Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Ein elementarer Beweis des Primzahlsatzes

Ausführung und historische Perspektive

Bachelorthesis

von

Jonas Oechsner

Betreuer

Prof. Dr. Jörn Steuding

Würzburg, August 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Primzahlen faszinieren die Menschen schon seit Jahrtausenden. Sie sind denkbar einfach definiert: Es sind natürliche Zahlen größer als Eins, die nur Eins und sich selbst als natürliche Teiler besitzen. Bereits Euklid (ca. 360–280 v.Chr.) definierte die Primzahlen im siebten Band seines Werkes *Die Elemente* und untersuchte sie auf ihre strukturellen Eigenschaften. Im neunten Band bewies er beispielsweise, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.[1] Im Laufe der Geschichte wurden viele Eigenschaften der Primzahlen gezeigt, aber auch viele Fragen blieben offen. Godfrey Harold Hardy (1877-1947) und Edward Maitland Wright (1906-2005) stellten eine Liste von sogenannten natürlichen Fragen die Primzahlen betreffend zusammen.[2] Hierzu gehört die Frage nach der Existenz einer allgemeinen Formel zur Berechnung der n-ten Primzahl p_n, genauso wie die Suche nach einer Möglichkeit aus einer gegebenen Primzahl p weitere größere Primzahlen zu konstruieren. Keines dieser Probleme konnte bisher gelöst werden und die Existenz einer Lösung ist nach bisheriger Erkenntnis unwahrscheinlich. Die Suche nach einer Möglichkeit zur Bestimmung der Anzahl der Primzahlen bis zu einer bestimmten Zahl x war dagegen nicht so erfolglos, zumindest wenn man die Frage etwas unschärfer formuliert und nur die ungefähre Anzahl bestimmen will. Die genaue Anzahl der Primzahlen bis zu einer Zahl x bezeichnen wir fortan als $\pi(x)$. Anders formuliert suchen wir nach einer einfachen Funktion $f(x)$, die ein ähnliches asymptotisches Verhalten wie $\pi(x)$ aufweist. Und tatsächlich konnte im letzten Jahrhundert gezeigt werden, dass gilt

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Dieser Satz ist als *Primzahlsatz* bekannt, eine alternative Formulierung lautet

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1. \tag{1.1}$$

Die Geschichte der Entdeckung dieser Aussage ist lang, im Laufe der Jahrhunderte beschäftigten sich viele Mathematiker mit diesem Problem, viele maßen ihm besondere Bedeutung zu. Edmund Landau (1877-1938) bezeichnete den Primzahlsatz gar als das wichtigste Theorem der Zahlentheorie.[3]

In dieser Arbeit soll zum einen ein elementarer Beweis des Primzahlsatzes durchgeführt werden, dessen Existenz lange angezweifelt wurde, zum anderen soll aber auch eine historische Einordnung dieses Theorems erfolgen. Der Primzahlsatz ist eines der großen mathematischen Probleme der Neuzeit, mit dem sich Generationen von Mathematikern beschäftigten. Eine Berücksichtigung dessen historischer Entwicklung ist nicht nur spannend, sie lässt den Leser auch viel über das Wesen der Mathematik und auch das von Mathematikern erfahren.

[1] [Nar1], Seite 1.
[2] [Ha-Wr1], Seite 6.
[3] [Lan1], Seite VIII.

x	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{14}
$\pi(x)$	25	1 229	78 498	5 761 455	455 052 511	3 204 941 750 802
$\lfloor x/\log x \rfloor$	21	1 085	72 382	5 428 681	434 294 481	3 102 103 442 166
Relative Abweichung	0.160	0.117	0.078	0.058	0.046	0.032

Tabelle 1: Vergleich verschiedener Werte von $\pi(x)$ und $x/\log x$, sowie die relative Abweichung

2 Historische Perspektive

2.1 Vermutung und erster Beweis

Die Vermutung über die Richtigkeit des Primzahlsatzes wurde bereits im 18. Jahrhundert geäußert, diese begründete sich aber mit mehr oder weniger guten Argumenten nur auf die Betrachtung von ausgedehnten Tafelwerken und Tabellen. Eine kurze Tabelle (Tabelle 1) sei hier angegeben, um auch dem Leser einen intuitiveren Zugang zu ermöglichen. Man erkennt deutlich die Annäherung von $\pi(x)$ an die Funktion $x/\log x$ für große x. Die frühen Tabellen listeten aufgrund der begrenzteren Möglichkeiten natürlich nicht so große Zahlen, wie die hier mit Wolfram Mathematica® errechnete. Umso höher ist die Erkenntnis der frühen Mathematiker zu bewerten, die Einträge von deren Tabellen überstiegen die Größenordnung 10^6 nicht.[4] Abbildung 1 zeigt noch einmal den kleiner werdenden Fehler für wachsende x durch eine grafische Visualisierung der Funktionen $\pi(x)$ und $x/\log x$.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) glaubte durch Untersuchung von Folgen des Quotienten $\pi(x)/x$ den Zusammenhang

$$\pi(x) = \frac{x}{A\log x + B}$$

beobachtet zu haben, wobei A und B noch unbestimmende Konstanten waren.[5] Seine Überlegungen veröffentlichte er 1798. In einer Neuauflage seiner Veröffentlichung von 1808 ergänzte er seine Aussage und vermutete

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - A(x)}. \tag{2.1}$$

Hierbei ist $A(x)$ entsprechend seinen Beobachtungen eine Funktion, die für $x \to \infty$ einen Grenzwert erreicht, dessen erste Dezimalstellen mit 1.08366 übereinstimmen.[6]

[4] [Apo1], Seite 23.
[5] [Leg1], Seite 18-19.
[6] [Leg2], Seite 394-395.

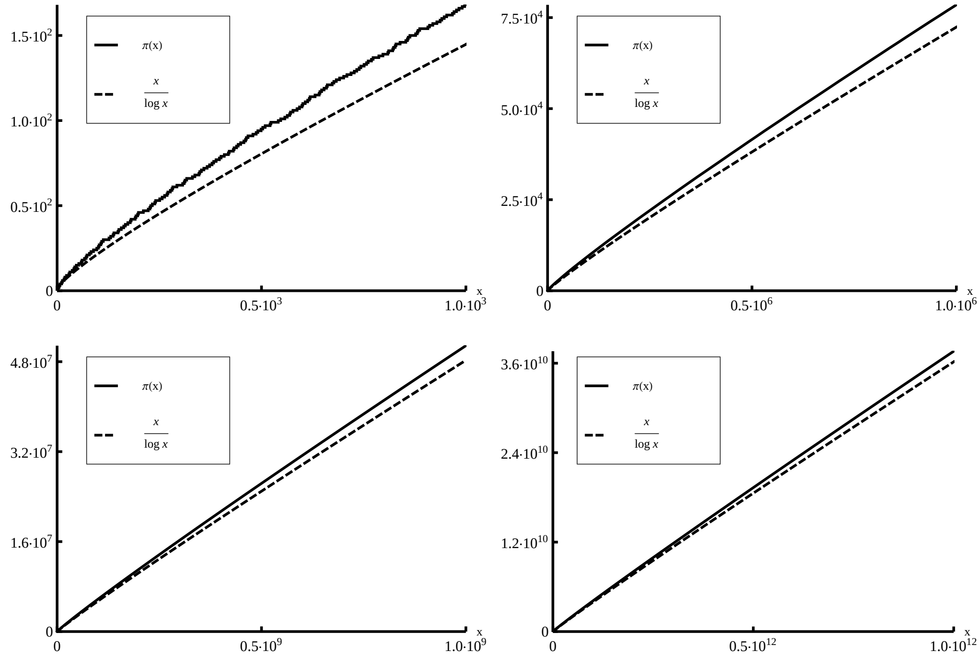

Abbildung 1: Die vier Darstellungen der Funktionen $\pi(x)$ und $x/\log x$ zeigen deutlich die relative Annäherung der Funktionen für größer werdende x.

Mit (2.1) erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\pi(x)}{x/\log(x)} &= \frac{\pi(x)\log x}{x} \\ &= \frac{1}{1 - A(x)/\log x}.\end{aligned}$$

Für $x \to \infty$ würde der Primzahlsatz folgen.
Auch Carl Friedrich Gauß (1777-1855) beschäftigte sich mit dem Primzahlsatz, Edmund Landau (1877-1938) berichtet Näheres.[7] Gauß publizierte selbst nichts über den Primzahlsatz, aber ein Briefwechsel mit seinem Schüler Johann Franz Encke (1791-1865) von 1849 gibt Aufschluss über seine Gedanken hinsichtlich dieses Themas. So hat Gauß wohl schon mit 15 Jahren darüber nachgedacht, ob und wie $\pi(x)$ in einer Beziehung zu einer elementaren Funktion $f(x)$ steht und kam zu dem Schluss, dass der Quotient $\pi(x)/x$ ungefähr umgekehrt proportional zum Logarithmus ist. Der beim Briefwechsel bereits über 70jährige Gauß teilte die Ansicht der Richtigkeit von (2.1), hinsichtlich des tatsächlichen Grenzwertes von $A(x)$ war er sich nicht sicher. Bewiesen hat aber auch Gauß bezüglich des Primzahlsatzes niemals etwas.
Weiterführende Erkenntnisse konnten von Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow[8] (1821-1894) und von James Joseph Sylvester (1814-1897) erarbeitet werden. Auf Tscheby-

[7] [Lan1], Seite 37-41.
[8] Im mathematischen Kontext ist die ältere Transkription *Tschebyscheff* üblicher. Diese soll im Folgenden verwendet werden.

scheff geht das wichtige Resultat

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} \sim \log x \tag{2.2}$$

zurück, woraus man ableiten kann, dass $\pi(x)$ von Ordnung $\frac{x}{\log x}$ ist. Wir werden später mit Lemma 4.4 zu diesem Ergebnis gelangen. Sylvester hingegen konnte zeigen, dass für hinreichend große x gilt

$$0.956 < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < 1.045.^{9} \tag{2.3}$$

Bernhard Riemann (1826-1866) gelang es eine Verbindung des Primzahlsatzes zur Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 1$$

in der komplexen Ebene herzustellen.[10] Er setzte die Zetafunktion auf die ganze komplexe Zahlenebene analytisch fort und zeigte, dass ihre Nullstellen mit dem Primzahlsatz in Beziehung stehen. Er konnte beweisen, dass der Primzahlsatz eine Folgerung wäre, wenn man zeigen könnte, dass die Zetafunktion auf der Geraden der Zahlen mit $\Re(s) = 1$ nicht Null wird. Er schuf damit eine Art Anleitung zum Beweis des Primzahlsatzes. Eine Veröffentlichung erfolgte 1859 in einem zehnseitigen Aufsatz ([Rie1]), der im Übrigen Riemanns einzige Veröffentlichung im Bereich Zahlentheorie war. Bemerkenswert ist nicht nur der geringe Umfang der Arbeit, sondern auch die außergewöhnliche Kreativität. Trotz großer Anstrengungen gelang es Riemann in seinen wenigen verbleibenden Lebensjahren nicht diesen letzten Schritt des Beweises auszuführen. Er hatte außerdem eine weitaus stärkere Vermutung, nämlich dass alle nichttrivialen Nullstellen auf der Geraden $\Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen, was natürlich die erste Forderung implizieren würde. Dieses Problem ist als Riemannsche Vermutung bekannt und bis heute ungelöst.[11]

Inspiriert durch diese Erkenntnisse arbeiteten viele Mathematiker in den Jahren nach dem Tode Riemanns an einer Vervollständigung seines Beweises. Hans von Mangoldt (1854-1925) und Jacques Hadamard (1865-1963) lieferten schließlich die notwendigen Mittel für einen Beweis. Im Jahr 1896 wurde der Primzahlsatz dann sogar zweimal unabhängig voneinander mit jeweils unterschiedlichem Vorgehen bewiesen und zwar von Hadamard und von Charles-Jean de La Valle Poussin (1866-1962). Beide konnten zeigen, dass die Zetafunktion auf der Geraden der Zahlen mit $\Re(s) = 1$ keine Nullstelle besitzt.[12]

In den folgenden Jahren wurde der Beweis des Primzahlsatzes immer wieder vereinfacht. Besonders Landau und Norbert Wiener (1894-1964) sind hier zu nennen. Der

[9] [Gol1], Seite 179-180.
[10] [Apo1], Seite 26-27.
[11] [Apo1], Seite 25-26.
[12] [Apo1], Seite 27.

Abbildung 2: Atle Selberg (1917-2007)

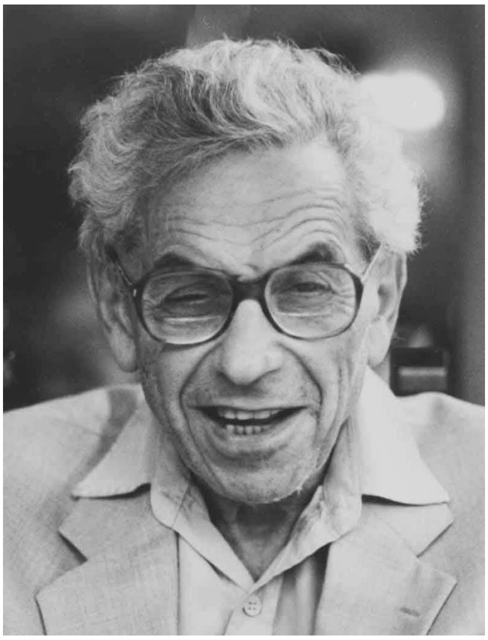

Abbildung 3: Paul Erdős (1913-1996)

Kerngedanke der Verbindung mit den Nullstellen der Zetafunktion blieb aber und damit auch der Weg über die komplexe Analysis.[13]

2.2 Ein elementarer Beweis

Lange Zeit wurde die Existenz eines elementaren Beweises des Primzahlsatzes angezweifelt. Eine Passage eines Vortrags, den Hardy 1921 in Kopenhagen hielt, macht dies deutlich und beschreibt sehr anschaulich die Problematik:

> No elementary proof of the prime number theorem is known, and one may ask whether it is reasonable to expect one. Now we know that the theorem is roughly equivalent to a theorem about an analytic function, the theorem that Riemann's zeta function has no roots on a certain line. A proof of such a theorem, not fundamentally dependent upon the ideas of the theory of functions, seems to me extraordinarily unlikely. It is rash to assert that a mathematical theorem *cannot* be proved in a particular way; but one thing seems quite clear. We have certain views about the logic of the theory; we think that some theorems, as we say 'lie deep' and others nearer to the surface. If anyone produces an elementary proof of the prime number theorem, he will show that these views are wrong, that the subject does not hang together in the way we have supposed, and that it is time for the books to be cast aside and for the theory to be rewritten.[14]

[13] [Boh1], Seite 129.
[14] [Boh1], Seite 129.

Hardy sollte zu seinen Lebzeiten Recht behalten. Ein Jahr nach seinem Tod im Jahr 1948 aber vermeldete Paul Erdős (1913-1996), dass er zusammen mit Atle Selberg (1917-2007) einen elementaren Beweis des Primzahlsatzes gefunden habe. Selberg wurde als Anerkennung für die Entdeckung 1950 an der Harvard University beim elften Internationalen Mathematikerkongress die Fields-Medaille verliehen[15], Erdős wurde 1951 beim achtundfünfzigsten Jahrestreffen der American Mathematical Society für seinen wichtigen Beitrag zu Selbergs Beweis an der Brown University mit dem Colepreis ausgezeichnet[16].

So bedeutend diese Entdeckung war, so groß war aber auch der Streit, der zwischen den beiden Mathematikern entbrannte. Das Problem war, dass beide nicht von Anfang an zusammenarbeiteten. Selberg suchte lange Zeit alleine nach dem Beweis, der entscheidende Schritt gelang allerdings erst mit Erkenntnissen von Erdős. Der Streit entwickelte sich schließlich über der Frage, ob man gemeinsam veröffentlichen solle oder jeder seine eigenen Beiträge niederschreibe. Die nachfolgenden Darstellungen folgen, sofern nicht anders referenziert, im Wesentlichen den Ausführungen Dorian Goldfelds ($*1947$) in seinem Aufsatz [Gol1]. Goldfeld war nach eigenen Angaben eng mit beiden Autoren befreundet und beruft sich bei der Darstellung auf zahlreiche Gespräche, ihm vorliegende Briefe und andere Dokumente.

Zunächst soll etwas näher auf die genauen Beiträge der beiden eingegangen werden. Selberg bewies im März 1948 die wichtige Ungleichung

$$\psi(x)\log x + \sum_{p\leq x} \log p\, \psi\left(\frac{x}{p}\right) = 2x\log x + \mathcal{O}(x).$$

Diese entspricht im später ausgeführten Beweis Ungleichung (4.38), die Überführung ineinander ist einfach und erfolgt beispielsweise mit Gleichung (4.6). Dabei ist $\psi(x)$ eine Hilfsfunktion, Definition und Bedeutung sind in (4.4) und (4.5) zu finden. Es kann die Äquivalenz des Primzahlsatzes und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

gezeigt werden, uns wird dies in Lemma 4.5 gelingen. Die Ungleichung kann als eigentlicher Kern des Beweises verstanden werden und wird deshalb auch Fundamentalformel genannt.

Definiert man

$$a = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \quad \text{und} \quad A = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x},$$

so folgt mit Sylvesters Erkenntnis (2.3)

$$0.956 \leq a \leq A \leq 1.045.$$

[15][Boh1], Seite 127.
[16][Coh1], Seite 157-160.

Selberg konnte nun mit Hilfe des Resultates von Tschebyscheff (2.2) und der Fundamentalformel beweisen, dass gilt $a + A = 2$. Im war sehr wohl bewusst, dass der Primzahlsatz eine unmittelbare Folge wäre, könnte er nur zeigen, dass gilt $a = A = 1$. Erdős kam mit der Fundamentalformel in einem Seminar in Kontakt, welches er besuchte. Das Seminar wurde von Pál Turán (1910-1976) gehalten, welcher im Vorfeld von Selberg persönlich unterwiesen wurde. Allerding wusste er nur um die Existenz der Formel, den Beweis behielt Selberg vorerst für sich. Erdős gelang es schließlich in relativ kurzer Zeit aus der Fundamentalformel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 \tag{2.4}$$

abzuleiten. Eigentlich bewies er sogar ein etwas stärkeres Ergebnis, nämlich dass zu jedem c ein positives $\delta(c)$ existiert, sodass für hinreichend große x gilt

$$\pi(x(1+c)) - \pi(x) > \delta(c)x/\log x.\text{[17]} \tag{2.5}$$

Die Beweise dazu im Einzelnen sind in chronologischer Reihenfolge in Erdős' Veröffentlichung [Erd1] nachzulesen.

Kurz darauf teilte Erdős Selberg seine Entdeckung mit. Selberg wollte das Ergebnis zunächst nicht glauben und behauptete sogar dies durch Gegenbeispiele beweisen zu können. Er war sich darüber im Klaren, dass dieser einfache Grenzwert den Beweis des Primzahlsatzes bedeuten würden, denn man kann damit zeigen, dass gilt $a = A = 1$.

Selberg war mit diesem Verlauf überhaupt nicht zufrieden. Er schrieb in einem Brief an Hermann Weyl (1885-1955): „Actually, I didn't like that somebody else started working on my unpublished results before I considered myself through with them.“[18]

Selberg machte sich umgehend an die Arbeit und konnte mit Hilfe von (2.4) und (2.5) wirklich innerhalb von zwei Tagen eine erste Version des Beweises fertigstellen. Durch gemeinsame Arbeit von Erdős und Selberg konnte diese erste Version in den folgenden Tagen noch vereinfacht und verbessert werden.[19] Eine Skizze der ersten Beweisversion, die mit Hilfe von (2.4) und (2.5) zeigt, dass $a = A = 1$, kann in [Sel1] nachgelesen werden.

Trotz der gemeinsamen Arbeit herschte über die Art der Veröffentlichung Uneinigkeit.

Selberg setzte sich für eine getrennte Veröffentlichung der jeweils eigenen Leistung ein. In einem Brief vom 20. August 1948 schrieb er an Erdős:

> What I propose is the only fair thing: each of us can publish what he has actually done and get the credit for that, and not for what the other has done. [...] I am going to publish my proof as it now is. I have the opinion, [...] that I do you full justice by telling in the paper that my original proof

[17] [Erd1], Seite 375.
[18] [Gol1], Seite 185.
[19] [Erd1], Seite 375.

> depended on your result. In addition to this I offered you to withhold my proof so your theorem could be published earlier [...]. I still offer you this [...]. If you don't accept this I publish my proof anyway.[20]

In Briefen an Weyl und Goldfeld wird deutlich, dass Selberg befürchtet Erdős werde alleine oder zu einem ungerechtfertigt großen Teil Anerkennung für den Beweis des Primzahlsatzes bekommen; Selberg war sehr besorgt um die Anerkennung. Er bot Erdős schließlich in einem zweiten Brief vom 20. September 1948 an in seiner Veröffentlichung eine Skizze des ersten Beweises mitzuliefern und dabei auf seine Ergebnisse zu verweisen.[21] Diese Skizze ist im Übrigen auch die erste Beweisversion in [Sel1], auf die weiter oben bereits hingewiesen wurde.
Erdős wiederum fühlte sich von Selberg betrogen. Er ergriff Partei für eine gemeinsame Veröffentlichung. Er antwortet auf Selbergs Briefe am 27. September 1948. Er stellt zum einen fest, dass Selberg am Anfang die Möglichkeit seines Beweises bezweifelte und ihm sogar sagte er könne zeigen, dass die Fundamentalformel nicht den Primzahlsatz impliziert. Zum anderen kritisiert er, dass er ihm wichtiges Wissen vorenthielt:

> If you would have told me about what you know about a und A, I would have finished the proof [...] on the spot. [...] Then your share [...] would have only been the beautiful Fundamental Lemma. [...] I feel just as strongly as before that I am fully entitled to a joint paper. So if you insist on publishing your new proof all I can do is to publish our simplified proof, giving you of course full credit for your share [...].[22]

Was die Publikation von Erdős angeht, so machte er wahr, was er angekündigt hatte. Er veröffentlichte den gemeinsam erarbeiteten Beweis mit Verweis auf Selbergs Leistung. Die Publikation [Erd1] wurde weiter oben bereits erwähnt.
Der Disput beschränkte sich nicht nur auf Erdős und Selberg. Einige Mathematiker ergriffen ebenfalls Partei. Selberg fand vorallem in Weyl einen Befürworter. Aus dessen Schriftwechsel mit Nathan Jacobson (1910-1999) stammt folgendes Zitat:

> I had questioned whether Erdős has the right to publish things which are admittedly Selberg's [...]. I really think that Erdős's behavior is quite unreasonable, and if I were the responsible editor I think I would not be afraid of rejecting his paper in this form.[23]

Laut Ernst Gabor Straus (1922-1983) war es auch Weyl, der dafür sorgte, dass die *Annals of Mathematics* schließlich Erdős Aufsatz zurückwiesen und nur Selbergs Beitrag veröffentlichten.[24] Erdős musste auf die *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* ausweichen.

[20] [Gol1], Seite 187.
[21] [Gol1], Seite 188.
[22] [Gol1], Seite 189.
[23] [Gol1], Seite 190.
[24] [Gol1], Seite 189.

Straus war es auch, der sich mehr für Erdős einsetzte. Er war es, der verlauten ließ, dass Selbergs Bedenken hinsichtlich mangelnder Anerkennung jeglicher Grundlage entbehrten. Er war ebenfalls in Turáns Seminar anwesend und deshalb Zeuge der Ereignisse der nächsten Tage. Nach seiner Wahrnehmung wurde niemals nur Erdős mit dem Beweis in Verbindung gebracht, sondern immer auch Selberg.[25]
Der Disput zwischen Erdős und Selberg endete mit den jeweiligen Veröffentlichungen, eine Versöhnung sollte aber nie stattfinden. Die Reaktion der beiden in den folgenden Jahren war durchaus unterschiedlich. Selberg nahm weitgehend Abstand vom elementaren Beweis des Primzahlsatzes und sollte ihn niemals in seine Lehrveranstaltungen einbeziehen. Erdős hingegen soll ausgedehnte Vorträge in ganz Europa über dieses Thema gehalten haben.[26]
Wer in welchem Ausmaß Unrecht hatte lässt sich heute schwer beurteilen. Tatsache ist, dass beide ihren Beitrag zum Beweis geleistet haben. Selberg hat sicherlich einen Großteil eigenständig erarbeitet, was es nur verständlich macht, dass er dafür auch Anerkennung erhalten wollte. Allerdings bleibt es fraglich, ob er wirklich alleine einen Beweis hätte bewerkstelligen können, glaubte er doch wirklich daran, dass die Fundamentalformel nicht ausreicht. So schmälert es keinen der beiden Beiträge. Zusammengenommen ergeben sie den elementaren Beweis einer jahrhundertealten Vermutung und sollten auch so gewürdigt werden.
Kommen wir aber nun zum eigentlichen Beweis. Der Beweis folgt in wesentlichen Punkten den Ausführungen von Norman Levinson (1912-1975) in [Lev1], die 1969 publiziert wurden. Übrigens stammt von Levinson auch das bis heute stärkste Resultat hinsichtlich der Riemannschen Vermutung.[27] Sein Beweis (oder vielmehr seine Zusammenstellung des Beweises) des Primzahlsatzes stammt aus den 1960er Jahren und damit aus einer Zeit, in der die Aufregung um den Beweis bereits abgeebbt war. Dennoch hielt er es seinerzeit für sinnvoll einen in sich geschlossenen elementaren Beweis des Primzahlsatzes zu liefern, da die Mathematik eine rasante Ausdehnung erfuhr, viele neue Fachbereiche entstanden und sich viele Mathematiker nicht mehr mit der Zahlentheorie beschäftigten.[28]

3 Definitionen

Die Defintionen können beispielsweise in [Ha-Wr1] nachgeschlagen werden.
Eine Primzahl werde mit $p \in \mathbb{P}$ bezeichnet, $\mathbb{P}$ ist die Menge aller Primzahlen.
Man nennt

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

[25] [Gol1], Seite 188.
[26] [Gol1], Seite 190-191.
[27] [Mar1], Seite XXXIV.
[28] [Lev1], Seite 225.

die *Primzahlfunktion*. Sie gibt die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x an.
Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ heißen *asymptotisch gleich* (in Zeichen: $f(x) \sim g(x)$), wenn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

gilt. Nach dem Primzahlsatz gilt also, dass $\pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)}$ asymptotisch gleich sind.
Die *von-Mangoldt-Funktion* für ein $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{falls}\, n = p^j,\ j \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die *Gaußklammer* für eine reelle Zahl x ist

$$\lfloor x \rfloor = \max_{k\in\mathbb{Z},\ k\leq x} k$$

und somit die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als x.
Seien $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen und $c > 0$ eine Konstante. Gibt es zudem ein x_0, sodass für alle $x > x_0$ gilt

$$|f(x)| \leq c|g(x)|,$$

so nennen wir $g(x)$ eine *asymptotische obere Schranke* von $f(x)$, d.h. $f(x)$ wächst nicht wesentlich schneller als $g(x)$. In Zeichen schreiben wir

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

und benutzen dabei das *Landau-Symbol* $\mathcal{O}(\cdot)$.

4 Grundlagen

4.1 Die Tschebyscheff-Identität und deren Inversion

Wir wissen, dass wir jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ in ein Produkt aus $m \in \mathbb{N}$ disjunkten Primzahlpotenzen zerlegen können, welches bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt ist:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}, \quad p_i \in \mathbb{P},\, p_i \neq p_j \,\text{für}\, i \neq j,\, k_i \in \mathbb{N}.$$

Durch die Anwendung des Logarithmus erhalten wir eine Zerlegung von $\log n$ in eine Summe aus m Summanden:

$$\log n = \log\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}\right) = k_1 \log p_1 + k_2 \log p_2 + \ldots + k_m \log p_m. \tag{4.1}$$

Außerdem können wir schreiben

$$\log n = \sum_{k|n} \Lambda(k). \tag{4.2}$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition der von-Mangoldt-Funktion. Betrachtet man die rechte Seite von (4.2), so sind die einzigen Summanden ungleich Null gerade $\log p_j$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$, denn ist ein Teiler k von n keine reine Primzahlpotenz, so ist $\Lambda(k) = 0$. Darüber hinaus gilt $\Lambda(k) = \log p_j$ für alle $k = p_j^r$, $r \in \{1, \ldots, k_j\}$, deswegen kommt $\log p_j$ genau k_j-mal vor und Gleichung (4.2) stimmt mit Gleichung (4.1) überein.
Zu Gleichung (4.2) ist überdies

$$\log n = \sum_{jk=n} \Lambda(k) \tag{4.3}$$

äquivalent. Der Parameter $j \in \mathbb{N}$ nimmt hier alle möglichen Werte an, sodass $jk = n$ erfüllt ist, weswegen k tatsächlich alle möglichen Teiler von n durchläuft.
Nun definieren wir eine zu Gleichung (4.3) ähnliche Funktion $\psi(x)$ als

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Wir werden später beweisen, dass der Primzahlsatz äquivalent ist zu

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \tag{4.5}$$

und der eigentliche Beweis des Primzahlsatzes wird durch den Beweis von Gleichung (4.5) erfolgen. Im Folgenden wollen wir ersteinmal mehr über $\psi(x)$ herausfinden.
Wir stellen zunächst mit (4.3) für $n \in \mathbb{N}$ fest:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \log n &= \sum_{n \leq x} \sum_{jk=n} \Lambda(k) \\ &= \sum_{jk=1} \Lambda(k) + \sum_{jk=2} \Lambda(k) + \ldots + \sum_{jk=\lfloor x \rfloor} \Lambda(k) = \sum_{jk \leq x} \Lambda(k). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Damit definieren wir eine Funktion

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \sum_{jk \leq x} \Lambda(k). \tag{4.7}$$

Die Funktion $T(x)$ ist also eine Summe über alle ganzzahligen Gitterpunkte (j, k), welche unter oder auf der Hyperbel $jk = x$ liegen und gleichzeitig in beiden Komponenten j und k positiv sind. Wir erreichen dementsprechend genauso alle genannten

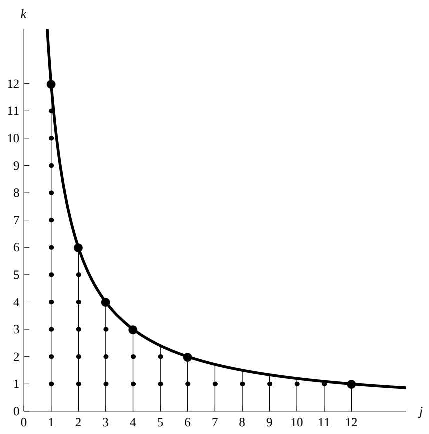

Abbildung 4: Veranschaulichung der Zählweise der Gitterpunkte im Gitter für $jk \leq 12$ mit $j, k \in \mathbb{N}$: Aufsummieren aller Punkte zu einem j und anschließendes Addieren aller Senkrechten.

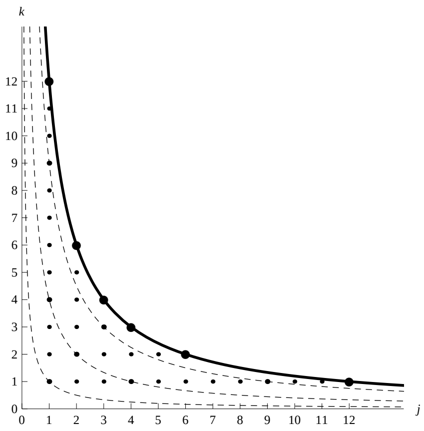

Abbildung 5: Veranschaulichung der Zählweise der Gitterpunkte im Gitter für $jk \leq 12$ mit $j, k \in \mathbb{N}$: Aufsummieren aller Punkte auf einer Hyperbel und anschließendes Addieren aller Hyperbeln.

Gitterpunkte, wenn wir schreiben

$$T(x) = \sum_{j \leq x} \sum_{k \leq \frac{x}{j}} \Lambda(k) = \underset{(j=1)}{\sum_{k \leq x} \Lambda(k)} + \underset{(j=2)}{\sum_{k \leq \frac{x}{2}} \Lambda(k)} + \ldots + \underset{(j=\lfloor x \rfloor)}{\sum_{k \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor}} \Lambda(k)},$$

denn wir summieren hier zuerst zum jeweiligen Wert von j in den entsprechenden Summen alle Punkte unter oder auf der Hyperbel zusammen und addieren sie anschließend. Abbildung 4 zeigt bespielhaft für $x = 12$ die entsprechende Hyperbel und angedeutet durch die vertikal verbundenen Gitterpunkte die Zählweise.
Schlussendlich erhalten wir aus diesen Überlegungen und mit der Definition der Funktion $\psi(x)$ aus (4.4):

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \tag{4.8}$$

Die Funktion $T(x)$ in dieser Darstellung bezeichnet man als *Tschebyscheff-Identität.* Diese Identität wollen wir nun umkehren und untersuchen hierfür eine allgemeine Funktion $G(x)$, die statt dem $\psi(x)$ eine Funktion $F(x)$ enthält. Es gilt auch hier $x \geq 1$, also

$$G(x) = \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) = F(x) + F\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + F\left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor}\right). \tag{4.9}$$

Wollen wir nun erreichen, dass $F(x)$ durch seine Anteile von $G(x)$ ausgedrückt wird, substituieren wir in (4.9) x jeweils durch $\frac{x}{i}$, $i \in \{1, \ldots, \frac{x}{\lfloor x \rfloor}\}$:

$$
\begin{array}{lllllll}
G(x) & =F(x) & +F\left(\frac{x}{2}\right) & +F\left(\frac{x}{3}\right) & +F\left(\frac{x}{4}\right) & +F\left(\frac{x}{5}\right) & +F\left(\frac{x}{6}\right)+\ldots \\
G\left(\frac{x}{2}\right) = & & F\left(\frac{x}{2}\right) & & +F\left(\frac{x}{4}\right) & & +F\left(\frac{x}{6}\right)+\ldots \\
G\left(\frac{x}{3}\right) = & & & F\left(\frac{x}{3}\right) & & & +F\left(\frac{x}{6}\right)+\ldots \\
G\left(\frac{x}{4}\right) = & & & & F\left(\frac{x}{4}\right) & & +\ldots \\
G\left(\frac{x}{5}\right) = & & & & & F\left(\frac{x}{5}\right) & +\ldots \\
G\left(\frac{x}{6}\right) = & & & & & & F\left(\frac{x}{6}\right)+\ldots \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Subtrahieren oder addieren wir jeweils die Gleichungen von oder zu $G(x)$, die benötigt werden, um nach $F(x)$ aufzulösen, so erhalten wir

$$F(x) = G(x) - G\left(\frac{x}{2}\right) - G\left(\frac{x}{3}\right) - G\left(\frac{x}{5}\right) + G\left(\frac{x}{6}\right) + \ldots .$$

Die Vermutung liegt also nahe, dass sich $F(x)$ als

$$F(x) = \sum_{k \leq x} \mu(k) G\left(\frac{x}{k}\right) \tag{4.10}$$

darstellen lässt, wobei $\mu(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ die Vorfaktoren der $G\left(\frac{x}{k}\right)$ festlegt, die hier aber noch unbestimmt sind.

Ein Beweis der Vermutung gelingt beispielsweise mit Methoden der Linearen Algebra. Hierzu identifizieren wir jeden Funktionswert $G\left(\frac{x}{i}\right)$ mit einem Vektor $e_i \in \mathbb{R}^{\lfloor x \rfloor}$:

$$
\begin{aligned}
G\left(\frac{x}{1}\right) &\cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \end{pmatrix}^T = e_1 \\
G\left(\frac{x}{2}\right) &\cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \end{pmatrix}^T = e_2 \\
G\left(\frac{x}{3}\right) &\cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots \end{pmatrix}^T = e_3 \\
&\vdots \\
G\left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor}\right) &\cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = e_{\lfloor x \rfloor}
\end{aligned}
$$

Jedem Summanden von $G\left(\frac{x}{i}\right)$, der ungleich Null ist, wird eine 1 zugeordnet, sonst eine 0. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_{\lfloor x \rfloor} \end{pmatrix}$ ist eine untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Diagonalen. Damit folgt für die Determinante $\det A = 1 \neq 0$, weswegen die e_i alle voneinander linear unabhängig sind. Daher bilden die e_i eine Basis des $\mathbb{R}^{\lfloor x \rfloor}$

und es gibt eine Linearkombination

$$\sum_{k\leq x}\mu(k)e_k = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent mit

$$\sum_{k\leq x}\mu(k)G\left(\frac{x}{k}\right) = F(x).$$

Bestimmen wir also als nächstes die Vorfaktoren $\mu(k)$. Diese sind nach Konstruktion eindeutig.
Mit (4.9) gilt

$$G\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{j\leq\frac{x}{k}} F\left(\frac{x}{jk}\right)$$

und damit folgt mit (4.10) und der gleichen Argumentation wie bei der Herleitung der Tschebyscheff-Identität (4.8)

$$F(x) = \sum_{k\leq x}\mu(k)\sum_{j\leq\frac{x}{k}} F\left(\frac{x}{jk}\right) = \sum_{jk\leq x}\mu(k)F\left(\frac{x}{jk}\right).$$

Die Summe summiert wieder über alle Gitterpunkte (j,k) unterhalb der Hyperbel $jk = x$, wobei $j,k \in \mathbb{N}$. Diese Punkte erreicht man auch alle, wenn man zuerst die Punkte auf der Hyperbel $jk = n$ aufsummiert und anschließend n mit $1 \leq n \leq x$ durchlaufen lässt. Man zählt also nacheinander die Punkte von $\lfloor x\rfloor$ Hyperbeln zusammen. Angenommen man würde einen Punkt $(j^\star, k^\star)$ mit $j^\star k^\star \leq x$ durch diese Methode nicht treffen, so würde man auch nicht über die Hyperbel $jk = j^\star k^\star = n^\star \leq x$ summieren. Abbildung 5 zeigt für $x = 12$ die entsprechende Hyperbel und angedeutet durch die drei Hyperbeln die Zählweise.
Die beiden Summendarstellungen aus Abbildung 4 und Abbildung 5 werden im weiteren Verlauf noch häufig benutzt werden, weswegen sie auch besonders genau eingeführt wurden. Es wird im Folgenden nicht mehr gesondert auf deren Anwendung hingewiesen.
Es folgt also die Darstellung:

$$F(x) = \sum_{n\leq x} F\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{jk=n}\mu(k). \tag{4.11}$$

Wir erkennen, dass diese Gleichung zur Identität wird, wenn wir setzen

$$\sum_{jk=n}\mu(k) = \begin{cases}1, & \text{für } n = 1\\ 0, & \text{für } 2 \leq n \leq x\end{cases}. \tag{4.12}$$

Im Falle von $n = 1$ gilt natürlich $\mu(1) = 1$. Setzen wir $n = p$ mit $p \in \mathbb{P}$, so kann k nur 1 oder p sein, da $j \in \mathbb{N}$ und wir erhalten $\mu(1) + \mu(p) = 0$, woraus folgt $\mu(p) = -1$. Sei im Folgenden $p_i \neq p_j$ für $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$. Wählen wir $n = p_1p_2$, kann k die Werte 1,

p_1, p_2 und p_1p_2 annehmen, also

$$\mu(1) + \mu(p_1) + \mu(p_2) + \mu(p_1p_2) = 0.$$

Wir schließen $\mu(p_1p_2) = 1$. Durch weiteres Festlegen von n durch Primzahlpotenzen findet man heraus, dass $\mu(p_1p_2p_3) = -1$ und $\mu(p^2) = \mu(p^3) = \ldots = \mu(p_1^2p_2) = 0$. Wir vermuten daher, dass gilt:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 1 \\ (-1)^m, & \text{für } n = p_1p_2\ldots p_m \\ 0, & \text{für } p^2 \mid n \end{cases}. \tag{4.13}$$

Diese Funktion nennt man *Möbiusfunktion*. Es verbleibt noch zu beweisen, dass $\mu(n)$ die Gleichung (4.12) wirklich erfüllt, die Eindeutigkeit wurde bereits gezeigt. Für $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_m^{k_m}$ gilt

$$\sum_{jk=n} \mu(k) = \sum_{k|n} \mu(k) = \sum_{k|p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_m^{k_m}} \mu(k) = \sum_{k|p_1p_2\ldots p_m} \mu(k), \tag{4.14}$$

da alle $\mu(p^2a), a \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung Null sind. Es genügt also den Beweis für diejenigen n zu führen, die in paarweise disjunkte Primfaktoren zerfallen. Ist $m = 1$, so ist die Aussage nach dem eben Gezeigten wegen $\mu(1) + \mu(p) = 1 - 1 = 0$ richtig. Um eine Aussage für den den Fall $m \geq 2$ zu erzielen, wird (4.14) umgeschrieben:

$$\sum_{k|p_1p_2\ldots p_m} \mu(k) = \sum_{k|p_1p_2\ldots p_{m-1}} (\mu(k) + \mu(kp_m)). \tag{4.15}$$

Dass dies geht ist letzlich klar: durch den zusätzlichen Summanden $\mu(kp_m)$ innerhalb der Summe werden alle möglichen Kombinationen eines Produkts von p_m und $k \mid p_1p_2\ldots p_{m-1}$ hinzugefügt, die durch die Reduzierung von n um den Primfaktor p_m nicht durch die eigentliche Summationsvorschrift erzeugt werden. Sei nun k aus $r \in \{1, \ldots, m-1\}$ quadratfreien Primfaktoren zusammengesetzt. Dann gilt mit der Möbiusfunktion (4.13)

$$\mu(kp_m) = (-1)^{r+1} = -(-1)^r = -\mu(k)$$

und die Summe aus (4.15) wird Null. Dies zeigt die Gültigkeit von (4.12) für die Möbiusfunktion und wir haben die Vorfaktoren für Gleichung (4.10) eindeutig bestimmt. Bezüglich dieser Vorfaktoren stellen wir an dieser Stelle fest, dass gilt

$$|\mu(n)| \leq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

Von dieser Eigenschaft werden wir später noch Gebrauch machen.
Nachdem wir nun die Inversion (4.10) konstruiert und genauer bestimmt haben, wen-

den wir sie auf die Tschebyscheff-Identität (4.8) an und erhalten deren Inversion:

$$\psi(x) = \sum_{k \leq x} \mu(k) T\left(\frac{x}{k}\right). \tag{4.17}$$

Mit dem bisher Erarbeiteten können wir auch Gleichung (4.2) invertieren und somit die von-Mangoldt-Funktion durch eine Summe von Logarithmen und der Möbiusfunktion darstellen. Dafür setzen wir zunächst die Definitionen von $\psi(x)$ und $T(x)$ (zu finden in (4.4) und (4.7)) in (4.17) ein:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \Lambda(n) &= \sum_{k \leq x} \mu(k) \sum_{j \leq \frac{x}{k}} \log j \\
&= \sum_{jk \leq x} \mu(k) \log j \\
&= \sum_{n \leq x} \sum_{jk = n} \mu(k) \log j \\
&= \sum_{n \leq x} \sum_{k \mid n} \mu(k) \log \frac{n}{k}.
\end{aligned}$$

Mit sukzessivem Durchlauf von x beginnend bei $x = 1$ begründet sich, dass gilt

$$\Lambda(n) = \sum_{k \mid n} \mu(k) \log \frac{n}{k}, \quad n \geq 1. \tag{4.18}$$

Dies ist genau die Invertierung von Gleichung (4.2).

4.2 Einige wichtige Sätze

Lemma 4.1 (*Abelsche Teilsummation*)
Sei $f(t)$ für $t \geq 1$ stetig differenzierbar, seien $c_n, n \in \mathbb{N}$ Konstanten und sei $C(u) = \sum_{n \leq u} c_n$. Dann gilt

$$\sum_{n \leq x} c_n f(n) = f(x) C(x) - \int_1^x f'(t) C(t) \mathrm{d}t. \tag{4.19}$$

Beweis: Aus der Definition von $C(u)$ folgt direkt

$$C(n) - C(n-1) = c_n$$

und

$$C(u) = C(\lfloor u \rfloor),$$

denn $C(u)$ ist eine Treppenfunktion und auf dem Intervall $[\lfloor u \rfloor, u]$ konstant. Mit dieser Konstanz folgt auch

$$\int_{\lfloor x \rfloor}^x C(t) f'(t) \mathrm{d}t = C(x) \int_{\lfloor x \rfloor}^x f'(t) \mathrm{d}t = C(x)(f(x) - f(\lfloor x \rfloor)),$$

also
$$C(x)f(\lfloor x\rfloor) = -\int_{\lfloor x\rfloor}^{x} C(t)f'(t)\mathrm{d}t + C(x)f(x).$$

Mit diesen Überlegungen können wir bereits (4.19) beweisen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} c_n f(n) &= \sum_{n\le x}(C(n)-C(n-1))f(n)\\
&= \left(\sum_{n\le x-1}(C(n)-C(n-1))f(n) - C(\lfloor x-1\rfloor)f(\lfloor x\rfloor)\right) + C(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor)\\
&= \sum_{n\le x-1} C(n)(f(n)-f(n+1)) + C(x)f(\lfloor x\rfloor)\\
&= -\sum_{n\le x-1}\int_n^{n+1} C(n)f'(t)\mathrm{d}t + C(x)f(\lfloor x\rfloor)\\
&= -\sum_{n\le x-1}\int_n^{n+1} C(t)f'(t)\mathrm{d}t + C(x)f(\lfloor x\rfloor)\\
&= -\int_1^{\lfloor x\rfloor} C(t)f'(t)\mathrm{d}t - \int_{\lfloor x\rfloor}^{x} C(t)f'(t)\mathrm{d}t + C(x)f(x)\\
&= -\int_1^{x} C(t)f'(t)\mathrm{d}t + C(x)f(x)
\end{aligned}$$

■

LEMMA 4.2 (*Eulersche Summenformel*)
Sei $f(t)$ für $t \ge 1$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\sum_{n\le x} f(n) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t + \int_1^x (t-\lfloor t\rfloor)f'(t)\mathrm{d}t + f(1) - (x-\lfloor x\rfloor)f(x). \tag{4.20}$$

Beweis: Setzen wir in (4.19) $c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist mit der partiellen Integration

$$\int_1^x f'(t)t\,\mathrm{d}t = f(t)t\Big|_1^x - \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)x - f(1) - \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

schon die Gleichung (4.20) bewiesen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} f(n) &= f(x)\sum_{n\le x} 1 - \int_1^x f'(t)\lfloor t\rfloor\mathrm{d}t\\
&= f(x)\lfloor x\rfloor - \int_1^x f'(t)t\,\mathrm{d}t + \int_1^x f'(t)t\,\mathrm{d}t - \int_1^x f'(t)\lfloor t\rfloor\mathrm{d}t\\
&= \int_1^x f(t)\mathrm{d}t + \int_1^x (t-\lfloor t\rfloor)f'(t)\mathrm{d}t + f(1) - (x-\lfloor x\rfloor)f(x).
\end{aligned}$$

■

Setzen wir $f(t) = \log t$, schreiben wir mit (4.20) und $\int \log t \,\mathrm{d}t = x \log x - x + d, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n \le x} \log n \\ &= x \log x - x + 1 + \int_1^x (t - \lfloor t \rfloor) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log t \,\mathrm{d}t - (x - \lfloor x \rfloor) \log x. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Für den hinteren Teil gilt mit $0 \le t - \lfloor t \rfloor < 1$ und $\log t > 0$ für $t > 1$:

$$\begin{aligned} |1 + \int_1^x (t - \lfloor t \rfloor) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log t \,\mathrm{d}t - (x - \lfloor x \rfloor) \log x| &\le |1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log t \,\mathrm{d}t - (x - \lfloor x \rfloor) \log x| \\ &= |1 + \underbrace{(1 - (x - \lfloor x \rfloor))}_{\le 1} \log x| \\ &\le |1 + \log x| \\ &= \mathcal{O}(1 + \log x) \\ &= \mathcal{O}(\log x). \end{aligned}$$

Der hintere Teil von (4.21) wächst also logarithmisch, d.h. er wächst ungefähr um einen konstanten Betrag, wenn sich das Argument verdoppelt.
Wir erhalten also:

$$T(x) = x \log x - x + \mathcal{O}(\log x). \tag{4.22}$$

Lemma 4.3
Für hinreichend große x gilt

$$\psi(x) < \frac{3}{2} x.$$

Beweis: Zuerst sei darauf hingewiesen, dass $\psi(x) = \sum_{j \le x} \Lambda(j)$ monoton wachsend ist, denn die von-Mangoldt-Funktion $\Lambda(j)$ kann gemäß Definition nicht negativ werden. Also folgt

$$\psi\left(\frac{x}{2n-1}\right) - \psi\left(\frac{x}{2n}\right) \ge 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit dieser Beobachtung und der Tschebyscheff-Identität (4.8) erhalten wir

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots \ge \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)$$

und mit (4.22) folgt für $x \ge 2$ und mit einer Konstanten c

$$\begin{aligned} \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) &\le x \log x - x - 2\left(\frac{x}{2} \log \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) + \mathcal{O}(\log x) \\ &= x \log 2 + \mathcal{O}(\log x) \le x \log 2 + c \log x. \end{aligned}$$

Ersetzen wir x durch $\frac{x}{2^j}$ und gilt $\frac{x}{2^j} \ge 2$ ergibt sich

$$\psi\left(\frac{x}{2^j}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right) \le \frac{x}{2^j} \log 2 + c \log x. \tag{4.23}$$

Aus $\frac{x}{2^j} \geq 2$ folgt weiterhin $j \log 2 \leq \log \frac{x}{2}$, also $j \leq \frac{\log x}{\log 2} - 1 < \frac{\log x}{\log 2}$. Bilden wir nun die Summe

$$\sum_{0 \leq j < \frac{\log x}{\log 2}} \left(\psi\left(\frac{x}{2^j}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)\right).$$

Diese ist mit $\psi(x)$ identisch. Man erkennt das durch einfaches Ausschreiben der Summe und

$$\psi\left(\frac{x}{2^{\lfloor \log x/\log 2\rfloor + 1}}\right) = 0$$

wegen $\psi(t) = 0$ für $t < 2$. Mit (4.23) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\leq x \log 2 \sum_{0 \leq j < \frac{\log x}{\log 2}} \frac{1}{2^j} + c\frac{\log^2 x}{\log 2} \\ &< 2x \log 2 + c\frac{\log^2 x}{\log 2}.\end{aligned}$$

Weil gilt $\log 2 < \frac{7}{10}$ und der zweite Term aufgrund des langsamen Wachstums des Logarithmus für hinreichend große x kleiner ist als $\frac{1}{10}x$ ist die Behauptung bewiesen.

■

Lemma 4.4

Für hinreichend große x gilt

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + \mathcal{O}(1).$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}T(x) &= \sum_{ij \leq x} \Lambda(j) = \sum_{j \leq x} \sum_{i \leq \frac{x}{j}} \Lambda(j) \\ &= \sum_{j \leq x} \Lambda(j) \sum_{i \leq \frac{x}{j}} 1 = \sum_{j \leq x} \left\lfloor \frac{x}{j} \right\rfloor \\ &= \sum_{j \leq x} \left(\frac{x\Lambda(j)}{j} - \frac{x\Lambda(j)}{j} + \left\lfloor \frac{x}{j} \right\rfloor \right) \\ &= x \sum_{j \leq x} \frac{\Lambda(j)}{j} - \sum_{j \leq x} \Lambda(j) \left(\frac{x}{j} - \left\lfloor \frac{x}{j} \right\rfloor \right).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Für den hinteren Term gilt mit Lemma 4.3:

$$0 \leq \sum_{j \leq x} \Lambda(j) \left(\frac{x}{j} - \left\lfloor \frac{x}{j} \right\rfloor \right) < \sum_{j \leq x} \Lambda(j) = \psi(x) = \mathcal{O}(x).$$

Insgesamt ergibt sich mit 4.22

$$T(x) = x \log x - x + \mathcal{O}(\log x) = x \sum_{j \leq x} \frac{\Lambda(j)}{j} + \mathcal{O}(x),$$

also

$$\sum_{j \leq x} \frac{\Lambda(j)}{j} = \log x + \mathcal{O}(1).$$

■

Lemma 4.5
Für hinreichend große x gilt

$$\psi(x) = \pi(x) \log x + \mathcal{O}\left(\frac{x \log \log x}{\log x}\right).$$

Mit dieser Aussage zeigen wir die Äquivalenz von $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ und dem Primzahlsatz, die bereits in (4.5) angekündigt wurde.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Abschätzen in zwei Richtungen.
Mit Definition (4.4) und der Definition der von-Mangoldt-Funktion kann $\psi(x)$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p^2 \leq x} \log p + \sum_{p^3 \leq x} \log p + \dots \\ &= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p \leq x^{1/2}} \log p + \sum_{p \leq x^{1/3}} \log p + \dots . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Dabei muss natürlich mit $j \in \mathbb{N}$ gelten, dass $x^{\frac{1}{j}} \geq 2$, da $p = 2$ die kleinste Primzahl ist. Damit folgt $j \leq \frac{\log x}{\log 2}$. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p \leq x^{1/2}} \log p + \dots + \sum_{p \leq x^{\lfloor \log 2 / \log x \rfloor}} \log p \\ &\leq \sum_{p \leq x} \log p + \frac{\log x}{\log 2} \sum_{p \leq x^{1/2}} \log p. \end{aligned}$$

Mit $\log x \geq \log p$ für $x \geq p$, der Definition der Primzahlfunktion $\pi(x)$ und der Eigenschaft $\pi(x) \leq x$ wird $\psi(x)$ weiter abgeschätzt:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\leq \log x \sum_{p \leq x} 1 + \frac{\log x}{\log 2} \log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \sum_{p \leq x^{1/2}} 1\\ &\leq \pi(x)\log x + \frac{x^{\frac{1}{2}} \log^2 x}{2\log 2}.\end{aligned}$$

Es folgt die Abschätzung in anderer Richtung:
Für hinreichend große y gilt wegen des stärkeren Wachstums der Exponentialfunktion

$$\frac{y^3}{2\log 2 \log y} < e^{\frac{y}{2}}.$$

Substituieren wir $y = \log x$ erhalten wir daraus

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} \log^2 x}{2\log 2} < \frac{x \log\log x}{\log x}$$

für hinreichend große x. Wir können also schreiben

$$\psi(x) \leq \pi(x)\log x + \mathcal{O}\left(\frac{x\log\log x}{\log x}\right). \tag{4.26}$$

Mit Darstellung (4.25) gelingt durch Weglassen einiger Terme und wieder mit der Monotonie des Logarithmus eine Abschätzung in die andere Richtung:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\geq \sum_{x/\log^2 x < p \leq x} \log p\\ &\geq \log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \sum_{x/\log^2 x < p \leq x} 1\\ &= \log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\left(\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\right)\\ &\geq \log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\left(\pi(x) - \frac{x}{\log^2 x}\right)\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{\psi(x)}{\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)} \geq \pi(x) - \frac{x}{\log^2 x}$$

und dies wiederum zu

$$\begin{aligned}\pi(x)\log x &\leq \psi(x)\frac{\log x}{\log x - 2\log\log x} + \frac{x}{\log x}\\ &= \psi(x) + \psi(x)\frac{2\log\log x}{\log x - 2\log\log x} + \frac{x}{\log x}.\end{aligned}$$

Weil $\log\log x$ langsamer wächst als $\log x$ und beide Funktionen streng monoton wachsen, gilt für hinreichend große x

$$2\log\log x < \frac{1}{4}\log x$$

und wir erhalten mit Lemma 4.3

$$\psi(x)\frac{2\log\log x}{\log x - 2\log\log x} \leq \frac{3}{2}x\frac{2\log\log x}{\frac{3}{4}\log x} = \frac{4x\log\log x}{\log x},$$

also insgesamt

$$\pi(x)\log x \leq \psi(x) + \frac{4x\log\log x}{\log x} + \frac{x}{\log x}.$$

Es wächst $\frac{4x\log\log x}{\log x}$ schneller als $\frac{x}{\log x}$. Also folgt

$$\psi(x) \geq \pi(x)\log x + \mathcal{O}\left(\frac{x\log\log x}{\log x}\right).$$

Mit (4.26) folgt die Behauptung.

■

LEMMA 4.6
Es gilt

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \log x + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wobei γ eine Konstante mit $0 < \gamma < 1$ ist. Die Konstante γ ist als *Euler-Mascheroni-Konstante* bekannt.

Beweis: Mit der Eulerschen Summenformel aus Lemma 4.2 folgt für $f(t) = \frac{1}{t}$

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\mathrm{d}t + 1 - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\ &= \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\mathrm{d}t + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\mathrm{d}t - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}.\end{aligned}$$

Dabei ist $\frac{1}{x}$ wegen $0 \leq t-\lfloor t\rfloor < 1$ asymptotische obere Schranke des hinteren Integrals und γ definiert sich gerade als $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\mathrm{d}t$.
Es gilt $\gamma < 1$ wegen $0 < \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\mathrm{d}t$ und es gilt $\gamma > 1 - \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 0$. Damit folgt $0 < \gamma < 1$. ■

4.3 Die Fundamentalformel

Wir wollen nun versuchen, die Inversion der Tschebyscheff-Identität (4.17) $\psi(x) = \sum_{k\leq x}\mu(k)T\left(\frac{x}{k}\right)$ zu benutzen, um das Verhalten von $\psi(x)$ für große x zu bestimmen. Dies soll durch den Vergleich mit einer anderen Funktion $\tilde{F}(x)$ geschehen. Wir definieren hierfür eine Funktion $\tilde{G}(x)$ in der Darstellung $\tilde{G}(x) = \sum_{n\leq x}\tilde{F}\left(\frac{x}{n}\right)$. Diese

Gleichung können wir gemäß (4.10) invertieren, sodass wir $\tilde{F}(x) = \sum_{k\leq x} \mu(k)\tilde{G}\left(\frac{x}{k}\right)$ erhalten. Subtrahiert man $\tilde{F}(x)$ von $\psi(x)$, erhält man

$$\psi(x) - \tilde{F}(x) = \sum_{k\leq x} \mu(k) \left(T\left(\frac{x}{k}\right) - \tilde{G}\left(\frac{x}{k}\right)\right). \tag{4.27}$$

Wird die rechte Seite klein, dann liegt $\tilde{F}(x)$ nah bei $\psi(x)$ und beide zeigen ein ähnliches Wachstumsverhalten. Wir benötigen demnach ein passendes $\tilde{F}(x)$.
Wenn der Primzahlsatz wahr ist, dann folgt aus Lemma 4.5, dass $\frac{\psi(x)}{x} \to 1$ für $x \to \infty$. Dies ist mit der Nähe von x zu $\psi(x)$ für große x gleichbedeutend. Versuchen wir also $\tilde{F}(x) = F_0(x) = x$. Damit ist $G_0(x) = x\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}$. Aus Lemma 4.6 resultiert aber $G_0(x) = x\log x + x\gamma + \mathcal{O}(1)$. Durch den Vergleich mit $T(x)$ aus Darstellung (4.22) erkennt man, dass $T(x)$ und $G_0(x)$ für große x nicht sehr nahe beieinander liegen, es gilt nur $T(x) - G_0(x) = \mathcal{O}(x)$. Damit erhält man für die Differenz $\psi(x) - F_0(x)$ ebenfalls lineares Wachstum.
Versuchen wir eine asymptotische obere Schranke mit geringerem Wachstum zu erhalten, indem wir eine Konstante C von $\tilde{F}(x)$ subtrahieren, also $\tilde{F}(x) = F_1(x) = x - C$. Für G_1 ergibt sich dann

$$\begin{aligned} G_1(x) &= x\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} - C\sum_{n\leq x} 1 \\ &= x\log x + x\gamma + \mathcal{O}(1) - C\lfloor x\rfloor \\ &= x\log x - (C-\gamma)x + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Wählt man $C = 1 + \gamma$, dann erhält man wieder mit Darstellung (4.22)

$$T(x) - G_1(x) = \mathcal{O}(\log x). \tag{4.28}$$

Das logarithmische Wachstum schränkt das Wachstum der Differenz bereits stärker ein als im vorhergehenden Fall.
Setzen wir $\tilde{F}(x) = x - C$ in (4.27) ein, erhalten wir

$$\psi(x) - x + C = \sum_{k\leq x} \mu(k) \left(T\left(\frac{x}{k}\right) - G_1\left(\frac{x}{k}\right)\right). \tag{4.29}$$

Wir werden nun zeigen, dass man mit (4.28) und (4.29) nur das Ergebnis

$$\psi(x) = \mathcal{O}(x) \tag{4.30}$$

erreichen kann.
Da der Logarithmus bekanntlich langsamer wächst, als jede Potenz, gilt $\log x = \mathcal{O}(x^{1/2})$. Damit können wir (4.28) zu

$$T(x) - G_1(x) = \mathcal{O}(x^{1/2}) \tag{4.31}$$

vergröbern. Wieder mit $|\mu(k)| \leq 1$ aus (4.16) und der Vergröberung gelingt es (4.29) abzuschätzen:

$$\sum_{k\leq x} \mu(k) \left(T\left(\frac{x}{k}\right) - G_1\left(\frac{x}{k}\right)\right) \leq \sum_{k\leq x} K\frac{x^{1/2}}{k^{1/2}}.$$

Dabei ist K eine Konstante aus der Definition des Landau-Symbols. Die Funktion $x^{-1/2}$ ist stets größer als Null und streng monoton fallend:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\leq x} K\frac{x^{1/2}}{k^{1/2}} &< Kx^{1/2}\left(1 + \sum_{2\leq k\leq x}\int_{k-1}^{k} u^{-1/2}\mathrm{d}u\right)\\
&\leq Kx^{1/2}\left(1 + \int_1^x u^{-1/2}\mathrm{d}u\right)\\
&= Kx^{1/2}\left(2x^{1/2} - 1\right)\\
&= \mathcal{O}(x).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Damit haben wir (4.30) gezeigt.

Mit $F_1(x)$ haben wir zwar eine Hilfsfunktion $\tilde{F}(x)$ gefunden, über die eine bessere Abschätzung für $T(x) - \tilde{G}(x)$ gelingt, das Wachstum der eigentlich wichtigen Differenz $\psi(x) - \tilde{F}(x)$ konnte aber durch die vorhergehende Abschätzung nicht weiter eingeschränkt werden.

Die Frage ist, ob unsere Abschätzung vielleicht zu grob war. Nehmen wir aber an, dass wir in (4.28) das Wachstum noch stärker einschränken können, nämlich mit $\mathcal{O}(1)$, so würde man selbst mit dieser verstärkenden Annahme wieder lediglich $\psi(x) - \tilde{F}(x) = \mathcal{O}(x)$ ableiten können.

Das Ergebnis (4.30) haben wir eigentlich auch schon in Lemma (4.3) wesentlich schneller zeigen können. Die Aussage über das Wachstum ist insofern interessant, dass man sie als schwächere Aussage des Primzahlsatzes bezeichnen könnte. Wir leiten daraus immerhin ab, dass $\frac{\psi(x)}{x}$ beschränkt ist. Mehr aber auch nicht.

Die Beweisidee ist dennoch nützlich, wir haben nämlich herausgefunden, dass die benutzte Vergröberung in (4.31) nicht das Wachstumsverhalten von $\psi(x)$ verändert hat. Der Ansatz ist also nun, $T(x) - G_1(x)$ in (4.29) so zu modifizieren, dass sich an der Abschätzung $\mathcal{O}(x)$ nichts verändert, man aber gleichzeitig die angepasste linke Seite von (4.29) verwenden kann, um stärkere Aussagen abzuleiten.

Wir schreiben im Folgenden abkürzend statt (4.29)

$$F(x) = \sum_{k\leq x} \mu(k) G\left(\frac{x}{k}\right). \tag{4.33}$$

Ersetzen wir also die rechte Seite durch

$$J(x) = \sum_{k\leq x} \mu(k) \log\frac{x}{k} G\left(\frac{x}{k}\right). \tag{4.34}$$

Es gilt dann für diese Seite immer noch $J(x) \leq \mathcal{O}(x)$, denn mit (4.32) folgt

$$\begin{aligned} J(x) &\leq \sum_{k \leq x} \log \frac{x}{k} G\left(\frac{x}{k}\right) \\ &\leq \sum_{k \leq x} K \frac{x^{1/2}}{k^{1/2}} = \mathcal{O}(x). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Um die linke Seite zu erhalten, drückt man $J(x)$ durch $F(x)$ aus. Hierbei benutzen wir $\log \frac{x}{k} = \log \frac{x}{n} + \log \frac{n}{k}$ und die Erkenntnisse aus (4.12) und (4.18):

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{k \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} G\left(\frac{x}{k}\right) \\ &= \sum_{k \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} \sum_{j \leq \frac{x}{k}} F\left(\frac{x}{kj}\right) \\ &= \sum_{jk \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} F\left(\frac{x}{kj}\right) \\ &= \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{jk = n} \mu(k) \log \frac{x}{k} \\ &= \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{k \mid n} \mu(k) \log \frac{x}{k} \\ &= \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \log \frac{x}{n} \sum_{k \mid n} \mu(k) + \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{k \mid n} \mu(k) \log \frac{n}{k} \\ &= F(x) \log x + \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n). \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$F(x) \log x + \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = \sum_{k \leq x} \mu(k) \log \frac{x}{k} G\left(\frac{x}{k}\right) \tag{4.36}$$

ist die sogenannte *Tatuzawa-Iseki-Identität*.
In (4.35) wurde bereits das lineare Wachstum der rechten Seite der Gleichung gezeigt. Wir erhalten deshalb mit $F(x) = \psi(x) - x + C$ und Lemma 4.4

$$(\psi(x) - x + C) \log x + \sum_{n \leq x} \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + C\right) \Lambda(n) = \mathcal{O}(x).$$

Mit $\psi(x) = \mathcal{O}(x)$ resultiert damit

$$(\psi(x) - x) \log x + \sum_{n \leq x} \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = \mathcal{O}(x) \tag{4.37}$$

und dies führt wiederum zur Ungleichung

$$\psi(x) \log x + \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \psi\left(\frac{x}{n}\right) = 2x \log x + \mathcal{O}(x). \tag{4.38}$$

Die Ungleichung (4.37) ist dabei die berühmte Fundamentalformel, welche von Atle Selberg gefunden wurde.
Weiterhin folgt mit Lemma 4.1, wobei wir $c_n = \Lambda(n)$ und $f(n) = \log n$ setzen:

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\log n = \log x \underbrace{\sum_{n\leq x} \Lambda(n)}_{=\psi(x)} - \int_1^x \frac{1}{t} \underbrace{\psi(t)}_{=\mathcal{O}(t)} \,\mathrm{d}t = \psi(x)\log x + \mathcal{O}(x). \tag{4.39}$$

Überdies gilt

$$\sum_{j\leq x} \Lambda(j)\psi\left(\frac{x}{j}\right) = \sum_{j\leq x} \Lambda(j) \sum_{k\leq \frac{x}{j}} \Lambda(k) = \sum_{jk\leq x} \Lambda(j)\Lambda(k). \tag{4.40}$$

Definieren wir außerdem

$$\Lambda_2(n) = \Lambda(n)\log n + \sum_{jk=n} \Lambda(j)\Lambda(k). \tag{4.41}$$

Aus Einsetzen von (4.39) und (4.40) in (4.38) resultiert:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\log n + \sum_{jk\leq x} \Lambda(j)\Lambda(k) &= \sum_{n\leq x} \Lambda(n)\log n + \sum_{n\leq x}\sum_{jk=n} \Lambda(j)\Lambda(k)\\ &= \sum_{n\leq x}\left(\Lambda(n)\log n + \sum_{jk=n}\Lambda(j)\Lambda(k)\right)\\ &= \sum_{n\leq x} \Lambda_2(n) = 2x\log x + \mathcal{O}(x). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Durch Kombination von (4.42) mit der Darstellung $T(x) = \sum_{n\leq x}\log n = x\log x + \mathcal{O}(x)$ aus (4.22) definieren wir $Q(n) = \sum_{k\leq n}(\Lambda_2(k) - 2\log k)$ und erhalten als zentrales Ergebnis unserer Überlegungen dieses Kapitels

$$Q(n) = \begin{cases} \sum_{k\leq n}(\Lambda_2(k) - 2\log k) = \mathcal{O}(n), & \text{für } n \geq 2\\ 0, & \text{für } n = 1 \end{cases}. \tag{4.43}$$

5 Der Beweis des Primzahlsatzes

Wir definieren

$$R(x) = \begin{cases} \psi(x) - x, & \text{für } x \geq 2\\ 0, & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

und erhalten aus (4.37)

$$R(x)\log x + \sum_{n\leq x} \Lambda(n) R\left(\frac{x}{n}\right) = \mathcal{O}(x). \tag{5.1}$$

Im Folgenden wollen wir aus (5.1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{x} = 0 \tag{5.2}$$

herleiten. Gleichung (5.2) ist äquivalent zu (4.5), also gelingt mit deren Beweis der Beweis des Primzahlsatzes.
Zunächst betrachten wir die Glättungsfunktion

$$S(y) = \int_2^y \frac{R(x)}{x}\mathrm{d}x, \quad y \geq 2, \tag{5.3}$$

für $y < 2$ gelte $S(y) = 0$. Wir leiten einige Eigenschaften dieses Hilfsmittels her.

Lemma 5.1
Es gibt eine Konstante c, sodass für $y \geq 2$ gilt

$$|S(y)| \leq cy, \tag{5.4}$$

außerdem

$$|S(y_2) - S(y_1)| \leq c|y_1 - y_2| \tag{5.5}$$

und

$$||S(y_2)| - |S(y_1)|| \leq c|y_1 - y_2|. \tag{5.6}$$

Überdies gilt

$$S(y)\log y + \sum_{j\leq y} \Lambda(j) S\left(\frac{y}{j}\right) = \mathcal{O}(y). \tag{5.7}$$

Beweis: Mit $\psi(x) \geq 0$ und Lemma 4.3 folgt für große x

$$-x \leq \psi(x) - x \leq \frac{1}{2}x \leq x.$$

Mit der Kompaktheit des Intervalls $[-x, x]$ folgt

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|R(x)|}{x} \leq 1. \tag{5.8}$$

Da natürlich $|R(x)|$ für jedes $x < \infty$ beschränkt ist, existiert eine Konstante c, so dass wir schreiben können

$$|R(x)| \leq cx, \quad x \geq 2. \tag{5.9}$$

Für die Ableitung von (5.3) gilt $S'(y) = \frac{R(y)}{y}$, allerdings nur für $y \neq p^j, j \in \mathbb{N}$, denn $R(y)$ ist an diesen Stellen aufgrund der Sprungstellen von $\psi(x)$ nicht stetig. (Die Unstetigkeitsstellen bilden aber immerhin eine Nullmenge, weshalb $S(y)$ stetig ist.)
Es folgt mit (5.9)

$$|S'(y)| \leq c, \quad y \neq p^j. \tag{5.10}$$

Gilt $p^j \notin (y_1, y_2)$, so ist (5.5) gezeigt, denn

$$|S(y_2) - S(y_1)| = \left| \int_{y_1}^{y_2} S'(y)\mathrm{d}y \right| \leq \left| \int_{y_1}^{y_2} c\,\mathrm{d}y \right| = c|y_2 - y_1|.$$

Es sei darauf hingewiesen, dass es nichts ausmacht, wenn y_1 den Wert p^j annimmt, denn S' ist integrierbar auf $[p^j + \epsilon, y_2]$ für alle $0 < \epsilon < y_2 - p^j$ und damit folgt

$$\int_{p^j}^{y_2} S'(y)\mathrm{d}y = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{p^j+\epsilon}^{y_2} S'(y)\mathrm{d}y = S(y_2) - S(p^j).$$

Der Grenzwert $S(p^j)$ existiert, da $S(y)$ stetig ist und damit konvergiert das Integral. Gleiches gilt natürlich, falls y_2 eine Unstetigkeitsstelle ist.
Betrachten wir nun allgemeine y_1 und y_2, wobei sich n Unstetigkeitsstellen u_i im Intervall (y_1, y_2) befinden. Dann gilt mit eben Gezeigtem und Konstanten $\{c_1, \ldots, c_{n+1}\}$ und $\tilde{c} = \max_i c_i$

$$\begin{aligned} |S(y_2) - S(y_2)| = \left| \int_{y_1}^{y_2} S'(y)\mathrm{d}y \right| &\leq \left| \int_{y_1}^{u_1} S'(y)\mathrm{d}y \right| + \ldots + \left| \int_{y_1}^{u_n} S'(y)\mathrm{d}y \right| \\ &\leq c_1|y_1 - u_1| + \ldots + c_{n+1}|u_n - y_2| \\ &\leq \tilde{c}|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Damit ist (5.5) endgültig gezeigt. Aussage (5.4) folgt direkt mit $y_1 = 2$.
Mit der Dreiecksungleichung gilt $|a+b| \leq |a|+|b|$, also $|a+b|-|b| \leq |a|$. Substituieren wir einmal $a = x - y, b = y$ und einmal $a = x - y, b = -x$, so ergibt sich $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Deswegen gilt

$$||S(y_2)| - |S(y_1)|| \leq |S(y_2) - S(y_1)| \leq c|y_2 - y_1|,$$

(5.6) ist gezeigt.
Multiplizieren wir die Ungleichung (5.1) mit $\frac{1}{x}$ und integrieren anschließend. Das Summenzeichen lässt sich aus dem zweiten Integral herausziehen, die dabei hinzukommende Fläche ist ebenfalls $\mathcal{O}(y)$. Dabei haben wir benutzt, dass für die Summe einer Funktionenfolge $f_n(x)$ gilt $\int_2^y \sum_{n \leq x} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n \leq y} \int_n^y f_n(x)\mathrm{d}x = \mathcal{O}(y)$, sowie $\sum_{n \leq y} \int_2^n f_n(x)\mathrm{d}x = \mathcal{O}(y)$. Wir erhalten

$$\int_2^y \frac{R(x)\log x}{x}\mathrm{d}x + \sum_{n \leq y} \Lambda(n) \int_2^y \frac{R\left(\frac{x}{n}\right)}{x}\mathrm{d}x = \mathcal{O}(y). \tag{5.11}$$

Für das erste Integral erhält man mit partieller Integration und $S(x) = \mathcal{O}(x)$ aus (5.4)

$$\int_2^y \frac{R(x)\log x}{x}\mathrm{d}x = S(x)\log x\Big|_2^y - \int_2^y \frac{S(x)}{x}\mathrm{d}x = S(y)\log y + \mathcal{O}(y). \tag{5.12}$$

Für das zweite Integral aus (5.11) gilt mit $\xi = \frac{x}{n}$

$$\int_2^y \frac{R\left(\frac{x}{n}\right)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{y}{n}} \frac{R(\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi = \int_2^{\frac{y}{n}} \frac{R(\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi = S\left(\frac{y}{n}\right). \tag{5.13}$$

Das Einsetzen von (5.12) und (5.13) in (5.11) liefert (5.7). ■

Lemma 5.2
Es sei $\Lambda_2(n) = \Lambda(n)\log n + \sum_{jk=n}\Lambda(j)\Lambda(k)$ wie in (4.41) definiert und K_1 eine Konstante. Dann gilt

$$\log^2 y|S(y)| \leq \sum_{m\leq y}\Lambda_2(m)\left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| + K_1 y\log y.$$

Beweis: Zunächst substituieren wir in Ungleichung (5.7) y durch $\frac{y}{k}$, multiplizieren mit $\Lambda(k)$, summieren über $k \leq y$ und erhalten daraus

$$\sum_{k\leq y} S\left(\frac{y}{k}\right)\log\frac{y}{k}\Lambda(k) + \sum_{k\leq y}\sum_{j\leq\frac{y}{k}}\Lambda(k)\Lambda(j)S\left(\frac{y}{kj}\right) = \mathcal{O}(y)\sum_{k\leq y}\frac{\Lambda(k)}{k}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sum_{k\leq y}\Lambda(k)S\left(\frac{y}{k}\right)\log y - \sum_{m\leq y}\Lambda(m)S\left(\frac{y}{m}\right)\log m + \sum_{kj\leq y}\Lambda(k)\Lambda(j)S\left(\frac{y}{kj}\right) = \mathcal{O}(y)\sum_{k\leq y}\frac{\Lambda(k)}{k}.$$

Mit $m = kj$ und Lemma 4.4 resultiert

$$\sum_{k\leq y}\Lambda(k)S\left(\frac{y}{k}\right)\log y - \sum_{m\leq y}S\left(\frac{y}{m}\right)\left(\Lambda(m)\log m - \sum_{kj=m}\Lambda(k)\Lambda(j)\right) = \mathcal{O}(y\log y).$$

Schließlich liefert die Anwendnung von (5.7) auf die erste Summe

$$S(y)\log^2 y = -\sum_{m\leq y}S\left(\frac{y}{m}\right)\left(\Lambda(m)\log m - \sum_{kj=m}\Lambda(k)\Lambda(j)\right) + \mathcal{O}(y\log y).$$

Die Anwendung des Absolutbetrages ergibt

$$\begin{aligned}\log^2 y|S(y)| &\leq \sum_{m\leq y}\left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right|\left|\Lambda(m)\log m - \sum_{kj=m}\Lambda(k)\Lambda(j)\right| + K_1 y\log y\\ &\leq \sum_{m\leq y}\Lambda_2(m)\left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| + K_1 y\log y.\end{aligned}$$

■

Lemma 5.3
Es gibt eine Konstante K_2, sodass gilt

$$\log^2 y|S(y)| \leq 2 \sum_{m\leq y} \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \log m + K_2 y \log y.$$

Beweis: Definiere

$$J(y) = \sum_{m\leq y} (\Lambda_2(m) - 2\log m) \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right|.$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\sum_{m\leq y} \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \Lambda_2(m) = 2 \sum_{m\leq y} \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \log m + J(y). \tag{5.14}$$

Mit der Definition (4.43) der Funktion $Q(m)$ gilt

$$\Lambda_2(m) - 2\log m = Q(m) - Q(m-1),\ m \geq 2,$$

und damit resultiert

$$\begin{aligned} J(y) &= \sum_{2\leq m\leq y} (Q(m) - Q(m-1)) \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \\ &= \sum_{2\leq m\leq y} Q(m) \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| - \sum_{2\leq m\leq y} Q(m) \left|S\left(\frac{y}{m+1}\right)\right|. \end{aligned}$$

Die Umschreibung der letzten Summe ist richtig, da $S(y) = 0$ für $y < 2$ und $Q(1) = 0$. Also folgt

$$J(y) = \sum_{2\leq m\leq y} Q(m) \left(\left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| - \left|S\left(\frac{y}{m+1}\right)\right|\right).$$

Die Anwendung von (4.43) und (5.6) liefert nun mit einer Konstante K_3

$$\begin{aligned} J(y) &\leq K_3 \sum_{2\leq m\leq y} m \left(\frac{y}{m} - \frac{y}{m+1}\right) \\ &= K_3 y \sum_{2\leq m\leq y} \frac{1}{m+1} \\ &< K_3 y \int_1^y \frac{1}{v} \mathrm{d}v = K_2 y \log y. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Mit Lemma 5.2, der Gleichung (5.14) und der letzten Erkenntnis (5.15) erhalten wir den Beweis:

$$\begin{aligned} \log^2 y|S(y)| &\leq 2 \sum_{m\leq y} \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \log m + J(y) + K_1 y \log y \\ &\leq 2 \sum_{m\leq y} \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \log m + K_2 y \log y. \end{aligned}$$

■

Lemma 5.4
Es gibt eine Konstante K_4, sodass gilt

$$\log^2 y|S(y)| \leq 2\int_2^y \left|S\left(\frac{y}{u}\right)\right| \log u \,\mathrm{d}u + K_4 y \log y.$$

Beweis: Da der Logarithmus monoton wächst, gilt

$$\log m \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \leq \int_m^{m+1} \log u \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \mathrm{d}u. \tag{5.16}$$

Mit der Dreiecksungleichung gilt nun zunächst $|a+b| \leq |a|+|b|$. Setzen wir $a = x-y$ und $b = y$, so ergibt sich die Ungleichung $|x| \leq |y| + |x-y|$. Also haben wir

$$\left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \leq \left|S\left(\frac{y}{u}\right)\right| + \left|S\left(\frac{y}{m}\right) - S\left(\frac{y}{u}\right)\right|$$

und erhalten durch Anwendung auf (5.16)

$$\log m \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \leq \int_m^{m+1} \log u \left|S\left(\frac{y}{u}\right)\right| \mathrm{d}u + J_m \tag{5.17}$$

mit

$$J_m = \int_m^{m+1} \log u \left|S\left(\frac{y}{m}\right) - S\left(\frac{y}{u}\right)\right| \mathrm{d}u.$$

Wieder mit der Monotonie des Logarithmus, Ungleichung (5.5) und der Eigenschaft $\log(m+1) \leq m$ können wir J_m abschätzen:

$$\begin{aligned} J_m &\leq c\int_m^{m+1} \log u \left|\frac{y}{m} - \frac{y}{u}\right| \mathrm{d}u \\ &\leq c\left|\frac{y}{m} - \frac{y}{m+1}\right| \int_m^{m+1} \log u \,\mathrm{d}u \\ &\leq \frac{cy\log(m+1)}{m(m+1)} \\ &\leq \frac{cy}{m+1}. \end{aligned}$$

Daher bekommen wir mit (5.17) also

$$\log m \left|S\left(\frac{y}{m}\right)\right| \leq \int_m^{m+1} \log u \left|S\left(\frac{y}{u}\right)\right| \mathrm{d}u + \frac{cy}{m+1}.$$

Dieses Ergebnis liefert mit Lemma 5.3:

$$\begin{aligned}\log^2 y|S(y)| &\leq 2 \sum_{2\leq m\leq y}\left(\int_m^{m+1}\log u\left|S\left(\frac{y}{u}\right)\right|\mathrm{d}u+\frac{cy}{m+1}\right)+K_2 y\log y\\ &= 2\int_2^{y+1}\log u\left|S\left(\frac{y}{u}\right)\right|\mathrm{d}u+2cy\sum_{2\leq m\leq y}\frac{1}{m+1}+K_2 y\log y. \qquad (5.18)\end{aligned}$$

Es gilt mit $S(y)=0$ für $y<2$

$$\int_y^{y+1}\log u\left|S\left(\frac{y}{u}\right)\right|\mathrm{d}u \leq \left|S\left(\frac{y}{y+1}\right)\right|\int_y^{y+1}\log u\,\mathrm{d}u = 0$$

und die verbleibende Summe aus (5.18) kann wieder mit dem Logarithmus abgeschätzt werden:

$$\sum_{2\leq m\leq y}\frac{1}{m+1} \leq \int_1^y \frac{1}{v}\mathrm{d}v = \log y.$$

Wenden wir dies schließlich auf (5.18) an, erhalten wir die gewünschte Aussage. Es gilt hierbei $K_4 = 2c+K_2$. ■

Durch die Substitution $v = \log\frac{y}{u}$ und $x=\log y$ in Lemma (5.4) ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}x^2\left|S\left(e^x\right)\right| &\leq 2\int_0^{x-\log 2}\left|S\left(e^v\right)\right|(x-v)e^{x-v}\mathrm{d}v+K_4 xe^x\\ &\leq 2\int_0^{x}\left|S\left(e^v\right)\right|(x-v)e^{x-v}\mathrm{d}v+K_4 xe^x. \qquad (5.19)\end{aligned}$$

Definieren wir

$$W(x) = e^{-x}S(e^x), \qquad (5.20)$$

folgt mit (5.19)

$$|W(x)| \leq \frac{2}{x^2}\int_0^x |W(v)|(x-v)\,\mathrm{d}v+\frac{K_4}{x}. \qquad (5.21)$$

Im Folgenden wird die Funktion $W(x)$ näher betrachtet.

Lemma 5.5

Es seien

$$\alpha = \limsup_{x\to\infty}|W(x)|$$

und

$$\delta = \limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|W(\xi)|\,\mathrm{d}\xi.$$

Dann gilt $\alpha\leq 1$ und

$$\alpha \leq \delta. \qquad (5.22)$$

Beweis: Mit der Definition von $S(y)$ (5.3) und der Erkenntnis (5.8) können wir folgern:

$$\begin{aligned}
\limsup_{y\to\infty} \frac{|S(y)|}{y} &= \limsup_{y\to\infty} \frac{\left|\int_2^y \frac{R(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right|}{y} \\
&\leq \limsup_{y\to\infty} \frac{y \sup_{x\in[2,y]} \left|\frac{R(x)}{x}\right|}{y} \\
&= \sup_{x\in[2,y]} \left|\frac{R(x)}{x}\right| \leq 1.
\end{aligned}$$

Mit der Defintion von $W(x)$ (5.20) folgt direkt $\alpha \leq 1$.
Nach (5.21) gilt

$$\begin{aligned}
|W(x)| &\leq \frac{2}{x^2} \int_0^x |W(v)|\,(x-v)\,\mathrm{d}v + \frac{K_4}{x} \\
&= \frac{2}{x^2} \int_0^x |W(v)| \int_v^x 1\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v + \frac{K_4}{x}.
\end{aligned}$$

Durch das Vertauschen der Integrationen erhalten wir

$$\begin{aligned}
|W(x)| &\leq \frac{2}{x^2} \int_0^x \int_0^w |W(v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + \frac{K_4}{x} \\
&= \frac{2}{x^2} \int_0^x w \left(\frac{1}{w} \int_0^w |W(v)|\,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}w + \frac{K_4}{x}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Der erste Summand mit dem Doppelintegral werde mit $I(x)$ bezeichnet.
Mit (5.4) erkennt man, dass die Klammer durch eine Konstante abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w} \int_0^w |W(v)|\,\mathrm{d}v &= \frac{1}{w} \int_0^w e^{-v} \left|S\left(e^v\right)\right|\,\mathrm{d}v \\
&\leq \frac{1}{w} \int_0^w e^{-v} c e^v\,\mathrm{d}v = c.
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt hiermit $\delta < \infty$.
Für ein festes $x_1 < x$ gilt mit dieser Abschätzung

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{2}{x^2} \int_0^x w \left(\frac{1}{w} \int_0^w |W(v)|\,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}w \\
&= \frac{2}{x^2} \int_0^{x_1} w \left(\frac{1}{w} \int_0^w |W(v)|\,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}w + \frac{2}{x^2} \int_{x_1}^x w \left(\frac{1}{w} \int_0^w |W(v)|\,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}w \\
&\leq \frac{c x_1^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} \int_{x_1}^x w \left(\frac{1}{w} \int_0^w |W(v)|\,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}w.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Mit der Definition des δ und einem $\varepsilon > 0$ gilt weiterhin für hinreichend große x_1

$$\frac{1}{w} \int_0^w |W(v)|\,\mathrm{d}v < \delta + \varepsilon, \quad u \geq x_1.$$

Durch Anwendung dieser Abschätzung auf (5.24) resultiert schließlich

$$I(x) \leq \frac{cx_1^2}{x^2} + (\delta + \varepsilon)\left(1 - \frac{x_1^2}{x^2}\right)$$

und (5.23) ergibt für große x

$$|W(x)| \leq \delta + \varepsilon + \frac{(c - \delta - \varepsilon)x_1^2}{x^2} + \frac{K_4}{x}.$$

Mit $x \to \infty$ erhalten wir damit $\alpha \leq \delta + \varepsilon$ und weil dies für alle $\varepsilon > 0$ wahr ist, ist das Lemma vollständig bewiesen. ■

Können wir nun zeigen, dass $\alpha = 0$, so folgt $\lim_{x\to\infty} |W(x)| = \lim_{x\to\infty} \frac{|S(e^x)|}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|S(x)|}{x} = 0$. Später werden wir beweisen, dass dies gerade äquivalent zu (5.2) ist und damit den Primzahlsatz beweist. Zunächst widmen wir uns aber dem α.

Lemma 5.6
Es gilt mit $k = 2c$

$$|W(x_2) - W(x_1)| \leq k|x_2 - x_1| \tag{5.25}$$

und

$$||W(x_2)| - |W(x_1)|| \leq k|x_2 - x_1|. \tag{5.26}$$

Beweis: Es gilt $W(x) = e^{-x}S(e^x)$, also $W'(x) = -e^{-x}S(e^x) + S'(e^x)$. Es folgt

$$|W'(x)| \leq e^{-x}|S(e^x)| + |S'(e^x)|.$$

Dabei gilt $x \neq j \log p$, da $S'(y)$ bei $y = p^j$ nicht stetig ist. Aus (5.4) und (5.10) erhalten wir damit

$$|W'(x)| \leq 2c = k, \quad x \neq j \log p.$$

Aussagen (5.25) und (5.26) werden nun analog zu den Aussagen (5.5) und (5.6) aus Lemma 5.1 bewiesen. ■

Lemma 5.7
Es sei $W(v) \neq 0$ für $v_1 < v < v_2$. Dann gibt es eine Konstante M, sodass gilt

$$\int_{v_1}^{v_2} |W(v)| \,\mathrm{d}v \leq M.$$

Beweis: Es sei $c_n = \Lambda(n)$ und $f(n) = \frac{1}{n}$. Aus Lemma 4.1, Lemma 4.4 und $\psi(x) = \mathcal{O}(x)$ folgt

$$\log x + \mathcal{O}(1) = \int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2} \,\mathrm{d}t.$$

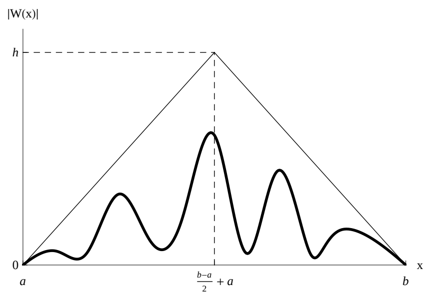

Abbildung 6: Abschätzung des Integrals von $|W(x)|$ über dem Intervall $[a, b]$ durch den Flächeninhalt eines Dreiecks.

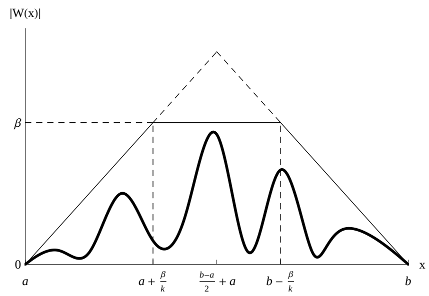

Abbildung 7: Abschätzung des Integrals von $|W(x)|$ über dem Intervall $[a, b]$ durch den Flächeninhalt eines Trapezes.

Mit $R(t) = \psi(t) - t$ erhalten wir überdies

$$\int_2^x \frac{R(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}(1). \tag{5.27}$$

Mit Hilfe der Vertauschung der Integrationen errechnen wir:

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{S(y)}{y^2}\mathrm{d}y &= \int_2^x \int_2^y \frac{R(t)}{t}\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= \int_2^x \frac{R(t)}{t}\int_t^x \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\ &= \int_2^x \frac{R(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x}\int_2^x \frac{R(t)}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Mit (5.4) und (5.27) resultiert damit $\int_2^x \frac{S(y)}{y^2}\mathrm{d}y = \mathcal{O}(1)$. Substituieren wir nun $y = e^u$ und $x = e^v$, erhalten wir demnach

$$\int_{\log 2}^v W(u)\,\mathrm{d}u = \mathcal{O}(1).$$

Für zwei verschiedene Integrationsgrenzen v_1 und v_2 gibt es aufgrund der Beschränktheit des Integrals eine Konstante M, sodass mit Subtraktion der beiden Integrale voneinander gilt

$$\left|\int_{v_1}^{v_2} W(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq M.$$

Fordern wir nun $v_1 < u < v_2$ und $W(u) \neq 0$, können wir ebenso schreiben

$$\int_{v_1}^{v_2} |W(u)|\,\mathrm{d}u \leq M.$$

■

Lemma 5.8
Die Funktion $W(x)$ genügt den Eigenschaften (5.22) und (5.26) und Lemma 5.7. Dann gilt

$$\alpha = \limsup_{x\to\infty} |W(x)| = 0.$$

Beweis: Wählen wir zunächst ein $\beta > \alpha$. Für später wählen wir M außerdem so, dass gilt $Mk > 1$. Nach der Definition von α gibt es ein x_β, sodass

$$|W(x)| \leq \beta, \quad x \geq x_\beta. \tag{5.28}$$

Angenommen $W(x) \neq 0$ für alle $x \geq x_\beta$, so gilt mit der Definition von δ und Lemma 5.7 $\delta = 0$ und deshalb nach (5.22) auch $\alpha = 0$.
Nehmen wir also an es gibt beliebig viele Nullstellen im Bereich $x \geq x_\beta$. Seien a und b zwei Nullstellen mit $x_\beta < a < b$.

Fall 1: Wenn gilt $b - a \geq 2\frac{M}{\beta}$, dann folgt wegen $W(x) \neq 0$ für $a < x < b$ mit Lemma 5.7

$$\int_a^b |W(x)| \leq M \leq \frac{1}{2}(b-a)\beta.$$

Fall 2: Sei nun $b - a \leq 2\frac{\beta}{k}$. Wenn wir eine der Variablen in (5.26) gleich a oder b setzen, können wir den Verlauf von $|W(x)|$ durch Geraden abschätzen, denn

$$|W(x)| \leq k(x-a)$$

und

$$|W(x)| \leq k(-x+b).$$

Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $x = a + \frac{b-a}{2} = b - \frac{b-a}{2}$. Deswegen wird der Verlauf von $|W(x)|$ auf dem Intervall $[a,b]$ durch ein gleichschenkeliges Dreieck mit Höhe $h = k\frac{b-a}{2}$ beschränkt. Nach Voraussetzung gilt damit $h \leq \beta$. Das Integral über $|W(x)|$ lässt sich so über den Flächeninhalt des Dreiecks abschätzen (siehe Abbildung 6) und wir erhalten

$$\int_a^b |W(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}(b-a)\beta.$$

Fall 3: Betrachten wir nun noch den Fall $2\frac{\beta}{k} < b - a < 2\frac{M}{\beta}$. Eine Abschätzung gelingt ähnlich wie in Fall 2, wieder benutzen wir die obigen Geraden. Da aber gilt $|W(a+\beta/k)| \leq \beta$ und $|W(b-\beta/k)| \leq \beta$, nutzen wir die Form des Dreiecks nur in den Intervallen $[a, a+\beta/k]$ und $[b-\beta/k, b]$ zur Abschätzung und wenden auf dem Intervall $[a+\beta/k, b-\beta/k]$ die Ungleichung (5.28) an, was einem Abschneiden der Dreiecksspitze durch die Gerade β gleichkommt und eine genauere Abschätzung ermöglicht. Das Integral über $|W(x)|$ lässt sich also über den Flächeninhalt dieses Trapezes abschätzen (siehe Abbildung 7) und es ergibt sich mit den Voraussetzungen dieses Falls

$$\begin{aligned}\int_a^b |W(x)|\,\mathrm{d}x &\leq \frac{\beta^2}{k} + \left(b - a - 2\frac{\beta}{k}\right)\beta \\ &= (b-a)\beta\left(1 - \frac{\beta}{k(b-a)}\right) \\ &\leq (b-a)\beta\left(1 - \frac{\beta^2}{2Mk}\right) \\ &< (b-a)\beta\left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right), \end{aligned} \tag{5.29}$$

denn nach Voraussetzung des Beweises ist $\beta > \alpha$.
Es gilt $Mk > 1$ und $\alpha \leq 1$. Deshalb ist $(1 - \alpha^2/(2MK)) > 1/2$ und die Abschätzung gilt ebenso für Fall 1 und Fall 2.

Sei nun x_1 die kleinste Nullstelle mit $x_\beta \leq x_1$ und $\tilde{x}$ die größte Nullstelle mit $\tilde{x} \leq y$, wobei natürlich auch $x_\beta < y$ gilt. Dann folgt mit (5.29) und Lemma 5.7

$$\begin{aligned}\int_0^y |W(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{x_1} |W(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{\tilde{x}} |W(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\tilde{x}}^y |W(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^{x_1} |W(x)|\,\mathrm{d}x + (\tilde{x} - x_1)\beta\left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right) + M.\end{aligned}$$

Wenn wir durch y teilen erhalten wir mit $\frac{\tilde{x}-x_1}{y} \leq 1$

$$\frac{1}{y}\int_0^y |W(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{y}\int_0^{x_1} |W(x)|\,\mathrm{d}x + \beta\left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right) + \frac{M}{y}.$$

Hieraus folgt mit $y \to \infty$ der Zusammenhang $\delta \leq \beta\left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right)$ und wegen $\alpha \leq \beta$ schließlich

$$\alpha \leq \beta\left(1 - \frac{\alpha^2}{2Mk}\right).$$

Diese Ungleichung gilt für alle $\beta > \alpha$ und stimmt deswegen als Grenzwert auch für $\beta = \alpha$. Damit folgt $\alpha^3 \leq 0$. Da aber auch gilt $\alpha \geq 0$ schließen wir $\alpha = 0$. ■

Mit Lemma 5.8 und der Definition $|W(x)| = e^{-x}S(e^x)$ folgern wir sofort

$$\lim_{y\to\infty} \frac{|S(y)|}{y} = 0.$$

Für ein hinreichend großes y und ein $\varepsilon > 0$ gilt daher

$$|S(y)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon^2 y,$$

oder auch

$$S(y(1+\varepsilon)) - S(y) \leq \frac{1}{3}\varepsilon^2(y(1+\varepsilon) + y) < \varepsilon^2 y.$$

Mit der Definition von $S(y)$ schreiben wir

$$\int_y^{y(1+\varepsilon)} \frac{R(u)}{u}\,\mathrm{d}u \leq \epsilon^2 y$$

und mit $R(u) = \psi(u) - u$ und dem monotonen Wachstum von $\psi(u)$ folgt

$$\frac{\psi(y(1+\varepsilon))}{y(1+\varepsilon)} \int_y^{y(1+\varepsilon)} \mathrm{d}u - \int_y^{y(1+\varepsilon)} \mathrm{d}u \leq \epsilon^2 y.$$

Wieder mit dem Argument der Monotonie können wir schreiben

$$\frac{\psi(y)}{y} \leq (1+\varepsilon)^2.$$

Auf gleiche Weise gelangt man zu $S(y) - S(y(1-\varepsilon)) \geq -\varepsilon^2 y$ für hinreichend große y und damit zu

$$\frac{\psi(y)}{y} \geq (1-\varepsilon)^2.$$

Dies zeigt schlussendlich Aussage (4.5) und damit ist der Primzahlsatz bewiesen.

6 Schlusswort

Obwohl der elementare Beweis des Primzahlsatzes für einige Aufregung sorgte, waren seine Auswirkung vielleicht nicht so groß, wie man vielleicht denken könnte. Schon Straus stellte fest, dass der elementare Beweis keine neuen und innovativen Methoden für die Zahlentheorie bereitgestellt hätte und dessen Entdeckung zwar brilliant, dennoch eher beiläufig und scheinbar ohne historische Signifikanz wäre. Auch Goldfeld selbst stellt fest, dass bisher keine Ergenisse aus dem Beweis abgeleitet werden konnten, die nicht in stärkerer Form aus anderen Verfahrensweisen resultierten. Andere elementare Methoden, unter anderem auch von Erdős und Selberg eingeführt, waren da weitaus erfolgreicher.[29]

Es mag außerdem interessant sein sich den Disput zwischen Erdős und Selberg auf einer abstrakteren Ebene anzusehen. Als Grund des Streits einzig die Borniertheit beider Männer zu nennen greift sicherlich etwas zu kurz. Die eigene mathematische Philosophie mag ebenfalls wichtig sein. Timothy Gowers ($*$1963) nennt zwei verschiedene mathematische Denkansätze, er bezeichnet sie als „Two cultures“[30]:

1. Probleme zu lösen hilft dabei die Mathematik besser zu verstehen

2. Verständnis der Mathematik hilft dabei Probleme zu lösen

Die Frage ist also, ob man sich eher damit beschäftigt Probleme zu lösen oder eher damit Theorien zu entwickeln, um zu verstehen. Eine genaue Zuordnung ist nicht

[29] [Gol1], Seite 190.
[30] [Gow1], Seite 65.

immer möglich, die meisten Mathematiker liegen wohl irgendwo dazwischen und eine solche Einteilung bietet immer die Gefahr einer Stereotypisierung. Erdős und Selberg unterscheiden sich aber durchaus stark in ihren Ansichten. Erdős betrachtete Mathematik als gemeinschaftliche Aktivität. Er betrieb in höchstem Maße kollaboratives Schreiben, seine Texte entstanden in Zusammenarbeit mit schätzungsweise fünfhundert Autoren; damit übertrifft er sämtliche Mathematiker vor ihm. Selberg hingegen bevorzugte die Einzelarbeit und die Ausarbeitung im Stillen. Er kann allein eine einzige gemeinschaftliche Veröffentlichung vorweisen und sagt dazu selbst, dass auch diese nicht seine Idee war.[31] Erdős kann eher den problemlösungsorientierten, kooperativen Denkern zugeordnet werden, Selberg eher den zurückgezogenen Theoretikern. Die Einteilung bestätigt zumindest den Verlauf der Auseinandersetzung und indentifiziert vielleicht die unterschiedliche grundlegende Philosophie beider Mathematiker als Hauptgrund für den nicht zu Stande kommenden Konsens. Gowers stellt zwar fest, dass sich heute das theorieorientierte Denken etwas mehr an Beliebtheit erfreue, er bekräftigt aber auch, dass die Mathematik dringend beider „Kulturen“ bedarf.[32] Zumindest der elementare Beweis des Primzahlsatzes konnte durch (mehr oder weniger freiwillige) Zusammenarbeit zweier Mathematiker mit sehr unterschiedlichen Standpunkten erbracht werden. Vielleicht war gerade diese Kombination die Ursache des Erfolgs.

Nicht zuletzt zeigt die Geschichte des Primzahlsatzes aber auch, dass, obwohl die Mathematik eine sehr logisch konstruierte und in sich strukturierte Wissenschaft ist, die Lösung eines Problems am Ende doch stark von Intuition, Kreativität und nicht zuletzt vom Zufall abhängen kann.

[31] [Sp-Gr1], Seite 20.
[32] [Gow1], Seite 66-67.

Literatur

[Apo1] **Apostol, Tom Mike**, „A Centennial History of the Prime Number Theorem“, in *Engineering and Science*, Vol. 59, No. 4 (1996), 18–28.

[Boh1] **Bohr, Harald**, „Adress of Professor Harald Bohr“, in Graves, Lawrence M.; Smith, Paul A.; Hille, Einar; Zariskim, Oscar (Hg.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians - Cambridge, Massachussetts, U.S.A., August 30–September 6, 1950.* Providence (Rhode Island): American Mathematical Society 1952. Bd. 1, Seite 127–134.

[Coh1] **Cohen, L.W.**, „The Annual Meeting of the Society“, in Martin, W.T.; Price, G.B. (Hg.), *Bulletin of the American Mathematical Society.* Menasha (Wisconsin) [u.a.]: American Mathematical Society 1952. Bd. 58, Nummer 2, Seite 157–216.

[Erd1] **Erdős, Paul**, „On a New Method in Elementary Number Theory which Leads to an Elementary Proof of the Prime Number Theorem“, in *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 35, No. 7 (July 1949), 374–384.

[Gol1] **Goldfeld, Dorian**, „The Elementary Proof of the Prime Number Theorem: An Historical Perspective“, in Chudnovsky, David; Chudnovsky, Gregory; Nathanson, Melvyn (Hg.), *Number Theory: New York Seminar 2003.* New York [u.a.]: Springer 2004, Seite 179-192.

[Gow1] **Gowers, Timothy**, „The Two Cultures of Mathematics“, in Arnold, V.; Atiyah, M.; Lax, P.; Mazur, B. (Hg.), *Mathematics: Frontiers and Perspectives.* Providence (Rhode Island): American Mathematical Society 2000. Seite 65-78.

[Ha-Wr1] **Hardy, Godfrey Harold; Wright, Edward Maitland**, *An Introduction to the Theorie of Numbers.* Oxford [u.a.]: Oxford University Press 2008.

[Lan1] **Landau, Edmund**, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* Leipzig: Teubner 1909. Bd. 1.

[Leg1] **Legendre, Adrien-Marie**, *Essai sur la théorie des nombres.* Paris: Duprat 1798.

[Leg2] **Legendre, Adrien-Marie**, *Essai sur la théorie des nombres.* Paris: Courcier 1808.

[Lev1] **Levinson, Norman**, „A Motivated Account of an Elementary Proof of the Prime Number Theorem“, in *American Mathematical Monthly*, Vol. 76, No. 3 (Mar. 1969), 225–245.

[Mar1] **Martin, William T.**, „Remarks by William T. Martin“, in Nohel, John A.; Sattinger, David H. (Hg.), *Selected Papers of Norman Levinson.* Boston [u.a.]: Birkhäuser 1998. Bd. 1, Seite XXXII-XXXV.

[Nar1] **Narkievicz, Władysław**, *The Development of Prime Number Theory: From Euclid to Hardy and Littlewood*. Berlin [u.a.]: Springer 2000.

[Rie1] **Riemann, Bernhard**, „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“, in *Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin - Aus dem Jahre 1859*, 1860, Seite 671–680.

[Sel1] **Selberg, Atle**, „An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem“, in *The Annals of Mathematics*, Vol. 50, No. 2 (Apr. 1949), 305–313.

[Sp-Gr1] **Spencer, Joel; Graham, Ronald**, „The Elementary Proof of the Prime Number Theorem“in *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 31, No. 3 (June 2009), 18-23.

Bemerkung: Die Lebensdaten der Mathematiker sind, wenn nicht in der angegebenen Literatur, beispielsweise in der Datenbank *The MacTutor History of Mathematics Archive* der School of Mathematics and Statistics der University of StAndrews, Vereinigtes Königreich, zu finden.
Website: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/ (Letzte Einsichtnahme: 18. August 2011.)

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit eigenständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst habe.

Würzburg, den 5. September 2011,

Jonas Oechsner