Skript

zur Vorlesung

Die Navier–Stokes–Gleichungen für kompressible Flüssigkeiten

3. Juni — 8. Juli 1994

Prof. Dr. J. Lorenz
Dipl.–Math. V. Reichelt

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
Lehrstuhl für Numerische Mathematik
RWTH–Aachen

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel der Vorlesung ist es, Studenten der Mathematik mit den Grundgleichungen der Flüssigkeits- und Gasdynamik vertraut zu machen. Dazu werden die Kontinuitätsgleichung, die Impulsgleichung und die Energiegleichung aus den entsprechenden Erhaltungssätzen hergeleitet und einige einfache Umformungen vorgenommen. Die resultierenden partiellen Differentialgleichungen müssen durch thermodynamische Zustandgleichungen ergänzt werden. (Dies sind eigentlich thermostatische Zustandsgleichungen, da man zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort thermodynamisches Gleichgewicht annimmt.)
Die hergeleiteten Differentialgleichungssysteme beschreiben eine große Vielfalt physikalischer Phänomene und spielen eine entsprechend große Rolle für technische Anwendungen. Ich hoffe, eine für Studenten der angewandten Mathematik akzeptable Einführung in dieses umfangreiche Gebiet gefunden zu haben.
Herrn Dipl.–Math. Volker Reichelt danke ich sehr für die sorgfältige Ausarbeitung der Vorlesung.

Aachen, im Oktober 1994
Jens Lorenz

2 Bezeichnungen

Es bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das von der Flüssigkeit ausgefüllte Gebiet. Der Einfachheit halber nehmen wir Ω als zeitunabhängig an. Weiterhin ist $x \in \Omega$ der Vektor der Raumkoordinaten und $t \in [0, \infty)$ die Zeit. Es treten die folgenden Variablen auf, welche im allgemeinen Funktionen von (x, t) sind:

u	:	Geschwindigkeit
ρ	:	Dichte
p	:	Druck
σ	:	Spannungstensor
τ	:	viskoser Spannungstensor
F	:	äußere Kraft pro Masseneinheit
e	:	innere Energie pro Masseneinheit
T	:	absolute Temperatur
q	:	Wärmeleitungsvektor
Q	:	Quellterm für Wärmeerzeugung

Weiter arbeitet man mit den folgenden Transportkoeffizienten:

μ	:	1. Viskositätskoeffizient (dynamische Viskosität)
λ	:	2. Viskositätskoeffizient
κ	:	Wärmeleitungskoeffizient

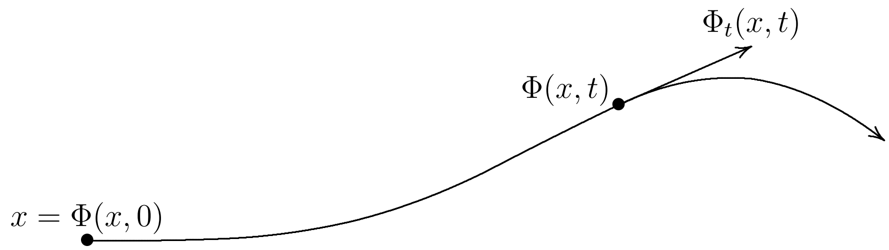
Die Größen $F = F(x, t)$, $Q = Q(x, t)$ werden wir als gegeben ansehen. Von den vier thermodynamischen Variablen ρ, p, e, T sind nur zwei unabhängig. Die anderen sind durch sie über thermodynamische Zustandsgleichungen bestimmt. (Es wird zu jedem Zeitpunkt t und an jedem Ort x thermodynamisches Gleichgewicht angenommen.)

3 Eulersche Beschreibung der Bewegung

Die Trajektorien von idealisierten Flüssigkeitsteilchen (Punkten) werden durch eine Flußfunktion

$$\Phi : \begin{cases} \Omega \times [0,\infty) & \to & \Omega \\ (x,t) & \to & \Phi(x,t) \end{cases} \tag{1}$$

mit $\Phi(x,0) = x$ beschrieben. Es ist $\Phi(x,t)$ die Raumkoordinate zur Zeit t des Teilchens, welches zur Zeit $t = 0$ am Ort x war.



Dies ist die Eulersche Beschreibung der Bewegung in raumfesten Koordinaten. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit u als zeitliche Ableitung des Ortes der Teilchen:

$$\Phi_t(x,t) = u(\Phi(x,t),t). \tag{2}$$

Ist das Geschwindigkeitsfeld $u = u(x,t)$ gegeben, so kann Φ aus (2) durch Lösen von gewöhnlichen Anfangswertaufgaben gefunden werden. Ist umgekehrt $\Phi = \Phi(x,t)$ bekannt, so läßt sich u wie folgt bestimmen: Zu gegebenem (y,t) bestimme x mit $\Phi(x,t) = y$, also $x = \Phi^{-1}(y,t)$, wobei $\Phi(\cdot,t)$ für festes t als bijektive Funktion von Ω nach Ω vorausgesetzt wird. Dann ist

$$u(y,t) = u(\Phi(x,t),t) = \Phi_t(x,t) = \Phi_t(\Phi^{-1}(y,t),t).$$

4 Massenerhaltung und Kontinuitätsgleichung

Sei $W_0 \subset \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet, und sei

$$W(t) = \Phi(\cdot,t)(W_0) = \{\, \Phi(x,t) \mid x \in W_0 \,\}$$

das Bild von W_0 unter der Abbildung $\Phi(\cdot,t)$. Dann ist

$$M(t) = \int_{W(t)} \rho(x,t)\, dV \tag{3}$$

die Masse in $W(t)$ zur Zeit t. Die Massenerhaltung besagt, daß $M(t)$ konstant ist und daher $dM/dt = 0$ gilt. Um die Ableitung des Integrals auszurechnen, benötigen wir den folgenden Satz:

Satz: (Transportsatz)
Seien u, Φ, W_0, $W(t)$ wie oben, und sei $f(x,t)$ eine C^1–Funktion. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\int_{W(t)} f(x,t)\, dV = \int_{W(t)} \{f_t + \nabla\cdot(fu)\}(x,t)\, dV. \tag{4}$$

□

Hierbei ist

$$\nabla \cdot v = \operatorname{div} v = \sum_{j=1}^{3} D_j v_j \quad \text{mit } D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

die Divergenz eines Vektorfeldes $v = (v_1, v_2, v_3)$.
Der Beweis beruht auf folgendem Lemma.

Lemma: (Wronski–Determinante)
Seien $A(t)$ und $Y(t)$ quadratische Matrizen mit

$$\frac{d}{dt} Y(t) = A(t)\, Y(t). \tag{5}$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \det Y(t) = \operatorname{tr} A(t)\, \det Y(t).$$

Hierbei bezeichnet $\det Y$ die Determinante der Matrix Y und $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ die Spur der Matrix A.
Beweis:
Es bezeichne

$$Y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$$

die i–te Zeile von Y. Wegen (5) gilt dann

$$\frac{d}{dt} Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{6}$$

Im Falle $n = 2$ sei

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

also $\det Y = ad - bc$. Dann ist

$$\frac{d}{dt} \det Y = a'd - b'c + ad' - bc' = \det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Diese Formel läßt sich auf beliebige n verallgemeinern: Aus

$$\det Y = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma\, y_{1\sigma_1} \cdots y_{n\sigma_n}$$

folgt mit der Produktregel

$$\frac{d}{dt} \det Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma\, y_{1\sigma_1} \cdots y'_{i\sigma_i} \cdots y_{n\sigma_n} = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \cdots \\ dY_i/dt \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist die i–te Zeile ausgezeichnet. Die mit „…“ bezeichneten Zeilen sind dieselben wie in Y. Wegen (6) folgt mit der Multilinearität der Determinantenabbildung

$$\frac{d}{dt} \det Y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \det \begin{pmatrix} \cdots \\ Y_j \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Die Determinante in der letzten Formel verschwindet für $i \neq j$, und die Behauptung folgt.
□

Zum Beweis des Transportsatzes wird das Lemma wie folgt angewendet: Aus

$$\Phi_t(x,t) = u(\Phi(x,t),t)$$

folgt mit der Kettenregel

$$\Phi_{xt}(x,t) = u_x(\Phi(x,t),t)\,\Phi_x(x,t).$$

Nun sei

$$J(x,t) = \det \Phi_x(x,t).$$

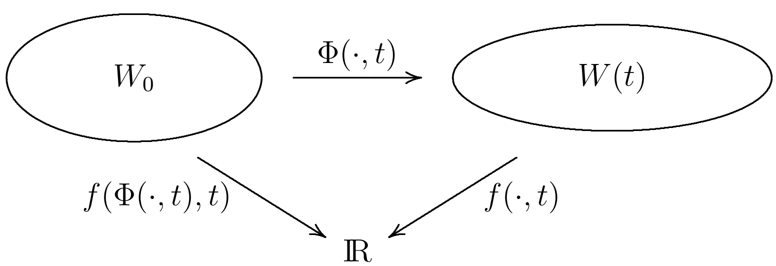
Dann impliziert das Lemma:

$$\frac{\partial}{\partial t} J(x,t) = \operatorname{tr} u_x(\Phi(x,t),t)\,J(x,t) = (\nabla \cdot u)(\Phi(x,t),t)\,J(x,t). \tag{7}$$

Beweis: (Transportsatz)
Nach der Transformationsformel gilt für jedes t

$$\int_{W(t)} f(y,t)\,dV = \int_{W_0} f(\Phi(x,t),t)\,J(x,t)\,dV. \tag{8}$$

Die Skizze stellt die verschiedenen Abbildungen und Gebiete dar, die bei der Transformation eine Rolle spielen:



Differentiation nach t unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von (8) liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{W(t)} f(y,t)\,dV \\
= \;& \int_{W_0} \frac{\partial}{\partial t} f(\Phi(x,t),t)\,J(x,t)\,dV + \int_{W_0} f(\Phi(x,t),t)\,\frac{\partial}{\partial t}J(x,t)\,dV \\
= \;& \int_{W_0} \{f_t + \nabla f \cdot u\}(\Phi(x,t),t)\,J(x,t)\,dV + \int_{W_0} \{f\,(\nabla \cdot u)\}(\Phi(x,t),t)\,J(x,t)\,dV \\
= \;& \int_{W_0} \{f_t + \nabla f \cdot u + f\,(\nabla \cdot u)\}(\Phi(x,t),t)\,J(x,t)\,dV \\
= \;& \int_{W_0} \{f_t + \nabla \cdot (fu)\}(\Phi(x,t),t)\,J(x,t)\,dV,
\end{aligned}$$

wobei (7) verwendet wurde. Erneute Anwendung der Transformationsformel ergibt

$$\frac{d}{dt}\int_{W(t)} f(y,t)\,dV = \int_{W(t)} \{f_t + \nabla \cdot (fu)\}(y,t)\,dV,$$

und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Aus der Massenerhaltung folgert man durch Anwendung des Transportsatzes mit $f = \rho$:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{W(t)} \rho \, dV = \int_{W(t)} \{\rho_t + \nabla \cdot (\rho u)\} \, dV.$$

Da W(t) ein beliebiges beschränktes Teilgebiet sein kann, folgt bei angenommener Glattheit von ρ (Lokalisierung):

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \tag{9}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung.

5 Impulsgleichung

Es seien u, Φ, W_0, $W(t)$, ρ wie oben definiert. Dann ist

$$Im(t) = \int_{W(t)} (\rho u)(y,t) \, dV \tag{10}$$

der Impuls der Masse in $W(t)$. Nach Newtons Gesetz

$$\text{Änderung des Impulses} = \text{Kraft}$$

ist $\frac{d}{dt} Im(t)$ gleich der Kraft $K(t)$, welche auf die Masse in $W(t)$ einwirkt. Wir nehmen an, daß sich $K(t)$ in eine Volumenkraft (wie Gravitation) und eine auf den Rand $\partial W(t)$ einwirkende Kraft zerlegen läßt. Die Volumenkraft sei von der Form

$$K_1(t) = \int_{W(t)} \rho(y,t) \, F(y,t) \, dV.$$

Dabei ist $F(y,t)$ ein gegebenes Feld, z. B. die Schwerebeschleunigung. Da $\rho \, dV$ die Dimension einer Masse hat, ergibt sich für F die Dimension einer Beschleunigung. Für die Randkraft nehmen wir die Form an

$$K_2(t) = \int_{\partial W(t)} \sigma(y,t) \, n(y,t) \, dS.$$

Dies ist ein Oberflächenintegral. Hierbei ist $n(y,t)$ die äußere Einheitsnormale zu $\partial W(t)$ im Punkt y, und $\sigma(y,t) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist der Spannungstensor. Wir werden unten beschreiben, in welcher Beziehung σ zum Druck p und zum Deformationstensor $\operatorname{def} u$ steht. Da dS die Dimension einer Fläche hat, ergibt sich für die Dimension von σ:

$$[\sigma] = \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}\right] = [\text{Druck}].$$

Bemerkung:
Aus dem Drehimpulssatz läßt sich begründen, daß σ symmetrisch ist. $\square$

Das Newtonsche Gesetz ergibt damit

$$\frac{d}{dt}\int_{W(t)}(\rho u)(y,t)\,dV = \int_{W(t)}(\rho F)(y,t)\,dV + \int_{\partial W(t)}(\sigma n)(y,t)\,dS. \tag{11}$$

Nach dem Stokesschen Satz gilt für (hinreichend glatte) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\int_W D_j f\,dV = \int_{\partial W} f\,n_j\,dS \quad \text{für } j = 1,2,3;$$

dabei ist $D_j = \partial/\partial x_j$, und n_j ist die j–te Komponente von n. Daraus ergibt sich für ein Vektorfeld $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der Gaußsche Satz:

$$\int_W \nabla \cdot \tilde{f}\,dV = \int_{\partial W} \tilde{f} \cdot n\,dS.$$

Die j–te Komponente von (11) lautet

$$\frac{d}{dt}\int_{W(t)} \rho\,u_j\,dV = \int_{W(t)} \rho F_j\,dV + \int_{\partial W(t)} \sigma_j\,n\,dS.$$

(Dabei ist σ_j die j–te Zeile von σ.) Das Randintegral $\int_{\partial W(t)} \sigma_j\,n\,dS$ formen wir mit dem Gaußschen Satz in ein Volumenintegral um:

$$\int_{\partial W(t)} \sigma_j\,n\,dS = \int_{W(t)} \nabla \cdot \sigma_j\,dV.$$

Auf die linke Seite der vorletzten Gleichung wenden wir den Transportsatz an:

$$\frac{d}{dt}\int_{W(t)} \rho\,u_j\,dV = \int_{W(t)} \{(\rho\,u_j)_t + \nabla \cdot (\rho\,u_j\,u)\}\,dV.$$

Dies impliziert die Gleichung

$$\int_{W(t)} \{(\rho\,u_j)_t + \nabla \cdot (\rho\,u_j\,u)\}\,dV = \int_{W(t)} \{\rho F_j + \nabla \cdot \sigma_j\}\,dV,$$

aus der man mittels Lokalisierung die folgende Gleichung gewinnt:

$$(\rho\,u_j)_t + \nabla \cdot (\rho\,u_j\,u) = \rho F_j + \nabla \cdot \sigma_j. \tag{12}$$

Wir wollen die drei Gleichungen für $j = 1,2,3$ in einer Vektorgleichung zusammenfassen. Sind $a, b \in \mathbb{R}^3$, so bezeichnen wir mit

$$a \circ b = ab^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ihr dyadisches Produkt.

Die Gleichungen (12) sind dann die Komponenten der Impulsgleichung

$$(\rho\, u)_t + \nabla \cdot (\rho\, u \circ u) = \rho F + \nabla \cdot \sigma. \tag{13}$$

Hierbei gilt folgende Vereinbarung: Ist

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

eine Matrix mit Zeilen $A_j = A_j(x)$, so sei

$$\nabla \cdot A = \begin{pmatrix} \nabla \cdot A_1 \\ \nabla \cdot A_2 \\ \nabla \cdot A_3 \end{pmatrix}.$$

Der Spannungstensor σ ist nicht von den anderen Variablen unabhängig. Wie er von u und p abhängt, wird im nächsten Abschnitt erläutert.

6 Beziehung von σ zu u und p

Es ist üblich, für den Spannungstensor σ die Form

$$\sigma = -pI + \tau \tag{14}$$

anzunehmen. Hierbei ist $p = p(x,t)$ der thermodynamische Druck und τ der viskose Spannungstensor. Es bezeichne $\operatorname{def} u$ den sogenannten Deformationstensor, welcher definiert ist durch

$$(\operatorname{def} u)_{ij} = D_i u_j + D_j u_i \quad \text{für } i,j = 1,2,3$$

oder in anderer Notation:

$$\operatorname{def} u = u_x + (u_x)^T.$$

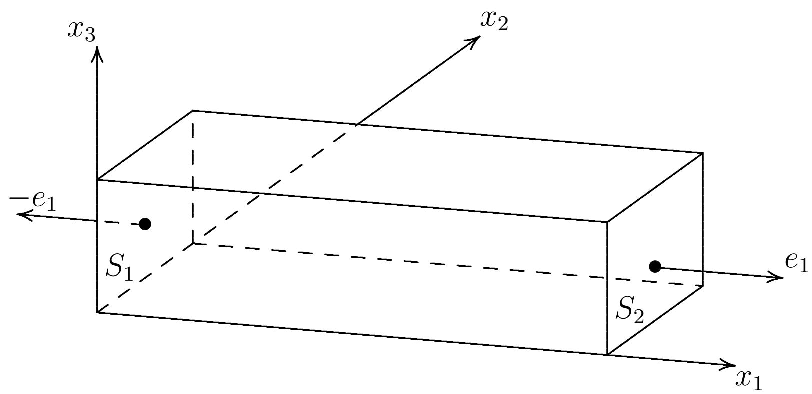
Die fundamentale Annahme für die Navier–Stokes–Gleichungen ist die Beziehung

$$\tau = \lambda(\nabla \cdot u)I + \mu \operatorname{def} u \tag{15}$$

mit Konstanten λ, μ. (Im allgemeinen hängen λ und μ von thermodynamischen Variablen wie ρ und T ab, sind aber unabhängig von u.)
Setzen wir die Beziehungen $\sigma = -pI + \tau$ und $\tau = \lambda(\nabla \cdot u)I + \mu \operatorname{def} u$ in die Impulsgleichung (13) ein, so ergibt sich

$$(\rho\, u)_t + \nabla \cdot (\rho\, u \circ u) + \nabla p = \rho F + \nabla(\lambda\, \nabla \cdot u) + \nabla \cdot (\mu \operatorname{def} u). \tag{16}$$

Bemerkung: (Die Beziehung $\sigma = -pI + \tau$)
a) Um den Anteil $-pI$ in σ zu veranschaulichen, betrachten wir folgendes Gebiet:

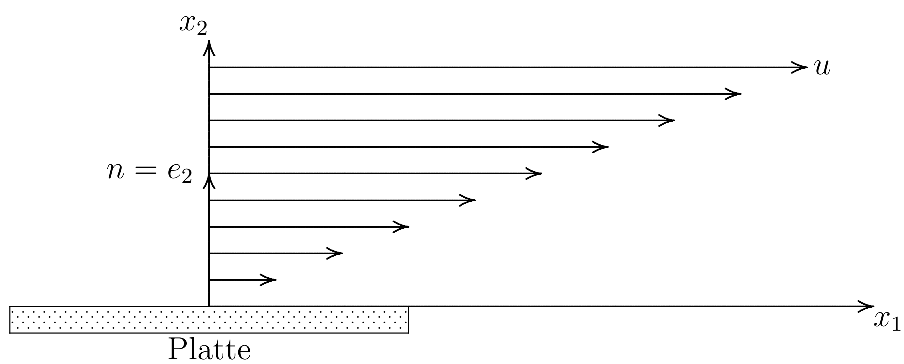


An der Fläche S_1 herrsche der Druck p_1 und an der Fläche S_2 der Druck $p_2 < p_1$. Es ist $n = -e_1$ auf S_1 und $n = e_1$ auf S_2. Wenn S_1 und S_2 die Größe ΔS haben, so wird

$$\int_{S_1 \cup S_2} -p\, n\, dS = \Delta S \left\{-p_1 \left(-e_1\right) - p_2\, e_1\right\} = \Delta S \left(p_1 - p_2\right) e_1.$$

Das Druckgefälle führt also zu einer Kraft in e_1–Richtung.

b) Zur Illustration von τ diene das folgende Geschwindigkeitsfeld:



$$u_1(x_1, x_2, x_3) = kx_2, \quad u_2 = u_3 = 0 \quad \text{mit } k > 0.$$

Auf die Platte mit der Normalen $n = e_2$ wirkt eine Kraft in Richtung e_1 (Reibungskraft durch die Bewegung der Teilchen entlang der Platte). Es gilt

$$Du = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \operatorname{def} u = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\nabla \cdot u = 0$ und $n = e_2$ wird $\tau n = \lambda(\nabla \cdot u)n + \mu \operatorname{def} u\, n = \mu k e_1$. Dies stimmt mit der Anschauung überein, daß auf die Platte eine Kraft in Richtung e_1 wirkt. Die Proportionalität der Kraft zu k ist experimentell bestätigt. □

7 Umformungen der Impulsgleichung

Die Impulsgleichung (16)

$$(\rho\, u)_t + \nabla \cdot (\rho\, u \circ u) + \nabla p = \rho F + \nabla(\lambda\, \nabla \cdot u) + \nabla \cdot (\mu \operatorname{def} u)$$

soll noch weiter vereinfacht werden. Die linke Seite der Gleichung enthält noch einen Anteil, der direkt aus der Kontinuitätsgleichung folgt und daher eliminiert werden soll. Auf der rechten Seite sollen die zweiten Ableitungen von u umgeschrieben werden.
Der Term $(\rho u)_t = \rho_t u + \rho u_t$ auf der linken Seite der Impulsgleichung beinhaltet noch den Ausdruck ρ_t. Es liegt nahe, ihn mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung umzuschreiben. Dazu betrachten wir zunächst den Term

$$\nabla \cdot (\rho\, u \circ u).$$

Die i–te Komponente ist

$$\nabla \cdot (\rho\, u_i\, u) = \sum_{j=1}^{3} D_j(\rho\, u_i\, u_j) = \sum_{j=1}^{3} D_j(\rho\, u_j)\, u_i + \rho \sum_{j=1}^{3} u_j\, D_j u_i.$$

Zur Abkürzung der zweiten Summe benutzt man den Differentialausdruck

$$u \cdot \nabla = \sum_{j=1}^{3} u_j\, D_j,$$

welcher auf die skalare Funktion u_i bzw. komponentenweise auf u angewendet wird. Damit ergibt sich für die i–te Komponente

$$\nabla \cdot (\rho\, u_i\, u) = \nabla \cdot (\rho\, u)\, u_i + \rho\, (u \cdot \nabla)\, u_i$$

bzw. für den gesamten Vektor

$$\nabla \cdot (\rho\, u \circ u) = \nabla \cdot (\rho\, u)\, u + \rho\, (u \cdot \nabla)\, u.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(\rho\, u)_t + \nabla \cdot (\rho\, u \circ u) &= \rho_t\, u + \rho\, u_t + \nabla \cdot (\rho\, u)\, u + \rho\, (u \cdot \nabla)\, u \\ &= (\rho_t + \nabla \cdot (\rho\, u))\, u + \rho\, (u_t + (u \cdot \nabla)\, u).\end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet aufgrund der Kontinuitätsgleichung. Mit dieser Identität nimmt die Impulsgleichung folgende Gestalt an, wenn man durch ρ dividiert:

$$u_t + (u \cdot \nabla)\, u + \frac{1}{\rho}\nabla p = F + \frac{1}{\rho}\nabla(\lambda\, \nabla \cdot u) + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (\mu \operatorname{def} u). \tag{17}$$

Wenden wir uns nun der rechten Seite der Impulsgleichung zu. Folgende formale Rechnung läßt sich leicht rechtfertigen. Wir setzen

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u_x &= u\mathcal{D}^T, \\ (u_x)^T &= \mathcal{D}u^T, \\ \operatorname{def} u &= u_x + (u_x)^T = u\mathcal{D}^T + \mathcal{D}u^T, \\ \nabla \cdot \operatorname{def} u &= (\operatorname{def} u)\, \mathcal{D} = u\mathcal{D}^T\mathcal{D} + \mathcal{D}u^T\mathcal{D}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathcal{D}u^T\mathcal{D} = \nabla(\nabla \cdot u)$, und $\mathcal{D}^T\mathcal{D} = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = \Delta$ ist der Laplaceoperator. Damit wird

$$\nabla \cdot \operatorname{def} u = \nabla(\nabla \cdot u) + \Delta u.$$

Mit Konstanten λ, μ erhält man dann die folgende Form der Impulsgleichung:

$$u_t + (u \cdot \nabla)\, u + \frac{1}{\rho}\nabla p = F + \frac{\lambda + \mu}{\rho}\nabla(\nabla \cdot u) + \frac{\mu}{\rho}\Delta u. \tag{18}$$

8 Navier–Stokes–Gleichungen für inkompressible Strömungen

In den Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho\, u) &= 0 \\ u_t + (u \cdot \nabla)\, u + \frac{1}{\rho}\nabla p &= F + \frac{\lambda + \mu}{\rho}\nabla(\nabla \cdot u) + \frac{\mu}{\rho}\Delta u \end{aligned} \tag{19}$$

sehen wir $F = F(x,t)$ als gegebenes Feld und μ, λ als bekannte Materialkonstanten an. Die vier Gleichungen für die fünf Unbekannten ρ, p, $u = (u_1, u_2, u_3)$ sind noch unterbestimmt. In vielen Fällen (z. B. in der Hydrodynamik) ist es angebracht, die Dichte ρ als eine bekannte Konstante ρ_0 anzusehen. Dann vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu der Nebenbedingung

$$\nabla \cdot u = 0.$$

Das heißt, das Geschwindigkeitsfeld ist zu jedem Zeitpunkt divergenzfrei. Damit entfällt auch der mittlere Term auf der rechten Seite der Impulsgleichung. Im Falle $\rho \equiv \rho_0 =$ konstant erhält man also

$$\begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla)\, u + \frac{1}{\rho_0}\nabla p &= F + \frac{\mu}{\rho_0}\Delta u \\ \nabla \cdot u &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Man nennt

$$\nu = \mu/\rho_0$$

die kinematische Viskosität. Normiert man $\rho_0 = 1$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla p &= \nu\Delta u + F \\ \nabla \cdot u &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Dies ist das System der inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen, falls $\nu > 0$. Für $\nu = 0$ spricht man von den inkompressiblen Eulergleichungen. Für $\nu > 0$ ist das System in einem geeigneten Sinn „abstrakt parabolisch". Der Druck p spielt die Rolle eines Lagrangeschen Multiplikators zur Nebenbedingung $\nabla \cdot u = 0$. Unter geeigneten Anfangs- und Randbedingungen ist bekannt, daß lokal (in der Zeit) eine eindeutige Lösung existiert. In zwei Raumdimensionen (2D) ist in vielen Fällen sogar globale eindeutige Lösbarkeit bekannt (Existenz einer glatten Lösung für alle Zeiten). Die globale Lösbarkeit in drei Raumdimensionen (3D) ist ein wichtiges offenes Problem.

9 Navier–Stokes–Gleichungen mit einer Zustandsgleichung $p = \bar{p}(\rho)$

Bisher haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) &= 0 \\ u_t + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho}\nabla p &= F + \frac{\lambda + \mu}{\rho}\nabla(\nabla \cdot u) + \frac{\mu}{\rho}\Delta u \end{aligned} \tag{22}$$

hergeleitet. Wenn Temperatureffekte keine Rolle spielen, aber Kompressibilität nicht vernachlässigt werden kann, können sie durch eine Zustandsgleichung

$$p = \bar{p}(\rho)$$

mit bekannter Funktion $\bar{p}$ vervollständigt werden. Eine oft benutzte Zustandsgleichung ist

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

mit Konstanten p_0, ρ_0, γ. Aus der Thermodynamik läßt sich die Beziehung

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

begründen, wobei c_p bzw. c_v die spezifische Wärme bei konstantem Druck bzw. bei konstantem Volumen ist. Aus der statistischen Mechanik läßt sich die Beziehung

$$\gamma = \frac{n+2}{n}$$

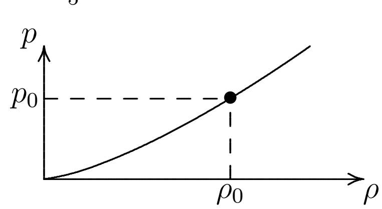
begründen, wobei n die Anzahl von Rotations- und Vibrationsfreiheitsgraden der Moleküle ist. Dabei ist Gleichverteilung der Energie auf alle Freiheitsgrade angenommen. Wegen

$$3 \leq n < \infty$$

ergibt sich

$$1 < \gamma \leq \frac{5}{3}.$$

Für Luft wird der Wert $\gamma \approx 1{,}4 = \frac{7}{5}$ angegeben.



Sei $p = \bar{p}(\rho)$, also $p_x = \bar{p}'(\rho)\rho_x$. Damit ergibt sich für ρ, u das System

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) &= 0 \\ u_t + (u \cdot \nabla)u + \frac{\bar{p}'(\rho)}{\rho}\nabla\rho &= F + \frac{\lambda + \mu}{\rho}\nabla(\nabla \cdot u) + \frac{\mu}{\rho}\Delta u. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0$ ist skalar hyperbolisch für ρ bei bekanntem u. Unter der Annahme

$$\mu > 0, \quad 2\mu + \lambda > 0$$

ist die zweite Gleichung ein parabolisches System zweiter Ordnung für u bei bekanntem ρ. Insgesamt erhält man ein gekoppelt parabolisch–hyperbolisches System. Häufig sind μ und λ klein. Wenn man $\mu = \lambda = 0$ setzt, erhält man für ρ, u ein sogenanntes hyperbolisches System erster Ordnung; eine Form der kompressiblen Eulergleichungen.

10 Energiegleichung

Es bezeichne $e = e(x,t)$ die innere Energie pro Masseneinheit, so daß

$$\int_W \rho(x,t)\, e(x,t)\, dV$$

die innere Energie zur Zeit t in W ist. (Die innere Energie ist ein Maß für die Wärmebewegung und innermolekulare Schwingungen.) Weiter ist

$$\int_W \frac{1}{2}\rho|u|^2\, dV$$

die kinetische Energie, wenn wir mit

$$|u| = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

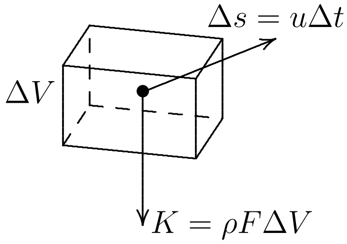
die Euklidische Norm bezeichnen. Insgesamt ist

$$E(t) = \int_{W(t)} \left\{ \frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e \right\} dV \tag{23}$$

die Energie in $W(t)$. Die Änderung $\frac{d}{dt}E(t)$ der Energie wird durch Volumenkräfte, durch Randkräfte, durch Wärmeerzeugung (oder -vernichtung) in $W(t)$ und durch Wärmefluß über den Rand $\partial W(t)$ hervorgerufen. Die Änderung der Energie durch die Volumenkraft ρF führt zu dem Term

$$\int_{W(t)} \rho F \cdot u\, dV.$$

Dies illustriert die folgende Skizze:



Das Gebiet mit Volumen ΔV enthält die Masse $\rho\Delta V$.
Auf diese Masse wirkt die Volumenkraft $K = \rho F \Delta V$.
Im Zeitintervall Δt legt die Masse den Weg $\Delta s = u\Delta t$ zurück.
Die Energie nimmt dadurch um den Betrag
$\Delta E = K \cdot \Delta s = \rho F \cdot u \Delta t \Delta V$ zu.
Die Energieänderung ist folglich $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \rho F \cdot u \Delta V$.

Die Änderung der Energie durch Oberflächenkräfte führt in analoger Weise zu dem Term

$$\int_{\partial W(t)} (\sigma n) \cdot u \, dS.$$

Wegen der Symmetrie von σ ($\sigma = \sigma^T$) gilt

$$(\sigma n) \cdot u = u^T \sigma n = (\sigma u) \cdot n.$$

Es sei $q = q(x,t)$ der Wärmeleitungsvektor. Bezeichnet ΔS ein Flächenstück mit der Einheitsnormalen n, so ist

$$q \cdot n \, \Delta S \, \Delta t$$

die Wärmeenergie, welche in der Zeit Δt durch ΔS fließt. Damit erhält man für die Energieänderung den Term

$$-\int_{\partial W(t)} q \cdot n \, dS.$$

Schließlich sei $Q = Q(x,t)$ ein als bekannt angenommener Quellterm für die Wärmeerzeugung oder -vernichtung. (Q kann benutzt werden, um Wärmeerzeugung durch chemische Reaktionen oder Wärmeverlust durch elektromagnetische Strahlung zu modellieren.) Wir erhalten für die Energieänderung den Term

$$\int_{W(t)} \rho Q \, dV.$$

Insgesamt liefert dies die Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{W(t)} \left\{ \frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right\} dV \\ &= \int_{W(t)} \rho F \cdot u \, dV + \int_{\partial W(t)} (\sigma u) \cdot n \, dS - \int_{\partial W(t)} q \cdot n \, dS + \int_{W(t)} \rho Q \, dV. \end{aligned} \tag{24}$$

Auf die linke Seite wenden wir den Transportsatz an, auf der rechten Seite verwenden wir den Gaußschen Satz, um die Randintegrale in Volumenintegrale umzuschreiben. Lokalisierung ergibt schließlich die Energiegleichung

$$(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e)_t + \nabla \cdot ((\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e)u) = \rho F \cdot u + \nabla \cdot (\sigma u) - \nabla \cdot q + \rho Q.$$

Es sei κ der Wärmeleitungskoeffizient des Materials. (Im allgemeinen hängt κ vom thermodynamischen Zustand ab.) Zwischen der absoluten Temperatur $T = T(x,t)$ und dem Wärmeleitungsvektor q besteht die Beziehung

$$q = -\kappa \nabla T$$

(Fouriersches Gesetz). Dies führt zu der folgenden Form der Energiegleichung:

$$(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e)_t + \nabla \cdot ((\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e)u) = \rho F \cdot u + \rho Q + \nabla \cdot (\sigma u) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \tag{25}$$

Setzen wir

$$\sigma = -pI + \tau, \quad \tau = \lambda(\nabla \cdot u)I + \mu \, \mathrm{def} \, u$$

in die Energiegleichung ein, so erhalten wir (zusammen mit der Kontinuitätsgleichung und den drei Komponenten der Impulsgleichung) fünf Gleichungen für die Unbekannten

$$\rho,\ u,\ p,\ e,\ T.$$

Die Variablen ρ, p, e, T sind thermodynamische Zustandsvariable. (Es wird angenommen, daß sich das Material zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, so daß die Benutzung dieser Variablen sinnvoll ist.) Dann folgt aus thermodynamischen Grundsätzen, daß nur zwei der Variablen unabhängig sind, während sich die übrigen aufgrund von Zustandsgleichungen daraus ergeben. Diese Zustandsgleichungen sehen wir — für ein gegebenes Material — als bekannt an und erhalten dann fünf Gleichungen für fünf unbekannte Funktionen. Einfache Beispiele solcher Zustandsgleichungen sind

$$p = \rho R T \quad \text{und} \quad e = c_v T.$$

Hierbei sind R und c_v (vom Material abhängige) Konstanten.

11 Umformungen der Energiegleichung

Die Energiegleichung enthält einen rein mechanischen Teil, welcher aus der Kontinuitäts- und Impulsgleichung folgt.

Bezeichnung:
Für eine skalare Funktion $g = g(x,t)$ setze

$$\frac{Dg}{Dt} = g_t + (u \cdot \nabla) g.$$

□

Bemerkung: (Interpretation von $\frac{D}{Dt}$)
Sei $g(x,t)$ eine glatte Funktion der Ortskoordinate x und der Zeit t. Dann entspricht

$$\tilde{g}(x,t) = g(\Phi(x,t),t)$$

der Funktion g in Materialkoordinaten (oder Lagrangeschen Koordinaten). Dies bedeutet, daß $\tilde{g}(x,t)$ den Funktionswert von g zur Zeit t des Teilchens angibt, welches zur Zeit $t_0 = 0$ am Ort x war. Das Koordinatensystem wandert gewissermaßen mit dem Teilchen mit. Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_t(x,t) &= g_x(\Phi(x,t),t)\Phi_t(x,t) + g_t(\Phi(x,t),t) \\
&= \nabla g(\Phi(x,t),t) \cdot u(\Phi(x,t),t) + g_t(\Phi(x,t),t) \\
&= \{g_t + (u \cdot \nabla) g\}(\Phi(x,t),t) \\
&= \frac{Dg}{Dt}(\Phi(x,t),t),
\end{aligned}$$

also

$$\tilde{g}_t = \widetilde{\frac{Dg}{Dt}}.$$

□

Lemma:
Sei $g = g(x,t)$ eine skalare Funktion. Es gelte die Kontinuitätsgleichung

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0.$$

Dann folgt

$$\rho \frac{Dg}{Dt} = (\rho g)_t + \nabla \cdot (\rho g u).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\rho g)_t + \nabla \cdot (\rho g u) &= \rho_t g + \rho g_t + g \nabla \cdot (\rho u) + \nabla g \cdot (\rho u) \\ &= g(\rho_t + \nabla \cdot (\rho u)) + \rho(g_t + (u \cdot \nabla) g) = \rho \frac{Dg}{Dt}. \end{aligned}$$

□

Die Energiegleichung (25) läßt sich durch Anwendung des Lemmas mit $g = \frac{1}{2}|u|^2 + e$ umformulieren:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} |u|^2 + e \right) = \rho F \cdot u + \rho Q + \nabla \cdot (\sigma u) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \tag{26}$$

Das Lemma können wir auch auf die j–te Komponente der Impulsgleichung ($j = 1, 2, 3$), also auf (12) anwenden:

$$\rho \frac{Du_j}{Dt} = (\rho u_j)_t + \nabla \cdot (\rho u_j u) = \rho F_j + \nabla \cdot \sigma_j.$$

In Vektorschreibweise heißt das:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho F + \nabla \cdot \sigma. \tag{27}$$

Ferner läßt sich die Kontinuitätsgleichung wegen

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = \rho_t + \nabla \rho \cdot u + \rho \nabla \cdot u = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u$$

schreiben als

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0. \tag{28}$$

Für weitere Umformungen der Energiegleichung benötigen wir die folgenden Vektoridentitäten.

Lemma:
Seien $v = v(x)$, $w = w(x)$ Vektorfelder. Dann gilt

$$(\operatorname{rot} v) \times w = (Dv - (Dv)^T) w, \quad \textit{wobei } Dv = v_x = \begin{pmatrix} D_1 v_1 & D_2 v_1 & D_3 v_1 \\ D_1 v_2 & D_2 v_2 & D_3 v_2 \\ D_1 v_3 & D_2 v_3 & D_3 v_3 \end{pmatrix}.$$

Beweis:
Es gilt:

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 v_3 - D_3 v_2 \\ D_3 v_1 - D_1 v_3 \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Dies impliziert die Behauptung:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} v) \times w &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_2 v_3 - D_3 v_2 & D_3 v_1 - D_1 v_3 & D_1 v_2 - D_2 v_1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & D_2 v_1 - D_1 v_2 & D_3 v_1 - D_1 v_3 \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 & 0 & D_3 v_2 - D_2 v_3 \\ D_1 v_3 - D_3 v_1 & D_2 v_3 - D_3 v_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\
&= (Dv - (Dv)^T) w.
\end{aligned}$$

□

Lemma:
Seien $v = v(x)$, $w = w(x)$ Vektorfelder. Dann gilt

$$\nabla(v \cdot w) = (Dv)^T w + (Dw)^T v.$$

Beweis:
Die j–te Komponente der linken Seite ist

$$D_j \left(\sum_{k=1}^{3} v_k w_k \right) = \sum_{k=1}^{3} (D_j v_k) w_k + \sum_{k=1}^{3} (D_j w_k) v_k = (D_j v)^T w + (D_j w)^T v.$$

Das Ergebnis ist die j–te Komponente der rechten Seite. □

Wendet man das letzte Lemma mit $u = v = w$ an, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) = (Du)^T u.$$

Damit folgt

$$(u \cdot \nabla) u = (Du) u = \frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) + (Du - (Du)^T) u = \frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) + (\operatorname{rot} u) \times u.$$

Wir fassen dies zusammen im folgenden Lemma:

Lemma:
Für jedes Vektorfeld $u = u(x)$ gilt

$$(u \cdot \nabla) u = \nabla \left(\frac{|u|^2}{2} \right) + (\operatorname{rot} u) \times u. \tag{29}$$

□

Die Gleichung (27)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho F + \nabla \cdot \sigma$$

wurde aus der Impuls- und der Kontinuitätsgleichung gefolgert. Betrachte das innere Produkt mit u. Weil $(\operatorname{rot} u) \times u$ orthogonal zu $\operatorname{rot} u$ und u ist, gilt $((\operatorname{rot} u) \times u) \cdot u = 0$ und folglich

$$\rho \frac{Du}{Dt} \cdot u = \rho \left\{ u_t + (u \cdot \nabla) u \right\} \cdot u = \rho \left\{ u_t \cdot u + \nabla \left(\frac{|u|^2}{2} \right) \cdot u \right\} = \rho F \cdot u + (\nabla \cdot \sigma) \cdot u.$$

Dies ergibt wegen $(|u|^2)_t = u_t \cdot u + u \cdot u_t = 2 u_t \cdot u$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{|u|^2}{2} \right) = \rho \left\{ \left(\frac{|u|^2}{2} \right)_t + (u \cdot \nabla) \left(\frac{|u|^2}{2} \right) \right\} = \rho F \cdot u + (\nabla \cdot \sigma) \cdot u.$$

Man beachte, daß sich diese Gleichung als rein mathematische Folgerung aus der Kontinuitätsgleichung und der Impulsgleichung ergibt. Ziehen wir dies von der Energiegleichung in der Form (26) ab, so ergibt sich

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho Q + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\sigma u) - (\nabla \cdot \sigma) \cdot u.$$

Bezeichnung:
Für $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei

$$A : B = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_{ij}$$

□

Lemma:

$$\nabla \cdot (\sigma u) - (\nabla \cdot \sigma) \cdot u = \sigma : Du$$

Dabei wird benutzt, daß σ symmetrisch ist ($\sigma = \sigma^T$).
Beweis:

$$\nabla \cdot (\sigma u) = \sum_{i=1}^{3} D_i \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} u_j = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} D_i u_j + \sum_{i,j=1}^{3} (D_i \sigma_{ij}) u_j$$

Nun ist $(Du)_{ij} = D_j u_i$, so daß die erste Doppelsumme gleich $\sigma : Du$ ist. Weiter gilt wegen der Symmetrie von σ

$$(\nabla \cdot \sigma) \cdot u = \sum_{j=1}^{3} (\nabla \cdot \sigma)_j u_j = \sum_{j=1}^{3} (\sum_{i=1}^{3} D_i \sigma_{ji}) u_j = \sum_{i,j=1}^{3} (D_i \sigma_{ij}) u_j,$$

und die Behauptung folgt. □

Die Energiegleichung erhält damit die Form

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho Q + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \sigma : Du. \tag{30}$$

Die Größe $\sigma : Du$ ist ein Quellterm für innere Energie. Dieser Quellterm ist rein mechanischen Ursprungs und rührt von inneren Spannungskräften her. Wir haben

$$\sigma = -pI + \tau,$$

wobei p der Druck und τ der viskose Spannungstensor ist. Wegen

$$pI : Du = p\nabla \cdot u$$

folgt

$$\rho \frac{De}{Dt} + p\nabla \cdot u = \rho Q + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \tau : Du. \tag{31}$$

Der Ausdruck $\Psi = \tau : Du$ wird als Dissipationsterm bezeichnet. Es ist

$$\Psi \Delta V \Delta t$$

die mechanische Energie, welche im Zeitintervall Δt und im Volumen ΔV durch viskose Reibungskräfte in innere Energie umgewandelt wird.
Der Dissipationsterm soll nun näher betrachtet werden: Für zwei Matrizen $S, T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $S : T = S^T : T^T$, also insbesondere $S : T = S : T^T$, falls S symmetrisch ist. Daher folgt

$$\operatorname{def} u : Du = \operatorname{def} u : (Du)^T,$$

also

$$\operatorname{def} u : Du = \operatorname{def} u : \frac{1}{2}(Du + (Du)^T) = \frac{1}{2}(\operatorname{def} u) : (\operatorname{def} u).$$

Mit $\tau = \lambda(\nabla \cdot u)I + \mu \operatorname{def} u$ folgt daraus

$$\Psi = \tau : Du = \lambda(\nabla \cdot u)^2 + \frac{\mu}{2}(\operatorname{def} u) : (\operatorname{def} u) = \lambda(\sum_{j=1}^{3} D_j u_j)^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i,j=1}^{3} (D_j u_i + D_i u_j)^2.$$

Lemma:
Aus $\mu \geq 0$ und $3\lambda + 2\mu \geq 0$ folgt $\Psi \geq 0$.
Beweis:
Wir können $\lambda < 0$ annehmen, denn für $\lambda \geq 0$ ist $\Psi \geq 0$ klar.
Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt aufgrund von $2ab \leq 2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$ etc. die Ungleichung

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2).\end{aligned}$$

Mit $a = D_1 u_1$, $b = D_2 u_2$, $c = D_3 u_3$ ergibt dies

$$\lambda(\sum_{j=1}^{3} D_j u_j)^2 = \lambda(a+b+c)^2 \geq 3\lambda(a^2 + b^2 + c^2).$$

Außerdem ist

$$\sum_{i,j=1}^{3}(D_j u_i + D_i u_j)^2 \geq \sum_{i=1}^{3}(D_i u_i + D_i u_i)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

Daher folgt:

$$\Psi \geq (3\lambda + 2\mu)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0.$$

□

12 Zusammenfassung der Gleichungen

Wir haben die folgenden Gleichungen hergeleitet:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot u &= 0 \\ \rho\frac{Du}{Dt} + \nabla p &= \rho F + \nabla\cdot\tau \\ \rho\frac{De}{Dt} + p\nabla\cdot u &= \rho Q + \nabla\cdot(\kappa\nabla T) + \tau : Du. \end{aligned} \tag{32}$$

Dabei ist

$$\tau = \lambda(\nabla\cdot u)I + \mu\,\mathrm{def}\,u.$$

Hierbei treten die thermodynamischen Variablen

$$\rho, p, e, T$$

auf. Da diese Variablen voneinander abhängig sind, müssen die Gleichungen durch Zustandsgleichungen vervollständigt werden, wie etwa

$$p = \rho RT, \quad e = c_v T.$$

13 Vereinfachung zu einem hyperbolischen System

Für $F = Q = 0$, $\lambda = \mu = \kappa = 0$ lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot u &= 0 \\ \rho\frac{Du}{Dt} + \nabla p &= 0 \\ \rho\frac{De}{Dt} + p\nabla\cdot u &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Wir wollen mit den thermodynamischen Variablen ρ, e arbeiten und nehmen an, daß eine Zustandsgleichung

$$p = p(\rho, e)$$

bekannt ist. Z. B. könnte man $p = \rho RT$, $e = c_v T$, also $p = \frac{R}{c_v}\rho e$ verwenden. Die Ableitungen ergeben sich mit Hilfe der Kettenregel, wie z. B. $p_x = p_\rho \rho_x + p_e e_x$, also

$$\nabla p = p_\rho \nabla\rho + p_e \nabla e.$$

Die Gleichungen haben dann die Form

$$\begin{aligned}\rho\frac{Du}{Dt}+p_\rho\nabla\rho+p_e\nabla e &= 0\\ \frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot u &= 0\\ \rho\frac{De}{Dt}+p\nabla\cdot u &= 0.\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die beiden letzten Gleichungen mit p_ρ/ρ bzw. p_e/p und erhalten

$$\begin{aligned}\rho\frac{Du}{Dt}+p_\rho\nabla\rho+p_e\nabla e &= 0\\ \frac{p_\rho}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+p_\rho\nabla\cdot u &= 0\\ \frac{\rho p_e}{p}\frac{De}{Dt}+p_e\nabla\cdot u &= 0.\end{aligned}$$

Für $w=\begin{pmatrix}u\\ \rho\\ e\end{pmatrix}$ sei

$$A_0(w)=\begin{pmatrix}\rho I & 0 & 0\\ 0 & p_\rho/\rho & 0\\ 0 & 0 & \rho p_e/p\end{pmatrix},\quad P(w,D)=\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & p_\rho D_1 & p_e D_1\\ & 0 & & p_\rho D_2 & p_e D_2\\ & & & p_\rho D_3 & p_e D_3\\ \hline p_\rho D_1 & p_\rho D_2 & p_\rho D_3 & 0 & 0\\ p_e D_1 & p_e D_2 & p_e D_3 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Auf diese Weise lassen sich die Gleichungen umformulieren zu

$$A_0(w)\frac{Dw}{Dt}+P(w,D)w=0.$$

Dabei läßt sich $P(w,D)$ zerlegen als

$$P(w,D)=\sum_{j=1}^{3}B_j(w)D_j$$

mit symmetrischen Matrizen $B_j(w)$, $j=1,2,3$. Ferner ist $A_0(w)$ symmetrisch und für vernünftige Funktionen $p=p(\rho,e)$ positiv definit. Weiter gilt

$$\frac{Dw}{Dt}=w_t+(u\cdot\nabla)w=w_t+\sum_{j=1}^{3}u_jD_jw.$$

Durch die Zusammenfassung

$$A_j(w)=B_j(w)+u_jA_0(w)$$

erhält man das System

$$A_0(w)w_t+\sum_{j=1}^{3}A_j(w)D_jw=0. \tag{34}$$

Hierbei sind die Matrizen $A_j(w)$ symmetrisch für $j=0,1,2,3$, und $A_0(w)$ ist positiv definit für physikalisch relevante w. Ein System der obigen Form heißt symmetrisch hyperbolisch.

14 Linearisierung an einem konstanten Zustand

Sei W eine konstante Funktion, unabhängig von x, t. Für eine Lösung w von (34) machen wir einen Ansatz

$$w(x,t) = W + \varepsilon v(x,t).$$

Dann gilt $A_j(w) = A_j(W) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Damit erhält man für v die Beziehung:

$$A_0(W)v_t + \sum_{j=1}^{3} A_j(W)D_j v = 0,$$

wenn man die $\mathcal{O}(\varepsilon)$–Terme vernachlässigt. Diese lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten beschreibt die Ausbreitung von kleinen Störungen in der Nähe eines konstanten Zustandes W. Gleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich im Prinzip durch Fouriertransformation lösen. Wir betrachten dazu allgemein

$$A_0 v_t + \sum_{j=1}^{N} A_j D_j v = 0,$$

wobei $A_0, A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen sind und A_0 außerdem positiv definit ist ($A_0 > 0$). Weil A_0 positiv definit ist, existiert eine Matrix $H = H^T > 0$ mit $A_0 = H^2$. Für $\tilde{v} = Hv$ ergibt sich das System

$$H\tilde{v}_t + \sum_{j=1}^{N} A_j H^{-1} D_j \tilde{v} = 0, \quad \text{also} \quad \tilde{v}_t + \sum_{j=1}^{N} C_j D_j \tilde{v} = 0$$

mit $C_j = H^{-1}A_j H^{-1}$. Wegen der Symmetrie von A_j gilt $C_j^T = C_j$. Man kann sich also auf Gleichungen der Form

$$v_t + \sum_{j=1}^{N} C_j D_j v = 0, \quad C_j = C_j^T \tag{35}$$

beschränken. Wir untersuchen jetzt verschiedene Fälle:

a) skalare Gleichung, 1 Raumdimension:

$$v_t + cv_x = 0, \quad v(x,0) = e^{ikx} \tag{36}$$

Mit dem Ansatz

$$v(x,t) = q(t)e^{ikx}$$

erhält man durch Einsetzen in (36) eine gewöhnliche Differentialgleichung für q:

$$q'(t) + cik\, q(t) = 0, \quad q(0) = 1.$$

Folglich gilt

$$q(t) = e^{-cikt}, \quad \text{also} \quad v(x,t) = e^{ik(x-ct)}.$$

Die Welle e^{ikx} pflanzt sich demnach mit der Geschwindigkeit c fort.

b) System, 1 Raumdimension:

$$v_t + Cv_x = 0, \quad \text{mit } C = C^T \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Wegen der Symmetrie von C gibt es eine Matrix S mit $SS^T = I$, so daß $\Lambda = S^{-1}CS$ diagonal ist. Für $\tilde{v} = S^{-1}v$ erhält man das System

$$\tilde{v}_t + \Lambda\tilde{v}_x = 0,$$

dessen einzelne Komponenten sich wie in a) verhalten. Mit dem vorgegebenen Anfangszustand

$$v(x,0) = e^{ikx}\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{C}^n$$

und $\tilde{\varphi} = S^{-1}\varphi$ ergibt sich das System

$$\tilde{v}_t + \Lambda\tilde{v}_x = 0, \quad \tilde{v}(x,0) = e^{ikx}\tilde{\varphi}.$$

Eine Zerlegung von $\tilde{\varphi}$ in die einzelnen Komponenten entspricht einer Zerlegung von φ in Eigenvektoren von C:

$$\varphi = S\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 S_1 + \ldots + \tilde{\varphi}_n S_n.$$

Die Komponenten von $\tilde{v}(x,0)$ breiten sich mit den Geschwindigkeiten λ_j aus, wobei $\lambda_j = \Lambda_{jj}$ der j–te Eigenwert von C ist:

$$\tilde{v}_j(x,t) = e^{ik(x-\lambda_j t)}\tilde{\varphi}_j.$$

Für das ursprüngliche System bedeutet dies, daß sich der Anfangszustand

$$v(x,0) = e^{ikx}\varphi = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j e^{ikx} S_j \tag{37}$$

wie folgt ausbreitet:

$$v(x,t) = S\tilde{v}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j e^{ik(x-\lambda_j t)} S_j. \tag{38}$$

c) System, N Raumdimensionen:

$$v_t + \sum_{j=1}^{N} C_j D_j v = 0, \quad v(x,0) = e^{ik\cdot x}\varphi \quad \text{mit } C_j = C_j^T \in \mathbb{R}^{n\times n}, \varphi \in \mathbb{C}^n,$$

dabei ist $k \cdot x = k_1 x_1 + \ldots + k_N x_N$. Mit dem Ansatz

$$v(x,t) = e^{ik\cdot x} q(t), \quad q(0) = \varphi$$

erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für q:

$$q'(t) + \hat{P}(k)q(t) = 0 \quad \text{mit } \hat{P}(k) = i\sum_{j=1}^{N} k_j C_j.$$

Dies hat die Lösung

$$q(t) = e^{-\hat{P}(k)t}\varphi,$$

und es folgt

$$v(x,t) = e^{ik\cdot x} e^{-\hat{P}(k)t} \varphi.$$

Um den Term $e^{-\hat{P}(k)t}$ genauer zu untersuchen, schreiben wir

$$k = |k| k^0 \quad \text{mit } |k| = (k_1^2 + \ldots + k_N^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k^0 = k/|k|, \quad |k^0| = 1.$$

Dann gilt

$$\hat{P}(k) = i|k| C(k^0) \quad \text{mit } C(k^0) = \sum_{j=1}^{N} k_j^0 C_j.$$

Weil $C(k^0)$ — wie alle C_j — reell symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Matrix $S = S(k^0)$, so daß $\Lambda = \Lambda(k^0) = S^{-1} C(k^0) S$ eine Diagonalmatrix ist. Aus der Darstellung

$$\hat{P}(k) = i|k| C(k^0) = i|k| S \Lambda S^{-1}$$

folgt dann

$$e^{-\hat{P}(k)t} = S e^{-i|k|t\Lambda} S^{-1}.$$

Sei nun

$$\varphi = S\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j S_j$$

die Zerlegung von φ nach Eigenvektoren von $C(k^0)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} v(x,t) &= e^{ik\cdot x} e^{-\hat{P}(k)t} \varphi = e^{ik\cdot x} S e^{-i|k|t\Lambda} \tilde{\varphi} \\ &= e^{ik\cdot x} S \begin{pmatrix} \vdots \\ e^{-i|k|t\lambda_j} \tilde{\varphi}_j \\ \vdots \end{pmatrix}_{j=1,\ldots,n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j e^{ik\cdot x} e^{-i|k|\lambda_j t} S_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j e^{i|k|\{k^0\cdot x - \lambda_j t\}} S_j. \end{aligned}$$

Ein gegebener Anfangszustand

$$v(x,0) = e^{ik\cdot x}\varphi = e^{i|k|k^0\cdot x}\varphi = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j e^{i|k|k^0\cdot x} S_j \tag{39}$$

breitet sich also aus als

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j e^{i|k|\{k^0\cdot x - \lambda_j t\}} S_j. \tag{40}$$

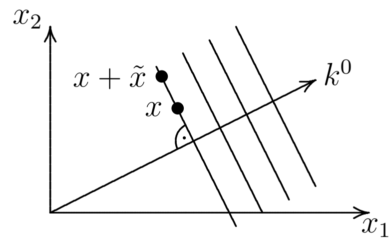
Hierbei sind λ_j, S_j die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$C(k^0) = \sum_{j=1}^{N} k_j^0 C_j.$$

Interpretation:

1. Ausbreitungsrichtung:

Für $\tilde{x}$ mit $k^0 \cdot \tilde{x} = 0$ gilt $k^0 \cdot x = k^0 \cdot (x + \tilde{x})$.



Daher folgt für diese $\tilde{x}$:

$$v(x,t) = v(x + \tilde{x}, t).$$

Also ist v zu jeder Zeit konstant entlang jeder Hyperebene, die senkrecht auf k^0 steht. Es liegt nahe, k^0 als Ausbreitungsrichtung der Welle anzusehen.

2. Phasengeschwindigkeit:

Wegen $|k^0| = 1$ gilt

$$k^0 \cdot x - \lambda_j(t + \Delta t) = k^0 \cdot (x - \lambda_j k^0 \Delta t) - \lambda_j t.$$

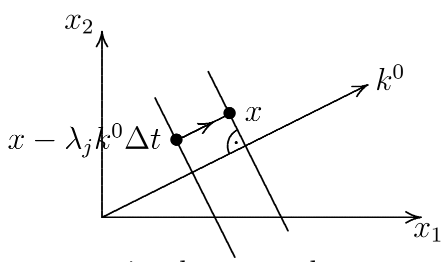
Für

$$V_j(x,t) = e^{i|k|\{k^0 \cdot x - \lambda_j t\}}$$

gilt daher

$$V_j(x, t + \Delta t) = V_j(x - \lambda_j k^0 \Delta t, t).$$

Dies bedeutet, daß am Ort x zur Zeit $t + \Delta t$ derselbe Funktionswert vorliegt, welcher zur Zeit t am Ort $x - \lambda_j k^0 \Delta t$ vorlag.



Der V_j–Wert bei $x - \lambda_j k^0 \Delta t$ zur Zeit $t = 0$ „wandert“ zur Zeit $t = \Delta t$ nach x.

Diese Interpretation legt es nahe,

$$V_j(x,t) = e^{i|k|\{k^0 \cdot x - \lambda_j t\}}$$

als eine Wellenbewegung in k^0–Richtung mit Geschwindigkeit λ_j zu deuten.

Weil $V_j(x + lk^0, t) \equiv V_j(x,t)$ genau für $l = \frac{2\pi}{|k|} m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ gilt, ist die Wellenlänge

$$L = \frac{2\pi}{|k|}.$$

Man beachte jedoch, daß die obige Interpretation (Bewegung mit Geschwindigkeitsvektor $\lambda_j k^0$) nicht zwingend ist. Da V_j zu jeder Zeit entlang jeder Hyperebene senkrecht zu k^0 konstant ist, könnte eine Bewegung senkrecht zu k^0 überlagert sein. Dies ist zu beachten, wenn man keinen Widerspruch zum Begriff „Gruppengeschwindigkeit“ erhalten will. Korrekterweise bezeichnet man $k^0 \lambda_j$ als Phasengeschwindigkeit von

$$V_j(x,t) = e^{i|k|\{k^0 \cdot x - \lambda_j t\}}.$$

15 Beispiel: Die Eulergleichungen mit $p = \bar{p}(\rho)$

Die Eulergleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot u &= 0 \\ \rho\frac{Du}{Dt} + \nabla p &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Um diese Gleichungen zu vervollständigen, wählen wir eine Zustandsgleichung

$$p = \bar{p}(\rho),$$

zum Beispiel $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$ mit $\gamma > 1$. Insbesondere gilt dann $p_\rho > 0$. Beschränken wir uns auf eine Raumdimension, so lautet das System

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ \rho(u_t + uu_x) + p_\rho\rho_x &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung schreiben wir um:

$$\frac{p_\rho}{\rho}(\rho_t + u\rho_x) + p_\rho u_x = 0.$$

Setzen wir

$$w = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}, \quad A_0(w) = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & p_\rho/\rho \end{pmatrix}, \quad B(w) = \begin{pmatrix} 0 & p_\rho \\ p_\rho & 0 \end{pmatrix},$$

dann wird das System zu

$$0 = A_0(w)\{w_t + uw_x\} + B(w)w_x = A_0(w)w_t + \underbrace{(uA_0(w) + B(w))}_{A_1(w)} w_x$$

mit

$$A_1(w) = \begin{pmatrix} \rho u & p_\rho \\ p_\rho & \frac{p_\rho u}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Linearisiert man diese Gleichung in einem konstanten Zustand $W = \binom{u_0}{\rho_0}$ und setzt außerdem $u = u_0 + \varepsilon\tilde{u}$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon\tilde{\rho}$, so erhält man

$$A_0(W)\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix}_t + A_1(W)\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix}_x = 0.$$

Wegen $p_\rho > 0$ ist $A_0(W)$ positiv definit ($A_0(W)$ hat überdies schon Diagonalgestalt) und läßt sich daher als $A_0(W) = H^2$ darstellen. Dies führt zu der Gleichung

$$H\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix}_t + \{H^{-1}A_1(W)H^{-1}\}H\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix}_x = 0.$$

Die Eigenwerte von $H^{-1}A_1(W)H^{-1}$ sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen des Grundflusses W. Es ist

$$H^{-1}A_1(W)H^{-1} = H^{-1}\{u_0A_0(W) + B(W)\}H^{-1} = u_0I + H^{-1}B(W)H^{-1}.$$

Hierbei ist

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_0^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{p_\rho(\rho_0)}{\rho_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Mit $c^2 = p_\rho(\rho_0)$ wird dann

$$H^{-1}B(W)H^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\rho_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho_0}/c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\rho_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho_0}/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\pm c$. Die Eigenwerte von $H^{-1}A_1(W)H^{-1}$ sind daher

$$\lambda_{1,2} = u_0 \pm c.$$

Die Störungen breiten sich also mit der Geschwindigkeit c relativ zur Grundströmung mit der Geschwindigkeit u_0 aus. Damit ist

$$c = \sqrt{p_\rho(\rho_0)} \tag{42}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen. Dieser Sachverhalt soll noch näher beleuchtet werden: Die bei $W = \binom{u_0}{\rho_0}$ linearisierten Gleichungen lauten (wenn wir die Schlange in unserer Notation weglassen)

$$A_0(W)\begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}_t + A_1(W)\begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}_x = 0$$

mit

$$A_0(W) = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & c^2/\rho_0 \end{pmatrix}, \quad A_1(W) = u_0 A_0(W) + \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $u_0 = 0$ heißt das

$$\begin{aligned} \rho_0 u_t + c^2 \rho_x &= 0 \\ \frac{c^2}{\rho_0}\rho_t + c^2 u_x &= 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} u_t + \frac{c^2}{\rho_0}\rho_x &= 0 \\ \rho_t + \rho_0 u_x &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_{tt} = \frac{-c^2}{\rho_0}\rho_{xt} = c^2 u_{xx}, \quad \rho_{tt} = -\rho_0 u_{xt} = c^2 \rho_{xx}.$$

Die Störterme ρ und u genügen daher Wellengleichungen mit $\pm c$ als Ausbreitungsgeschwindigkeit. Für c gilt:

$$\begin{aligned} & p &&= p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \\ \Longrightarrow\quad & p_\rho(\rho) &&= \frac{p_0\gamma}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \\ \Longrightarrow\quad & c &&= \sqrt{p_\rho(\rho_0)} = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}} = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_0}}. \end{aligned}$$

Für Luft bei 0°C gilt etwa (siehe Anhang)

$$\begin{aligned} \rho_0 &\approx 1{,}293\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \\ p_0 &\approx 1{,}0132\,\mathrm{bar} = 1{,}0132\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2} \quad (1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}, 1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}) \\ \gamma &\approx 1{,}402, \end{aligned}$$

so daß sich für die Schallgeschwindigkeit c der Wert

$$c = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_0}} \approx \sqrt{\frac{1{,}0132\cdot 1{,}402}{1{,}293}\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}} \approx 331\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ergibt.

16 Nichtlineare hyperbolische Gleichungen: Burgers' Gleichung als Beispiel

Betrachte die AWA (Burgers' Gleichung)

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{mit } u(x,0) = f(x). \tag{43}$$

Sei $u(x,t)$ eine für $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq T$ definierte glatte Lösung. Betrachte die Linie $(x(t),t)$ für $0 \leq t \leq T$, die der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t),t), \quad x(0) = x_0 \tag{44}$$

genügt, und definiere

$$h(t) = u(x(t),t).$$

Dann gilt wegen (43)

$$h'(t) = u_x x'(t) + u_t = u_x u + u_t = 0.$$

Daher ist h konstant mit $h(t) \equiv h(0) = u(x_0,0) = f(x_0)$, und aus (44) folgt

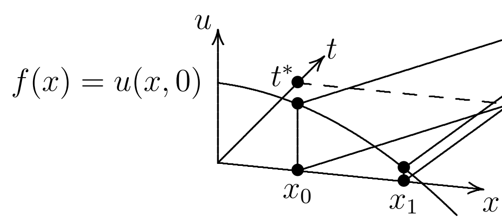
$$\frac{dx}{dt}(t) \equiv f(x_0), \quad \text{also } x(t) = x_0 + tf(x_0).$$

Die Linie $(x(t),t)$ für $0 \leq t \leq T$ ist eine Charakteristik der Gleichung $u_t + uu_x = 0$ bezüglich der ins Auge gefaßten Lösung $u = u(x,t)$. Wir haben gezeigt, daß jede Charakteristik eine gerade Linie ist und daß u entlang jeder Charakteristik konstant ist.

Nehmen wir nun an, daß $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ existieren mit $x_0 < x_1$, aber $f(x_0) > f(x_1)$. Die Charakteristik durch $(x_0,0)$ hat die Geschwindigkeit $f(x_0)$, während die Charakteristik durch $(x_1,0)$ die kleinere Geschwindigkeit $f(x_1)$ hat. Zur Zeit

$$t^* = \frac{x_1 - x_0}{f(x_0) - f(x_1)}$$

schneiden sich die beiden Charakteristiken. Da die u–Werte entlang beider Charakteristiken verschieden sind, kann eine glatte Lösung nicht bis zur Zeit t^* existieren. Vor der Zeit t^* entsteht ein Schock.



Im vorliegenden Fall kann man folgendes zeigen (unter schwachen Annahmen die Anfangsfunktion f): Für alle $\varepsilon > 0$ hat die parabolische AWA

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \quad \text{mit } u(x,0) = f(x) \tag{45}$$

eine eindeutige klassische Lösung $u_\varepsilon(x,t)$, für die gilt

$$u_\varepsilon \in C^\infty(-\infty < x < \infty,\, 0 < t < \infty).$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert u_ε punktweise fast überall gegen eine Grenzfunktion $u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Diese Grenzfunktion ist per Definition die physikalisch relevante schwache Lösung von (43).

17 Viskositätsterme in den Navier–Stokes–Gleichungen

Betrachten wir wieder der Einfachheit halber den Fall $p = \bar{p}(\rho)$. Die Navier–Stokes–Gleichungen lauten dann bei $F = 0$ und Konstanten λ und μ:

$$\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p &= \frac{1}{\rho}\{(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u) + \mu\Delta u\} \\
\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot u &= 0.
\end{aligned}$$

Betrachte nun die Hilfsgleichung

$$u_t = \underbrace{\frac{1}{\rho_0}\{(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u) + \mu\Delta u\}}_{P_2 u :=}. \tag{46}$$

Bei einer Anfangsbedingung

$$u(x,0) = e^{ik\cdot x}\varphi$$

machen wir den Ansatz

$$u(x,t) = e^{ik\cdot x}q(t).$$

Dies liefert

$$P_2 u(x,t) = e^{ik\cdot x}\hat{P}_2(k)q(t)$$

mit dem sogenannten Symbol $\hat{P}_2(k) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Das Symbol $\hat{P}_2(k)$ entsteht aus P_2, indem man D_j formal durch ik_j ersetzt. Man erhält für P_2 aus (46)

$$\hat{P}_2(k) = -\frac{1}{\rho_0}\{(\lambda+\mu)kk^T + \mu|k|^2 I\}.$$

Für $v \in \mathbb{R}^3$ beliebig mit $|v| = 1$ folgt daraus

$$v^T\hat{P}_2(k)v = -\frac{1}{\rho_0}\{(\lambda+\mu)(v^Tk)^2 + \mu|k|^2\}.$$

Sei

$$c := \min\{\mu, 2\mu+\lambda\} > 0.$$

1. Fall: $\mu \geq 2\mu + \lambda = c$, also $0 \geq \mu + \lambda$
Nach Cauchy–Schwarz gilt

$$(v^Tk)^2 \leq |k|^2|v|^2 = |k|^2,$$

also

$$(\mu+\lambda)(v^Tk)^2 \geq (\mu+\lambda)|k|^2$$

und schließlich

$$(\lambda+\mu)(v^Tk)^2 + \mu|k|^2 \geq (2\mu+\lambda)|k|^2 = c|k|^2.$$

2. Fall: $2\mu + \lambda > \mu = c$, also $\mu + \lambda > 0$
Dann gilt ebenfalls

$$(\lambda+\mu)(v^Tk)^2 + \mu|k|^2 \geq \mu|k|^2 = c|k|^2.$$

Dies beweist das folgende Lemma:

Lemma:
Sei $c = \min\{\mu, 2\mu+\lambda\} > 0$. *Dann gilt für alle* $k \in \mathbb{R}^3$, $k \neq 0$: *Die Matrix* $\hat{P}_2(k)$ *ist negativ definit mit*

$$v^T\hat{P}_2(k)v \leq -\frac{c}{\rho_0}|k|^2|v|^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^3$. □

Für die Gleichung

$$u_t = P_2u, \quad u(x,0) = e^{ik\cdot x}\varphi$$

führt unser Ansatz

$$u(x,t) = e^{ik\cdot x}q(t)$$

auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$q'(t) = \hat{P}_2(k)q(t), \quad q(0) = \varphi.$$

Da $\hat{P}_2(k)$ für $k \neq 0$ negativ definit ist, folgt $q(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Damit läßt sich zeigen, daß sich die Lösungen von

$$u_t = P_2u$$

ähnlich verhalten wie die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$. Man nennt $u_t = P_2u$ ein parabolisches System.
Eine unbewiesene Vorstellung ist, daß bei den Navier–Stokes–Gleichungen (im Gegensatz zu den Eulergleichungen) keine Schocks auftreten, daß also die Viskositätsterme das Herausbilden von Unstetigkeiten verhindern.

A Thermodynamische Materialkonstanten

Die folgende Tabelle enthält Meßwerte der benötigten thermodynamischen Konstanten für eine Auswahl verschiedener Gase und Flüssigkeiten. Die Angaben beziehen sich auf den Druck $p = 1{,}0132\,\mathrm{bar}$ (bzw. $p = 0{,}981\,\mathrm{bar}$ für die mit „*" gekennzeichneten Werte) und die Temperatur $T = 20°\mathrm{C}$ (bzw. $T_1 = 0°\mathrm{C}$ und $T_2 = 100°\mathrm{C}$, falls zwei Werte vorliegen).[1]

	ρ	c_p	R	γ	κ	ν	μ
	kg/m^3	kJ/kg K	kJ/kg K		W/m K	10^{-6}m^2/s	10^{-6}Pa s
Luft	1,293 0,95	1,005 1,01*	0,287 —	1,402 —	0,024* 0,031*	13,28 23,04	17,13 21,89
Wasserstoff	0,090 0,064*	14,249 14,44*	4,124 —	1,409 —	0,176* 0,229*	97* 162*	8,4* 10,4*
Wasser	999,8 958	4,220 4,216	—	—	0,549 0,681	1,789 0,294	1789 282
Benzol	879	1,738	—	—	0,154	0,740	650
Quecksilber	13546	0,139	—	—	9,304	0,115	1558

ρ : Dichte
c_p : spezifische Wärmekapazität (bei konstantem Druck)
R : spezifische Gaskonstante
γ : Isentropenexponent
κ : Wärmeleitungskoeffizient
ν : kinematische Viskosität
μ : dynamische Viskosität

Es gelten die Beziehungen:
$\gamma = c_p/c_v$ mit $c_v = c_p - R$,
$\nu = \mu/\rho$.

Der 2. Viskositätskoeffizient λ mit $[\lambda]$=Pa s ist weniger gut untersucht. Man nennt $\mu_B := \lambda + \frac{2}{3}\mu$ Kompressions-Viskosität (Volumen-Viskosität, Druck-Viskosität) bzw. bulk viscosity. Für einatomige ideale Gase gilt $\mu_B = 0$, also $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. Für Stickstoff ($N_2$) bei mittlerer Temperatur ergeben Messungen $\mu_B \approx 0{,}8\mu$, so daß hier $\lambda \approx 0{,}13\mu$ gilt.[2]

[1] Quelle: Dubbel — Taschenbuch für den Maschinenbau, 16. Auflage
Hrsg.: W. Beitz, K.-H. Küttner
Springer-Verlag, Berlin 1987

[2] Quelle: Introduction to Physical Gas Dynamics
W. G. Vincenti, Ch. H. Kruger, Jr.
Wiley, New York 1975