl aller Abbildungen von M nach N ist k^n und wenn man $|I| = r$ Mengen der A_i mit $i \in \{1, \dots, k\}$ also aus k A_i -Mengen auswählt, um sie zu schneiden, dann gibt es dafür $\binom{k}{r}$ Möglichkeiten. Jeder dieser Schnitte, bestehend aus r Mengen, hat die Mächtigkeit $(k-r)^n$. Teilt man die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : M \rightarrow N$ durch $k!$, so erhält man die Behauptung des Satzes. \square

Die n -dimensionale Kugel

[Zurück zur Liste]

Satz. Das Volumen einer n -dimensionalen Kugel beträgt $V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \cdot r^n$ und der Oberflächeninhalt $O_n(r) = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot r^{n-1}$.

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert das Volumen mit gegebenem Radius r gegen 0. Das gleiche gilt für die Oberfläche. Mit Γ wird hier die sogenannte Gammafunktion bezeichnet, die die Fakultät interpoliert und hier als bekannt vorausgesetzt wird.

Beweis. Die Formel für das Volumen einer n -dimensionalen Kugel wird mittels vollständiger Induktion gezeigt. Induktionsanfang: $n = 1$: Man betrachtet dort das Volumen des Intervalls $[-r, r]$; es hat das Volumen $2 \cdot r$. Es gilt $V_1(r) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} \cdot r^1$. Es ist

bekannt, dass $\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt, also $V_1(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot r = 2 \cdot r$. Also O.K! Zur Sicherheit wird noch der Fall $n = 2$ betrachtet: In

diesem Fall betrachtet man das Volumen eines Kreises mit dem Radius r . Das Volumen ist bekanntlich gleich $\pi \cdot r^2$. Betrachte nun

die Formel: $V_2(r) = \frac{\pi^{\frac{2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2}{2} + 1\right)} \cdot r^2 = \pi \cdot r^2$, denn es gilt $\Gamma(2) = 1$. Der Induktionsanfang ist also erfüllt. Nun gelte die Behauptung

für $n - 1$. Dann wird gezeigt, dass die Behauptung auch für n gilt. Klarerweise gilt $V_n(r) = V_{n-1}(1) \cdot r^n$, weswegen man sich auf die Volumina mit dem Radius 1 beschränken kann. Die Einheitskugel im \mathbb{R}^n liegt zwischen $x_n = -1$ und $x_n = 1$. Die Ebenen $x_n = \text{konst.}$ schneiden sich daher im Bereich $-1 < x_n < 1$ mit $K_n(1) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq 1^2 \right\}$ in einer $(n-1)$ -dimensionalen Kugel mit dem Radius $\sqrt{1 - x_n^2}$. Das Volumen dieser Kugel ist nach Induktionsvoraussetzung: $V_{n-1}(\sqrt{1 - x_n^2}) =$

$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} \cdot (\sqrt{1 - x_n^2})^{n-1}$. Es gilt jetzt: $V_n(1) = \int_{-1}^1 V_{n-1}(\sqrt{1 - x_n^2}) dx_n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} \cdot \int_{-1}^1 (\sqrt{1 - x_n^2})^{n-1} dx_n$.

Es wird hier benutzt, dass gilt $\int_{-1}^1 (\sqrt{1-x_n^2})^{n-1} dx_n = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, was später noch bewiesen wird. Also: $V_n(1) =$

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \text{ Also gilt der Induktionsschluss. Nun zum Beweis}$$

$$\text{von } \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x_n^2})^{n-1} dx_n = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}: \text{ Es gilt: } \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x_n^2})^{n-1} dx_n = \int_{-1}^1 (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n = \int_{\pi}^0 (1-\cos(t)^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

$$(-\sin(t)) dt = \int_{\pi}^0 (\sin(t)^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (-\sin(t)) dt = \int_{\pi}^0 \sin(t)^{n-1} \cdot (-\sin(t)) dt = -\int_{\pi}^0 \sin(t)^n dt = \int_0^{\pi} \sin(t)^n dt = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt.$$

Mittels partieller Integration findet man die folgende Rekursionsformel: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n-2} dt$. Weiter ist bekannt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^0 dt = \frac{\pi}{2}$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^1 dt = 1$. Daraus lässt sich für $n = 2 \cdot k$ ableiten: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2k} dt = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^k \frac{2j-1}{2j}$ und für $n = 2k+1$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2k+1} dt = \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1}$. Es gelten die folgenden Formeln:

$$n \text{ gerade } \Rightarrow \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2j-1}{2} \text{ und } \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{n}{2}\right)! = \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2j}{2}$$

Und es gilt noch:

$$n \text{ ungerade } \Rightarrow \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)! = \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2j}{2} \text{ und } \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{2j-1}{2}$$

Zunächst wird $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2j-1}{2}$ für gerades n bewiesen: Vollständige Induktion: $n = 0$: $\Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot 1$. $n = 2$: $\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{2-1}{2}$, denn es gilt die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$. Also ist der Induktionsanfang gegeben. Es gelte die Behauptung für $n-2$. I.S.: $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{(n-2)+1}{2}\right) \stackrel{I.A.}{=} \frac{n-1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{2j-1}{2} = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2j-1}{2}$. Die Behauptung $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{2j-1}{2}$ für ungerades n wird jetzt bewiesen: I.A.: $n = 1$: $\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2}$, also O.K., und zur Sicherheit noch $n = 3$: $\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$, also ist der Induktionsanfang gültig. Gelte die Behauptung für $n-2$. I.S.: $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right) \stackrel{I.V.}{=} \frac{n}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2j-1}{2} = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{2j-1}{2}$. Also ist der Beweis durch vollständige Induktion erbracht. Aus den bewiesenen Formeln oben, folgt folgendes:

$$n \text{ gerade } \Rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2j-1}{2}}{\prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2j}{2}} = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2j-1}{2j} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2j-1}{2j}$$

Und es gilt:

$$n \text{ ungerade } \Rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{2j}{2}}{\sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{2j-1}{2}} = \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{2j}{2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2j+1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2j}{2j+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2j}{2j+1}$$

Daraus folgt dann also:

$$n \text{ gerade } \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt \text{ und } n \text{ ungerade } \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$$

Wie schon behauptet, gilt dann:

$$\int_{-1}^1 (\sqrt{1-x_n^2})^{n-1} dx_n = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Nun kümmert man sich um den Oberflächeninhalt: Klarerweise gilt der Zusammenhang $V_n(r) = \int_0^r O_n(r) dr$, daraus folgt dann $\frac{\partial}{\partial r} V_n(r) = O_n(r)$. Also gilt: $O_n(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \cdot r^n \right) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot n \cdot r^{n-1} = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot r^{n-1}$. Als nächstes wird gezeigt, dass das Volumen einer n -dimensionalen Kugel für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert: Es wird nun gezeigt: $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(1) = 0$. Es ist bekannt die Stirling-Formel: $n! = \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Es gilt also:

$$V_n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \sim \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{2 \cdot e}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi \cdot n}} \cdot \left(\frac{2 \cdot e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{(\pi \cdot 2 \cdot e)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}^n} \leq \frac{(4 \cdot 2 \cdot 3)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}^{n+1}} \leq \frac{24^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n+1}{2}}} \leq \left(\frac{24}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

Daraus folgt also $V_n(1) \leq \left(\frac{24}{n}\right)^n$. Für $n > 24$ gilt $\left(\frac{24}{n}\right)^n \leq \left(\frac{24}{25}\right)^n$. Weil $\frac{24}{25} < 1$ gilt, folgt, dass $\left(\frac{24}{n}\right)^n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, also $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(1) = 0$. Nun zum Beweis von $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n(1) = 0$:

$$O_n(1) = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2} + 1\right)} = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot (n-2) \cdot \left(\frac{n-2}{2 \cdot e}\right)^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{n-2}} \cdot \frac{(2 \cdot e)^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{n-2}^{n-2}} \leq \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot (2 \cdot e)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n-2}^{n-1}}$$

Also gilt weiter:

$$O_n(1) \leq \frac{2 \cdot (\pi \cdot 2 \cdot e)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n-2}^{n-1}} = \frac{2 \cdot (\pi \cdot 2 \cdot e)^{\frac{n}{2}}}{(n-2)^{\frac{n-1}{2}}} = 2 \cdot \sqrt{\pi \cdot 2 \cdot e} \cdot \frac{(\pi \cdot 2 \cdot e)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)^{\frac{n-1}{2}}} \leq 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{n-2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \leq 2 \cdot \sqrt{24} \cdot \left(\frac{24}{n-2}\right)^n$$

Es gilt nun für $n-2 > 24$: $\left(\frac{24}{n-2}\right)^n \leq \left(\frac{24}{25}\right)^n$, also, weil wieder $\frac{24}{25} < 1$ ist, folgt demnach $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n(1) = 0$. Fertig! \square

Die Heisenberg'sche Unschärferelation

[\[Zurück zur Liste\]](#)

Die Heisenberg'sche Unschärferelation ist ein Ergebnis der Quantentheorie. Es wird sich hier beim Aufbau dieser Theorie, die nötig ist für den Beweis der Heisenberg'schen Unschärferelation, auf die quantenmechanischen Eigenschaften der Dynamik einzelner Teilchen (Massepunkte) in einer Dimension, beschrieben durch die Ortskoordinate x und den Impuls p , beschränkt. Dabei soll jedoch darauf hingewiesen werden, dass die Theorie auch für drei Dimensionen gilt. Es sei noch erwähnt, dass der Welle-Teilchen-Dualismus dafür verantwortlich ist, dass man sich mit Quantentheorie beschäftigen muss.

Definition. Eine Funktion $f(x, t)$ heißt quadratisch integrierbar, falls gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x, t)} \cdot f(x, t) dx < \infty$$

Dabei sei $\overline{f(x, t)}$ die komplex konjugierte Funktion von $f(x, t)$.

Postulat. Zu einem Teilchen (Massepunkt) gehört eine eindeutige, quadratisch integrierbare, im Allgemeinen komplexe Wellenfunktion $\psi(x, t)$. Sie beschreibt den Zustand des Teilchens. Da die Wellenfunktion quadratisch integrierbar ist, kann sie normiert werden. Dazu zieht man die Bedingung heran, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t irgendwo auf der x -Achse anzutreffen 100 Prozent ist. Daher lautet die Normierungsbedingung: $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \psi(x, t) dx = 1$. Dabei gibt $\overline{\psi(x, t)} \cdot \psi(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen zur Zeit t am Ort x auf der x -Achse anzutreffen. Die Größe $|\psi(x, t)|^2$ wird daher als Wahrscheinlichkeitsdichte bezeichnet. Es sind somit alle Informationen über die quantenmechanischen Eigenschaften eines Teilchens in $\psi(x, t)$ enthalten.

Experimentell erfassbare Größen werden in der Quantenmechanik durch Erwartungswerte charakterisiert. Nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt folgende Definition:

Definition. Der Erwartungswert einer Funktion $f(x, t)$, die eine gegebene physikalische Messgröße beschreibt, ist für einen bestimmten Zeitpunkt t gegeben durch:

$$\langle f(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot f(x, t) \cdot \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x, t)}_{\text{Funktionswert}} \cdot \underbrace{\overline{\psi(x, t)} \cdot \psi(x, t)}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für das} \\ \text{Auftreten des Funktionswertes}}} dx$$

Dabei ist zu beachten, dass der Ausdruck nach dem zweiten Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn die Funktion $f(x, t)$ reelle oder komplexe Werte annimmt. Hat man anstelle der Funktion $f(x, t)$ einen sogenannten Operator, der also auf $\psi(x, t)$ angewendet wird, so muss man sich auf den Ausdruck nach dem ersten Gleichheitszeichen beschränken. Operatoren werden hier später nämlich eingeführt. Beispiele für Funktionen $f(x, t)$ sind die Ortskoordinate $x(t)$ des Teilchens oder seine potentielle Energie $V(x, t)$.

Bisher hat man die Wellenfunktion als eine Funktion der Ortsvariablen x betrachtet. Man hat damit also die sogenannte Ortsraumdarstellung gewählt. Anstelle der Ortskoordinate x kann jedoch auch der entsprechende Impuls p als Variable eingeführt werden. Man postuliert dann eine weitere, ebenfalls eindeutige, quadratisch integrierbare, im Allgemeinen komplexe Wellenfunktion $\phi(p, t)$, die den Zustand des Teilchens im folgenden Sinn beschreibt: $\overline{\phi(p, t)} \cdot \phi(p, t) = |\phi(p, t)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zur Zeit t den Impuls p besitzt. Wieder gilt auch in der Impulsraumdarstellung die Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(p, t)} \cdot \phi(p, t) dp = 1$ und der Erwartungswert einer Funktion $g(p, t)$ sieht analog zur Ortsraumdarstellung so aus:

$$\langle g(p, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(p, t)} \cdot g(p, t) \cdot \phi(p, t) dp = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(p, t) dp}_{\text{Funktionswert}} \cdot \underbrace{\overline{\phi(p, t)} \cdot \phi(p, t)}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für das} \\ \text{Auftreten des Funktionswertes}}} dp.$$

Wieder: Hat man anstelle der Funktion $g(p, t)$ einen sogenannten Operator, der also auf $\phi(p, t)$ angewendet wird, so muss man sich auf den Ausdruck nach dem ersten Gleichheitszeichen beschränken. Beispiele für die Funktion $g(p, t)$ sind der Impuls $p(t)$ des Teilchens oder seine kinetische Energie $E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$.

Nun wird untersucht, welcher Zusammenhang zwischen der Wellenfunktion $\psi(x, t)$ im Ortsraum und der Wellenfunktion $\phi(p, t)$ im Impulsraum besteht. Man betrachtet dazu ein Teilchen mit konstanter Gesamtenergie $E = \hbar \cdot \omega$, z.B. ein Teilchen, das sich mit konstanter kinetischer Energie in einem konstanten Potential $V(x)$ bewegt. Der Zustand wird durch ein entsprechendes Wellenpaket beschrieben, man setzt dafür an:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{i \cdot (kx - \omega t)} dk = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{ikx} dk \Leftrightarrow \frac{\psi(x, t)}{e^{-i\omega t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{ikx} dk$$

Nach Fouriertransformation gilt dann mit der de Broglie-Beziehung $p = \hbar \cdot k$:

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x, t)}{e^{-i\omega t}} \cdot e^{-ikx} dx \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \cdot A(k) \cdot e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \cdot e^{-ikx} dx \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \cdot A\left(\frac{p}{\hbar}\right) \cdot e^{-i\omega t}}_{=: \phi(p, t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \cdot e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx \end{aligned}$$

Es gilt aber auch das folgende:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{i \cdot (kx - \omega t)} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (A(k) \cdot e^{-i\omega t}) \cdot e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(A\left(\frac{p}{\hbar}\right) \cdot e^{-i\omega t} \right) \cdot e^{i\frac{p}{\hbar}x} \cdot \frac{1}{\hbar} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \cdot A\left(\frac{p}{\hbar}\right) \cdot e^{-i\omega t} \right)}_{=: \phi(p, t)} \cdot e^{i\frac{p}{\hbar}x} dp \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also, dass die Wellenfunktionen im Orts- bzw. Impulsraum $\psi(x, t)$ und $\phi(p, t)$ durch eine Fouriertransformation miteinander verbunden sind:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p, t) \cdot e^{i\frac{p}{\hbar}x} dp \quad \text{und} \quad \phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \cdot e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx$$

Jetzt wird diskutiert, wie sich der Erwartungswert des Impulses in der Ortsraumdarstellung berechnen lässt: Wenn man den Zustand des Teilchens durch die Wellenfunktion $\phi(p, t)$ im Impulsraum beschreibt, so lässt sich der Erwartungswert des Impulses $\langle p \rangle$ einfach als Mittelwert von p zur Wellenfunktion $\phi(p, t)$ so berechnen: $\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(p, t)} \cdot p \cdot \phi(p, t) dp$. Wenn der Zustand des Teilchens aber durch die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ im Ortsraum beschrieben wird, so muss folgender Erwartungswert berechnet werden: $\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot p \cdot \psi(x, t) dx$. Hier stellt sich nun die Frage in welchem Zusammenhang der Impuls p des Teilchens mit der Wellenfunktion $\psi(x, t)$ steht. Zur Lösung dieses Problems geht man von der Impulsraumdarstellung aus und geht durch die Fouriertransformation auf die Ortsraumdarstellung über. Man setzt nun für $\phi(p, t)$ die Fouriertransformierte ein: $\langle p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(x, t)} \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \cdot e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx dp$. Mittels partieller Integration erhält man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \cdot e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx = \underbrace{\left[-\psi(x, t) \cdot \frac{\hbar}{ip} \cdot e^{-i\frac{p}{\hbar}x} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\hbar}{ip} \cdot e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx$$

Der erste Summand verschwindet, da $\psi(x, t)$ quadratisch integrierbar (normierbar) ist und deswegen insbesondere im Unendlichen

gegen 0 strebt. Also gilt dann:

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(p,t)} \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} \cdot e^{-i\frac{\hbar}{\hbar}x} dx dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(p,t)} \cdot e^{-i\frac{\hbar}{\hbar}x} dp}_{=\overline{\psi(x,t)}} \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x,t)} \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) dx\end{aligned}$$

Man kommt damit zu folgendem Schluss: In der Ortsraumdarstellung, in der der Zustand eines Teilchens durch die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ beschrieben ist, wird der Erwartungswert des Impulses p berechnet, indem man in $\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x,t)} \cdot p \cdot \psi(x,t) dx$ den Impuls p durch den Impulsoperator $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ ersetzt. Analog kann man auch den Erwartungswert der Ortskoordinate x in der Impulsraumdarstellung berechnen. Man geht hier dann von der Ortsraumdarstellung aus und wechselt mittels Fouriertransformation in die Impulsraumdarstellung:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x,t)} \cdot x \cdot \psi(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x,t)} \cdot x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p,t) \cdot e^{i\frac{\hbar}{\hbar}x} dp dx$$

Wieder liefert eine partielle Integration über p :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(p,t) \cdot e^{i\frac{\hbar}{\hbar}x} dp = \underbrace{\left[\phi(p,t) \cdot \frac{\hbar}{ix} \cdot e^{i\frac{\hbar}{\hbar}x} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\phi(p,t)}{\partial p} \cdot \frac{\hbar}{ix} \cdot e^{i\frac{\hbar}{\hbar}x} dp$$

Der erste Summand verschwindet wieder, da auch $\phi(p,t)$ quadratisch integrierbar (normierbar) ist und somit insbesondere im Unendlichen gegen 0 strebt. Es folgt dann:

$$\langle x \rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x,t)} \cdot e^{i\frac{\hbar}{\hbar}x} dx \cdot \left(-\frac{\hbar}{i} \right) \cdot \frac{\partial\phi(p,t)}{\partial p} dp}_{=\overline{\phi(p,t)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(p,t)} \cdot i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \phi(p,t) dp$$

Man fasst zusammen: In der Impulsraumdarstellung, in der der Zustand eines Teilchens durch die Wellenfunktion $\phi(p,t)$ beschrieben ist, wird der Erwartungswert der Ortskoordinate x berechnet, indem man die Ortskoordinate x in $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(p,t)} \cdot x \cdot \phi(p,t) dp$ durch den Ortsoperator $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ ersetzt.

Definition (Unschärfe). Entsprechend den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Unschärfe Δf einer Größe f bestimmt durch die Standardabweichung, also folgendermaßen:

$$\Delta f = \sqrt{\langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}$$

Satz. Die allgemeine Heisenberg'sche Unschärferelation für zwei beliebige hermitesche Operatoren \hat{A} und \hat{B} und einen beliebigen Zustand $\psi(x,t)$ ist gegeben durch

$$(\Delta A)_{\psi} \cdot (\Delta B)_{\psi} \geq \frac{1}{2} \cdot |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{\psi}|$$

Dass \hat{A} hermitesch ist, soll heißen, dass gilt $\int \overline{\gamma} \cdot \hat{A}\varphi = \int \overline{\hat{A}\gamma} \cdot \varphi$. Es wurde benutzt: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ (Kommutator).

Beweis. Für zwei beliebige Wellenfunktionen $\varphi(x,t)$ und $\psi(x,t)$ gilt die Schwarz'sche Ungleichung:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x,t)} \cdot \psi(x,t) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx$$

Beweis: Für (x,t) mit $\varphi(x,t) = 0$ ist die Gleichung trivial und schonmal richtig. Für (x,t) mit $\varphi(x,t) \neq 0$ wählt man den Ansatz $\psi(x,t) = w \cdot \varphi(x,t) + \xi(x,t)$ mit $w \in \mathbb{C}$, wobei $\xi(x,t)$ folgende Eigenschaft besitzt: $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x,t)} \cdot \xi(x,t) dx = 0$. Damit ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x,t)} \cdot \psi(x,t) dx = w \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x,t)} \cdot \xi(x,t) dx}_{=0}$$

$$w = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x,t)} \cdot \psi(x,t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx}. \text{ Mit dem bisherigen Wissen folgt dann:}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(w \cdot \varphi(x,t) + \xi(x,t))} \cdot (w \cdot \varphi(x,t) + \xi(x,t)) dx \\ &= \overline{w}w \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(x,t)|^2 dx \geq \overline{w}w \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x,t)} \cdot \psi(x,t) dx \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx}\end{aligned}$$

Und daraus folgt dann durch Multiplikation die Behauptung. Nun weiter: Nach Definition ist das Unschärfeprodukt $(\Delta A)_\psi \cdot (\Delta B)_\psi$ gegeben durch:

$$(\Delta A)_\psi \cdot (\Delta B)_\psi = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot (A - \langle A \rangle_\psi)^2 \cdot \psi(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot (B - \langle B \rangle_\psi)^2 \cdot \psi(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Also gilt dann allgemeiner:

$$(\Delta A)_\psi \cdot (\Delta B)_\psi = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot (\hat{A} - \langle A \rangle_\psi)^2 \cdot \psi(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot (\hat{B} - \langle B \rangle_\psi)^2 \cdot \psi(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nun führt man ein: $\hat{X}_1 = \hat{A} - \langle A \rangle_\psi$ und $\hat{X}_2 = \hat{B} - \langle B \rangle_\psi$. Dann sind \hat{X}_1 und \hat{X}_2 immer noch hermitesch, Beweis für \hat{X}_1 :
 $\int \overline{\gamma} \cdot \hat{X}_1 \varphi = \int \overline{\gamma} \cdot (\hat{A} - \langle A \rangle_\psi) \varphi = \int \overline{\gamma} \cdot \hat{A} \varphi - \int \underbrace{\overline{\gamma} \cdot \langle A \rangle_\psi \cdot \varphi}_{\text{reell}} = \int \overline{\hat{A} \gamma} \cdot \varphi - \int \overline{\langle A \rangle_\psi \cdot \gamma} \cdot \varphi = \int (\overline{\hat{A} \gamma} - \overline{\langle A \rangle_\psi \cdot \gamma}) \cdot \varphi = \int (\overline{\hat{A} \gamma} - \overline{\langle A \rangle_\psi} \cdot \overline{\gamma}) \cdot \varphi =$
 $\int \overline{(\hat{A} - \langle A \rangle_\psi) \gamma} \cdot \varphi = \int \overline{\hat{X}_1 \gamma} \cdot \varphi$, Beweis-Ende. Also gilt dann:

$$(\Delta A)_\psi \cdot (\Delta B)_\psi = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \hat{X}_1^2 \psi(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \hat{X}_2^2 \psi(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Aus der Schwarz'schen Ungleichung folgt jetzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}_1 \psi(x, t)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}_2 \psi(x, t)|^2 dx \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{X}_1 \psi(x, t)} \cdot \hat{X}_2 \psi(x, t) dx \right|^2$$

Etwas umgeformt erhält man dann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{X}_1 \psi(x, t)} \cdot \hat{X}_1 \psi(x, t) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{X}_2 \psi(x, t)} \cdot \hat{X}_2 \psi(x, t) dx \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{X}_1 \psi(x, t)} \cdot \hat{X}_2 \psi(x, t) dx \right|^2$$

Unter Ausnutzung der Hermitezität der Operatoren \hat{X}_1 und \hat{X}_2 folgt dann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \hat{X}_1^2 \psi(x, t) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \hat{X}_2^2 \psi(x, t) dx \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \hat{X}_1 \hat{X}_2 \psi(x, t) dx \right|^2$$

Daraus folgt dann also:

$$(\Delta A)_\psi \cdot (\Delta B)_\psi = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \hat{X}_1^2 \psi(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \hat{X}_2^2 \psi(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \hat{X}_1 \hat{X}_2 \psi(x, t) dx \right|^2$$

Wenn man $\{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} = \hat{X}_1 \hat{X}_2 + \hat{X}_2 \hat{X}_1$ (Antikommator) und $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_1 \hat{X}_2 - \hat{X}_2 \hat{X}_1$ (Kommutator) definiert, dann gilt:
 $\hat{X}_1 \hat{X}_2 = \frac{1}{2} \cdot \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} + \frac{1}{2} \cdot [\hat{X}_1, \hat{X}_2]$. Daraus folgt dann:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \hat{X}_1 \hat{X}_2 \psi(x, t) dx \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} \psi(x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \psi(x, t) dx \right|$$

Also gilt dann:

$$(\Delta A)_\psi \cdot (\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2} \cdot |\langle \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} \rangle_\psi + \langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi|$$

Der Erwartungswert des Antikommators ist reell und derjenige des Kommutators rein imaginär, Beweis: $\langle \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} \rangle_\psi = \int \overline{\psi} \cdot (\hat{X}_1 \hat{X}_2 + \hat{X}_2 \hat{X}_1) \psi = \int \overline{\psi} \cdot \hat{X}_1 \hat{X}_2 \psi + \int \overline{\psi} \cdot \hat{X}_2 \hat{X}_1 \psi = \int \overline{\hat{X}_1 \psi} \cdot \hat{X}_2 \psi + \int \overline{\hat{X}_2 \psi} \cdot \hat{X}_1 \psi$, also: $\overline{\langle \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} \rangle_\psi} = \int \hat{X}_1 \psi \cdot \overline{\hat{X}_2 \psi} + \int \hat{X}_2 \psi \cdot \overline{\hat{X}_1 \psi} = \langle \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} \rangle_\psi$, also ist wegen $\langle \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} \rangle_\psi = \langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi$ dann: $\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi$ ist reell. Nun zum Kommutator:
 $\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi = \int \overline{\psi} \cdot (\hat{X}_1 \hat{X}_2 - \hat{X}_2 \hat{X}_1) \psi = \int \overline{\psi} \cdot \hat{X}_1 \hat{X}_2 \psi - \int \overline{\psi} \cdot \hat{X}_2 \hat{X}_1 \psi = \int \overline{\hat{X}_1 \psi} \cdot \hat{X}_2 \psi - \int \overline{\hat{X}_2 \psi} \cdot \hat{X}_1 \psi$, also: $\overline{\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi} = \int \hat{X}_1 \psi \cdot \overline{\hat{X}_2 \psi} - \int \hat{X}_2 \psi \cdot \overline{\hat{X}_1 \psi} = -\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi$, also ist $\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi$ imaginär. Also folgt daraus:

$$(\Delta A)_\psi \cdot (\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2} \cdot |\langle \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} \rangle_\psi + \langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi| = \frac{1}{2} \cdot \left(|\langle \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\} \rangle_\psi|^2 + |\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \cdot |\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi|$$

Es wird jetzt gezeigt, dass $\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\psi$ gilt. Beweis: $\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi = \langle [\hat{A} - \langle A \rangle_\psi, \hat{B} - \langle B \rangle_\psi] \rangle_\psi = (\hat{A} - \langle A \rangle_\psi) \cdot (\hat{B} - \langle B \rangle_\psi) - (\hat{B} - \langle B \rangle_\psi) \cdot (\hat{A} - \langle A \rangle_\psi) = \hat{A} \hat{B} - \hat{A} \cdot \langle B \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi \cdot \hat{B} + \langle A \rangle_\psi \cdot \langle B \rangle_\psi - (\hat{B} \hat{A} - \hat{B} \cdot \langle A \rangle_\psi - \langle B \rangle_\psi \cdot \hat{A} + \langle B \rangle_\psi \cdot \langle A \rangle_\psi) = \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}]$, Beweis-Ende. Es wurde also bewiesen:

$$(\Delta A)_\psi \cdot (\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2} \cdot |\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle_\psi| = \frac{1}{2} \cdot |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\psi|$$

Das war es dann auch!

□

Korollar (Heisenberg'sche Unschärferelation). Es gilt $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$.

Beweis. Sei $\psi(x, t)$ eine Wellenfunktion in Ortsraumdarstellung. Also gilt dann $\hat{x} = x$ und $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$. Es gilt dann: $\hat{x}\hat{p}_x\varphi = x \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\hat{p}_x\hat{x}\varphi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \varphi) = \frac{\hbar}{i} \left(\varphi + x \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)$, also $(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})\varphi = \hat{x}\hat{p}_x\varphi - \hat{p}_x\hat{x}\varphi = i\hbar\varphi$. Weil diese Gleichung unabhängig von φ gilt, folgt $\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$. $\hat{x} = x$ ist reell und hermitesch: $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\gamma(x, t)} \cdot \hat{x}\varphi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\gamma(x, t)} \cdot x \cdot \varphi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x} \cdot \overline{\gamma(x, t)}$. $\varphi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{x}\gamma(x, t)} \cdot \varphi(x, t) dx$. Auch $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ ist hermitesch: $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\gamma(x, t)} \cdot \hat{p}_x\varphi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\gamma(x, t)} \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x} dx = \left[\overline{\gamma(x, t)} \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \varphi(x, t) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\overline{\gamma(x, t)}}{\partial x} \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \varphi(x, t) dx = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\overline{\gamma(x, t)}}{\partial x} \cdot \varphi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{p}_x\gamma(x, t)} \cdot \varphi(x, t) dx$. Setze im obigen Satz: $\hat{A} = \hat{x} = x$ und $\hat{B} = \hat{p}_x$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\Delta x)_\psi \cdot (\Delta p_x)_\psi &\geq \frac{1}{2} \cdot |\langle [\hat{x}, \hat{p}_x] \rangle_\psi| = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot [\hat{x}, \hat{p}_x]\psi(x, t) dx \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot i\hbar \cdot \psi(x, t) dx \right| = \frac{1}{2} \cdot |i\hbar| \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x, t)} \cdot \psi(x, t) dx \right| = \frac{\hbar}{2} \cdot 1 = \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

Es kommt also die Behauptung des Korollars heraus! \square

Die gedämpfte Schwingung

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt die Differentialgleichung $m \cdot x''(t) = -d \cdot x'(t) - k \cdot x(t)$ mit der Dämpfungskonstante $d \geq 0$ und der Federkonstante $k > 0$, denn: Der Beschleunigungskraft des Federpendels $m \cdot x''(t)$ wirkt entgegen die Dämpfungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist, also $d \cdot x'(t)$, und es wirkt entgegen die Spannkraft der Feder, die proportional zur Länge der Auslenkung ist, also $k \cdot x(t)$. Die Anfangswertbedingungen seien $x(0) = s_0$ und $x'(0) = v_0$. Man löse nun diese DGL.

Beweis. Sei \mathcal{L} der Lösungsraum der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung $x''(t) + 2\delta \cdot x'(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$ mit $\delta = \frac{d}{2m}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Die lineare Abbildung $A : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(x) := (x(0), x'(0))$ heißt Anfangswerthomomorphismus. Nach dem Eindeutigkeitssatz gilt, dass die Lösung der Differentialgleichung oben eindeutig ist, wenn alle Anfangswertbedingungen erfüllt sein müssen. Daraus folgt, dass der Anfangswerthomomorphismus injektiv ist, also gilt $\dim \mathcal{L} \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Man macht nun den Ansatz $x(t) = e^{\lambda \cdot t}$. Setzt man das in die DGL oben ein erhält man: $(\lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + \omega_0^2) \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$. Es muss also gelten $\lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Nun wird zunächst der Fall $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$ (Starke Dämpfung) betrachtet: In diesem Fall hat man zwei verschiedene negative reelle Lösungen. Man hat also die Lösungen $e^{\lambda_1 \cdot t}$ und $e^{\lambda_2 \cdot t}$, daraus folgt, dass auch die Linearkombination aus diesen beiden Lösungen eine Lösung ist: $x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$. Weil $e^{\lambda_1 \cdot t}$ und $e^{\lambda_2 \cdot t}$ linear unabhängig sind und $\dim \mathcal{L} \leq 2$ gilt, bilden diese beiden Funktionen eine Basis des Lösungsraumes \mathcal{L} . Man hat also alle Lösungen gefunden. Die Konstanten c_1 und c_2 werden aus den Anfangswertbedingungen bestimmt: $x(0) = c_1 + c_2 = s_0$ und $x'(0) = c_1 \cdot \lambda_1 + c_2 \cdot \lambda_2 = v_0$. Es ergibt sich: $c_1 = \frac{v_0 - \lambda_2 \cdot s_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$ und $c_2 = \frac{-v_0 + \lambda_1 \cdot s_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$. In diesem Fall gilt also:

$$x(t) = \frac{v_0 - \lambda_2 \cdot s_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} - \frac{v_0 - \lambda_1 \cdot s_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \text{ mit } \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \text{ und } \delta^2 - \omega_0^2 > 0 \text{ (Starke Dämpfung)}$$

Nun wird der Fall $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$ (Schwache Dämpfung) behandelt. Es gilt dann $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ mit $\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Wieder bilden $e^{\lambda_1 \cdot t}$ und $e^{\lambda_2 \cdot t}$ eine Basis des Lösungsraumes. Es gilt $x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = c_1 \cdot e^{(-\delta+i \cdot \omega_d) \cdot t} + c_2 \cdot e^{(-\delta-i \cdot \omega_d) \cdot t} = e^{-\delta \cdot t} \cdot (c_1 \cdot e^{i \cdot \omega_d \cdot t} + c_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_d \cdot t}) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (c_1 \cdot (\cos(\omega_d \cdot t) + i \cdot \sin(\omega_d \cdot t)) + c_2 \cdot (\cos(-\omega_d \cdot t) + i \cdot \sin(-\omega_d \cdot t))) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (c_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + c_2 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + i \cdot c_1 \cdot \sin(\omega_d \cdot t) - i \cdot c_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t))$. Und das ist dann schlussendlich gleich folgender Identität $e^{-\delta \cdot t} \cdot ((c_1 + c_2) \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + i \cdot (c_1 - c_2) \cdot \sin(\omega_d \cdot t))$. Nun ist der Real- und der Imaginärteil eine Lösung der DGL, also auch die Summe aus den beiden: $x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (c \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + c' \cdot \sin(\omega_d \cdot t))$ mit $c := c_1 + c_2$ und $c' := c_1 - c_2$. Diese allgemeine Lösung hat die Lösungsraumdimension 2, damit sind dann also alle Lösungen gegeben. Nun werden die Konstanten bestimmt: $s_0 = x(0) = 1 \cdot (c \cdot 1 + c' \cdot 0) = c$ und $v_0 = x'(0) = c' \cdot \omega_d - c \cdot \delta$, also $c = s_0$ und $c' = \frac{v_0 + s_0 \cdot \delta}{\omega_d}$. Es gilt also:

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(s_0 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{v_0 + s_0 \cdot \delta}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right) \text{ mit } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \text{ und } \delta^2 - \omega_0^2 < 0 \text{ (Schwache Dämpfung)}$$

Zum Schluss wird noch der Fall $\delta^2 - \omega_0^2 = 0$ (Kritische Dämpfung) untersucht. Dann gilt $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -d$. Es ist also $e^{-d \cdot t}$ eine Lösung der DGL dieses Satzes. Man hat hier eine doppelte Nullstelle. Nun betrachtet man eine doppelte Nullstelle als Grenzlage zweier benachbarter Nullstellen λ und $\lambda + \Delta\lambda$. Es sind also $e^{\lambda \cdot t}$ und $e^{(\lambda + \Delta\lambda) \cdot t}$ zwei Lösungen, also auch die Linearkombination $\frac{1}{\Delta\lambda} \cdot (e^{(\lambda + \Delta\lambda) \cdot t} - e^{\lambda \cdot t})$. Für $\Delta\lambda \rightarrow 0$ geht dieser Ausdruck gegen $t \cdot e^{\lambda \cdot t}$, was dann auch eine Lösung darstellt. Man hat jetzt also, dass die allgemeine Lösung $x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda \cdot t}$ ist. Aus Dimensionsgründen sind das auch alle Lösungen. Nun muss man noch die Konstanten bestimmen: $s_0 = x(0) = c_1$ und $v_0 = x'(0) = c_1 \cdot \lambda + c_2$, also $c_1 = s_0$ und $c_2 = v_0 - s_0 \cdot \lambda$. Man hat also:

$$x(t) = s_0 \cdot e^{-d \cdot t} + (v_0 + s_0 \cdot d) \cdot t \cdot e^{-d \cdot t} \text{ mit } \delta^2 - \omega_0^2 = 0 \text{ (Kritische Dämpfung)}$$

Der Satz ist damit also bewiesen. \square

Das Freundschaftstheorem

[Zurück zur Liste]

Satz. Gibt es in einer Menschenmenge von n Personen zwischen zwei Personen immer genau einen gemeinsamen Freund, dann gibt es eine Person, die mit allen anderen befreundet ist.

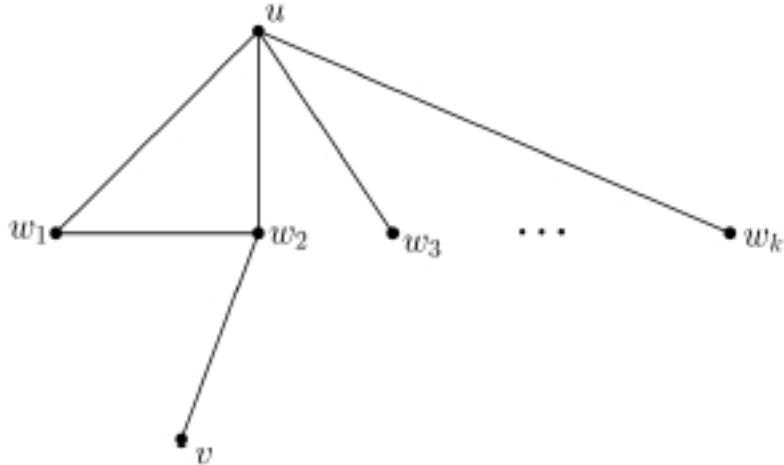
Beweis. Man benutzt für den Beweis sogenannte Graphen $G = (E, K)$, die endlich und einfach sind: In der Ebene gibt es Ecken E (Personen) mit $|E| = n$ und Kanten K (befreundet sein). Graphentheoretisch formuliert hat man also die folgende Aussage als Voraussetzung:

$$(V) \quad \forall u, v \in E \exists! w \in E : \{u, w\} \in K \wedge \{v, w\} \in K$$

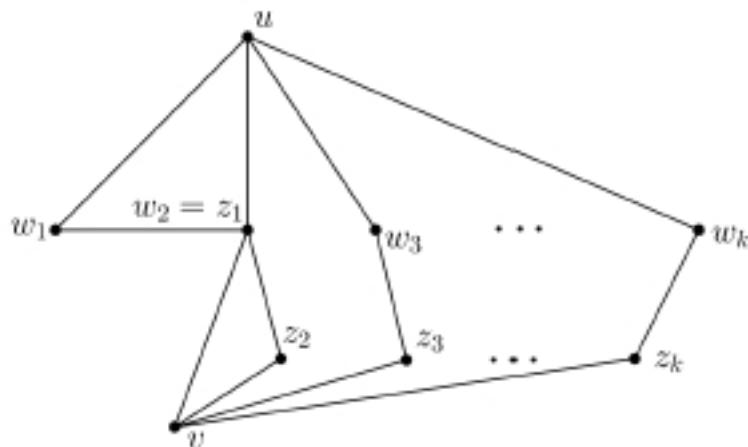
In dieser Sprache ist dann folgende Aussage zu zeigen:

$$(A) \quad \exists a \in E \forall u \in E \setminus \{a\} : \{u, a\} \in K$$

Sei $d(u)$ mit $u \in E$ die Anzahl der Kanten an der Ecke u . Die Widerspruchsannahme ist also: $\forall u \in E : d(u) < n - 1$. Aus der Voraussetzung (V) folgt, dass es im Graphen G keine Kreise der Länge 4 geben darf. Sei diese Behauptung mit $(K4)$ bezeichnet. Es wird jetzt zunächst gezeigt, dass G ein regulärer Graph ist, d.h. $d(u) = d(v)$ für alle $u, v \in E$: Seien $u, v \in E$ zwei nicht adjazente Ecken, d.h. u und v sind nicht durch genau eine Kante verbunden, und es gelte $d(u) = k$ und w_1, \dots, w_k seien die Nachbarn von u . Aufgrund von Eigenschaft (V) ist v zu genau einem der w_i benachbart, o.B.d.A. sei dies w_2 . w_2 muss ebenfalls zu genau einem der anderen Nachbarn von u adjazent sein, o.B.d.A. sei dies w_1 . Situation also:



v hat nun mit w_1 den gemeinsamen Nachbarn $w_2 =: z_1$. Für $i \geq 2$ hat v mit w_i genau einen gemeinsamen Nachbarn z_i . Die z_i außer z_1 sind nicht benachbart zu u , denn sonst würde der Kreislauf u, z_1, v, z_i, u existieren, der nach $(K4)$ aber nicht existieren darf. Weiter sind die z_i ($i \geq 2$) alle verschieden, denn sonst gäbe es den Kreis der Länge 4: $u, w_i, z_i = z_j, w_j, u$, welcher $(K4)$ verletzt. z_1 darf nicht mit z_2 zusammenfallen, sonst haben v und z_1 keinen gemeinsamen Nachbarn mehr. z_1 fällt aber auch nicht mit z_i ($i \geq 3$) zusammen, sonst würde $u, w_1, z_1 = z_i, w_i, u$ die Bedingung $(K4)$ verletzen. Also sind alle z_1, \dots, z_k paarweise verschieden. Situation:



Man kann also schließen: $k' = d(v) \geq k = d(u)$. Vertauscht man in diesen Überlegungen die Rollen von u und v , so folgt $k = d(u) \geq k' = d(v)$, also folgt dann: $d(u) = d(v) = k$ für nicht adjazente u, v . Nun gilt, dass alle Ecken, außer w_2 , im Graphen (auch die, die nicht eingezeichnet sind) entweder zu u oder v nicht adjazent sind, denn gäbe es eine Ecke $w' \neq w_2$, die zu u und v adjazent ist, dann hätten u und v mehr als einen gemeinsamen Nachbarn, nämlich w' und w_2 , was wegen (V) nicht sein kann. Also haben alle Ecken, ungleich w_2 , den Grad k (Grad k einer Ecke heißt, dass die Ecke k Kanten hat). Weil w_2 wegen der Widerspruchsannahme $d(w) < n - 1$ für alle $w \in E$ auch einen Nicht-Nachbarn hat, folgt mit den Überlegungen von oben, dass auch w_2 den Grad k hat. Es wurde also bewiesen, dass G ein regulärer Graph ist. Es wird nun die Anzahl aller Personen n in Abhängigkeit von k bestimmt: Man zählt die Anzahl aller Wege der Länge 2 auf zweierlei Art. Zu je 2 Ecken kann man wegen (V) genau einen Weg der Länge 2 bestimmen. Auf $\binom{n}{2}$ Weisen kann man aus n Ecken 2 Ecken auswählen, die Anzahl aller Wege der Länge 2 also: $\binom{n}{2}$. Andererseits gibt es zu jeder der n Ecken $e \in E$ genau k Nachbarn, und daher $\binom{k}{2}$ Wege der Länge 2, die e in der Mitte haben. Weil jeder Weg der Länge 2 genau eine Ecke in der Mitte hat, zählt also $n \cdot \binom{k}{2}$ ebenfalls alle Wege der Länge 2. Also gilt: $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \binom{n}{2} = n \cdot \binom{k}{2} = n \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{2}$, woraus $n-1 = k \cdot (k-1)$, also $n = k^2 - k + 1$, folgt. $k = 1$ heißt $n = 1$, also hat man genau einen Punkt, der mit genau einer Kante mit sich selbst verbunden ist. Diesen Fall schließt man aus, weil man nur zu jemand anderem befreundet sein kann. Ist jedoch $k = 2$, dann gilt $n = 3$, d.h. man hat ein Dreieck mit 3 Eckpunkten und 3 Kanten. Dort ist aber jeder mit allen anderen befreundet, was aber der Widerspruchsannahme hier widerspricht. Es muss also $k \geq 3$ gelten. Nach der Kombinatorik hier kommt nun lineare Algebra: Man betrachtet die $n \times n$ -Adjazenzmatrix $A = (a_{ij})$ zum Graphen G mit $a_{ij} = 1$, wenn Ecke i mit Ecke j verbunden ist, und 0 sonst. Diese Matrix A hat folgende Eigenschaften:

- A ist symmetrisch ($A = A^T$), da G ein ungerichteter Graph ist.
- $a_{ii} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, da keine Ecke mit sich selber verbunden ist.
- In jeder Zeile, und damit auch in jeder Spalte, stehen genau k Einsen und sonst 0, weil jede Ecke genau k Nachbarn hat.
- Zu zwei beliebigen Zeilen gibt es genau eine Spalte, in der beide eine 1 haben. In allen anderen Spalten ist in einer der Zeilen eine 0, denn zwei Ecken haben genau einen Nachbarn gemeinsam.

Dabei bezeichne A^T die transponierte Matrix zu A . Durch diese Beobachtungen ergibt sich dann:

$$A^2 = A \cdot A = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & k \end{pmatrix}$$

Man kann leicht herausfinden, dass A^2 den Eigenwert $k-1$ mit $(n-1)$ -facher Vielfachheit und den Eigenwert $n+k-1 = k^2$ mit 1-facher Vielfachheit besitzt. Dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen, weil doch schon bewiesen wurde, dass gilt $n = k^2 - k + 1$. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann gilt: $M \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow M^2 \cdot v = \lambda^2 \cdot v$, Beweis: $A^2 \cdot v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (A \cdot v) = \lambda \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^2 \cdot v$. Also existieren $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $r+s = n-1$ so, dass gilt $+\sqrt{k-1}$ ist r -facher und $-\sqrt{k-1}$ ist s -facher Eigenwert von A . Die Wurzeln sind wegen $k \geq 3$ reell. Nun ist $\sqrt{k^2}$ entweder gleich $+k$ oder $-k$. Es stellt sich heraus, dass nur $+k$ dann 1-facher Eigenwert von A ist. Die Spur einer quadratischen Matrix M , bezeichnet als $\text{Spur}(M)$, ist die Summe ihrer Diagonalelemente. Man beweist leicht, dass gilt $\text{Spur}(M \cdot M') = \text{Spur}(M' \cdot M)$ für alle $M \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $M' \in \mathbb{K}^{n \times m}$, wobei \mathbb{K} ein beliebiger Körper sei. Sei nun $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $T \in GL_n(\mathbb{K})$ (T also eine invertierbare $n \times n$ -Matrix), dann folgt $\text{Spur}(T \cdot M \cdot T^{-1}) = \text{Spur}((T \cdot M) \cdot T^{-1}) = \text{Spur}(T^{-1} \cdot (T \cdot M)) = \text{Spur}(E_n \cdot M) = \text{Spur}(M)$. Wenn $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist, dann gibt es ein $T \in GL_n(\mathbb{R})$ und ein $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei D eine Diagonalmatrix mit allen Eigenwerten (α_i) von M auf der Diagonalen ist, so, dass gilt: $M = T \cdot D \cdot T^{-1}$ und deswegen $\text{Spur}(M) = \text{Spur}(T \cdot D \cdot T^{-1}) = \text{Spur}(D) = \sum_{i=1}^n \alpha_i$; dabei seien die α_i die n Eigenwerte von M . Es folgt dann, weil A symmetrisch ist: $0 = \text{Spur}(A) = r \cdot (+\sqrt{k-1}) + s \cdot (-\sqrt{k-1}) + 1 \cdot k = k + (r-s) \cdot \sqrt{k-1}$. Nun ist $r-s \neq 0$, sonst folgt $k=0$, also gilt dann: $\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r} \in \mathbb{Q}$. Sei in $\frac{k}{s-r} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ der Bruch $\frac{a}{b}$ maximal gekürzt, also $ggT(a, b) = 1$. Es folgt aus $\sqrt{k-1} = \frac{a}{b}$ dann: $\frac{a^2}{b^2} = k-1$, also $a^2 = ((k-1) \cdot b^2)$, also $a^2 = \underbrace{((k-1) \cdot b) \cdot b}_{\in \mathbb{Z} \neq 0}$, also $b|a^2$, also $b|a$, denn, wenn b das a nicht teilt, dann auch nicht a^2 . Wäre $b \neq 1$, dann würde mit $b|a$ folgen $ggT(a, b) = b \neq 1$. Weil aber $ggT(a, b) = 1$ gilt, folgt dann $b=1$, also $\frac{k}{s-r} = \frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a \in \mathbb{Z}$. Also gibt es ein $h \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r} = h \Rightarrow h^2 = k-1 \Rightarrow k = h^2 + 1$; es gilt auch $k = (s-r) \cdot h$, also $h \cdot (s-r) = h^2 + 1 \Rightarrow h|(h^2 + 1)$. Weil auch $h|h^2$ gilt, folgt also $h|(h^2 + 1 - h^2)$, also $h|1$, also $h=1$. Daraus folgt dann: $k = h^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$, aber $k=2$ wurde bereits ausgeschlossen. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Widerspruchsannahme, dass es keine Ecke gibt, die zu allen anderen Ecken benachbart ist, fallen gelassen werden muss. Der Beweis ist damit beendet! \square

Der Satz von Vitali

[Zurück zur Liste]

Satz. Für alle $n \geq 1$ gibt es im \mathbb{R}^n eine nicht messbare Menge.

Beweis. Auf der Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} wird eine Äquivalenzrelation definiert: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ so, dass $x - q \in [0; 1]$ gilt. Es gibt also ein $z \in [0; 1]$ mit $[z] = [x]$. Nach dem Auswahlaxiom ist es also möglich, jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten aus $[0; 1]$ zuzuordnen. Sei $X \subseteq [0; 1]$ die Menge dieser Repräsentanten. Sei nun $x \in [0; 1]$, dann gibt es ein $z \in X$ mit $x \in [z]$, was äquivalent ist zu $x - z \in \mathbb{Q}$. Weil $x, z \in [0; 1]$ gilt, folgt also $x - z \in \mathbb{Q} \cap [-1; 1]$. Anders formuliert hat man jetzt: Für $x \in [0; 1]$ existiert ein $q \in \mathbb{Q} \cap [-1; 1]$ mit $x \in (q + X)$. Daraus folgt dann: $[0; 1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1; 1]} (q + X) =: A$, wobei $\mathbb{Q} \cap [-1; 1]$ abzählbar ist. Die Vereinigung ist disjunkt, denn wäre $q + x = q' + x'$ ($q \neq q' \Rightarrow x \neq x'$), dann gilt $x - x' \in \mathbb{Q}$, also $x \sim x'$, was ein Widerspruch ist, denn nach Konstruktion ist jedes Element aus X Repräsentant genau einer Äquivalenzklasse, also gilt für $x, x' \in X$: $x \neq x' \Rightarrow x \not\sim x'$. A ist nach Konstruktion beschränkt. Angenommen, A ist messbar, dann gilt: $v(A) = \sum_{k=1}^{\infty} v(q_k + X) = \sum_{k=1}^{\infty} v(X) < \infty$, da A beschränkt ist. Also folgt $v(X) = 0$ und also $v(A) = 0$. Aber es gilt doch $[0; 1] \subseteq A$, also $v(A) \geq 1$. Das ist ein Widerspruch, welcher zeigt, dass $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht messbar sein kann. Wegen $v_1(A) = v_1(A) \cdot 1^{n-1} = v_n(A \times [0, 1]^{n-1})$ folgt dann die Behauptung. Das war es! \square

Der Satz von Wilson

[Zurück zur Liste]

Satz. $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist genau dann eine Primzahl, wenn gilt $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$.

Beweis. Sei also $p \in \mathbb{P}_{\geq 2}$. Man betrachtet dann die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/p)^{\times}$. Zu jedem $a \in (\mathbb{Z}/p)^{\times}$ gibt es genau ein Inverses. In dem Produkt $\prod_{a \in (\mathbb{Z}/p)^{\times}} a$ sortiert man die Elemente mit ihren Inversen als Paare, die sich zu dem neutralen Element $[1]$ aufheben. Dabei seien diese Elemente nicht selbstinvers. Es gilt also: $\prod_{a \in (\mathbb{Z}/p)^{\times}} a = \prod_{a \in (\mathbb{Z}/p)^{\times}, a=a^{-1}} a$. Nun ist $a = a^{-1} \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1) \cdot (a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1$ (wegen Nullteilerfreiheit). Also sind $[-1], [1] \in (\mathbb{Z}/p)^{\times}$ alle selbstinversen Elemente. Daraus folgt: $\prod_{a \in (\mathbb{Z}/p)^{\times}} a = [1] \cdot [-1] = [-1]$. Es wurde nun bewiesen, dass gilt $\prod_{a \in (\mathbb{Z}/p)^{\times}} a = \prod_{k=1}^{p-1} [k] \equiv -1 \pmod{p} \Leftrightarrow ((p-1)!+1) \pmod{p} = 0$. Gelte nun umgekehrt $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$. Angenommen, m ist keine Primzahl, dann gibt es natürliche Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ mit $1 < x, y < m$, so dass $m = x \cdot y$ gilt. Also folgt $x|m$. Wegen $1 < x < m$ gilt also $x|(m-1)!$. Wegen $x|m$ und $m|(m-1)!+1$ (nach Annahme) folgt also $x|((m-1)!+1)$. Aus $x|(m-1)!$ und $x|((m-1)!+1)$ folgt $x|1 = ((m-1)!+1) - (m-1)!$, also $x = 1$, was ein Widerspruch zur Konstruktion von x darstellt. Fertig! \square

Satz. Die n -te Primzahl p_n lässt sich, wie folgt, darstellen:

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left\lfloor \sqrt[n]{\frac{n}{1 + \sum_{k=1}^m 0^{((k-1)!+1) \bmod k}}} \right\rfloor$$

Beweis. Die Formel $\pi(m) = \sum_{k=1}^m 0^{((k-1)!+1) \bmod k}$ zählt die Anzahl der Primzahlen kleiner-gleich m . Sei p_n die n -te Primzahl, dann gilt $\pi(p_n) = n$, also gilt dann $\pi(m) \geq n$ für $m \geq p_n$. Ist allerdings $m < p_n$, dann ist $\pi(m) < n$. Nun lässt sich einfach nachweisen, dass gilt:

$$A_n(a) := \left\lfloor \sqrt[n]{\frac{n}{1+a}} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & a < n \\ 0, & a \geq n \end{cases}$$

Man betrachtet nun $A_n(\pi(m))$. Aus dem Bertrand'schen Postulat folgt $p_n < 2^n$, Beweis: Nach diesem Postulat gilt ohne Beweis, dass es für alle $n > 1$ mindestens eine Primzahl p gibt mit $n < p < 2n$. Also gibt es zwischen 2^1 und 2^2 , zwischen 2^2 und 2^3 , zwischen 2^3 und 2^4 , ... und zwischen 2^{n-1} und 2^n immer mindestens eine Primzahl. Weil 1 und 2 auch Primzahlen sind, hat man insgesamt mindestens $2 + (n-1) = n+1$ Primzahlen, die kleiner als 2^n sind, also folgt $p_n < 2^n$. Für $m = 1, \dots, p_n - 1$ ist der Wert des Summanden $A_n(\pi(m))$ in der Summe immer gleich 1. Ist $m = p_n, \dots, 2^n$, dann ist der Summand gleich Null. Addiert man 1 zur Summe, dann hat man für $m = 1, \dots, p_n$ jeweils in der Summe 1 addiert. Damit ist also der Nachweis vollständig erbracht. \square

Der Satz von Cantor

[Zurück zur Liste]

Satz. Eine Menge M ist weniger mächtig als ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, also: $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei erstmal $M = \emptyset$, dann gilt $|M| = |\emptyset| = 0 < 1 = |\{\emptyset\}| = |\mathcal{P}(M)|$, also $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. Sei von nun an also $M \neq \emptyset$. Zunächst mal gilt schon $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$, da $x \mapsto \{x\}$ eine injektive Abbildung $M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ ist. Nun wird gezeigt, dass Gleichheit nicht herrschen kann: Angenommen, es gibt eine surjektive Abbildung $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$, dann sei definiert: $A := \{x \in M : x \notin f(x)\} \subseteq M$. A ist nun eine Menge und es gilt dann $A \in \mathcal{P}(M)$. Wegen der Annahme, dass f surjektiv ist, gibt es ein $m \in M$ mit $f(m) = A$. Dann gibt es 2 Fälle: $m \in f(m)$ oder $m \notin f(m)$. Ist $m \in f(m)$, dann ist $m \in A$, also $m \notin f(m)$, Widerspruch. Ist $m \notin f(m)$, dann ist $m \notin A$, also $m \in f(m)$, Widerspruch. In jedem Fall hat man also einen Widerspruch, also gibt es keine surjektive Abbildung $M \rightarrow \mathcal{P}(M)$, also insbesondere keine bijektive, d.h. der Fall $|M| = |\mathcal{P}(M)|$ ist ausgeschlossen und also weiß man, dass tatsächlich $|M| < |\mathcal{P}(M)|$ gilt. Damit ist der Beweis endlich vollbracht. \square

Korollar (1). Es gibt keine Menge, deren Mächtigkeit am größten ist.

Beweis. Angenommen, es gibt eine Menge M_{\max} , deren Mächtigkeit am größten ist. Nun ist nach dem Satz von Cantor aber $|\mathcal{P}(M_{\max})| > |M_{\max}|$, also ist $|M_{\max}|$ doch nicht maximal, Widerspruch. \square

Korollar (2). Die Menge, die aus allen Mengen, die es gibt, als ihre Elemente besteht, gibt es nicht.

Beweis. Angenommen, es existiert die Menge M_{alle} , die aus allen Mengen, die es gibt, besteht. Dann gilt also $\mathcal{P}(M_{\text{alle}}) \subseteq M_{\text{alle}}$, also $|\mathcal{P}(M_{\text{alle}})| \leq |M_{\text{alle}}|$, im Widerpruch zum Satz von Cantor, wonach $|\mathcal{P}(M_{\text{alle}})| > |M_{\text{alle}}|$ gelten muss. \square

Der Satz von Lagrange

[Zurück zur Liste]

Satz. Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G . Dann ist $[G : H]$ der Index von H in G , also die Anzahl der Nebenklassen von H in G . Dann gilt für die Gruppenordnungen: $|G| = [G : H] \cdot |H|$. Insbesondere sind für $|G| < \infty$ sowohl $[G : H]$ als auch $|H|$ ein Teiler von $|G|$. Es gilt damit: Da die Gruppe, die von einem Element in G erzeugt wird, eine Untergruppe von G ist, folgt, dass die Ordnung eines Gruppenelements stets die Gruppenordnung teilt.

Beweis. Betrachtet wird für jedes $g \in G$ die Linksnebenklasse $gH = \{gh : h \in H\}$. Es ist $h \mapsto gh$ eine Bijektion zwischen H und gH , denn die Abbildung ist nach Definition der Linksnebenklasse surjektiv und wegen $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ auch injektiv. Somit haben alle Linksnebenklassen die gleiche Mächtigkeit wie H . Da die Nebenklassen als Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ definiert werden können, liefern sie eine Partition von G . Wählt man mithilfe des Auswahlaxioms ein Repräsentantensystem R der Nebenklassen, so hat man also eine Bijektion zwischen $R \times H$ und G durch die Abbildung $(r, h) \mapsto rh$, denn es gibt eine Einteilung von G in $|R|$ gleichgroße Nebenklassen der Mächtigkeit $|H|$. Nach Definition von Index und Repräsentantensystem gilt $[G : H] = R$ und man erhält: $|G| = |R \times H| = |R| \cdot |H| = [G : H] \cdot |H|$, genau das, was man hier auch beweisen wollte. \square

Der Satz von Cayley

[Zurück zur Liste]

Satz. Sei $S(X) := \{f : X \rightarrow X \text{ bijektiv}\}$ die symmetrische Gruppe von X . Dann ist $(S(X), \circ)$ mit $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ für $f, g \in S(X)$ und $x \in X$ eine Gruppe. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann ist

$$\Phi : G \rightarrow S(G), g \mapsto \Phi(g)$$

mit $\Phi(g)(h) = g * h$ für alle $h \in G$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Das bedeutet: Man kann $(G, *)$, wegen G isomorph zur Gruppe $\Phi(G) \subseteq S(G)$, immer als eine Untergruppe einer symmetrischen Gruppe auffassen. Folgerung: Ist $\text{ord}(G) = n < \infty$, dann kann man G als eine Untergruppe von $S_n = \{f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \text{ bijektiv}\}$ auffassen.

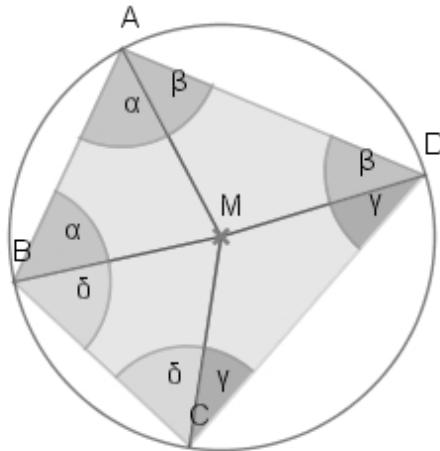
Beweis. Wohldefiniertheit: Es gilt für $g \in G$ auch $\Phi(g) \in S(G)$, denn $\Phi(g) : G \rightarrow G, \Phi(g)(h) \mapsto g * h$ hat die inverse Abbildung $\Phi(g^{-1})(h) \mapsto g^{-1} * h$, ist also eine bijektive Abbildung von G nach G , also Element von $S(G)$. Durch Φ wird ein Gruppenhomomorphismus definiert: Seien $g, g' \in G$, dann gilt: $\Phi(g * g')(h) = (g * g') * h = g * (g' * h) = \Phi(g)(\Phi(g')(h)) = (\Phi(g) \circ \Phi(g'))(h)$. Nun zur Injektivität: $\Phi(g) = \text{id} \Leftrightarrow g * h = h \forall h \in G \Leftrightarrow g = e$. Also gilt $\text{kern}(\Phi) = \{e\}$, also ist Φ injektiv. Weil Φ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist und da $G \rightarrow \Phi(G)$ eine Surjektion ist, folgt, dass G zu $\Phi(G)$ isomorph ist. Es wird noch explizit gezeigt, dass $\Phi(G)$ eine Untergruppe von $S(G)$ ist: Es gilt klarerweise $\Phi(G) \subseteq S(G)$, denn für alle $g \in G$ hat $\Phi(g) \in \Phi(G)$ die zu ihr inverse Abbildung $\Phi(g^{-1}) \in \Phi(G)$, also ist $\Phi(g)$ eine bijektive Abbildung von G nach G , also Element von $S(G)$. Und es gilt, dass $\Phi(e) \in \Phi(G)$, wobei e das neutrale Element in G ist, das neutrale Element in $\Phi(G)$ ist. Das zu $\Phi(g) \in \Phi(G)$ ($g \in G$) inverse Element ist $\Phi(g^{-1}) \in \Phi(G)$ ($g^{-1} \in G$). Nun zur Abgeschlossenheit von $\Phi(G)$: Für $\Phi(g), \Phi(g') \in \Phi(G)$ gilt: $\Phi(g) \circ \Phi(g') = \Phi(g * g') \in \Phi(G)$, denn es gilt wegen $g, g' \in G$ nämlich $g * g' \in G$, da G eine Gruppe ist. Zum Schluss soll hier noch die Folgerung geklärt werden: Ist $\text{ord}(G) = n < \infty$, dann ist $S(G)$ isomorph zu $S_n = \{f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \text{ bijektiv}\}$. Ersetze also $S(G)$ durch S_n , dann folgt die Behauptung. \square

Der Satz von Ptolemäus

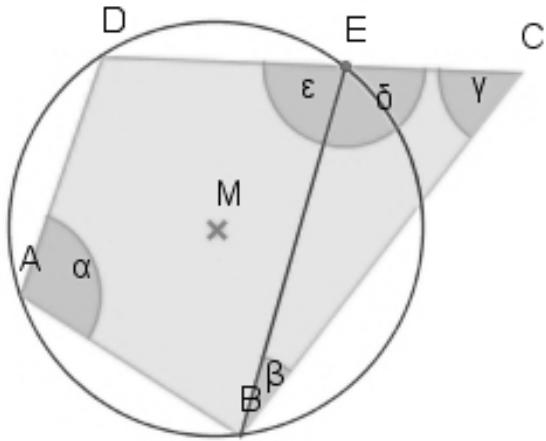
[Zurück zur Liste]

Lemma (Sehnenviereck). Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen. Da die Innenwinkelsumme im Viereck 360° beträgt, reicht es, wenn sich 2 gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen, da dies dann für das andere Winkelpaar automatisch folgt.

Beweis. Zuerst kommt ein Bild:



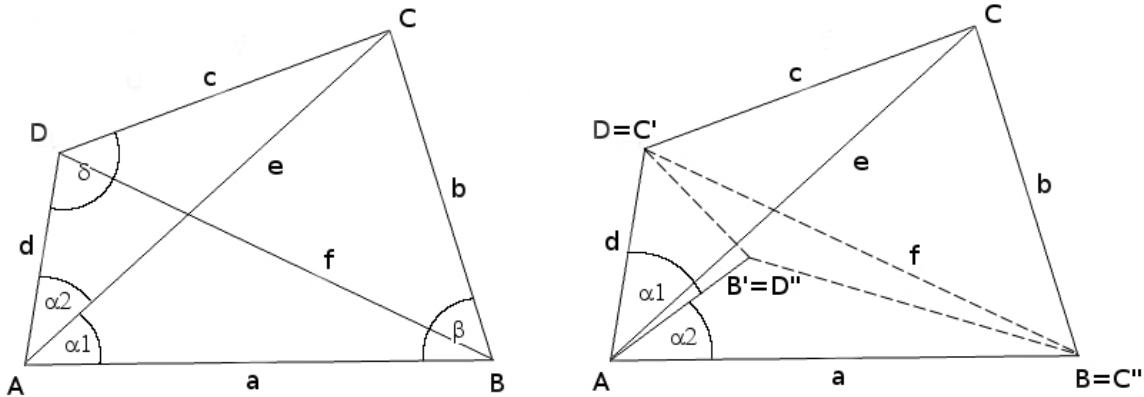
Beweis von \Rightarrow : Sei das Sehnenviereck $ABCD$ in obenstehender Grafik dadurch in Teildreiecke zerlegt, dass die einzelnen Ecken mit dem Mittelpunkt des Kreises M verbunden sind. Das Dreieck $\triangle ABM$ ist gleichschenklig, damit sind die Winkel $\angle ABM$ und $\angle MAB$ gleich groß. Dieser Winkel ist mit α bezeichnet. Analoge Schlüsse gelten für die anderen Teildreiecke und Winkel in der obenstehenden Grafik. Für die Innenwinkelsumme des Vierecks ergibt sich dann: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^\circ$, also $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. Gegenüberliegende Winkel ergänzen sich zu 180° : $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ$ und $(\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 180^\circ$. Nun zu \Leftarrow : Wieder ein Bild:



3 Punkte liegen immer auf einem Kreis, sei also der vierte nicht auf dem Kreis. Nach Voraussetzung gilt $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Man bildet den Umkreis zum Dreieck $\triangle ABD$ und es wird gezeigt, dass auch C auf diesem Kreis liegt. Angenommen, C liegt nicht auf dem Kreis. Dann gibt es einen Punkt E auf der Geraden durch D und C , der auf dem Kreis liegt. Für das Sehnenviereck $ABED$ gilt nach dem oben Bewiesenen $\alpha + \varepsilon = 180^\circ$, und mit der Voraussetzung $\alpha + \gamma = 180^\circ$ folgt dann $\gamma = \varepsilon$. Im Dreieck $\triangle BCE$ gilt nach dem Innenwinkelsatz für Dreiecke $\beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ und außerdem $\delta + \varepsilon = 180^\circ$. Also folgt $\beta + \gamma = \varepsilon$. Da $\beta > 0$ ist, ist dies ein Widerspruch zu $\gamma = \varepsilon$. Damit ist auch C auf dem Kreis. \square

Satz (Satz von Ptolemäus). *In einem Viereck gilt: Die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten ist größer-gleich dem Produkt der Diagonalen. Gleichheit gilt genau dann, wenn das Viereck ein Sehnenviereck ist.*

Beweis. Zuerst kommt wieder ein Bild:



Mittels zweier geschickt gewählter Drehstreckungen des Dreiecks $\triangle ABC$ um A , so dass $C' = D$ ist, und des Dreiecks $\triangle ACD$ um A , so dass $C'' = B$ ist, erhält man aufgrund der Ähnlichkeit der jeweiligen Dreiecke die Entsprechungen $|\overline{DB'}| = b' = b \cdot \frac{d}{e}$ und $|\overline{B'B}| = c' = c \cdot \frac{a}{e}$; außerdem gilt $\angle AB'D = \beta$ und $\angle BB'A = \delta$. Es gilt $B' = D''$, weil $|\overline{AB'}| = a \cdot \frac{d}{e} = d \cdot \frac{a}{e} = |\overline{AD''}|$ gilt und die Winkel $\alpha 1$ und $\alpha 2$ sich tauschen. Nun gilt für das Dreieck $\triangle DB'B$ die Dreiecksungleichung, also: $f = |\overline{DB}| \leq |\overline{DB'}| + |\overline{B'B}| = b \cdot \frac{d}{e} + c \cdot \frac{a}{e}$, also $e \cdot f \leq a \cdot c + b \cdot d$. Das ist dann die erste Behauptung des Satzes. Aus der Geometrie erkennt man nun, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn B' auf \overline{BD} liegt, d.h. $\angle AB'D + \angle BB'A = \beta + \delta = 180^\circ$, also nach dem Lemma oben genau dann, wenn $ABCD$ ein Sehnenviereck ist. Das war es! \square

Die Euler'sche Identität

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Beweis. Zunächst werden die Taylorreihenentwicklungen für e^x , $\cos(x)$ und $\sin(x)$ hergeleitet. Es gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_{m+1}(x) \text{ mit } |R_{m+1}(x)| \leq \max_{t \in [x_0, x]} |f^{(m+1)}(t)| \cdot \frac{|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!}$$

Dabei sei I das Intervall zwischen x_0 und x . Es wird für die Reihenentwicklungen nach Taylor der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gewählt. Für e^x gilt dann:

$$\left((e^x)^{(n)} \right)_{x=0} = (e^x)_{x=0} = 1 \text{ und } |R_{m+1}(x)| \leq e^{\max\{0, x\}} \cdot \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

Nun zu $\cos(x)$:

$$\left((\cos(x))^{(n)} \right)_{x=0} = \left(\begin{cases} (-1)^{k+1} \cdot \sin(x), & n = 2k+1 \\ (-1)^k \cdot \cos(x), & n = 2k \end{cases} \right)_{x=0} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ (-1)^k, & n = 2k \end{cases} \text{ und } |R_{m+1}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

Und schließlich $\sin(x)$:

$$\left((\sin(x))^{(n)} \right)_{x=0} = \left(\begin{cases} (-1)^k \cdot \cos(x), & n = 2k+1 \\ (-1)^k \cdot \sin(x), & n = 2k \end{cases} \right)_{x=0} = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \text{ und } |R_{m+1}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

Insgesamt folgt also:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Für die imaginäre Einheit der Menge der komplexen Zahlen gilt:

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k \\ (-1)^k i, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Wegen der Konvergenz sämtlicher hier auftretender Reihen folgt:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Es folgt also $e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$, also $e^{\pi i} + 1 = 0$. □

Die Euler'sche Polyederformel

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt $E - K + F = 2$ für die Anzahl der Ecken E , Kanten K und Flächen F eines konvexen Polyeders.

Beweis. Man entfernt zunächst eine Fläche des konvexen Polyeders und zieht den Rest wie eine Gummihaut in die Ebene auseinander. Dabei bleibt die Struktur des Kantennetzes erhalten. Für den erhaltenen ebenen Graphen muss man also zeigen, dass $E - K + F = 1$ ist, denn eine Fläche wurde ja entfernt. Dazu entfernt man aus dem ebenen Kantengraphen nacheinander eine Kante so, dass der Restgraph zusammenhängend bleibt. Dabei treten zwei Fälle auf. 1. Fall: Die entfernte Kante war eine Diagonale. Dann nimmt die Anzahl der Flächen und Kanten um 1 ab. Die Anzahl der Ecken bleibt gleich. Der Wert $E - K + F$ bleibt dabei also invariant. 2. Fall: Die entfernte Kante war keine Diagonale. Dann nimmt die Anzahl der Ecken und Kanten um 1 ab und die Anzahl der Flächen bleibt erhalten. Somit bleibt auch in diesem Fall $E - K + F$ invariant. Zum Schluss bleibt eine einzige Kante mit zwei Ecken ohne Fläche übrig. Es gilt dann offenbar $E - K + F = 2 - 1 + 0 = 1$. □

Satz. Für einen Polyeder vom Geschlecht g , also einem Polyeder mit g Löchern, gilt $\chi(g\mathbb{T}^2) = E - K + F = 2 - 2 \cdot g$

Beweis. Einen Polyeder vom Geschlecht g kann man sich bis auf Homöomorphie aus einem „sphärischen“ Polyeder mit zwei fehlenden Flächen, $g-1$ „zylindrischen“ Polyedern mit fehlenden Flächen an den Enden des Schlauches und zwei andere woanders sowie einem „zylindrischen“ Polyeder mit nur zwei fehlenden Flächen an den beiden Grundflächen ohne Überschneidung zusammengeklebt vorstellen. Dem „sphärischen“ Polyeder fehlen zwei Flächen, also $E - K + F = 2 - 2 = 0$, dasselbe gilt für den „zylindrischen“ Polyeder mit nur zwei fehlenden Flächen. Den anderen „zylindrischen“ Polyedern fehlen vier Flächen, also $E - K + F = 2 - 4 = -2$. Beim Wiederzusammenkleben der Teile an den Klebstellen verliert man dieselbe Anzahl an Kanten wie die der Ecken. An dem Wert $E - K + F$ des gesamten Gebildes ändert sich also beim Zusammenkleben nichts. Ansonsten addiert sich der $(E - K + F)$ -Wert des wieder zusammengeklebten Gebildes aus den jeweiligen $(E - K + F)$ -Werten der Einzelteile. Man erhält also $E - K + F = 0 + (g-1) \cdot (-2) + 0 = 2 - 2 \cdot g$. \square

Die 5 platonischen Körper

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gibt nur fünf reguläre Polyeder, die Platonischen Körper.

Beweis. Ein reguläres Polyeder habe F Flächen, die also reguläre n -Ecke sind. Desweiteren treffen in einem regulären Polyeder an jeder Ecke r Kanten aufeinander. Zu jeder Fläche gehören also n Kanten. Da jede Kante zu zwei Flächen gehört, ist die Anzahl der Kanten K gleich $\frac{F \cdot n}{2}$, also $2K = n \cdot F$. Nochmal: Zu jeder Ecke gehören r Kanten. Weil jede Kante zu zwei Ecken gehört, gibt es $\frac{E \cdot r}{2}$ Kanten K , also $2K = r \cdot E$. Nun setzt man $E = \frac{2K}{r}$ und $F = \frac{2K}{n}$ in die Euler'sche Polyederformel $E - K + F = 2$ ein und erhält also: $\frac{2K}{r} + \frac{2K}{n} - K = 2 \Leftrightarrow (\frac{1}{r} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}) \cdot K = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}$. Ein reguläres n -Eck muss mindestens drei Seiten haben, also gilt $n \geq 3$. Und da an jeder Ecke nicht weniger als drei Kanten zusammentreffen, gilt $r \geq 3$. $\frac{1}{r} + \frac{1}{n}$ muss größer als $\frac{1}{2}$ sein, weil K sonst negativ wäre. Daraus folgt: r und n können nicht beide größer sein als 3. Da $r, n \geq 3$ gilt, muss also r oder n gleich 3 sein. Sei zunächst $n = 3$, dann gilt $\frac{1}{r} + \frac{1}{3} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{K}$. r kann dann nicht größer als 6 sein, sonst wäre $\frac{1}{K}$ negativ. $r = 6$ kann auch nicht sein, weil K ansonsten nicht aus \mathbb{N} wäre. Es bleiben nur noch $r = 3, 4, 5$. Für diese Werte erhält man für K Werte aus \mathbb{N} , nämlich $K = 6$ für $r = 3$, $K = 12$ für $r = 4$ und $K = 30$ für $r = 5$. Aus $E = \frac{2K}{r}$ erhält man die Anzahl der Ecken und mit $F = 2 - E + K$ die Anzahl der Flächen. Die Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} n = 3, r = 3, K = 6 &\Rightarrow E = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4 \Rightarrow F = 2 - 4 + 6 = 4 \text{ (Tetraeder)} \\ n = 3, r = 4, K = 12 &\Rightarrow E = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6 \Rightarrow F = 2 - 6 + 12 = 8 \text{ (Oktaeder)} \\ n = 3, r = 5, K = 30 &\Rightarrow E = \frac{2 \cdot 30}{5} = 12 \Rightarrow F = 2 - 12 + 30 = 20 \text{ (Ikosaeder)} \end{aligned}$$

Die Werte sind also alle natürliche Zahlen. Sei nun $r = 3$. Genau wie eben schließt man aus $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{K}$, dass nur $n = 3, 4, 5$ möglich ist. Und wieder erhält man $K = 6, 12, 30$. Aus $F = \frac{2K}{n}$ erhält man dann die Anzahl der Flächen und mit $E = 2 + K - F$ die Anzahl der Ecken. Die Möglichkeiten also:

$$\begin{aligned} r = 3, n = 3, K = 6 &\Rightarrow F = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4 \Rightarrow E = 2 + 6 - 4 = 4 \text{ (Tetraeder)} \\ r = 3, n = 4, K = 12 &\Rightarrow F = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6 \Rightarrow E = 2 + 12 - 6 = 8 \text{ (Hexaeder)} \\ r = 3, n = 5, K = 30 &\Rightarrow F = \frac{2 \cdot 30}{5} = 12 \Rightarrow E = 2 + 30 - 12 = 20 \text{ (Dodekaeder)} \end{aligned}$$

Auch hier sind die Werte wieder natürliche Zahlen. Damit sind alle sich aus der Euler'schen Polyederformel ergebenden Möglichkeiten ausgeschöpft, mehr gibt es nicht. Insgesamt wurden also fünf verschiedene reguläre Polyeder gefunden. \square

Die Limesdarstellung der Euler'schen Zahl

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Beweis. Die Zahl e sei definiert als die Zahl, für die gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, so dass $\frac{d}{dx} e^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$ folgt. Es wird nun die stetige Funktion $f(x) = e^x - x$ untersucht: Wegen $f'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ hat f bei $x = 0$ ein Extremum. Da $f''(0) = e^0 = 1 > 0$ gilt, handelt es sich dabei um ein lokales Minimum mit dem Wert $f(0) = e^0 - 0 = 1 - 0 = 1$. Es existiert ein ε so, dass der Wert 1 auf $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$ das absolute Minimum ist. $f'(x) = e^x - 1$ ist kleiner als 0 für alle $x < 0$ und größer als 0 für alle $x > 0$, also ist f auf $(-\infty, \varepsilon]$ streng monoton fallend und auf $[\varepsilon, \infty)$ streng monoton steigend. Daraus

folgt dann, dass an der Stelle $x = 0$ ein globales Minimum von f mit dem Wert 1 vorliegt. Also gilt $f(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 + x$ für $x \neq 0$. Nun ist $\frac{1}{n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Also gilt $e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow e > (1 + \frac{1}{n})^n$. Für $m \in \mathbb{N}_{>1}$ ist $-\frac{1}{m} < 0$, also $e^{-\frac{1}{m}} > 1 - \frac{1}{m} \Rightarrow e^{\frac{1}{m}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{m}{m-1} \Rightarrow e < \left(\frac{m}{m-1}\right)^m$. Ersetzt man m durch $n+1$, dann gilt also $e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Also gilt zusammengefasst $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \Rightarrow 1 < \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n} < 1 + \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}_{>1}$), was schließlich $(1 + \frac{1}{n})^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e$ impliziert. \square

Die Irrationalität der Wurzel aus 2

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gilt: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Beweis. Angenommen, die Quadratwurzel aus 2 ist rational. Dann lässt sich diese Zahl als Bruch $\frac{p}{q}$ darstellen. Weiter nimmt man an, dass p und q teilerfremde natürliche Zahlen sind, der Bruch also in maximal gekürzter Form vorliegt. Ist er nicht maximal gekürzt, dann kürze ihn maximal. Aus $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ folgt dann $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$, also $p^2 = 2q^2$. Also ist p^2 eine gerade Zahl. Folglich ist auch p gerade, denn wäre p ungerade, dann folgte, dass p^2 ungerade ist, im Widerspruch dazu, dass p^2 gerade ist, weil eine ungerade Zahl, multipliziert mit einer ungeraden Zahl, wieder ungerade ist, denn: $(2n+1) \cdot (2m+1) = 2 \cdot (2mn+n+m) + 1$ ($m, n \in \mathbb{N}$). p lässt sich also darstellen als $p = 2r$, wobei $r \in \mathbb{N}$ sei. Deswegen gilt dann $p^2 = (2r)^2 = 4r^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2r^2 = q^2$. Es ist also auch q^2 gerade. Mit der gleichen Argumentation, wie oben, folgt, dass auch q eine gerade Zahl ist. Da p und q also beide durch 2 teilbar sind, erhält man einen Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q . Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, die Wurzel aus 2 sei eine rationale Zahl, falsch ist und daher das Gegenteil gelten muss. Dass $\sqrt{2}$ irrational ist, ist also vollständig bewiesen. \square

Die Unendlichkeit der Primzahlenanzahl

[Zurück zur Liste]

Satz. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis. Sei $F_n = 2^{2^n} + 1$ für $n \geq 0$ die Folge der Fermat-Zahlen. Es gilt $F_m - 2 = F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{m-1}$. Beweis durch vollständige Induktion über m : Induktionsanfang: $m = 1$: $F_1 - 2 = (2^{2^1} + 1) - 2 = 3 = 2^{2^0} + 1 = F_0$, also richtig. Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $m \geq 1$. Induktionsschritt: $F_{m+1} - 2 = (2^{2^{m+1}} + 1) - 2 = 2^{2 \cdot 2^m} - 1 = (2^{2^m})^2 - 1 = (((2^{2^m} + 1) - 2) + 1)^2 - 1 = ((F_m - 2) + 1)^2 - 1 \stackrel{I.V.}{=} (F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{m-1} + 1)^2 - 1 = (F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{m-1})^2 + 2 \cdot F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{m-1} \cdot 1 + 1^2 - 1 = F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{m-1} \cdot (F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{m-1} + 2) \stackrel{I.V.}{=} F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{m-1} \cdot F_m$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Es folgt daraus, dass F_n für $n < m$ die Zahl $F_m - 2$ teilt. Einschub: $b \mid c \Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - c, b)$. Beweis dieser Aussage: Sei $g = \text{ggT}(a, b)$, also g maximal mit $g \mid a \wedge g \mid b$, gegeben. Aus $g \mid b$ und $b \mid c$ folgt $g \mid c$. Nun gilt auch $g \mid a \wedge g \mid c \Rightarrow g \mid a - c$. Also gilt zusammengefasst $g \mid a - c \wedge g \mid b$, also $g \leq \text{ggT}(a - c, b) =: g'$. g' teilt $a - c$ und b und ist maximal groß mit dieser Eigenschaft. Weil $b \mid c$ gilt, folgt aus $g' \mid b$ dann $g' \mid c$. Wegen $g' \mid a - c$ und $g' \mid c$ gibt es ganze Zahlen k, k' mit $g' \cdot k = a - c$ und $g' \cdot k' = c$, also $g' \cdot k = a - g' \cdot k' \Leftrightarrow g' \cdot (k + k') = a$, d.h. $g' \mid a$. Aus $g' \mid a \wedge g' \mid b$ folgt $g' \leq \text{ggT}(a, b) = g$. Gezeigt wurde $g \leq g'$ und $g' \leq g$, also gilt $g = g'$, d.h. es gilt $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - c, b)$. Diese bewiesene Behauptung wird nun benutzt: $\text{ggT}(F_m, F_n) = \text{ggT}(F_m - (F_m - 2), F_n) = \text{ggT}(2, F_n)$. Da F_n für alle $n \geq 0$ eine ungerade Zahl ist, gilt $\text{ggT}(2, F_n) = 1$, also sind die beiden Primfaktorzerlegungen von F_m und F_n ($n < m$) disjunkt. D.h. mit F_n ($n \geq 0$), streng monoton steigend, listet man unendlich viele paarweise disjunkte Primfaktorzerlegungen auf. Daraus folgt, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss, wie schon bereit behauptet. \square

Es gibt aber auch noch einen kurzen Beweis:

Beweis. Mal angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen: Seien diese p_1, p_2, \dots, p_n . Es ist dann $m := 1 + \prod_{k=1}^n p_k$ eine Zahl, die nicht durch p_1, p_2, \dots, p_n teilbar ist. Weil man m als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen kann (Existenz der Primfaktorzerlegung), gibt es eine Primzahl q , die m teilt. Wegen $p_1, p_2, \dots, p_n \nmid m$, ist also die Primzahl q zu allen p_1, p_2, \dots, p_n verschieden, d.h. man hat eine neue Primzahl gefunden, Widerspruch, denn mit p_1, p_2, \dots, p_n hatte man doch alle Primzahlen aufgelistet. Das ist dann das Ende des Beweises! \square