Gelöste Logikrätsel

Verfasst von: Sven Dooley.

Von mir gelöste Logikrätsel

Nicht von mir gelöste Logikrätsel

Die 10 Aussagen über X

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Es folgen* 10 *Aussagen zu* X*, einer ganzen Zahl zwischen* 1 *und* 10 *(inklusive). Nicht alle Aussagen sind wahr, aber auch nicht alle falsch. Welche Zahl ist* X*?*

1. *X ist gleich der Summe der Aussagen-Nummern der Falsch-Aussagen in dieser Liste.*
2. *X ist kleiner als die Anzahl der Falsch-Aussagen in dieser Liste, und Aussage* 10 *ist wahr.*
3. *Entweder gibt es genau drei wahre Aussagen in dieser Liste oder Aussage* 1 *ist falsch (aber nicht beides).*
4. *Die vorigen drei Aussagen sind alle falsch, oder Aussage* 9 *ist wahr (oder halt beides).*
5. *Entweder ist X ungerade, oder Aussage* 7 *ist wahr (aber nicht beides).*
6. *Genau zwei der Aussagen mit ungerader Nummer sind falsch.*
7. *X ist die Nummer einer wahren Aussage.*
8. *Die Aussagen mit geraden Nummern sind entweder alle wahr oder alle falsch.*
9. *X ist das dreifache der Aussagen-Nummer der ersten wahren Aussage hier, oder Aussage* 4 *ist falsch (oder beides).*
10. *X ist gerade oder Aussage* 6 *ist wahr (oder beides).*

Lösung. Jeder der folgenden Absätze (A)-(F) beginnt mit einer Annahme. Aus dieser Annahme werden dann Schlussfolgerungen gezogen, bis ein Widerspruch eintritt. Der ERGO-Teil am Ende fasst dann das Ergebnis des Absatzes zusammen. Jeder Absatz verwendet die Ergebnisse der vorhergehenden Absätze.

(A)

Angenommen, 4. ist falsch. Dann muss auch 9. falsch sein (zweiter Teil des ODERs in 4.). Aber 9. ist wahr (zweiter Teil des ODERs in 9.: Aussage 4. ist falsch). Widerspruch.

ERGO: 4. ist wahr.

(B)

Angenommen, 1. ist wahr. Dann ist der erste Teil des ODERs in 4. falsch. Der zweite Teil des ODERs in 4. muss wahr sein (A). Daher 9. wahr. Aus 9. wahr (und zweiter ODER-Teil in 9. falsch) folgt, dass $X = 3$. 1. besagt, dass $X =$ Summe der falschen Aussagenummern. Daher ist 3. falsch, und alle anderen Aussagen sind wahr. Daher ist 7. wahr, und die Aussage 3. ($3 = X$) ist wahr. Widerspruch.

ERGO: 1. ist falsch.

(C)

Angenommen, 2. ist wahr. Dann ist der erste Teil des ODERs in 4. falsch. Der zweite Teil des ODERs in 4. muss wahr sein (A). Daher 9. wahr. Aus 9. wahr (und zweiter ODER-Teil in 9. falsch) folgt, dass $X = 6$. Damit ist auch 10. wahr. Aus 2. folgt, dass mindestens sieben Aussagen falsch sind. Aber 2., 4., 9., 10. sind bereits wahr. Widerspruch.

ERGO: 2. ist falsch.

(D)

Angenommen, 8. ist wahr. Dann müssen 2., 4., 6., 8., 10. alle wahr sein. Aber 2. ist falsch (C). Widerspruch.

ERGO: 8 ist falsch.

(E)

Angenommen, X ist gerade. Dann ist Aussage 10. wahr: X ist gerade. Dann ist Aussage 9. falsch: Der einzige gerade und durch drei teilbare Kandidat fr X ist die Zahl 6; weil 9. falsch ist, ist die Summe der Nummern der Falsch-Aussagen größer-gleich 9, also gilt $6 = X$ ist kleiner als die Summe der Nummern der Falsch-Aussagen und 10. ist wahr, also gilt 2., wegen (C) ist 2. aber falsch. Also ist 9. falsch. Dann ist der zweite Teil des ODERs in 4. falsch. Der erste Teil des ODERs in 4. muss wahr sein (A). Damit ist 3. falsch. Außerdem ist 6. falsch, da 1., 3., 9. bereits falsch sind. Da X gerade ist, haben 5. und 7. denselben Wahrheitswert. Falls 5. und 7. beide wahr sind, sind vier Aussagen wahr (4., 5., 7., 10.). Dann ist Aussage 3. wahr, ein Widerspruch. Also sind 5. und 7. falsch. Dann sind aber acht Aussagen falsch (1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 9.), und höchstens zwei der Aussagen sind wahr. Dann ist wieder Aussage 3. wahr. Widerspruch.

ERGO: X ist ungerade.

(F)

Angenommen, 9. ist falsch. Dann ist der zweite Teil des ODERs in 4. falsch. Der erste Teil des ODERs in 4. muss wahr sein (A). Damit ist 3. falsch. Außerdem ist 6. falsch, da 1., 3., 9. bereits falsch sind. Dann ist 10. falsch: X ist ungerade (E) und 6. ist falsch. Damit sind 1., 2., 3., 6., 8., 9., 10. falsch. Da 3. falsch ist, sind die restlichen drei Aussagen 4., 5., 7. wahr. Aber 5. ist dann falsch: X ist ungerade und 7. ist wahr. Widerspruch.

ERGO: 9. ist wahr.

Nun sind 4. und 9. wahr, und 1., 2., 8. falsch, und X ist ungerade. Da 9. wahr ist, muss 3. wahr sein und $X = 9$ gelten. Damit ist 7. wahr. Damit ist 5. falsch. Damit ist 6. wahr, da 1., 5. falsch und 3., 7., 9. wahr. Damit ist 10. wahr.

LÖSUNG:

$(1f, 2f, 3w, 4w, 5f, 6w, 7w, 8f, 9w, 10w)$ und $X = 9$. Eine Probe ergibt, dass das auch eine widerspruchsfreie Lösung ist. □

Das Wiegen der 12 Elefanten

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man hat* 12 *Elefanten. Genau ein Elefant ist entweder leichter oder schwerer als die übrigen Elefanten. Zum Wiegen steht eine Waage mit zwei Waagschalen zur Verfügung. Kann man mit dreimaligem Wiegen herausfinden, welcher Elefant ein anderes Gewicht hat als die anderen elf Elefanten, und kann man bestimmen, ob dieser Elefant leichter oder schwerer ist als die anderen?*

Lösung. Man zerlegt die 12 Elefanten in Vierergruppen. Dann wiegt man nun im ersten Wiegevorgang 4 gegen andere 4 Elefanten. Ist die Waage im Gleichgewicht, dann befindet sich der gesuchte Elefant in der Vierergruppe, die nicht gewogen wurde. Dann wiegt man 3 normale Elefanten gegen 3 aus der nicht gewogenen Vierergruppe. Hat man dabei Gleichgewicht, dann weiß man, dass der vierte Elefant aus der nicht gewogenen Vierergruppe, der Elefant ist, den man sucht. Wiegt man gegen einen normalen Elefanten, dann kann herausfinden, ob der Elefant leichter oder schwerer ist. Hat man im zweiten Wiegevorgang kein Gleichgewicht, dann kommen nur noch drei Elefanten in Frage, und man weiß auch, ob der gesuchte Elefant leichter oder schwerer ist. Jetzt nimmt man aus den 3 in Frage kommenden Elefanten 2 heraus und wiegt sie gegeneinander. Ist die Waage im Gleichgewicht, dann ist der gesuchte Elefant, von dem man weiß, dass er leichter oder schwerer ist, derjenige, der aus den 3 in Frage kommenden nicht gewogen wurde. Ist die Waage im zweiten Wiegevorgang nicht im Gleichgewicht, dann ist klar, welcher Elefant der Gesuchte ist, weil man ja weiß, ob der Elefant leichter oder schwerer ist. Hat man jedoch im ersten Wiegevorgang kein Gleichgewicht, dann weiß man nur, dass sich der gesuchte Elefant unter den 8 gewogenen Elefanten befindet. Auch weiß man, dass die 4 nicht gewogenen Elefanten normal sind. Als nächstes tauscht man auf der schwereren Seite, beim Wiegen 4 gegen 4, 3 Elefanten gegen 3 normale Elefanten aus. Die 3 Elefanten, die man aus der schwereren Schale entnommen hat, tauscht man gegen 3 Elefanten in der leichteren Waagschale aus und tut die entnommenen Elefanten beiseite. Hat man jetzt im zweiten Wiegevorgang Gleichgewicht, dann befindet sich der gesuchte Elefant unter den 3 beiseite gelegten Elefanten. Und man weiß, dass der Elefant leichter ist, weil die beiseite gelegten Elefanten von der leichteren Waagschale kommen. Jetzt wiegt man zwei der drei beiseite gelegten Elefanten: Ist Gleichgewicht, dann ist der dritte, nicht gewogene Elefant der Gesuchte, der leichter ist als die anderen. Hat man allerdings kein Gleichgewicht, dann ist der leichtere Elefant der Gesuchte. Hat man im zweiten Wiegevorgang kein Gleichgewicht, dann gibt es zwei Fälle: Die Waage zeigt auf der anderen Seite nach unten oder die Waage zeigt auf derselben Seite nach unten. Im ersten Fall weiß man, dass der Elefant, der auf der leichteren Seite nicht ausgetauscht wurde, nicht der gesuchte Elefant ist, sonst würde die Waage nicht anders ausschlagen. Auf der anderen Waagschale sind 3 normale Elefanten und ein Elefant, der nicht ausgetauscht wurde. Dieser nicht ausgetauschte Elefant kann nicht der Gesuchte sein, genauso wenig, wie die 3 normalen, da die Waage sonst nicht anders ausschlagen würde. Also ist der gesuchte Elefant unter den dreien, die in die leichtere Seite der Waage getauscht wurden. Man weiß dann auch, dass der Elefant schwerer ist als die anderen. Man wiegt wieder 2 der 3 Elefanten: Gleichgewicht: Also ist der nicht gewogene Elefant der Gesuchte. Nicht Gleichgewicht: Dann ist der schwerere Elefant der Gesuchte. Im anderen Fall, dass die Waage im zweiten Wiegevorgang auf der gleichen Seite nach unten neigt, weiß man, dass der gesuchte Elefant unter den Elefanten ist, die auf den beiden Schalen nicht ausgetauscht wurden, denn auf der schwereren Seite sind drei normale Elefanten und ein Elefant, der nicht ausgetauscht wurde. Auf der anderen Schale ist ein Elefant, der nicht ausgetauscht wurde, und drei Elefanten, die von der anderen Schale stammen. Unter den 3 normalen Elefanten ist der gesuchte Elefant klarerweise nicht zu finden. Und unter den drei Elefanten, die in die leichtere Seite der Waage getauscht wurden, kann der Gesuchte ebenfalls nicht sein, denn sonst wären die drei in die leichtere Schale getauschten Elefanten nicht einmal auf der schwereren und einmal auf der leichteren Schale zu finden. Weil die Waage wieterhin auf derselben Seite nach unten zeigt, muss also der auf der leichteren Seite ausgetauschte Elefant leichter sein als der auf der anderen Seite nicht ausgetauschte Elefant. Man wiegt nun den schwereren der beiden Elefanten, unter denen sich der Gesuchte befindet, mit einem normalen Elefanten. Hat man Gleichgewicht, dann ist der nicht gewogene Elefant der Gesuchte und ist leichter als die anderen. Schlägt die Waage jedoch aus, dann ist der schwerere Elefant der Gesuchte. Ende. □

Die Bombe

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Das Komitee zur Ausrottung von Unlogik hat eine Bombe gelegt. Die Bombe hat* 7 *Kippschalter, und es ist ein Zettel angeheftet: Die Bombe wird genau um* 12 *Uhr explodieren, wenn die Kippschalter nicht vorher in die richtige Stellung gebracht werden.*

1. *Wenn Schalter* 3 *oben sowie* 2 *und* 4 *unten stehen, knallt's*
2. *Wenn* 1 *und* 4 *unten sowie* 7 *oben stehen, knallt's*
3. *Wenn* 1, 3 *und* 4 *unten stehen, knallt's*
4. *Wenn* 6 *unten sowie* 2 *und* 3 *oben stehen, knallt's*
5. *Wenn* 4 *und* 3 *oben stehen, knallt's*
6. *Wenn* 6 *oben steht und wenn, sofern* 7 *oben steht, auch* 1 *oben steht, knallt's*
7. *Wenn* 1 *und* 5 *oben sowie* 7 *unten stehen, knallt's*
8. *Wenn* 3 *unten sowie* 4 *und* 5 *oben stehen, knallt's*
9. *Wenn* 1 *und* 7 *oben stehen, knallt's*
10. *Wenn* 5 *unten und wenn, sofern* 2 *und* 6 *oben stehen, auch* 3 *oben stehen, knallt's*
11. *Wenn* 7 *unten sowie* 3 *oder* 4 *oben stehen, knallt's*
12. *Wenn Schalter* 6 *und* 7 *unterschiedliche Stellungen haben, knallt's*
13. *Wenn Schalter* 2, 3 *und* 5 *unten stehen, knallt's*
14. *Sind die Schalter* 1 *und* 2 *oben und die Schalter* 5 *und* 7 *unten, knallt's*
15. *Wenn* 6 *und* 7 *beide unten sind, knallt's.*

Sie müssen die Bombe entschärfen und die Schalter in die richtige Stellung bringen. Es ist 5 *vor* 12*!*

Lösung. Aus (12.) und (15.) folgt, dass 6 und 7 oben sind, also $(1?, 2?, 3?, 4?, 5?, 6o, 7o)$. Also kann man (4.) streichen, weil 6 oben ist. Aus (6.) folgt, dass 1 unten sein muss, weil 6 und 7 oben sind, also $(1u, 2?, 3?, 4?, 5?, 6o, 7o)$. Also kann man (7.), (9.) und (14.) streichen, weil 1 unten ist. Weil 7 oben ist, kann man auch (11.) streichen. Aus (2.) folgt, dass 4 oben sein muss, weil 1 unten und 7 oben ist. Aus (5.) folgt, dass 3 unten sein muss, weil 4 oben ist. Dann kann man (3.) streichen, weil 4 oben ist. Und man kann (1.) streichen, weil 3 unten ist. Aus (8.) folgt, dass 5 unten sein muss, da 3 unten und 4 oben ist, also: $(1u, 2?, 3u, 4o, 5u, 6o, 7o)$. Aus (13.) folgt, dass 2 oben sein muss, da 3 und 5 unten sind, und (10.) kann man streichen, weil 3 unten ist. Die Lösung lautet also:

$$(1u, 2o, 3u, 4o, 5u, 6o, 7o)$$

Das war es dann auch schon! □

Die Cowboys und der Indianer

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Drei Cowboys werden von Indianern gefangen genommen. Der Häuptling gibt den Cowboys eine letzte Chance: Er bindet die drei hintereinander an drei Marterphäle und zwar so, dass der Hintere die beiden vor sich sieht, der Mittlere nur noch einen und der Vordere keinen sieht. Nun fängt er von hinten an, den Cowboys aus einem Korb jeweils eine Feder an den Hut zu stecken. Er verrät den Cowboys, dass der Korb drei weiße und zwei schwarze Federn enthält. Nun stellt er die drei armen Seelen vor folgendes Ultimatum: „Wenn mir einer von euch sagen kann, welche Farbe die Feder an seinem eigenen Hut hat, kommt ihr alle drei frei. Ansonsten seid ihr des Todes. Natürlich dürft ihr nicht miteinander sprechen. “ Überleben die drei oder sterben sie?*

Lösung. Es gibt für die Verteilung der drei weißen und der zwei schwarzen Federn auf drei Cowboys folgende mögliche Kombinationen, so dass man für jeden Fall einen Cowboy finden muss, der die Farbe der Feder an seinem eigenen Hut kennt:

Fälle	Vorderer Cowboy	Mittlerer Cowboy	Hinterer Cowboy
1	schwarz	schwarz	weiß
2	schwarz	weiß	schwarz
3	schwarz	weiß	weiß
4	weiß	schwarz	schwarz
5	weiß	weiß	schwarz
6	weiß	schwarz	weiß
7	weiß	weiß	weiß

Zunächst zu Fall 1: Dieser Fall ist der einfachste. Der hintere Cowboy sieht zwei schwarze Federn vor sich. Da er weiß, dass der Indianer nur zwei schwarze Federn in seinem Korb hat, muss er folglich eine weiße Feder an seinem Hut haben. Er nennt die Antwort und alle kommen frei. Bei allen anderen Kombinationen kann der hintere Cowboy die Lösung nicht wissen und schweigt. Schweigt er, dann wissen die vorderen Cowboys, dass sie nicht beide eine schwarze Feder tragen. Fall 2 und 3: Wenn der hintere Cowboy sich nicht gemeldet hat, dann weiß man, dass die beiden vorderen Cowboys nicht beide eine schwarze Feder tragen. Sieht der mittlere Cowboy beim vorderen Cowboy eine schwarze Feder, dann weiß der mittlere Cowboy, dass er eine weiße Feder tragen muss, und ist also derjenige, der sich meldet. Fall 4 bis 7. In diesen Fällen hat also der vordere Cowboy immer eine weiße Feder am Hut. Weil der hintere Cowboy sich nicht gemeldet hat, weiß man, dass die beiden vorderen Cowboys nicht beide die schwarze Feder tragen. Weil sich der mittlere Cowboy ebenfalls nicht melden kann, bedeutet, dass das der vordere Cowboy weiß, dass er eine weiße Feder tragen muss, sonst hätte sich der mittlere Cowboy gemeldet. Immer kann sich also ein Cowboy melden und die Farbe seiner Feder nennen, also kommen die Cowboys frei. □

Die betrogenen Ehefrauen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *In einer kleinen Stadt leben Frauen friedlich mit ihren Männern zusammen. Die Frauen tratschen den ganzen Tag: Jede Frau weiß alles über die anderen Frauen, kann aber die anderen Frauen nicht fragen, was diese über sie selbst wissen. Umgekehrt ist keine Frau so direkt, dass sie einer anderen Frau ins Gesicht sagen würde, was sie über sie weiß. Eines Abdends nun kommt ein Hellseher in die Stadt und spricht zu den Frauen: „In dieser Stadt gibt es Männer, die ihre Frauen heimlich betrügen.“ Wenn eine Frau weiß, dass ihr Mann sie betrügt, dann wirft sie ihren Mann am nächsten Morgen raus. Immer um* $8:00$ *Uhr, ohne Ausnahme. Frage: Wie viele Männer können nach* 16 *Tagen maximal von ihren Frauen rausgeworfen worden sein?*

Lösung. Eine Ehefrau kennt jede andere Ehefrau, die betrogen wird. Kennt sie keine, wird genau eine betrogen: sie selbst. Kennt sie dagegen genau eine andere Ehefrau, geht sie davon aus, dass diese ihren Mann am ersten Tag hinauswirft. Wenn diese Frau das jedoch nicht tut, dann bedeutet das, dass auch diese wiederum eine Ehefrau kennt, die betrogen wird. Nachdem es am ersten Tag keinen Rausschmiss gab, werfen in diesem Fall am zweiten Tag die beiden Frauen, die nur von einer betrogenen Ehefrau wussten, ihre Männer raus. Kennt eine Frau jedoch zwei Ehefrauen, die betrogen wurden, dann geht sie davon aus, dass diese beiden Frauen am zweiten Tag ihre Männer rauswerfen. Tun die das nicht, dann weiß die Frau, die von zwei betrogenen Ehefrauen wusste, dass auch sie selbst betrogen wurde. Also haben die anderen Frauen ebenfalls von zwei betrogenen Ehefrauen gewusst, und weil am zweiten Tag kein Mann rausgeworfen wurde, wissen alle Frauen, die von zwei betrogenen Ehefrauen wussten, dass sie selbst auch betrogen wurden. Die anderen Frauen wussten immer von drei betrogenen Frauen. Führt man dieses Gedankenexperiment weiter, kommt man zu dem Ergebnis, dass nach 16 Tagen höchstens 16 Ehemänner von ihren Frauen rausgeworfen werden. Das ist der Fall, wenn es genau 16 betrogene Ehefrauen gibt. Werden mehr Frauen betrogen, fliegt nach 16 Tagen noch keiner der Ehemänner raus. Das Rätsel ist also gelöst! □

Der Ruderer und der Hund

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Ruderer entschloss sich eines Tages in dem kreisrunden See fernab seiner Heimat rudern zu gehen. Kaum war er im Wasser, tauchte plötzlich ein Hund auf, der den Ruderer beißen will. Der Ruderer ruderte schnell in die Mitte des Sees, um sich einen Fluchtplan zu überlegen. Dabei stellte er drei Dinge fest:* 1*: „Der Hund kann viermal so schnell laufen, wie ich rudern kann.“* 2*: „Der Hund versucht immer, möglichst dicht an mir dran zu bleiben.“* 3*: „An Land bin ich schneller als der Hund.“ Es soll erklärt werden, wie der Ruderer unter diesen Bedingungen dem Hund entkommen konnte.*

Lösung. Die Winkelgeschwindigkeit des Ruderers muss größer sein als die des Hundes, also: $\omega_R > \omega_H$. Bis zu welchem Radius das möglich ist, lässt sich so herausfinden: $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{v}{r}$. Es muss also gelten: $2\pi \cdot \frac{v_R}{r_R} = \omega_R > \omega_H = 2\pi \cdot \frac{v_H}{r_H} = 2\pi \cdot \frac{4 \cdot v_R}{r_H}$, also: $\frac{v_R}{r_R} > \frac{4 \cdot v_R}{r_H} \Leftrightarrow r_H > 4 \cdot r_R \Leftrightarrow r_R < \frac{1}{4} \cdot r_H$. Es gilt $r_H = r$, also $r_R < \frac{1}{4} \cdot r$. Wenn der Ruderer sich also weniger als ein Viertel des Seeradiuses von der Mitte entfernt, kann er den Abstand zwischen Hund und sich vergrößern. Der Ruderer kann also dafür sorgen, dass der Hund größtmöglichen Abstand hat: Der Ruderer befindet sich mit Blick nach außen auf dem Kreis um das Zentrum mit Radius $\frac{1}{4} \cdot r$ und der Hund befindet sich genau hinter ihm auf dem Kreis mit Radius r. Der Ruderer muss also noch die Strecke $r - \frac{1}{4} \cdot r = \frac{3}{4} \cdot r$ zurücklegen und das mit der Geschwindigkeit v_R. Die Zeit dafür ist also: $t_R = \frac{\frac{3}{4} \cdot r}{v_R}$. Der Hund muss die Länge des Halbkreises mit Radius r zurücklegen: $t_H = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2\pi r}{v_H} = \frac{\pi r}{4 \cdot v_R}$, also gilt dann: $t_R < t_H \Leftrightarrow \frac{3 \cdot r}{4 \cdot v_R} < \frac{\pi r}{4 \cdot v_R} \Leftrightarrow 3 < \pi$. Der Ruderer kommt also auf diese Weise dem Hund davon, und an Land ist der Ruderer schneller als der Hund; er kann also erst recht auch an Land sicher fliehen. □

Der Schlosser vor den 1000 Zellen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *An seinem* 75*. Geburtstag entschied ein König, dass er einige seiner Gefangenen begnadigen wollte. Er hatte einen Kerker mit* 1000 *Zellen. In jeder Zelle saß genau ein Gefangener. Er gab seinem Diener die Anweisung,* 1000*-mal durch den Kerker zu gehen. Beim ersten Durchgang sollte er den Schlüssel in jedem Schloss umdrehen, beim zweiten Durchgang in jedem zweiten Schloss, ... , beim n. Durchgang in jedem n. Schloss. Die Schlösser schließen immer abwechselnd auf und zu. Am Anfang waren alle Schlösser geschlossen. Nach dem* 1000*. Durchgang sollten sich die Wachen aus dem Kerker begeben, damit alle Gefangenen, deren Tür dann offen war, fliehen konnten. Es soll nun bestimmt werden, wie viele Gefangene auf diese Weise die Freiheit zurück erlangen konnten!*

Lösung. Ein Schloss wird beim n. Durchgang auf- bzw. zugeschlossen, wenn n Teiler der jeweiligen Zellennummer ist. Da am Anfang alle Zellen verschlossen sind, sind am Ende alle Zellen offen, deren Nummer eine ungerade Anzahl von Teilern hat. Das ist genau bei den Quadratzahlen der Fall! Beweis: Zunächst mal ist $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ eine Quadratzahl und hat eine ungerade Anzahl von Teilern, nämlich 1. Sei n eine Quadratzahl ungleich 1, dann gibt es genau eine Zahl m so, dass gilt $n = m^2$. Sei dann $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von m. Also gilt: $n = m^2 = (p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l})^2 = p_1^{2 \cdot \alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{2 \cdot \alpha_l}$. Daraus folgt, dass die Anzahl der Teiler von n gegeben ist durch $(2 \cdot \alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot \alpha_l + 1)$, was eben eine ungerade Zahl ist. Sei umgekehrt die Anzahl der Teiler von n ungerade. Die Primfaktorzerlegung von n sei $n = P_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot P_k^{\beta_k}$. Wäre ein β_i nicht gerade, also ungerade, also $\beta_i + 1$ gerade, dann wäre die Anzahl der Teiler von n gleich $(\beta_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\beta_i + 1) \cdot \ldots \cdot (\beta_k + 1)$, was wegen $\beta_i + 1$ gerade eine gerade Zahl ist, Widerspruch, denn die Anzahl der Teiler von n ist ja nach Voraussetzung ungerade. Also sind alle β_i gerade, d.h. man kann aus jedem Exponenten der Primfaktorzerlegung von n den Faktor 2 rausziehen, was wiederum bedeutet, dass n eine Quadratzahl ist (Beweis-Ende). Bis 1000 gibt es 31 Quadratzahlen ($31^2 = 961 < 1000$ und $32^2 = 1024 > 1000$). Folglich sind am Ende 31 Türen offen, so dass 31 Gefangene fliehen konnten. □

Das Händeschütteln unter Ehepaaren

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Peter und seine Frau laden drei befreundete Ehepaare zu einem gemütlichen Abendessen ein. Die Leute geben sich teilweise zur Begrüßung die Hand. Später am Abend fragt Peter aus Neugier jede Person, wie viele Male sie die Hand zur Begrüßung gegeben habe und bekommt interessanterweise von allen eine andere Antwort. Wie vielen Gästen gab Peters*

Ehefrau die Hand zu Begrüßung, wenn man weiß, dass keiner an diesem Abend seinem Ehepartner, sich selbst oder mehrmals der gleichen Person die Hand gab?

Lösung. Peter fragt also 7 Personen nach der Anzahl der Leute, denen man die Hände geschüttelt hat. Jeder hat also mindestens 0 Leuten die Hand geschüttelt. Weil man sich selbst und dem Ehepartner nicht die Hand schüttelt, folgt, dass man höchstens 6 Leuten die Hand geschüttelt hat. Weil man von allen eine andere Antwort bekommt, sind die Ausprägungen 0 bis 6 auf genau 7 Leute zu verteilen. Die Person, die die Antwort 6 gegeben hat, schüttelt also allen anderen, außer dem Ehepartner, die Hände. Weil die anderen also mindestens einmal die Hände geschüttelt bekamen, muss der Ehepartner von dem, der 6 gesagt hat, 0 Leuten die Hände geschüttelt haben. Die Person, die die Antwort 5 gegeben hat, schüttelt also allen, außer seinem Partner und dem, der 0 gesagt hat, die Hände. Diese Leute bekamen also alle mindestens zweimal die Hände geschüttelt. Folglich muss die Person, die 1 geantwortet hat, der Ehepartner von dem sein, der 5 geantwortet hat. Entsprechend ist die Person, die viermal die Hände schüttelt, der Ehepartner von dem, der mit 2 geantwortet hat. Jetzt bleibt nur noch die Person übrig, die dreimal die Hände geschüttelt hat. Da die anderen sechs Personen nach den Überlegungen von oben jeweils Ehepartner sind, muss die Person, die dreimal die Hände geschüttelt hat, Peters Ehefrau sein. □

Die ausfallenden Pferdewagen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Zu einem Fest auf dem Land fahren mehrere Pferdewagen mit der jeweils gleichen Anzahl an Personen. Auf halbem Weg fallen zehn Wagen aus, sodass jeder der übrigen Wagen eine weitere Person aufnehmen muss. Vor Antritt des Rückweges fallen weitere* 15 *Wagen aus, was zur Folge hat, dass in jedem Wagen drei Personen mehr sind als bei der Abfahrt am Morgen. Wie viele Personen nahmen an dem Fest teil?*

Lösung. Sei y die Gesamtanzahl der Personen und x die ursprüngliche Anzahl der Wagen. Nach dem Ausfall der 10 Wagen hat man also nur noch $x-10$ Wagen. $\frac{y}{x}$ ist die Anzahl an Personen pro Wagen. Wegen des Ausfalls kommen in die restlichen $x-10$ Wagen jeweils eine Person dazu. Es muss also gelten $(x-10)\cdot\left(\frac{y}{x}+1\right)=y$, denn die Gesamtanzahl an Personen bleibt ja gleich. Nach dem Ausfall der weiteren 15 Wagen hat man nur noch $x-10-15=x-25$ Wagen und es kommen pro dieser Wagen 3 Personen, im Vergleich zu der Anzahl pro Wagen vor der Fahrt, dazu: $(x-25)\cdot\left(\frac{y}{x}+3\right)=y$. Also gilt $\frac{y}{x}+1=\frac{y}{x-10}$ und $\frac{y}{x}+3=\frac{y}{x-25}$. Von der zweiten Gleichung wird nun die erste abgezogen, man erhält also: $2=\frac{y}{x-25}-\frac{y}{x-10}\Leftrightarrow y=\frac{2}{\frac{1}{x-25}-\frac{1}{x-10}}=\frac{2}{15}\cdot(x-25)\cdot(x-10)$. Einsetzen: $(x-10)\cdot\left(\frac{y}{x}+1\right)=y\Leftrightarrow(x-10)\cdot\left(\frac{\frac{2}{15}\cdot(x-25)\cdot(x-10)}{x}+1\right)=\frac{2}{15}\cdot(x-25)\cdot(x-10)\Leftrightarrow\left(\frac{\frac{2}{15}\cdot(x-25)\cdot(x-10)}{x}+1\right)=\frac{2}{15}\cdot(x-25)\Leftrightarrow\frac{2}{15}\cdot(x-25)\cdot(x-10)+x=\frac{2}{15}\cdot(x-25)\cdot x\Leftrightarrow x=100$, also gilt $y=\frac{2}{15}\cdot(x-25)\cdot(x-10)=\frac{2}{15}\cdot(100-25)\cdot(100-10)=900$. Es haben also 900 Personen am Fest teilgenommen. □

Das Kugelziehen um Leben und Tod

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man hat zwei Schachteln vor sich. Eine Schachtel enthält* 50 *rote Kugeln, die andere* 50 *grüne Kugeln. Man darf mit verbundenen Augen aus einer Schachtel, die zufällig ausgewählt wird, eine Kugel ziehen. Wenn man eine rote Kugel zieht, darf man weiterleben. Wenn man eine grüne Kugel zieht, dann muss man sterben. Bevor das Spiel losgeht, darf man die Kugeln beliebig auf die Schachteln verteilen. Die einzige Bedingung ist, dass alle Kugeln im Spiel sein müssen. Wie muss man die Kugeln verteilen, um seine Gewinnchance zu maximieren?*

Lösung. Intuitiv ist klar, dass die Gewinnchance mindestens 50 Prozent beträgt. Nämlich dann, wenn man gar nichts unternimmt und sich eine - zufällig ausgewählte - Schachtel geben lässt. Wenn man die Schachtel mit den roten Kugeln wählt, dann hat man gewonnen. Hat man dagegen die Schachtel mit den grünen Kugeln gewählt, dann muss man sterben. Was kann man machen? Erstmal ist klar, dass in den beiden Schachteln nicht gleich viele Kugeln sein müssen. Eine 50-prozentige Wahrscheinlichkeit hat man also auch, wenn man in der Schachtel mit den roten Kugeln nur eine einzige rote Kugel hat. Wählt man also die Schachtel mit der einen roten Kugel, dann hat man gewonnen. Die restlichen roten 49 Kugeln kommen dann in die andere Schachtel, in der sich 50 grüne Kugeln befinden. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist dann also $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{49}{50+49}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{49}{99}=0,\overline{74}$. Man kann beweisen, dass das auch die höchste Wahrscheinlichkeit ist, die man haben kann, indem man alle möglichen Verteilungen durchprobiert. □

Der Forscher und die Inselbewohner

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Auf einer kleinen Insel leben genau* 100 *Personen, von denen ein Teil immer die Wahrheit sagt und der andere Teil immer lügt. Ein Forscher kommt auf die Insel und fragt jeden Einwohner nach der Anzahl der Lügner.*
a) Der erste sagt: „Es gibt genau einen Lügner auf der Insel.“, der zweite sagt: „Es gibt genau zwei Lügner.“, usw., bis zum letzten, der erklärt: „Es gibt genau 100 *Lügner.“.*
b) Der erste sagt: „Es gibt mindestens einen Lügner auf der Insel.“, der zweite sagt: „Es gibt mindestens zwei Lügner.“, usw., bis zum letzten, der erklärt: „Es gibt mindestens 100 *Lügner.“.*
Wie viele Lügner leben auf der Insel?

Lösung. a) Da sich die 100 Aussagen widersprechen, kann höchstens einer die Wahrheit sagen. Sei A_i die Aussage von Person i. A_{100} kann nicht wahr sein, weil sonst alle lügen, anders als A_{100}. A_i $(1 \leq i \leq 98)$ kann nicht gelten, weil sonst $100 - i \geq 2$ die Wahrheit sagen würden. Also bleibt nur A_{99} übrig. Das ist auch die Lösung: Wenn A_{99} gilt, also genau 99 Personen lügen, sagt genau einer die Wahrheit, nämlich Person 99. Es gibt dann also genau 99 Lügner auf der Insel.
b) Sei B_i die Aussage von Person i. Gilt B_i $(51 \leq i \leq 100)$, dann gelten anhand der Aussagen auch $B_1, \ldots, B_i$, also gibt es höchstens $100 - i$ Falschaussager. Wegen $1 \leq 100 - i + 1 \leq 50$ gilt $B_{100-i+1} \in \{B_1, \ldots, B_i\}$, also müsste $B_{100-i+1}$ wahr sein, was ein Widerspruch ist, denn $B_{100-i+1}$ sagt, dass es mindestens $100 - i + 1$ Lügner gibt, was ein Widerspruch dazu ist, dass es höchstens $100 - i$ Falschaussager gibt. Also gilt B_i $(51 \leq i \leq 100)$ ist falsch, also sind B_i $(1 \leq i \leq 50)$ wahr. Also lügen 50 Inselbewohner und 50 sagen die Wahrheit. Nochmal: Es gibt dann also genau 50 Lügner auf der Insel. □

Die zwei Lügner

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Fünf Personen A, B, C, D und E unterhalten sich:*

A**:** *„B lügt genau dann, wenn D die Wahrheit sagt.“*

B**:** *„Wenn C die Wahrheit sagt, dann ist entweder A oder D ein Lügner.“*

C**:** *„E lügt, und auch A oder B lügen.“*

D**:** *„Wenn B die Wahrheit sagt, dann auch A oder C.“*

E**:** *„Unter den Personen A, C und D befindet sich mindestens ein Lügner.“*

Genau zwei Personen lügen. Welche?

Lösung. Angenommen, A ist falsch, dann gilt $B \wedge D$ oder $\neg B \wedge \neg D$. Aus $\neg B \wedge \neg D$ folgt $A \wedge C \wedge E$, weil genau zwei Aussagen falsch sind. Also gilt A, Widerspruch. Auch aus $B \wedge D$ folgt der Widerspruch A: Aus $B \wedge D$ folgt aus Aussage D: $A \vee C$. Weil $\neg A$ vorausgesetzt ist, folgt also C und daraus $\neg E$, nach Aussage C, also $A \wedge C \wedge D$ $(\neg E)$, also gilt A, Widerspruch. Also gilt A. Angenommen, B gilt, dann folgt aus der richtigen Aussage A nun $\neg D \Leftrightarrow \neg(B \Rightarrow A \vee C)$, und da B gilt, folgt also $\neg(A \vee C)$, also $\neg A$, Widerspruch, denn A gilt. Also gilt $\neg B$. Aus der richtigen Aussage A folgt aus $\neg B$ dann die Richtigkeit von D. Also gilt D. Es gilt $\neg B$ und daraus folgt die Richtigkeit von C, denn wäre C falsch, dann wäre die Aussage B richtig, Widerspruch. Also gilt C. Weil also $A \wedge C \wedge D$ gilt, folgt, dass Aussage E falsch ist. Also gilt $\neg E$. Die Lösung dieser Aufgabe ist also: B und E lügen und A, C, D sagen die Wahrheit. Eine Probe zeigt, dass das eine widerspruchsfreie Lösung ist. □

Das Stöckchenziehen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Mal angenommen, auf einem Tisch liegen x Stöckchen. Zwei Leute nehmen abwechselnd* 1 *bis* 3 *Stöckchen vom Tisch. Derjenige, der die letzten oder das letzte Stöckchen vom Tisch nimmt oder nehmen muss, verliert das Spiel. Gibt es eine Strategie, mit der man das Spiel ganz sicher gewinnt?*

Lösung. Zunächst mal ist klar, dass, wenn der Gegner 5 Stöckchen übergeben bekommt, man die Partie gewinnt, denn zieht er 1 Stöckchen, dann zieht man 3; zieht er 2 Stöckchen, dann muss man 2 ziehen; zieht er allerdings 3, dann zieht man 1 Stöckchen. In jedem Fall bleibt dem Gegner nur 1 Stöckchen, den der ziehen muss, und man hat also gewonnen. Ist x von der Form $x = n \cdot 4 + 5$, dann lässt man den Gegner anfangen, ansonsten fängt man selber an. Man kann dann dafür sorgen, dass der Gegner am Ende schließlich 5 Stöckchen serviert bekommt, dass man damit also die Partie gewinnt. Man muss dafür nur dafür sorgen, dass dem Gegner immer eine Zahl der Form $n \cdot 4 + 5$ übergeben wird, was man dadurch erreicht, dass man soviele Stöckchen nimmt, dass man zusammen mit dem Gegner in der Summe genau 4 Stöckchen vom Tisch genommen hat. Es ist wichtig, dass man, wie oben gezeigt, so anfängt, dass man immer in der Lage ist durch Reagieren dafür zu sorgen, dass der Gegner $n \cdot 4 + 5$ Stöckchen bekommt, sonst kann der Gegner diese Strategie auch selber nutzen. □

Der Trick mit der Addition

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *In einem Spiel mit zwei Personen legt man abwechselnd eine Zahl von* 1 *bis* 10 *auf den Tisch, wobei dabei die Zahl auf den Tisch zur bisherigen Summe der Zahlen addiert wird. Wer als erstes mit der Dazuaddierung seiner Zahl über* 100 *ist, gewinnt. Wie kann man das Spiel ganz sicher gewinnen?*

Lösung. Eines ist sicher: Wenn man den Gegner die Summe 89 übergibt, dann hat man das Spiel ganz sicher gewonnen. Denn legt der Gegner eine Zahl von 1 bis 10 dazu, kann er nicht gewinnen und man kann zuletzt eine Zahl dazuaddieren, dass man über 100 kommt. Man muss dabei eine Zahl auf den Tisch legen, die in der Summe mit der gegnerischen Zahl mindestens die Summe 11 hat, was man immer machen kann. Wenn man also den Gegner die Summe 78 übergibt, dann kann man ihn die Summe 89 übergeben, denn $89 - 78 = 11$. Man sollte also den Gegner die Summe 12 übergeben und man kann dann ganz sicher dafür sorgen, dass der Gegner nahe des Endes die Summe 89 übergeben bekommt. Wichtig ist, dass man selber das Spiel beginnt, indem man als erstes die Zahl 1 auf den Tisch legt. Egal welche Zahl von 1 bis 10 der Gegner dazuaddiert, man kann ihn immer die Summe 12 übergeben und ihm damit nacheinander die Summen 23, 34, 45 usw. bis 89 übergeben, man gewinnt also das Spiel. □

Die Mahlzeit

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Sechs Freunde haben eine Abmachung getroffen. Immer, wenn einige von ihnen gemeinsam essen gehen, wird für alle das gleiche Gericht bestellt. Da ihre Lieblingsgerichte sehr unterschiedlich sind, muss sich jeweils ein Freund nach dem anderen richten. Bernd zum Beispiel isst gerne Suppen, aber mit Klaus essen sie beide gemeinsam Braten. Emil und Detlef entscheiden sich immer für Fisch, wenn aber Andreas mitessen soll, bestellen die drei Salat. Klaus isst zusammen mit Detlef Spaghetti, obwohl er eigentlich lieber etwas anderes essen würde. Franz, der am liebsten Eierspeise isst, richtet sich immer nach Bernd. Was wird bestellt, wenn alle sechs Freunde zusammen essen gehen? Antwortmöglichkeiten: a) Hühnchen, b) Braten, c) Salat, d) Spaghetti, e) Fisch, f) keine Lösung ist möglich, g) Eierspeise, h) Suppe.*

Lösung. Die Lösung: *c*) Salat. Es gilt: Bernd - Suppe, Klaus - Braten, Andreas - Salat, Emil - Fisch, Detlef - Spagetthi, Franz - Eierspeise. Franz richtet sich nach Bernd, Bernd richtet sich nach Klaus, da dieser sich allerdings nach Detlef richtet, richten sich Bernd und Klaus ebenfalls nach Detlef, wenn sie zu viert wären. Da aber Detlef sich nach Emil richtet, würden sie also folglich zu 5. Fisch essen und da Detlef und Emil sich nach Andeas richten und dieser sich nach niemandem richtet, muss es also Salat geben. Damit ist das Rätsel gelöst. □

Der skrupellose Weinhändler

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Weinhändler hat* 1000 *Fässer Wein - doch leider bekommt er den Tipp, dass eines davon vergiftet wurde. Das unaufspürbare Gift tötet jeden, der vom vergifteten Wein trinkt, nach exakt* 30 *Tagen. In* 31 *Tagen möchte er seinen Wein verkaufen. Mithilfe von* 10 *Mitarbeitern, die er skrupellos auf den Spiel setzt, will er testen, welches Fass vergiftet wurde. Seine erste Idee ist es, jedem Gefangenen je ein Tropfen aus* 100 *Fässern zu geben und die* 100 *Fässer des Toten zu entsorgen - doch ein schlauer Berater des Weinhändlers hat eine Idee, wie das eine vergiftete Fass genau bestimmt werden kann. Wie soll das gehen, das vergiftete Fass eindeutig zu identifizieren?*

Lösung. Jedes der 1000 Fässer, durchnummeriert von 1 bis 1000, bekommt seine Binärzahl zugeordnet: Fass 1 den Code 0000000001, Fass 2 den Code 0000000010, Fass 3 den Code 0000000011, usw. und schliellich Fass 1000 den Code 1111101000. Jedem der 10 Gefangenen wird eine Position in der 10-stelligen Binärzahl zugeordnet. Dann werden die Fässer systematisch abgearbeitet: Ist z.B. Fass 1000 dran (1111101000), trinken alle Gefangenen, denen die 1er-Positionen zugeordnet sind: Also Gefangener 1, 2, 3, 4, 5 und 7. Nach 30 Tagen sind manche der 10 Gefangenen tot. Ihre jeweiligen Positionen in der Binärzahl verraten genau, welches Fass vergiftet wurde. □

Die Züge im Takt

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man fährt mit dem Fahrrad am Bahndamm entlang. Auf der Bahnstrecke vekehrt ein Linienzug, der regelmäßig zwischen zwei Städten pendelt. Alle* 30 *Minuten wird man von hinten von einem Zug überholt und alle* 20 *Minuten kommt einem von vorne ein Zug entgegen. In welchem Takt fahren die Züge?*

Lösung. Wenn ein Zug sich auf der Höhe des Radfahrers befindet, dann habe der nächste Zug zum Fahrradfahrer die Entfernung s. Sei v die Geschwindigkeit des Zuges und w die des Radfahrers. Der Zug von hinten legt die Strecke s mit der Geschwindigkeit $v-w$ in 30 Minuten $\left(=\frac{1}{2}\,h\right)$, und der von vorne legt die Strecke s mit der Geschwindigkeit $v+w$ in 20 Minuten $\left(=\frac{1}{3}\,h\right)$ zurück. Es muss also wegen Strecke gleich Geschwindigkeit mal Zeit gelten: $(v-w)\cdot\frac{1}{2}=s=(v+w)\cdot\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot w=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot v\Leftrightarrow$ $\frac{1}{6}\cdot v=\frac{5}{6}\cdot w\Leftrightarrow v=5\cdot w$. Weiter gilt dann: $s=(v+w)\cdot\frac{1}{3}=(5\cdot w+w)\cdot\frac{1}{3}=2\cdot w$. Die Zeit, die der Zug braucht um die Strecke s, der Abstand zweier Züge, zurückzulegen beträgt dann also: $t=\frac{s}{v}=\frac{2\cdot w}{5\cdot w}=\frac{2}{5}$. Also haben die Züge einen Abstand von $\frac{2}{5}$h, also 24 Minuten. □

Die Brücke und die Wanderer

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Vier Wanderer müssen nachts eine Brücke überqueren. Die Überquerung darf nur mit Taschenlampe durchgeführt werden. Es gibt nur eine Taschenlampe mit maximaler Leuchtdauer von einer Stunde. Auf der Brücke dürfen sich gleichzeitig maximal nur zwei Personen aufhalten. Die vier Wanderer brauchen für die Überquerung unterschiedlich viel Zeit: Wanderer A:* 5*min., Wanderer B:* 10*min., Wanderer C:* 20*min., Wanderer D:* 25*min. Der langsamere von zwei Wanderern bestimmt das Tempo. In welcher Reihenfolge müssen die Wanderer die Brücke überqueren, so dass sie nach spätestens* 60*min. alle die andere Seite erreicht haben?*

Lösung. Durch geschicktes Probieren findet man folgende Lösung: Zuerst gehen die beiden schnellsten Wanderer A und B über die Brücke, was also 10min. dauert. Dann geht Wanderer A wieder zurück, also insgesamt 15min. Dann gibt A den beiden langsamsten C und D die Taschenlampe. Die beiden brauchen für die Überquerung 25min., also sind insgesamt 40min. verbraucht. Dann geben die beiden den Wanderer B die Tschenlampe, um A abzuholen, was zweimal 10min. kostet. Also sind alle Wanderer auf der anderen Seite bevor die Taschenlampe den Geist aufgibt. Und das war es auch schon! □

Die Gefahr durch einen Zug

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man habe drei Achtel einer Brücke überquert, als man plötzlich das Pfeifen eines Zuges hört. Man weiß, dass man höchstens mit einer Geschwindigkeit von* 10*km/h laufen kann. Egal, in welche Richtung man von der Brücke läuft, man schafft es gerade noch, bevor der Zug einem erfasst. Der Zug bremst nicht ab, wenn man von ihm gesehen wird. Die Frage also: Wie schnell fährt der Zug?*

Lösung. Sei s_b die Länge der Brücke, s_z die Länge der Strecke vom Zug bis zur Brücke und v_z die Geschwindigkeit des Zuges. Wenn man die kürzere Strecke von der Brücke wählt, dann ist die Zeit, die man dafür braucht, gleich der Zeit, die der Zug bis zur Brücke braucht, also: $\frac{\frac{3}{8}\cdot s_b}{10}=\frac{s_z}{v_z}$. Wählt man die längere Strecke von der Brücke, dann muss gelten: $\frac{\frac{5}{8}\cdot s_b}{10}=\frac{s_z+s_b}{v_z}$.

Jetzt muss man also geschickt umformen: $\frac{\frac{3}{8}\cdot s_b}{10} = \frac{s_z}{v_z} \Leftrightarrow \frac{5\cdot s_b}{80} = \frac{5}{3}\cdot\frac{s_z}{v_z}$ und es gilt $\frac{\frac{5}{8}\cdot s_b}{10} = \frac{5\cdot s_b}{80} = \frac{s_z+s_b}{v_z}$, also folgt $\frac{5}{3}\cdot\frac{s_z}{v_z} = \frac{s_z+s_b}{v_z} \Leftrightarrow s_z = \frac{3}{2}\cdot s_b$. Dann gilt folglich: $\frac{5\cdot s_b}{80} = \frac{s_z+s_b}{v_z} = \frac{\frac{3}{2}\cdot s_b+s_b}{v_z}$, also: $\frac{5}{80} = \frac{\frac{5}{2}}{v_z} \Leftrightarrow v_z = 40$. Die Geschwindigkeit des herannahenden Zuges ist also 40km/h. □

Die Autofahrt

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Du hast einen Termin und fährst mit dem Auto. Dabei fährst du exakt* $50km/h$*, dabei: keine Ampeln, keine Staus, freie Strecke. Nach exakt der Hälfte der Strecke stellst du fest, dass du bei dieser Geschwindigkeit zu spät kommst und beschließt, die Geschwindigkeit zu erhöhen. Wie schnell musst du fahren, um eine Durchschnittsgeschwindigkeit für die komplette Strecke von* $100km/h$ *zu erzielen? Dazu muss gesagt werden, dass die Lösung unabhängig von der Gesamtentfernung ist. Wer weiß die Antwort?*

Lösung. Hat man für die gesamte Strecke der Länge x die Durchschnittsgeschwindigkeit $100km/h$, dann braucht man dafür die Zeit $t_x = \frac{x}{100}$. Für die Hälfte der Strecke hat man die Zeit $t_1 = \frac{\frac{1}{2}x}{50}$ gebraucht. Die andere Hälfte der Strecke fahre man mit der Geschwindigkeit v_{neu}, also in der Zeit $t_2 = \frac{\frac{1}{2}x}{v_{\text{neu}}}$. Nun muss gelten: $t_1 + t_2 = t_x$, also $\frac{\frac{1}{2}x}{50} + \frac{\frac{1}{2}x}{v_{\text{neu}}} = \frac{x}{100}$, also $\frac{\frac{1}{2}}{50} + \frac{\frac{1}{2}}{v_{\text{neu}}} = \frac{1}{100}$ $(x \neq 0)$, also $\frac{50}{50} + \frac{50}{v_{\text{neu}}} = 1$, also $\frac{50}{v_{\text{neu}}} = 0$, also $\frac{1}{v_{\text{neu}}} = 0$, also $v_{\text{neu}} = \infty$. Es ist also unmöglich pünktlich anzukommen! Damit ist also die Aufgabe gelöst. □

Der Pferdehändler

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Pferdehändler verkauft einem anderen Pferdehändler* 100 *Pferde zu je* 100 *Goldtalern. Wie es unter Pferdehändlern gelegentlich vorkommen soll, möchte der Käufer den Verkäufer ein wenig betrügen und zahlt die* 10000 *Taler in* 100 *Säcken zu* 100 *Talern. In einem der Säcke befinden sich aber keine Goldtaler, sondern nur vergoldete Bronzetaler. Ein Goldtaler wiegt 10 Gramm. Ein Bronzetaler ist* 1 *Gramm leichter als ein Goldtaler, wiegt also* 9 *Gramm. Der Verkäufer hat eine Waage zu Verfügung. Frage: Wie kann er mit einem einzigen Wiegevorgang herausfinden, in welchem der Säcke sich die gefälschten Taler befinden?*

Lösung. Man nehme vom Sack Nr. 1 einen Taler, von Sack Nr. 2 zwei Taler, von Sack Nr. 3 drei Taler, usw. 50500 minus der gewogenen Gramm ergibt die Nummer des gesuchten Sackes. Beispiel: In jedem Sack sind 100 Taler. Weiters nimmt man an, dass im Sack 7 die 9 Gramm-Taler sind. Man zählt jetzt zusammen: $10+20+30+40+50+60+63+80+90+100+110+\ldots+980+990+1000 = 50493$. Es gilt $50500 - 50493 = 7$. Auf diese Weise kann man also schließlich herausfinden, in welchem Sack die gefälschten Taler zu finden sind. Das war es. □

Das Einholen eines Ankers ins Ruderboot

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man ist in einem Ruderboot auf einem kleinen Teich und hat den Anker ausgeworfen. Was passiert, wenn man den Anker wieder einholt? Wird sich der Wasserspiegel senken, heben oder wird er gleich bleiben?*

Lösung. Lösung: Der Wasserspiegel steigt. Warum? Die entscheidenden Größen sind hier Dichte und Volumen. Der Anker hat zwar nicht so ein großes Volumen, da er aber mit Sicherheit aus Eisen oder einem anderen schweren Metall ist, hat er eine sehr große Dichte und ein recht großes Gewicht. Das Boot ist wesentlich größer als der Anker, hat also ein großes Volumen, relativ zu seiner Größe jedoch ein nicht so hohes Gewicht. Wird der Anker nun aus dem Wasser geholt und in das Boot gesetzt, so taucht der schwere Anker das Boot weiter ins Wasser ein. Durch die Größe des Bootes wird nun also mehr Wasser verdrängt, als das Volumen des Ankers ausgemacht hat. Folglich steigt der Wasserspiegel. □

Der Vogelflug

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Zug verlässt den Kölner Bahnhof in Richtung Frankfurt. Er fährt dabei durchgängig mit einer Geschwindigkeit von* $200km/h$*. Zeitgleich fährt ein Zug vom Frankfurter Bahnhof in Richtung Köln ab. Er fährt ebenfalls* $200km/h$ *und ist auf der gleichen Strecke unterwegs. Die Zugstrecke Köln-Frankfurt ist* 200 *Kilometer lang. Wenn ein Hochgeschwindigkeitsvogel mit* $300km/h$ *zeitgleich mit dem ersten Zug Köln verlässt, und so lange zwischen den beiden Zugspitzen hin und her fliegt, bis die beiden Züge sich treffen, wie weit ist er dann geflogen?*

Lösung. Da die beiden Züge sich nach einer halben Stunde treffen, ist der Vogel also eine halbe Stunde unterwegs gewesen. Das bedeutet dann, dass er wegen seiner Geschwindigkeit von 300km/h eine Streckenlänge von 150km zurückgelegt hat. □

Der schwere Rucksack

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. 4 *Freunde machen eine mehrtägige Wanderung durch die Alpen. Sie haben ziemlich viel Gepäck dabei: Seile, Notfallausrüstung, Kleidung und natürlich genügend Proviant und Wasser, denn unterwegs kann man nichts kaufen. Jeder wählt vor der Tour einen Rucksack aus, den er ans Ziel tragen wird. Christin, die einzige Frau unter den* 4 *Freunden, greift ausgerechnet zum schwersten Rucksack mit dem Proviant und dem Wasser. Sie will diesen schweren Rucksack unbedingt tragen, obwohl die Männer ihn ihr abnehmen und ihr einen leichteren geben wollen. Für Christin ist es trotzdem eine gute Wahl. Warum nun ist das trotzdem eine gute Wahl?*

Lösung. Da der Proviant im Laufe der Wanderung immer weniger wird, wird Christins Rucksack immer leichter. □

Der Kommissar und der Einbruch

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Kommissar Helle brütet über die Aussagen von drei Verdächtigen eines Einbruchs: Der Verdächtige Alfons behauptet, Benno hätte den Einbruch verübt. Benno sagt aus, dass Charly der Täter sei. Charly beschuldigt Benno, dass dieser lügt. Der Kommissar weiß, dass nur der Einbrecher lügen würde, und die Aussagen der anderen Verdächtigen auf jeden Fall richtig sind. Wie kann man Kommissar Helle helfen?*

Lösung. Wenn es Alfons (A) war, dann lügt A. Die Aussage von Benno (B) wäre dann auch falsch. A kann also nicht der Täter sein. Wenn B der Täter ist, dann lügt er. Die Aussagen von A und Charly (C) stimmen in diesem Fall: C behauptet wahrheitsgemäß, dass B lügt und A beschuldigt B sowieso. Wäre C der Täter gewesen, würde er lügen, aber auch A würde dann nicht die Wahrheit sagen. Die Antwort lautet also, dass Benno der Täter ist. □

Das Springer-Problem

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Springer soll auf einem Schachbrett unten rechts starten. Wie muss der Springer seinen Weg gestalten, wenn er alle Felder genau einmal besucht haben und am Ende in der Ecke oben links stehen will?*

Lösung. Es ist nicht möglich, dass der Springer seinen Weg so gestaltet, dass er auf der gegenüberliegenden Ecke landet. Wenn ein Springer zieht so hat das Feld, auf dem er ankommt, immer eine andere Farbe als das, auf dem er vorher stand. Um alle Felder des Schachbrettes zu besuchen, muss der Springer 63 Züge machen - er steht also, nachdem er alle Felder besucht hat, auf einem Feld, das eine andere Farbe hat als das, von dem er gestartet ist. Da gegenüberliegende Ecken auf dem Schachbrett die gleiche Farbe haben, kann der Springer nicht auf der gegenüberliegenden Ecke landen. □

Die wässrige Gurke

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man hat eine Gurke, die* 1200 *Gramm wiegt. Ihr Wassergehalt beträgt* 99 *Prozent. Wie viel wiegt die Gurke, wenn der Wassergehalt auf* 98 *Prozent sinkt?*

Lösung. Weil die Gurke 1200 Gramm wiegt, ist also 1 Prozent Fruchtfleisch, also 12 Gramm. Wenn der Wassergehalt der Gurke sinkt, dann steigt zwar der Fruchtfleischanteil in Prozent, absolut betrachtet beträgt der Fruchtfleischanteil jedoch immer noch 12 Gramm. Wenn der Fruchtfleischanteil auf 98 Prozent sinkt, dann bedeutet das, dass diese 12 Gramm jetzt 2 Prozent des Gewichtes der betrachteten Gurke ausmacht. Wenn 12 Gramm 2 Prozent entspricht, dann entspricht 6 Gramm 1 Prozent, also 100 Prozent ist 600 Gramm. Die Gurke wiegt nach dem Flüssigkeitsverlust dann also nur noch 600 Gramm. □

Der Weinkeller

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Im Weinkeller von Herrn Müller lagern* 200 *Flaschen Wein. Da Herr Müller lieber Rotwein als Weißwein trinkt, sind* 99 *Prozent seiner Flaschen Rotweine. Der Rest ist Weißwein. Wie viele Flaschen Rotwein muss Herr Müller trinken, um den Anteil des Rotweins in seinem Weinkeller auf* 98 *Prozent zu reduzieren?*

Lösung. Wenn 99 Prozent der 200 Flaschen Rotwein sind, dann sind also 1 Prozent dieser Flaschen Weißwein, also 1 Prozent von 200 ist gleich 2 Flaschen. Wenn 98 Prozent Rotwein sein soll, dann sind 2 Prozent Weißwein. Es sind also zwei Flaschen gleich 2 Prozent, also sind 98 Prozent 98 Flaschen. Man muss also 100 Flaschen Rotwein trinken, damit der Anteil des Rotweins 98 Prozent ist. Und das war es auch schon! □

Das Würfelspiel

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Holzwürfel mit der Seitenlänge von drei Zentimetern wird von allen Seiten blau angemalt und anschließend in kleine Würfel mit einer Seitenlänge von jeweils einem Zentimeter zerschnitten. Anschließend werden alle kleinen Würfel auf den Boden geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Würfel mit einer blauen Seite nach oben zeigen?*

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit ist 0. Es gibt einen kleinen Würfel, der aus dem Inneren des großen Würfels entstanden ist und daher überhaupt keine blau bemalte Seite hat. □

Die Zigarettenstummel

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Obdachloser hat herausgefunden, dass man aus fünf Zigarettenstummeln eine Zigarette machen kann. Er sammelt* 21 *Stummel. Wie viele Zigaretten kann er daraus machen?*

Lösung. Aus 21 Stummel kann der Obdachlose 4 Zigaretten machen (denn: $4 \cdot 5 = 20$) und hat 1 Stummel übrig. Raucht er diese 4 Zigaretten, dann hat er danach daraus 4 Stummel plus 1 Stummel, der noch übrig war. Aus diesen $5 = 4 + 1$ macht er eine Zigarette und raucht sie. Also hat er insgesamt 5 Zigaretten rauchen können. □

Das kleine Schachturnier

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Am Ende eines einrundigen Jeder-gegen-Jeden-Schachturniers ergab sich die Siegerliste in der Reihenfolge* 1. *Alfred (A),* 2. *Bert (B),* 3. *Charlie (C),* 4. *Detlef (D) und* 5. *Emil (E). Bert ist der einzige ohne Verlustpartie; Emil der einzige, der nie gewonnen hat. Wer spielte wie gegen wen, wenn alle Spieler unterschiedlich viele Punkte erreicht haben? Ein Sieg zählt* 1*, ein Unentschieden* $0,5$ *und ein Verlust* 0 *Punkte.*

Lösung. Bert hat vier Partien gespielt, und keine einzige verloren. Daher hat er $b \geq 2$ Punkte. Falls $b = 2$, dann hat C höchstens $1,5$, D höchstens 1, und E höchstens $0,5$ Punkte. Insgesamt wurden 10 Punkte vergeben, und daher muss A mindestens 5 Punkte aus vier Partien gemacht haben. Das geht nicht. Also ist $b = 2$ unmöglich. Beweis für 10 Punkte: Trägt man die Ergebnisse der Spiele in eine Tabelle mit $5 \cdot 5 - 5 = 20$ (man spielt nicht gegen sich selbst) freien Feldern ein, dann hat man genauso viele 1 wie 0, also z.B.: $A - B$: 1 und $B - A$: 0, denn da, wo jemand gewonnen hat, hat auch jemand verloren. $0,5$ taucht dort mit einer geraden Anzahl auf, denn z.B.: $A - B$: 0.5 und $B - A$: 0.5. Sei x die Anzahl der 1 und 2α ($\alpha = 0, \ldots, 6$) die der $0,5$ in der Tabelle. Es muss also gelten: $(x + x) + 2\alpha = 20$, also $x + \alpha = 10$. Die Summe der Zeilen in der Tabelle ist gleich der Summe der Punkte in der Siegerliste ($= \sigma$), von der man hier zeigen will, dass sie genau gleich 10 ist. Die Summe der Zeilen ist gleich der Summe der einzelnen Einträge in der Tabelle. Dann muss also gelten: $x \cdot 0 + x \cdot 1 + 2\alpha \cdot 0,5 = \sigma \Leftrightarrow x + \alpha = \sigma$. Wegen $x + \alpha = 10$ muss also $\sigma = 10$ gelten, was zu beweisen war. Falls $b \geq 3$, dann muss A mindestens $3,5$ Punkte aus vier Spielen gemacht haben, weil a echt größer sein muss als b. Dann hat er dreimal gewonnen, und einmal remis gespielt. Dann hat aber auch A keine einzige Partie verloren. Das ist ein Widerspruch dazu, dass Bert der einzige ist ohne Verlustpartie; also ist $b \geq 3$ unmöglich. Aus den obigen Beobachtungen ergibt sich also $b = 2,5$. Außerdem hat A mindestens 3 Punkte. A hat vier Partien gespielt und mindestens eine verloren. Also hat A höchstens 3 Punkte. Also hat A genau 3 Punkte, 3 Partien gewonnen, und die Partie gegen B verloren, weil anders kann die Punktekonstellation mit der Summe 3 in vier Spielen nicht aussehen, und A muss gegen B verloren haben, weil B nie verloren hat und A nie unentschieden gespielt hat. B hat genau $2,5$ Punkte, die Partie gegen A gewonnen, und die anderen drei Partien remis gehalten. C, D, und E haben zusammen $4,5 = 10 - 3 - 2,5$ Punkte. Weil $b = 2,5$ ist, hat C höchstens 2 Punkte, D höchstens $1,5$ Punkte und E höchstens 1 Punkt. Wäre $c < 2$, dann wäre $c + d + e < 4,5$, also $c = 2$. Also muss $d + e = 4,5 - 2 = 2,5$ sein. Wäre $d < 1,5$, dann würde $d + e < 2,5$ folgen, also $d = 1,5$, also $e = 1$. D muss mindestens einmal gewonnen haben, weil sonst wäre E nicht als einziger Spieler ohne Sieg. D hat gegen B remis gespielt und gegen A hat verloren. Also hat D höchstens einmal gewonnen, sonst wäre $d > 1,5$. Hätte D gegen C gewonnen, dann wäre $c < 2,0$. Also gewinnt D gegen E und verliert gegen C, wegen d=1,5. Weil C gegen A verloren, gegen B remis und gegen D gewonnen hat, muss C wegen $c = 2$ gegen E remis gespielt haben. Weil C gegen E remis gespielt hat und D gegen E gewonnen hat, folgt, dass E gegen C remis gespielt und gegen D verloren hat. Damit ist die Siegertabelle rekonstruiert:

A (3,0 Punkte)	schlägt C, D und E und verliert gegen B.
B (2,5 Punkte)	schlägt A und spielt gegen C, D und E remis.
C (2,0 Punkte)	schlägt D, spielt gegen B und E remis und verliert gegen A.
D (1,5 Punkte)	gewinnt gegen E, spielt gegen B remis und verliert gegen A und C.
E (1,0 Punkte)	spielt gegen B und C remis und verliert gegen A und D.

Damit ist die Aufgabe hier also erledigt. □

Die Duschkabinen

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *In einem Kurbad gibt es* 100 *Duschkabinen. In jeder Kabine befindet sich ein Hahn, der die Wasserzufuhr zur Dusche dieser Kabine regelt. Durch ein Versehen bei der Installation setzt aber jeder Hahn außerdem auch die Duschen in genau* 5 *anderen Kabinen in Betrieb. Man beweise, dass die Kurverwaltung dann immer* 10 *Kabinen auswählen kann, in denen von der Fehlfunktion nichts zu bemerken ist, wenn die übrigen* 90 *Kabinen gesperrt werden.*

Lösung. Man zeigt zunächst, dass es (mindestens) eine Dusche gibt, die von höchstens 5 anderen Kabinen aus in Betrieb gesetzt wird. Wir betrachten dazu sämtliche (geordneten) Paare (H, D) von Hähnen und Duschen mit der Eigenschaft, dass D in Funktion tritt, wenn man H aufdreht. Weil jeder Hahn H nach Aufgabenstellung in genau 6 dieser Paare vorkommt, ist ihre Anzahl genau $6 \cdot 100$. Gäbe es nun zu jeder Dusche 6 (oder mehr) Hähne in anderen Kabinen (und den Hahn in der eigenen Kabine), durch deren Betätigung sie in Betrieb gesetzt wird, so gäbe es mindestens $7 \cdot 100$ derartige Paare (H, D). Dieser Widerspruch zeigt, dass die

Annahme falsch sein muss. Man wählt nun eine der Duschen aus, die durch höchstens 5 andere Hähne ausgelöst werden kann. In diese Kabine hängt man dann ein Handtuch und nennt sie belegt. Alle (höchstens 5) Kabinen, von denen aus die Dusche der belegten Kabine in Betrieb gesetzt wird, werden gesperrt. Durch Öffnen des Hahns der belegten Kabine werden genau 5 andere Duschen in Betrieb gesetzt, deren Kabinen ebenfalls gesperrt werden (wenn das nicht bereits geschehen ist). Die verbleibenden offenen Kabinen ohne Handtuch nennt man frei. Ihre Anzahl beträgt dann mindestens $100 - 11 = 89$. Ab jetzt betrachtet man nur noch diejenigen Paare (H, D), bei denen H und D sich in freien Kabinen befinden. Jeder Hahn H kommt in höchstens 6 Paaren vor, also gibt es insgesamt höchstens $6 \cdot 89$ Paare. Wie oben sieht man nun, dass es (mindestens) eine Dusche in einer freien Kabine geben muss, die von höchstens 5 anderen freien Kabinen aus betätigt werden kann. Man wählt nun eine solche Dusche aus, belegt ihre Kabine mit einem Handtuch und sperrt alle anderen Kabinen, die diese Dusche auslösen. Durch Öffnen des Hahns der zuletzt belegten Kabine findet man höchstens fünf weitere bis dahin freie Kabinen, die ebenfalls gesperrt werden müssen. Die Anzahl der freien Kabinen (weder gesperrt noch belegt) beträgt danach mindestens noch $100 - 2 \cdot 11 = 78$. Durch Fortsetzung dieses Prozesses erhält man in jedem Schritt eine weitere belegte Kabine und muss maximal 10 Kabinen sperren. Nach 9 solchen Schritten sind genau 9 Kabinen belegt (mit Handtuch) und höchstens $9 \cdot 10$ Kabinen gesperrt. Es gibt also wenigstens noch eine freie Kabine. Man belegt eine solche mit dem zehnten Handtuch und sperrt alle übrigen freien Kabinen. Durch das obige Vorgehen werden alle Kabinen gesperrt, von denen aus Duschen der belegten Kabinen in Betrieb gesetzt werden können. Weil durch die Hähne der belegten Kabinen auch nur die eigene Dusche und fünf weitere in gesperrten Kabinen betätigt werden, funktionieren in den zehn belegten Kabinen alle Duschen korrekt. Abschließend entferne man die nassen Handtücher. □

Die drei Brüder

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Eine Person kommt an eine Weggabelung und weiß nicht, ob der linke oder der rechte Weg zu ihrem Ziel führt. Glücklicherweise ist gleich in der Nähe ein Haus, deren Bewohner sie fragen kann. In dem Haus wohnen drei Brüder. Einer sagt immer die Wahrheit, einer lügt immer, und der dritte lügt manchmal und manchmal nicht. Die Person weiß aber nicht, wer der drei Brüder wer ist. Sie darf zwei beliebige Fragen stellen, um herauszufinden, wohin sie gehen muss, um ihr Ziel zu erreichen. Eine Frage darf sie nur an jeweils einen der drei Brüder richten; aber nicht notwendigerweise an den selben. Was muss die Person wen fragen, um herauszufinden, wohin sie gehen muss?*

Lösung. Die erste Frage an einen beliebigen der drei Brüder lautet: „Welcher von deinen Brüdern sagt prinzipiell häufiger die Wahrheit?“. Gerät man an den Wahrheitsliebenden, so zeigt er einem den Wankelmütigen. Gerät man an den Lügner, so zeigt er einem auch den Wankelmütigen. Gerät man an den Wankelmütigen, so zeigt er je nach Laune einen der beiden anderen. In allen drei Fällen aber ist der, den man weder gefragt hat noch den man gezeigt bekommen hat, NICHT der Wankelmütige. Diesem kann man also erfolgreich die Frage stellen: „Wenn ich dich fragen würde, ob der Weg rechts mich an mein Ziel bringt, würdest du dann ‚Ja‘ sagen?“. Es gibt 4 Fälle:

1. Man fragt den Wahrheitsliebenden und der rechte Weg ist der richtige Weg.:
Der Wahrheitsliebende würde die direkte Frage „Ist der Weg rechts der richtige?“ mit „Ja“ beantworten, da er die Wahrheit sagt. Die wahre Antwort auf die Frage, ob er „Ja“ sagen würde, ist also „Ja“, also sagt der Wahrheitsliebende auch „Ja“.
2. Man fragt den Wahrheitsliebenden und der rechte Weg ist nicht der richtige Weg.:
Der Wahrheitsliebende würde die direkte Frage „Ist der Weg rechts der richtige?“ mit „Nein“ beantworten, da er die Wahrheit sagt. Die wahre Antwort auf die Frage, ob er „Ja“ sagen würde, ist also „Nein“, also sagt der Wahrheitsliebende auch „Nein“.
3. Man fragt den Lügner und der rechte Weg ist der richtige Weg.:
Der Lügner würde die direkte Frage „Ist der Weg rechts der richtige?“ mit „Nein“ beantworten, da er lügt. Die wahre Antwort auf die Frage, ob er „Ja“ sagen würde, ist also „Nein“. Da er aber lügt, ist seine Antwort „Ja“.
4. Man fragt den Lügner und der rechte Weg ist nicht der richtige Weg.:
Der Lügner würde die direkte Frage „Ist der Weg rechts der richtige?“ mit „Ja“ beantworten, da er lügt. Die wahre Antwort auf die Frage, ob er „Ja“ sagen würde, ist also „Ja“. Da er aber lügt, ist seine Antwort „Nein“.

Es gilt also, dass der rechte Weg genau dann richtig ist, wenn mit „Ja“ geantwortet wird. □

Die perfekten Logiker

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Die Spieler A und B haben beide die Zahl* 12 *auf ihre Stirn geschrieben bekommen. Jeder sieht die Zahl auf der Stirn des anderen, aber er kennt nicht die eigene Zahl. Der Spielleiter teilt ihnen mit, dass die Summe ihrer beiden Zahlen* *entweder 24 oder 27 ist und dass es sich um positive ganze Zahlen handelt (ungleich Null). Dann fragt der Spielleiter immer wieder A und B abwechselnd, ob sie die Zahl auf ihrer Stirn bestimmen können.*

A: Nein. B: Nein. A: Nein. B: Nein. A: Nein. ...

Nach wie vielen „Nein“s terminiert das Spiel, wenn überhaupt?

Lösung. Bei perfekten Logikern hört man 7 „Nein“s, dann ein „Ja“. Sei a die Zahl von A und b die Zahl von B.

$$A \text{ weiß zu Beginn, dass } a = 12 \text{ oder } a = 15. \tag{1}$$

$$B \text{ weiß zu Beginn, dass } b = 12 \text{ oder } b = 15. \tag{2}$$

Aber B weiß nicht, dass A nun (1) weiß, und A weiß nicht, das B nun (2) weiß. Somit sind diese Aussagen zum rekursiven Schließen nicht geeignet. Aber alle folgenden Aussagen sind beiden Personen klar, und jeder weiß, dass der andere sie weiß:

$$b = 24 - a \text{ oder } b = 27 - a \tag{3}$$

$$a = 24 - b \text{ oder } a = 27 - b \tag{4}$$

Aus dem ersten „Nein“ von A folgt nun aus (4):

$$b < 24 \tag{5}$$

Denn im Falle von $b \geq 24$ würde A auf a schließen können, weil $a = 24 - b \leq 0$ ausgeschlossen ist, also $a = 27 - b$ gelten muss. Dies ist der Motor, der das rekursive Schließen ins Laufen bringt: Aus dem ersten „Nein“ von B folgt nun aus (3) und (5) die folgende wichtige Erkenntnis:

$$a > 3 \tag{6}$$

Denn gelte $a \leq 3$ und $b < 24$, dann folgte aus $24 > b = 27 - a \geq 27 - 3 = 24$, dass dann $b = 24 - a$ für B zu wissen wäre. Man macht so weiter und hat dann:

$$\begin{array}{lclll}
A\text{: „Nein“} & \Rightarrow & b < 24 & \text{denn:} & b \geq 24 \Rightarrow a = 24 - b \leq 0\,(\lightning) \Rightarrow a = 27 - b \\
B\text{: „Nein“} & \Rightarrow & a > 3 & \text{denn:} & a \leq 3 \wedge b < 24 \Rightarrow 24 > b = 27 - a \geq 27 - 3 = 24\,(\lightning) \Rightarrow b = 24 - a \\
A\text{: „Nein“} & \Rightarrow & b < 21 & \text{denn:} & b \geq 21 \wedge a > 3 \Rightarrow 3 < a = 24 - b \leq 24 - 21 = 3\,(\lightning) \Rightarrow a = 27 - b \\
B\text{: „Nein“} & \Rightarrow & a > 6 & \text{denn:} & a \leq 6 \wedge b < 21 \Rightarrow 21 > b = 27 - a \geq 27 - 6 = 21\,(\lightning) \Rightarrow b = 24 - a \\
A\text{: „Nein“} & \Rightarrow & b < 18 & \text{denn:} & b \geq 18 \wedge a > 6 \Rightarrow 6 < a = 24 - b \leq 24 - 18 = 6\,(\lightning) \Rightarrow a = 27 - b \\
B\text{: „Nein“} & \Rightarrow & a > 9 & \text{denn:} & a \leq 9 \wedge b < 18 \Rightarrow 18 > b = 27 - a \geq 27 - 9 = 18\,(\lightning) \Rightarrow b = 24 - a \\
A\text{: „Nein“} & \Rightarrow & b < 15 & \text{denn:} & b \geq 15 \wedge a > 9 \Rightarrow 9 < a = 24 - b \leq 24 - 15 = 9\,(\lightning) \Rightarrow a = 27 - b
\end{array}$$

Es folgt B: „Ja“, da wegen $b < 15$ zusammen mit Information (2) nur noch die Möglichkeit $b = 12$ übrigbleibt. Also hört man 7 „Nein“ und danach ein „Ja“. Damit ist diese Aufgabe gelöst! □

Die zwei Seiten einer Münze

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Es war einmal ein tapferer Ritter. Man nenne ihn Kunibert. Dieser zog sich durch ein inakzeptables Maß an Ungehorsam ärgerlicherweise den Unmut des Königs zu, der ihn daraufhin zum Tode verurteilte. Der zornige Potentat ließ sich allerdings dazu herab, Kunibert eine letzte Chance auf Überleben in Form einer zu lösenden Aufgabe zu geben. Dem Ritter werden die Augen verbunden und zwölf Goldmünzen in einer Reihe vorgelegt. Man sagt ihm, dass sechs der Münzen mit der Seite, die den Kopf des Königs zeigt, oben liegen und die anderen sechs mit der Zahl. Kunibert kennt die Reihenfolge allerdings nicht. Seine Aufgabe ist es, die Münzen in zwei Haufen aufzuteilen, sodass auf beiden Haufen gleich viele Münzen mit dem Kopf des Königs nach oben liegen. Schafft er dies, so ist er frei, ansonsten erwartet ihn die Enthauptung. Leider lässt sich durch Ertasten nicht herausfinden, welche Seite einer Goldmünze oben liegt. Gibt es für Ritter Kunibert noch Hoffnung?*

Lösung. Man führe sich die Situation vor Augen: Vor einem liegen zwölf Münzen, davon zeigen sechs den Kopf des Königs. Die anderen sechs Münzen zeigen die andere Seite, auf der eine Zahl abgebildet ist. Man kann nichts sehen, weil einem die Augen verbunden wurden. Die Angabe ist, zwei gleich zusammengesetzte Münzhaufen zu bilden. Es bleibt nur eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen - und zwar, ganz simpel, durch Nachdenken. Die Münzen, die mit dem Bild des Königs nach oben liegen, nenne man vereinfachend Königsmünzen. Die anderen entsprechend Zahlmünzen. Es gibt sieben mögliche Kombinationen, wie die Königsmünzen verteilt sein können:

0 auf dem ersten Haufen,	6 auf dem zweiten
1 auf dem ersten Haufen,	5 auf dem zweiten
2 auf dem ersten Haufen,	4 auf dem zweiten
3 auf dem ersten Haufen,	3 auf dem zweiten
4 auf dem ersten Haufen,	2 auf dem zweiten
5 auf dem ersten Haufen,	1 auf dem zweiten
6 auf dem ersten Haufen,	0 auf dem zweiten

Befinden sich alle sechs Königsmünzen in dem ersten Haufen, so sind alle Zahlmünzen in dem zweiten Haufen, bei einer Königsmünze in Haufen eins ist es eine Zahlmünze in Haufen zwei und so weiter. Wie man sieht, stimmt die Anzahl der Königsmünzen in einem Haufen mit der Anzahl der Zahlmünzen im anderen Haufen überein. Was genau war nun die Fragestellung? Beide Haufen sollen die gleiche Anzahl an Königsmünzen aufweisen. Diese Situation erreicht man, wenn man alle Münzen eines Haufens umdreht. Da die Reihenfolge der Königsmünzen keine Rolle spielt, stimmt diese Lösung immer. Es ist egal, ob sich keine einzige oder ganze sechs Königsmünzen in einem Haufen befinden - Ritter Kunibert kommt frei. □

Der Schulsport-Wettbewerb

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Drei Schulen, die Lincoln High, die Washington High und die Roosevelt High School, veranstalten einen Leichtathletikwettbewerb. In jeder Disziplin startet genau einer von jeder Schule. Die Lincoln High gewinnt das Kugelstoßen. In jedem Wettkampf gibt es für den ersten, den zweiten und den dritten jeweils mindestens einen Punkt und für jeden unterschiedlich viele Punkte. Für einen besseren Platz kriegt man auch mehr Punkte. Die Punkteverteilung ist in allen Wettkämpfen gleich. Am Ende hat die Washington High* 22 *Punkte und die beiden anderen Schulen je* 9 *Punkte. Die Frage lautet nun: Welche Schule hat den Hochsprung gewonnen?*

Lösung. Sei p die Summe der Punkte pro Wettbewerb und n die Anzahl der Wettbewerbe. Es müssen mindestens sechs Punkte $(= 1 + 2 + 3)$ pro Wettbewerb verteilt werden, also $p \geq 6$. Andererseits muss gelten $p \cdot n = 40 = 22 + 9 + 9$. Mit $p \geq 6$ ergibt sich, dass n nur 5, 4, 2 oder 1 sein kann. $n = 1$ ist nicht möglich, sonst müsste die Lincoln in der Gesamtwertung führen, weil sie das einzige Wettbewerb Kugelstoßen ja mit dem ersten Platz gewonnen hat. $n = 2$ kann auch nicht sein, da ja die Washington 22 Punkte geholt hat, denn: $n = 2 \Rightarrow p = 20 = p_1 + p_2 + p_3$ (Punkte für Platz 1 bis 3: $p_1 > p_2 > p_3 \geq 1$); wäre p_1 echt kleiner als 11, dann hätte die Washington nicht 22 Punkte erreichen können. Also ist $p_1 \geq 11$. Das kann aber nicht sein, da die Lincoln dann für ihren Sieg im Kugelstoßen mindestens 11 Punkte hätte bekommen müssen, obwohl die Lincoln insgesamt nur 9 Punkte hat. Es bleiben $n = 4$ oder $n = 5$. Bei $n = 4$ muss es mindestens 6 Punkte pro Sieg geben, um 22 Punkte zu erreichen; es kann aber auch höchstens 6 geben, da sonst die Lincoln mit $7 + 1 + 1 + 1$ Punkten mehr als 9 haben müsste. Mit $6 - 3 - 1$ als Punkteverteilung $\left(p = 6 + 3 + 1 = 10 = \frac{40}{n} = \frac{40}{4} \wedge 6 > 3 > 1 \geq 1\right)$ kann man aber nicht auf 22 kommen, also ist auch $n = 4$ ausgeschlossen. Es bleiben damit $n = 5$ Wettbewerbe. Also gilt $p = \frac{40}{n} = \frac{40}{5} = 8$. Bei $n = 5$ muss es mindestens 5 Punkte pro Sieg geben, um 22 Punkte erreichen zu können. Es folgt daraus, dass die Verteilung $5 - 2 - 1$ sein muss. Es ergibt sich nun, dass die Lincoln High den ersten Platz beim Kugelstoßen mit 5 Punkten und 4-mal den letzten Platz mit jeweils 1 Punkt gemacht hat, Summe also 9; die Roosevelt High hat 4-mal den zweiten Platz mit jeweils 2 Punkten und beim Kugelstoßen den letzten Platz mit 1 Punkt, Summe also auch 9. Weil die Washington High 22 Punkte hat, folgt, dass diese 4-mal den ersten Platz und einmal beim Kugelstoßen den zweiten Platz gemacht hat. Die Lösung lautet also, dass die Washington den Hochsprung gewonnen haben muss. □

Der Stammtisch

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *In einem kleinen Ort, in dem alle Einwohner immer lügen oder immer die Wahrheit sagen, traf sich eine Gruppe von* 16 *Männern regelmäßig zum Stammtisch. Ihre Stammkneipe hatte dafür einen großen, runden Tisch aufstellen lassen, an den sie sich immer rundherum verteilt setzten. Leider waren aber nicht immer alle anwesend. So war es auch an diesem Abend, was die Stimmung auf den Tiefpunkt brachte. Jede der anwesenden Personen behauptete von seinen Nachbarn, dass sie lügen. Anton, der Jüngste von ihnen, meinte: „Wir sind heute* 11 *Personen!“ Ernst, der ihm gegenüber saß, war ganz aufgebracht über diese aus seiner Sicht unqualifizierte Aussage: „So ein Blödsinn! Wir sind heute* 12 *Personen!“ Schon wollten sie aufeinander los gehen, wurden jedoch von ihren linken und rechten Nachbarn zurückgehalten. Karl, der ganz ruhig sitzen geblieben war,* *meinte: „Jetzt regt auch mal nicht so auf, wir waren schon weniger als heute. Betrachtet unsere heutige Anzahl als Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen. Die kleinere dieser Zahlen entspricht der Anzahl Personen in unserer bisher kleinsten Stammtischrunde.“ Wie viele Personen waren an diesem Abend am Stammtisch und wie groß war ihre kleinste Runde bisher?*

Lösung. Zunächst mal sind nicht alle Personen anwesend, also sind es höchstens 15 Personen. Anton, Ernst und Karl sind schonmal mindestens drei Personen. Anton und Ernst werden von ihren linken und rechten Nachbarn aufgehalten. Da keiner dieser beiden Nachbarn Anton und Ernst festhalten können, sind es also weitere 4 Personen, denn Karl ist ja sitzengeblieben. Insgesamt handelt es sich hier also um mindestens 7 Personen. Eine Person, die immer die Wahrheit sagt, hat links und rechts von sich einen sitzen, der immer lügt. Einer, der immer lügt, hat links und rechts von sich einen, der immer die Wahrheit sagt, denn wäre einer von beiden ein Lügner, dann hätte der Lügner nicht bei beiden gelogen. Die Anzahl der Personen muss also gerade sein, denn sonst gäbe es eine Folge von zwei Lügnern oder zwei Wahrheitssagern, was ja nicht sein kann. 9 und 11 Personen kann man jetzt ausschließen; d.h. Anton ist ein Lügner. Auch 13 und 15 Personen können es nicht gewesen sein. 12 Personen stimmt auch nicht, denn gegenüber eines Lügners, wie Anton, sitzt dann ein Lügner, nämlich Ernst. Ernst lügt also mit der Aussage, dass es sich um 12 Personen an diesem Abend handelt. 10 und 14 sind auch falsch, denn sonst hätte Ernst, weil er gegenüber von dem Lügner Anton gesessen hätte, dann die Wahrheit gesagt, was aber falsch ist. 8 ist also übrig und löst das Rätsel widerspruchsfrei. Weil Anton und Ernst sich gegenüber sitzende Lügner sind, sind also die 4 Nachbarn Wahrheitssager. Also ist dann Karl ein Lügner. Das heißt dann, dass es nie weniger als 8 Personen am Stammtisch gegeben hat. Dieses Rätsel ist damit also gelöst. □

Der Versicherungsvertreter

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Der Versicherungsvertreter König klingelt an der Tür der alleinerziehenden Mutter Martha, um ihr eine Versicherung zu verkaufen. Martha hat drei Kinder. Bevor Martha auf seine Versicherungsangebote eingeht, verlangt sie, dass Herr König eine Frage richtig beantwortet: „Das Produkt der Lebensjahre meiner drei Kinder ist 36. Das Alter meiner Kinder addiert ist zufällig gleich meiner Hausnummer.“ Herr König stöhnt auf und klagt, mit diesen Informationen könne er die Frage nicht benatworten. Martha überlegt und fügt hinzu: „Nun gut, eine weitere Information: Das älteste Kind ist ein Mädchen und gerade bei ihrer Oma.“ Nach kurzem Nachdenken gibt Herr König die richtige Antwort. Wie lautet sie?*

Lösung. Die erste Information lautet, dass Martha drei Kinder hat, deren multipliziertes Alter genau 36 ergibt. Mögliche Kombinationen sind also zunächst: $(1, 2, 18)$, $(1, 3, 12)$, $(1, 4, 9)$ und $(2, 3, 6)$. Da man die Möglichkeit, dass Martha Zwillinge hat, nicht ausschließen kann, muss man auch die Kombinationen berücksichtigen, bei denen zweimal dieselbe Zahl auftaucht: $(1, 1, 36)$, $(1, 6, 6)$, $(2, 2, 9)$ und $(3, 3, 4)$. Der nächste Hinweis lautet, dass die Summe der Altersangaben der Kinder genau der Hausnummer entspricht. Die jeweiligen Summen für die oben ermittelten Kombinationen lauten: 21, 16, 14, 11, 38, 13, 13 und 10. Herr König hat erst vor wenigen Minuten an der Tür geklingelt, daher wird er noch wissen, welche Hausnummer es ist. Trotzdem braucht er eine weitere Information, bevor er die Frage richtig beantworten kann. Diese ist aber offensichtlich nur nötig, wenn die Hausnummer nicht eindeutig eine der Kombinationen als richtige identifiziert. Sonst wüsste er die Antwort auch ohne zusätzliche Informationen. Offenbar hat Marthas Haus die Nummer 13. Die Summe ergibt sich für zwei Kombinationen: $(1, 6, 6)$ und $(2, 2, 9)$. Die anderen Kombinationen sind alle eindeutig und können daher ausgeschlossen werden. Die Aussage, dass es ein ältestes Kind gibt, lüftet das Geheimnis. Unerheblich ist hingegen, dass das Kind ein Mädchen und im Moment bei der Oma ist. Es kommt jetzt nur noch eine Kombination in Frage: $(2, 2, 9)$. Die älteste Tochter ist neun Jahre alt und ihre Geschwister sind Zwillinge, die zwei Jahre alt sind. Die Lösung dieser Aufgabe ist also vollbracht! □

Das Tischtennisturnier

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. 8 *Personen nehmen an einem Tischtennisturnier teil, wobei jeder gegen jeden genau eine Partie spielt. Jeder Sieg wird mit einem Punkt, jedes Remis mit einem halben Punkt belohnt. Am Ende ist in der Rangtabelle zu erkennen, dass jeder Teilnehmer eine andere Punktzahl erreicht hat und dass der Zweitplatzierte genauso viele Punkte hat wie die letzten vier zusammen. Wie lautet das Ergebnis der Partie zwischen dem Drittplatzierten und dem Fünftplazierten?*

Lösung. Der beste Spieler kann höchstens 7 Punkte erreicht haben, der Zweitplatzierte daher maximal 6 Punkte. $6,5$ Punkte sind für den Zweitplatzierten nicht möglich, da er dann genauso viele Punkte hätte wie der Erste der Tabelle. Die letzen vier Spieler haben untereinander sechs Spiele ausgetragen, so dass sie zusammen genau 6 Punkte erreicht haben. Beweis für 6 Punkte: Trägt man die Ergebnisse der Spiele in eine Tabelle mit $4 \cdot 4 - 4 = 12$ (man spielt nicht gegen sich selbst) freien Feldern ein, dann hat man genauso viele 1 wie 0, also z.B.: $1-2: 1$ und $2-1: 0$, denn da, wo jemand gewonnen hat, hat auch jemand verloren. $0,5$ taucht dort mit einer geraden Anzahl auf, denn z.B.: $1-2: 0.5$ und $2-1: 0.5$. Sei x die Anzahl der 1 und 2α $(\alpha = 0, \ldots, 6)$ die der $0,5$ in der Tabelle. Es muss also gelten: $(x+x)+2\alpha = 12$, also $x+\alpha = 6$. Die Summe der Zeilen in der Tabelle ist gleich der Summe der Punkte in der Siegerliste $(= \sigma)$, von der man hier zeigen will, dass sie genau gleich 6 ist. Die Summe der Zeilen ist gleich der Summe der einzelnen Einträge in der Tabelle. Dann muss also gelten: $x \cdot 0 + x \cdot 1 + 2\alpha \cdot 0,5 = \sigma \Leftrightarrow x + \alpha = \sigma$. Wegen $x + \alpha = 6$ muss also $\sigma = 6$ gelten, was zu beweisen war. Die letzten vier Spieler haben also im gesamten Turnier mindestens 6 Punkte erreicht. Mehr als 6 Punkte können die letzten vier jedoch nicht haben, da sie zusammen genauso viele Punkte haben wie der Zweitplatzierte. Das bedeutet, dass die letzten vier der Tabelle alle Partien gegen die ersten vier der Tabelle verloren haben. Somit hat der Drittplatzierte die Partie gegen den Fünftplazierten gewonnen. Die Aufgabe ist damit vollständig gelöst. □

Der Piratenschatz

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Die fünf Piraten A, B, C, D und E haben einen sagenhaften Schatz gefunden. Die Beute beträgt* 100 *Goldmünzen. Für die Aufteilung vereinbaren die Piraten folgende Regel: Nach alphabetischer Reihenfolge soll jeder einen Vorschlag machen, wie der Schatz aufgeteilt wird. Findet der erste Vorschlag, also der von Pirat A, keine Zustimmung von mindestens* 50 *Prozent der Piraten, so wird Pirat A über Bord geworfen und geht leer aus. In diesem Fall darf Pirat B einen Vorschlag machen usw. Welchen Teil des Schatzes kann Pirat A für sich höchstens fordern, um* 50 *Prozent der Piraten von seinem Plan zu überzeugen, also nicht über Bord geworfen zu werden?*

Lösung. Wenn am Ende Pirat E alleine übrig bleibt, kann er natürlich den ganzen Schatz für sich beanspruchen. Wenn dagegen die Piraten D und E übrig bleiben, geht Pirat E leer aus und Pirat D erhält alles, weil Pirat D bei insgesamt zwei Piraten alleine schon 50 Prozent der Stimmen besitzt. Wenn am Ende die Piraten C, D und E übrig bleiben, dann muss Pirat C, wenn er am Leben bleiben will und möglichst viel vom Schatz selber behalten will, mindestens einen der beiden Piraten mit seinem Vorschlag für sich gewinnen. Das wird er bei Pirat D nicht schaffen, denn dieser bekommt schließlich alles, wenn C über Bord geht. Pirat E wird dagegen schon zustimmen, wenn er nur eine einzige Münze erhält, da er ansonsten komplett leer ausgeht. Wenn drei Piraten übrig bleiben, kann Pirat C also 99 Münzen für sich behalten, Pirat D bekommt nichts und Pirat E erhält eine Münze. Wenn die Piraten B, C, D und E übrig bleiben, muss Pirat B nur einen der anderen Piraten auf seine Seite holen. Das geht am besten mit Pirat D, der leer ausgeht, wenn Pirat B über Bord muss. Pirat B fordert daher 99 Münzen für sich und bietet Pirat D eine Münze an. Pirat C und E gehen leer aus. Nun zur eigentlichen Frage: Pirat A muss zwei andere Piraten überzeugen. Das gelingt ihm, wenn er Pirat C und E jeweils eine Münze anbietet, da diese sonst gar nichts bekommen würden, wenn Pirat A über Bord geworfen würde. Pirat A kann also 98 Münzen für sich behalten. □

Das Ziegenproblem

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man ist Gast bei einer Spielshow und muss zwischen drei Toren wählen. Hinter zwei Toren ist eine Niete, also eine Ziege, und hinter dem dritten der Hauptpreis, also ein Auto. Man wählt Tor* 1*. Daraufhin öffnet der Moderator Tor* 3 *und zeigt eine Ziege hinter diesem Tor. Man kann jetzt noch einmal seine Entscheidung ändern und neu zwischen den verbleibenden beiden geschlossenen Toren wählen. Was sollte man also tun? Ist es egal, welches Tor man wählt oder kann man seine Chance verbessern, wenn man bewusst bei seiner Wahl bleibt oder das Tor wechselt?*

Lösung. Man sollte das Tor wechseln! Warum? In der Ausgangssituation liegt die Gewinnchance bei $\frac{1}{3}$. Nachdem man ein Tor gewählt hat, zeigt der Moderator eine Ziege hinter einem der verbleibenden zwei Tore. Und jetzt aufgepasst: Hat man auf das richtige Tor gesetzt, dann kann der Moderator beliebig wählen, welches der verbleibenden zwei Tore er zeigt, da hinter beiden eine Ziege ist. Lag man jedoch im ersten Durchgang daneben, was mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ der Fall ist, dann muss der Moderator genau das Tor auswählen, das er gezeigt hat. Denn er kann nicht den Gewinn hinter dem anderen Tor zeigen. Mit anderen Worten: Wenn man beim ersten Versuch falsch liegt, dann ist der Hauptgewinn, das Auto, auf jeden Fall hinter dem Tor, das der Moderator nicht öffnet. Da die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Versuch falsch zu tippen und den Moderator in Handlungszwang zu bringen, bei $\frac{2}{3}$ liegt, kann man durch einen Wechsel zum anderen Tor die Gewinnchancen im zweiten Versuch auf $\frac{2}{3}$ verbessern. Bleibt man dagegen bei seiner ursprünglichen Wahl, dann liegt die Gewinnchance gegenüber dem ersten Versuch unverändert bei $\frac{1}{3}$. Und das war es! □

Die brenndenden Seile

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Theo hat zwei Seile, die jeweils in einer Stunde ganz abbrennen. Die Geschwindigkeit, mit der die Seile abbrennen, ist nicht konstant. Beispielsweise können nach drei Minuten bereits* 80 *Prozent des einen Seils abgebrannt sein, während das andere Seil in derselben Zeit nur zu* 20 *Prozent abgebrannt ist. Wie kann Theo mit den zwei Seilen genau* 45 *Minuten abmessen? Es ist hier also nach einer Methode gefragt.*

Lösung. Die Angabe der Brenngeschwindigkeiten (80 Prozent beziehungsweise 20 Prozent) kann leicht zu der Schlussfolgerung verleiten, dass man die Seile nicht miteinander vergleichen kann. Da jedoch die Gesamtbrennzeit für beide Seile gleich ist (genau eine Stunde) ist ein Vergleich sehr wohl möglich. Darüber hinaus muss man erkennen, dass man die Seile nicht nur von einer Seite anzünden kann, und dass man die beiden Seile nicht zum gleichen Zeitpunkt abbrennen muss. Die Lösung lautet daher: Theo zündet beide Seile gleichzeitig an. Das erste Seil an beiden Enden, das zweite nur von einer Seite. Ist das erste Seil vollständig abgebrannt, ist eine halbe Stunde vergangen. Zu diesem Zeitpunkt wird das zweite Seil angezündet an der Seite, an dem es noch nicht brannte. Die restliche halbe Stunde, die das zweite Seil noch brennen würde, wird dadurch halbiert. Die verbleibende Brenndauer des zweiten Seils beträgt daher genau noch 15 Minuten. Dabei ist es egal, ob nach einer halben Stunde erst 20 oder vielleicht schon 80 Prozent des Seils abgebrannt sind. Insgesamt sind nach dem kompletten Verbrennen des zweiten Seils genau 45 Minuten vergangen. Also: Ende. □

Die schlaue Vergiftung eines Säufers

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Eine Eckkneipe wird jeden Abend von zwei Zwillingsbrüdern besucht. Hinter dem Tresen kellnert, ebenfalls täglich, eine Dame, die einen der Brüder auf den Tode nicht ausstehen kann. Grund hierfür ist - ach, wie klischeehaft eine Jahrzehnte zurückliegende Zurückweisung, die der inzwischen gealterte Mann schon längst vergessen hat. Da die beiden Brüder sich bis aufs Haar gleichen, ist es der Barkeeperin unmöglich, sie nur anhand ihres Aussehens zu unterscheiden. Der einzig erkennbare Unterschied: Das Objekt ihrer grenzenlosen Abneigung trinkt seine Drinks unfassbar langsam, während der geduldete Zwilling seine Drinks runterkippt wie nichts. Eines Tages fasst die Kellnerin den grausigen Plan, den verhassten Bruder umzubringen. Als die Männer an diesem Abend am Tresen ihre Getränke bestellen, füllt sie die gleiche Menge des Drinks, die gleiche Menge Eis und die gleiche Menge Gift in ihre Gläser. Als beide ausgetrunken haben, dauert es nicht mehr lange, bis das tatsächliche Ziel ihres Anschlags tot umkippt. Dem anderen Bruder fehlt nichts, obwohl er die gleiche Mischung serviert bekommen hat. Die Frage also lautet: Wie ist das möglich?*

Lösung. Die Kellnerin hat das Gift in die Eiswürfel injiziert, bzw. eine vergiftete Flüssigkeit zu Eiswürfeln gefroren. Der geduldete Bruder trinkt seinen Drink so zügig, dass die Eiswürfel nicht zu schmelzen beginnen, das Gift also nicht freigeben. Bei dem langsam trinkenden Bruder vermischt sich bald das Getränk mit dem unheilbringenden Gift und er stirbt. □

Die schlaue Frage

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man geht einen Weg entlang und kommt an eine Weggabelung, wo es nur einen Weg nach links und einen Weg nach rechts gibt. Ein Weg führt zum Ziel, der andere in die ewige Verdammnis. Man hat allerdings keine Ahnung, welcher Weg wohin führt. An der Gabelung steht ein Haus in dem* 2 *Zwillingsbrüder wohnen, die absolut gleich aussehen. Man weiß, dass einer von den beiden Brüdern immer lügt und der andere immer die Wahrheit sagt. Einer der Brüder steht vor der Tür, man hat allerdings keine Ahnung, ob es der ist, der immer lügt oder der, der immer die Wahrheit sagt. Man darf dem Mann vor der Tür nur eine Frage stellen. Welche Frage muss man ihm stellen, um herauszufinden, welchen Weg man gehen muss, der nicht in die ewige Verdammnis führt?*

Lösung. Man fragt ihn, welchen Weg sein Bruder nennen würde und geht den anderen! Erklärung: Man gehe einmal davon aus, dass der linke Weg der Richtige und der rechte Weg der Falsche ist. Würde man die Brüder direkt fragen, würde der, der die Wahrheit sagt den linken und der Lügner den rechten Weg empfehlen. Fragt man nun aber, welchen Weg der Bruder empfiehlt, antworten sie wie folgt: Der, der immer die Wahrheit sagt, empfiehlt, was sein Bruder wirklich sagen würde: den rechten Weg. Der Lügner sagt das Gegenteil von dem, was sein Bruder wirklich sagen würde: also auch den rechten Weg. Also sagen auf die Frage

- Welchen Weg würde mir dein Bruder sagen? - beide, man soll den rechten Weg nehmen. Also nimmt man den linken Weg und kommt an sein Ziel! □

Die Aufnahmeprüfung

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein alter König suchte einen neuen Schatzmeister. Alle Bewerber bekamen von ihm folgende Aufgabe, mit der der König das logische Denkvermögen des jeweiligen Kandidaten prüfen wollte: „Vor Ihnen steht eine Kiste. In dieser Kiste liegen Säcke. In jedem dieser Säcke befindet sich die gleiche Anzahl an Goldmünzen. Insgesamt sind zwischen* 150 *und* 200 *Goldmünzen in der Kiste. Es ist mehr als ein Sack in der Kiste und in jedem Sack ist mehr als eine Münze. Wenn ich Ihnen die Gesamtanzahl der Münzen nennen würde, dann könnten Sie mir genau sagen, wie viele Säcke in der Kiste sind und wie viele Münzen in einem Sack sind. Wie viele Goldmünzen sind insgesamt in der Kiste, wie viele Säcke sind in der Kiste und wie viele Münzen sind in jedem Sack?“*

Lösung. Formuliert man das Rätsel etwas anders, so wird der Lösungsweg deutlicher: Gesucht wird eine Zahl zwischen 150 und 200. Zerlegt man diese Zahl in das Produkt ihrer Primzahlen (Primfaktorzerlegung), so besteht dieses Produkt aus genau zwei identischen Primzahlen. Denn ist diese Zahl nicht das Produkt zweier identischer Primzahlen, dann gäbe es mehrere Möglichkeiten diese Zahl als Produkt zweier Zahlen darzustellen, was nicht sein kann, wenn nach Voraussetzung gilt, dass man beim Nennen der Gesamtanzahl der Münzen schon sagen kann, wie viele Säcke in der Kiste sind und wie viele Münzen in einem Sack sind. Mit anderen Worten: Gesucht wird eine Primzahl, deren Quadrat zwischen 150 und 200 liegt. Die einzige Primzahl, die diese Bedingungen erfüllt ist 13: $13^2 = 169$. Also sind in der Kiste 13 Säcke mit je 13 Münzen. Insgesamt sind 169 Münzen in der Kiste. □

Der Ludwig und die lügenden Aliens

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ludwig ist auf dem Mars gelandet und findet dort zwei identisch aussehende Aliengruppen vor. Er weiß, dass eine der beiden Aliengruppen immer die Wahrheit sagt, und die andere immer lügt. Sofort nach seiner Landung treten ihm drei Alienmänner gegenüber und Ludwig will herausfinden, welcher der Aliens zu welcher Gruppe gehört. Ludwig fragt das erste Alien: „Zu welcher der beiden Gruppen gehörst Du?“ Das gefragte Alien murmelt etwas völlig Unverständliches, worauf sich das zweite Alien zu Wort meldet und sagt: „Er hat gesagt, dass er nur die Wahrheit sagt, und das stimmt, denn auch ich sage nur die Wahrheit und kenne ihn.“ Da protestiert das dritte Alien sofort und ruft: „Lüge. Ich bin hier der einzige, der die Wahrheit sagt. Diese zwei gehören zur Lügnergruppe!“ Diese Aussagen genügen Ludwig bereits, um die drei Aliens mit absoluter Sicherheit den zwei Gruppen zuordnen zu können. Zu welchen Gruppen gehören die drei?*

Lösung. Das erste Alien hat auf jeden Fall - egal welcher Gruppe es angehört - gesagt, dass es immer die Wahrheit sagt. Da das zweite Alien dies bestätigt, sagt es die Wahrheit. Da es zudem sagt, dass das erste Alien die Wahrheit sagt, gehören also die ersten beiden Aliens zu denen, die immer die Wahrheit sagen. Folglich gehört das dritte Alien zu der Gruppe der Lügner. Damit ist diese Aufgabe nun vollständig gelöst! □

Der Spion

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Spion wurde eines Tages losgeschickt um eine feindliche Stadt auszuspionieren. Als er am Haupttor ankam musste er feststellen, dass man die Stadt nur mit einer Art Codewort betreten konnte, denn vor dem Tor stand ein Wächter. Er legte sich also auf die Lauer, um dieses Codewort herauszufinden. Zuerst kam ein Händler. Der Wächter sagte ihm eine Zahl: „Sechzehn.“ Darauf antwortete der Händler: „Acht.“ Er durfte die Stadt betreten. Wenig später kam ein Soldat. Wieder nannte der Wächter eine Zahl: „Acht.“ Der Soldat sagte: „Vier.“ Auch er durfte passieren. Nun kam eine alte Frau, die ebenfalls in die Stadt wollte. Nachdem der Wächter „Achtundzwanzig“ gesagt hatte, antwortete sie mit: „Vierzehn.“ Als auch sie in die Stadt gehen durfte war sich der Spion sicher, dass er die Lösung wusste. Er ging zum Wächter hin. Dieser sagte: „Vierzehn.“ Der Spion antwortete: „Sieben.“ Sofort wurde er verhaftet. Man finde die Antwort, die der Spion hätte geben müssen, heraus! Es ist allerdings nicht offensichtlich.*

Lösung. Er hätte „Acht “ antworten müssen, denn die Zahlen, die die Leute sagten, die vor ihm die Stadt betreten haben, entsprachen jeweils der Buchstabenanzahl, mit denen das Wort, das der Wächter nannte, geschrieben wird. ☐

Die königliche Hochzeit

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Der arme, aber ehrliche Edelmann Siegmund und die Prinzessin Viktoria möchten gegen den Willen ihres Vaters heiraten. Der König macht Siegmund ein Angebot: „Aus dieser goldenen Schachtel kannst du eine von zwei Karten ziehen, von denen eine mit Hochzeit und eine mit Hinrichtung beschriftet ist.“ Viktoria kann Siegmund jedoch warnen und raunt ihm zu: „Vorsicht, mein Geliebter! Auf beiden Karten steht Hinrichtung!“ Am nächsten Tag heiraten die beiden. Wie ist das möglich, dass Siegmund an der List des Königs nicht scheiterte?*

Lösung. Siegmund wurde nicht hingerichtet, obwohl auf beiden Karten Hinrichtung stand. Möglich ist dies nur, wenn Siegmund die von ihm gewählte Karte nicht aufdeckt. Stattdessen lässt er sich die andere Karte zeigen, auf der mit Sicherheit Hinrichtung steht. Der König hatte im Vorfeld gesagt, dass eine Karte mit Hochzeit und eine mit Hinrichtung beschriftet sei. Da die Karte, die Siegmund nicht gezogen hat, die Hinrichtungs-Karte ist, müsste nach Aussage des Königs die andere Karte die Hochzeits-Karte sein. Siegmund löst das Dilemma auf einfache Weise: Er zerreißt die eigene Karte mit den Worten, dass auf dieser dann wohl Hochzeit stehe. ☐

Die Geburtstagsparty

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Jemand feiert seine Geburtstagsparty. Insgesamt sind* 78 *Gäste anwesend. Da sich nicht alle Gäste kennen, werden an diesem Abend viele Hände geschüttelt. Auch der Gastgeber begrüßt einige Gäste mit Handschlag. Als er in einer ruhigen Minute das heitere Treiben in seiner Wohnung beobachtet, kommt ihm plötzlich die Frage, wie hoch wohl die Wahrscheinlichkeit ist, dass es mindestens zwei Leute im Raum gibt, die einer gleichen Anzahl von Leuten die Hand gegeben haben. Es bringt nichts die Gäste zu befragen, da die meisten nicht mehr so genau wissen, wie viele Hände sie geschüttelt haben. Kennt man die Lösung?*

Lösung. Es sind also zunächst insgesamt 79 Leute auf der Party anwesend. Also kann jeder der 79 Anwesenden zwischen 0 und 78 Hände geschüttelt haben. Man hat also für 79 Leute genau 79 Ausprägungen. Wenn einer allen die Hand geschüttelt hat, dann kann es keinen geben, der niemanden die Hand geschüttelt hat. Und gibt es einen, der niemanden die Hand geschüttelt hat, dann kann es keinen geben, der allen die Hand geschüttelt hat. Folglich haben die 79 Leute höchstens 78 Ausprägungen. Das bedeutet nach dem Schubfachprinzip, dass es mit der Wahrscheinlichkeit von 100 Prozent mindestens 2 Personen gibt, die gleich vielen Gästen die Hand geschüttelt haben. ☐

Das Münzenspiel

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man sitzt einem Gegenspieler an einem Tisch gegenüber. Jeder hat eine große Anzahl von Ein-Cent-Münzen zur Verfügung. Das Spiel besteht darin, dass einer beginnt, eine Münze auf dem Tisch zu platzieren und danach abwechselnd so lange Münzen gelegt werden, bis keine weitere Münze ohne Überlappung hinzugefügt werden kann. Die Münzen können beliebig paltziert werden, dürfen aber nicht über den Tischrand hinausragen. es hat derjenige gewonnen, der die letzte Münze legen kann. Man möchte natürlich gewinnen. Der Gegenüber bietet an, dass man den ersten Zug machen darf. Sollte man das Angebot annehmen?*

Lösung. Ja, das sollte man. Denn mit der richtigen Taktik ist es dem Beginner des Spiels möglich immer als Sieger hervorzugehen. Hierzu muss man erste Münze exakt in der Mitte des Tisches platzieren und danach den jeweiligen Zug des Gegenspielers exakt um 180° verdreht (also gegenüber) wiederholen. Somit ist sichergestellt, dass (inklusive der zentralen Münze) insgesamt eine ungerade Anzahl von Münzen auf dem Tisch Platz hat und man wird als Beginner somit immer den letzten Zug ausführen können und gewinnen. ☐

Der Autokauf

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Gerd, Karl und Carsten kaufen sich jeder ein neues Auto. Es handelt sich um ein rotes, ein grünes und ein Cabriolet. Sie bezahlen für die Autos Preise von* 20.000 *Euro,* 30.000 *Euro und* 40.000 *Euro.* 1*.: Gerds Auto kostet* 10.000 *Euro weniger als Carstens Wagen.* 2*.: Das rote Auto ist nicht das billigste und das Cabriolet nicht das teuerste Fahrzeug.* 3*.: Karls Auto ist nicht das teuerste.* 4*.: Carsten hat nicht das grüne Auto und Karl nicht das Cabriolet gekauft. Welches Auto hat Gerd zu welchem Preis gekauft?*

Lösung. Gerd hat das Cabriolet für 30.000 Euro gekauft. Lösungsweg: Da Gerds Auto 10.000 Euro billiger sein muss als Carstens, kommen für Gerd nur die beiden billigeren in Frage. Da Karl nicht das teuerste kauft, bleibt nur noch die Möglichkeit: Carsten 40.000 Euro, Gerd 30.000 Euro und Karl 20.000 Euro. Das Billigste (20.000 Euro) darf nicht rot sein, also bleibt nur grün und Cabriolet. Karl hat aber nicht das Cabriolet gekauft, also muss es grün sein. Für 40.000 Euro darf es nicht das Cabriolet sein. Nachdem Karl schon grün hat, kann es nur rot sein. Das heißt: für 30.000 Euro bleibt nur das Cabriolet. □

Die Kaffeehausumfrage

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Dem Leiter eines Hotels wurde das Ergebnis einer Umfrage zum Genuss von Kaffee und Tee in seinem Restaurant vorgelegt und sieht nun folgendermaßen aus:*

Zahl der Befragten: 100
Von ihnen trinken Kaffee: 78
Von ihnen trinken Tee: 71
Von ihnen trinken Kaffee und Tee: 48

Der Bericht wurde als fehlerhaft abgelehnt. Wieso?

Lösung. Von den 78 Kaffeetrinkern trinken 30 keinen Tee ($78 - 48 = 30$). Von den 71 Teetrinkern trinken 23 keinen Kaffee ($71 - 48 = 23$). Das heißt, 30 trinken nur Kaffee, 23 nur Tee, Kaffee und Tee trinken 48 Personen. Als Summe erhält man aber 101. Es wurden aber nur 100 Personen befragt. Der Bericht enthält also einen Fehler. □

Die Zeitmessung mit zwei Sanduhren

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Es werden einem zwei verschieden große Sanduhren gereicht. Der Sand in der kleineren braucht exakt fünf Stunden, um einmal durchzurinnen, bei der größeren dauert es sieben Stunden, bis der Sand komplett durch ist. Die Aufgabe ist nun, durch die Benutzung der beiden Uhren genau* 16 *Stunden abzumessen. Wie geht das?*

Lösung. Man dreht beide Sanduhren gleichzeitig um. Man warte dann fünf Stunden und drehe die kleinere wieder um, sobald der Sand einmal komplett durchgelaufen ist. Man mache das gleiche mit der größeren Uhr, wenn der Sand nach sieben Stunden durch ist. Wenn die kleine Sanduhr nach mittlerweile zehn Stunden zum zweiten Mal abgelaufen ist, drehe man beide Uhren gleichzeitig um. Von jetzt an braucht die größere Uhr noch drei Stunden, bis sie erneut abgelaufen ist. Das macht nun 13 Stunden. Die kleine Sanduhr ist nun drei Stunden gelaufen und muss wieder gedreht werden. Es dauert weitere drei Stunden, bis der Sand wieder komplett durchgelaufen ist. Insgesamt macht das dann 16 Stunden. □

Das Messen eines Glasinhaltes

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Man sitzt in einem Vorstellungsgespräch und vor einem steht ein quadratisches Glas mit Wasser. Der Personaler fragt: „Ist das Glas halb voll oder halb leer?“ Man sagt: „Halb voll!“ Da entgegnet der Personaler: „Dies ist kein Persönlichkeitstest! Messen Sie genau nach! Sie haben aber weder Lineal noch Stifte oder sonstige Hilfsmittel.“ Was kann man tun, um die Frage beantworten zu können?*

Lösung. Es bleibt einem nicht viel mehr als das Glas zu kippen - und zwar möglichst um 45 Grad. Dabei dreht man um die Achse, die durch eine der beiden unteren Kanten des Glases gegeben ist. Dass man um 45 Grad gedreht hat, erkennt man daran, dass der Wasserspiegel parallel ist zu der gedachten Linie durch die eine untere Ecke und der gegenüberliegenden oberen Ecke des Glases. Läuft dabei kein Wasser aus, ist das Glas weniger als halb leer. Wird der Tisch nass, ist es mehr als halb voll - oder man war ungeschickt. □

Der Biologe im Urwald

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Biologe reiste in den Urwald, um dort Forschungen über die Wälder durchzuführen. Dabei traf er auf einen einheimischen Stamm, es stellte sich heraus, dass der Stamm aus Kannibalen besteht, die den Biologen töten und essen wollen. Der Stamm sagte zu ihm, von deiner nächsten Aussage machen wir deine Zubereitung abhängig. Sagst du die Wahrheit, werden wir dich kochen, lügst du, werden wir dich grillen. Was sagt der Forscher, was ihm das Leben rettet?*

Lösung. Er sagte: „Ihr werdet mich grillen!“ Sagt er die Wahrheit, dann müsste er gegrillt werden, aber die Kannibalen wollten ihm in diesen Fall kochen. Also sagt er nicht die Wahrheit. Lügt der Biologe, dann müsste er gekocht werden, aber die Kannibalen wollten ihn in diesem Fall jedoch grillen. Also lügt er auch nicht. Also kann er weder gegrillt noch gekocht werden, denn mit seiner Aussage sagt er nicht die Wahrheit und lügt nicht. □

Der runde Tisch mit Lügnern

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Um einen runden Tisch herum sitzt eine Gruppe von Leuten. Einige dieser Leute sagen immer die Wahrheit, die anderen lügen immer. Jeder am Tisch behauptet, dass sein linker Sitznachbar ein Lügner sei. Und jeder behauptet zusätzlich, dass sein rechter Sitznachbar ebenfalls ein Lügner sei. Lore spricht in die Runde: „An diesem Tisch sitzen* 15 *Personen.“ Darauf erhebt sich Heinz und protestiert lautstark: „Du lügst ja. Hier sitzen im Moment genau* 13 *Personen.“ Wer von den beiden hat recht?*

Lösung. Weil jeder seine zwei Nachbarn der Lüge bezichtigt, muss immer ein Lügner neben einem, der die Wahrheit sagt, sitzen. Daher ist insgesamt eine gerade Anzahl von Personen am Tisch. Lore lügt also. Da Heinz sie der Lüge bezichtigt, sagt er die Wahrheit. Weil er aufgestanden ist, sitzen also ohne ihm 13 am Tisch. Insgesamt sitzen also 14 am Tisch. Und das passt zu der Aussage, dass eine gerade Anzahl von Leuten am Tisch sitzt. □

Die zerbeulte Thermoskanne

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Eine Thermoskanne wird in einen Rucksack gepackt und mit auf einen sehr hohen Berg genommen. Oben ist sie geplatzt, obwohl die Kanne nicht angefasst wurde. Wie ist das zu erklären?*

Lösung. Auf einem hohen Berg ist es sehr kalt, die Flüssigkeit ist abgekühlt, da die Thermoskanne luftdicht verschlossen ist und sich Flüssigkeiten bei Abkühlung zusammenziehen, ist die Kanne geplatzt. Anmerk: Nur, das es so ist, dass die Thermoskanne isoliert, und sich die Flüssigkeit nicht großartig abkühlt, jedoch der Luftdruck auf dem Berg sinkt, so dass der Druck in der Kanne relativ steigt und der empfindliche Glaskörper platzt. □

Der Peter und der Bär

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Peter geht aus dem Haus und wandert ca.* 1 *Kilometer in südliche Richtung, dann entscheidet er sich nach Westen zu drehen und geht dann weitere* 4*km. Auf dem Weg begegnet er einem Bären. Peter bekommt Panik und läuft nach Norden. Nach einem Kilometer stößt er genau auf sein Haus. Welche Farbe hat der Bär?*

Lösung. Peter wohnt direkt auf dem Nordpol: Denn, wenn er von seinem Haus 1km südlich geht und dann 4km westlich geht, dann kann Peter, nachdem er 1 km nördlich gegangen ist, nur dann wieder bei seinem Haus ankommen, wenn sein Haus sich genau auf dem Nordpol befindet. Da der Bär also ein Eisbär sein muss, ist er folglich weiß. □

Die unbeantwortbare Frage

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Ein Mann sagt zu einem anderen: „Ich werde dir eine Frage stellen, auf die es eine eindeutig richtige Antwort gibt - entweder ja oder nein -, aber es wird dir unmöglich sein, meine Frage zu beantworten. Möglicherweise wirst du die richtige Antwort kennen, aber du wirst sie mir nicht geben. Jeder andere wäre vielleicht in der Lage, die Antwort zu liefern, du aber nicht." Welche Frage wird er ihm stellen?*

Lösung. Die Lösung: „Wirst du mir mit nein antworten?" Denn antwortet der Mann mit nein, dann hätte er mit ja antworten müssen, und antwortet er mit ja, dann hätte er jedoch mit nein antworten müssen. □

Die drei Lichtschalter

[Zurück zur Liste]

Aufgabe. *Im Erdgeschoss eines Hauses befinden sich drei Lichtschalter (alle ausgeschaltet), von denen einer mit einer Glühbirne im Keller verkabelt ist. Wie kann man feststellen, welcher der drei Schalter der richtige ist, ohne mehr als einmal in den Keller gehen zu müssen?*

Lösung. Man schaltet den ersten ein, wartet 10 Minuten, macht ihn wieder aus, schaltet dann den zweiten ein und geht in den Keller. Ist die Glühbirne an, ist es der zweite Schalter. Ist sie aus, aber warm, ist es der erste, ansonsten der dritte. □