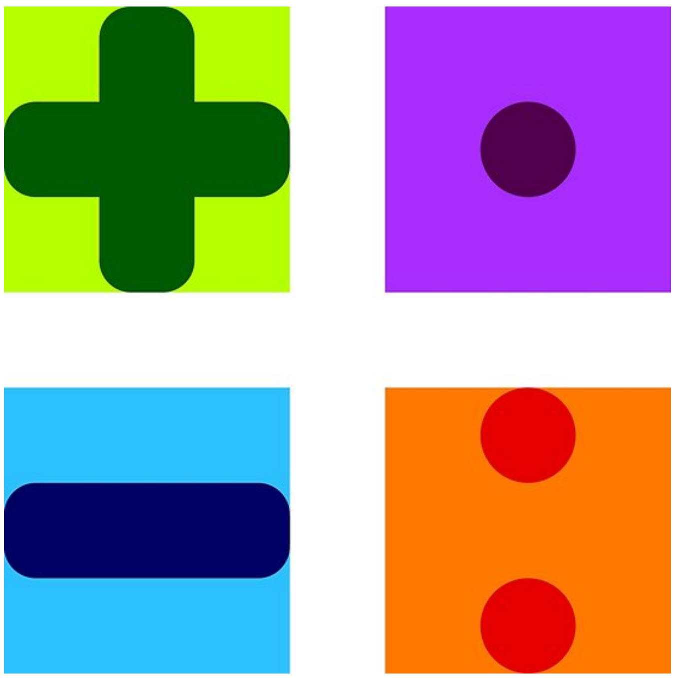
Intelligente Textaufgaben (mit Lösungen)



Lösungen von: Sven Dooley.

1. Wie viel € Kapital erbringen bei 5% Verzinsung in 200 Tagen $31,68$€ Zinsen?
   Lösung: Es gilt also $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{K \cdot 5 \cdot 200}{100 \cdot 360} = 31,68$, also muss das Kapital $K = 1140,48$€ sein.

2. Für 80 Liter Apfelsaft braucht man 100kg Äpfel. Wie viel Apfelsaft erhält man aus 120kg Äpfel?
   Lösung: Es folgt, dass man aus 10kg Äpfel 8 Liter Apfelsaft machen kann. Also erhält man aus 120kg Äpfel nun $12 \cdot 8 = 96$ Liter Apfelsaft.

3. In einem Korb liegen 42 Äpfel, und zwar doppelt so viele rote wie grüne. Wie viele grüne Äpfel sind es?
   Lösung: Es gilt also $42 = a = r + g = 2g + g = 3g$, also $g = 14$.

4. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Holger aus einem Pokerblatt (52 Karten) genau zwei Herzen zieht?
   Lösung: Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{13}{52} \cdot \frac{13-1}{52-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$.

5. Beweise, dass jede ungerade Zahl (von 3 ab), mit sich selbst multipliziert, stets ein Vielfaches von 8 plus 1 ergibt.
   Lösung: Sei $u = 2n+1$ eine ungerade Zahl mit $n \geq 1$. Weil $u^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4\cdot(n\cdot(n+1))+1 = 8\cdot\frac{n \cdot (n+1)}{2}+1$ gilt und $\frac{n \cdot (n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ ist, da n und $n+1$ aufeinanderfolgende Zahlen sind, also einer der beiden gerade ist, folgt die Behauptung.

6. Wenn Lebensmittel um 12% teurer geworden sind, wieviel weniger muss man einkaufen, um das gleiche Geld auszugeben?
   Lösung: Es muss also gelten: $1,12 \cdot x = 1,00$, also $x = \frac{100}{112}$, d.h. man muss $1 - \frac{100}{112} = \frac{12}{112}$ (also ungefähr $10,71\%$) weniger einkaufen.

7. In einer Kiste sind 20 Karotten, $1/3$ sind dabei Tomaten und $1/4$ sind Gurken. Wie viele Gemüsestücke sind in der Kiste?
   Lösung: Es sind also $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$ Karotten, also $\frac{5}{12} \simeq 20$, also ist 100% dann gleich $20/5 \cdot 12 = 48$ (Gemüsestücke).

8. Beweise, dass für jede Primzahl p, die größer ist als 3, entweder der Vorgänger $p-1$ oder der Nachfolger $p+1$ durch 6 teilbar ist.
   Lösung: p ist als Primzahl ungerade, also sind $p-1$ und p gerade. Weil $p-1$, p, $p+1$ drei aufeinanderfolgende Zahlen sind, ist also eine dieser Zahlen durch 3 teilbar. p kann als Primzahl nicht durch 3 teilbar sein. Also ist dies entweder $p-1$ oder $p+1$, also ist entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 2 und durch 3 teilbar, also auch durch 6.

9. In einem Pferderennen gibt es Menschen und Pferde. Sie zählen 108 Augen und 152 Beine. Wie viele Pferde gibt es dann dort?
   Lösung: Es gilt also $m \cdot 2 + p \cdot 2 = 108$ und $m \cdot 2 + p \cdot 4 = 152$. Daraus folgt: $m = 32$ (Menschen) und $p = 22$ (Pferde).

10. Alexander erhält 41 Pfennig Wechselgeld in einem Laden. Wenn er sechs Münzen zurückbekommt, was sind dann drei der Münzen?
    Lösung: Klar ist, dass Alexander 10 Pfennig-, 5-Pfennig-, 2 Pfennig- oder 1 Pfennig-Stücke erhalten hat. Nun ist $41 = 4\cdot10+1$, also 5 Münzen, und weniger Münzen geht nicht. Weil $41 = 3 \cdot 10 + (2 \cdot 5) + 1 = 10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 1$ gilt, also 6 Münzen, steht eindeutigerweise fest, dass Alexander drei 10 Pfennig-Stücke bekommen hat.

11. Christine verdient nach einer 25-prozentigen Gehaltserhöhung 2000€ im Monat. Wie viel hat sie also vorher für einen Gehalt bekommen?
Lösung: Es gilt $125\% \simeq 2000$, also $100\% \simeq 2000/5 \cdot 4 = 1600$. Sie hat also vorher 1600€ verdient.

12. Ein Autokäufer bekommt einen Rabatt von 4% gewährt. Wie viel Geld muss er bezahlen, wenn der Wagen vorher 11.500€ gekostet hat?
Lösung: Es gilt also $100\% \simeq 11.500$, also muss $100\% - 4\% = 96\% \simeq 11.500/100 \cdot 96 = 11.040$ (€) bezahlt werden.

13. Eine Treppe hat 22 Stufen. Würde jede Stufe um 1,6cm höher gebaut, könnten zwei Stufen eingespart werden. Wie hoch ist eine Stufe?
Lösung: Es gilt also $22 \cdot s = (22 - 2) \cdot (s + 1,6) = 20 \cdot (s + 1,6)$, also ist eine Stufe gleich $s = 16$cm hoch.

14. Lilly erhält auf ihr Sparguthaben bei einem Zinssatz von 2% 20€ Zinsen. Wie hoch ist nach einem Jahr ihr Guthaben inklusive Zinsen?
Lösung: Es gilt $2\% \simeq 20$, also ist ihr Kapital $K = 20/2 \cdot 100 = 1000$ (Euro) und plus Zinsen 1020€.

15. Johann ist heute zweimal so alt wie sein Sohn. Vor 18 Jahren war Johann 5-mal so alt wie sein Sohn. Wie alt ist der Sohn von Johann heute?
Lösung: Es gilt also $a_J = 2 \cdot a_S$ und $a_J - 18 = 5 \cdot (a_S - 18)$, also: $a_J = 48$ und $a_S = 24$ (Alter des Sohnes).

16. Eine zweiziffrige Zahl hat die Quersumme 12. Werden die Ziffern vertauscht, so wird die Zahl 1,75-mal so groß. Welche Zahl hat diese Eigenschaft?
Lösung: Nach Voraussetzung gilt also $1,75 \cdot (10 \cdot z + e) = 10 \cdot e + z$ und $z + e = 12$, also: $z = 4$ und $e = 8$. Gesucht ist also die Zahl 48.

17. Monique kauft im Shop einen Eifelturm, er wiegt 35g. Jacqueline kauft ein doppelt so hohes Modell. Wie viel wiegt das Modell von Jacqueline?
Lösung: Der Eifelturm von Jacqueline ist doppelt so lang, doppelt so breit und doppelt so hoch, also wiegt er $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 35 = 8 \cdot 35 = 280$ (g).

18. Für eine Festgeldanlage erhält Herr Mayer nach einem Jahr 2.800€ Zinsen bei einer Verzinsung von 7%. Welcher Betrag wurde vor einem Jahr angelegt?
Lösung: Es gilt $7\% \simeq 2.800$, also ist das angelegte Kapital gleich $2.800/7 \cdot 100 = 40.000$ in €.

19. Harald ist 9 Jahre weniger als 3-mal so alt wie Archimedes. Vor 4 Jahren war er 10 Jahre mehr als 2-mal so alt wie Archimedes. Wie alt ist Harald?
Lösung: Die Gleichungen lauten also: $a_H + 9 = 3 \cdot a_A$ und $(a_H - 4) - 10 = 2 \cdot (a_A - 4)$, also $a_A = 15$ und Harald ist $a_H = 36$ Jahre alt.

20. Ein Weinballon steht auf einer Waage und zeigt 19kg an, dabei ist er nur halb gefüllt. Im vollen Zustand wiegt er 35kg. Wie schwer ist der leere Weinballon?
Lösung: Die Gleichungen lauten: $b + \frac{1}{2}w = 19$ und $b + w = 35$, also: $b = 3$ und $w = 32$. Der leere Weinballon wiegt demnach also genau 3kg.

21. Es sind insgesamt 40 Personen, 11 davon haben Brüder, 19 haben Schwestern und 7 haben beides. Wie viele Personen haben weder Brüder noch Schwestern?
Lösung: Also: $11 - 7 = 4$ Personen haben nur Brüder und $19 - 7 = 12$ haben nur Schwestern, und 7 haben beides. Also haben $40 - 4 - 12 - 7 = 17$ Personen weder Brüder noch Schwestern.

22. Eine Gruppe Leute sitzt gleichmäßig am Tisch verteilt um einen runden Tisch. Wie viele Leute sitzen dort, wenn die 5. der 19. Person genau gegenüber sitzt?
Lösung: Es muss gelten $(5-1) \cdot \alpha + 180^\circ = (19-1) \cdot \alpha$, also $\alpha = \frac{90^\circ}{7}$. Folglich müssen also genau $\frac{360^\circ}{\frac{90^\circ}{7}} = 28$ Leute gleichmäßig am Tisch verteilt sitzen.

23. In einer Familie hat jeder Sohn ebenso viele Brüder wie Schwestern und jede Tochter halb so viele Schwestern wie Brüder. Wie viele Kinder haben die Eltern?
Lösung: Also: $s - 1 = b_B = s_B = t$ und $2 \cdot (t-1) = 2 \cdot s_S = b_S = s$, also $s = 4$ und $t = 3$. Die Eltern haben also $s + t = 7$ Kinder.

24. Zwei normale Rohre brauchen, um ein Schwimmbecken vollständig mit Wasser zu füllen, 5 Stunden. Wie lange braucht es, wenn drei halbe Rohre dazukommen?
Lösung: Das Schwimmbecken habe die Größe s, dann haben die zwei normalen Rohre die Geschwindigkeit $v_{2N} = \frac{s}{10} + \frac{s}{10} = \frac{s}{5}$, denn ein normales Rohr braucht für das Becken 10 Stunden. Ein halbes Rohr braucht also 20 Stunden, also $v_{3H} = \frac{s}{20} + \frac{s}{20} + \frac{s}{20} = \frac{3s}{20}$. Die gesuchte Zeit ist also gegeben durch $\frac{s}{v_{2N} + v_{3H}} = \frac{s}{\frac{s}{5} + \frac{3s}{20}} = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{3}{20}} = \frac{1}{\frac{4}{20} + \frac{3}{20}} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$ (Stunden).

25. Vor zehn Jahren gab es 35% Singlehaushalte in der EU. Und es gab 260 Mio. Haushalte mit mehr als einer Person. Wie viele Singlehaushalte gab es in der EU?
Lösung: Es waren also $100\% - 35\%$ Haushalte mit mehr als einer Person, nämlich 260 Mio. Wenn 65% dann 260 Millionen Menschen entspricht, dann ist 100% eben $260/13 \cdot 20$, also 400 Millionen. Also gab es $400 - 260 = 140$ Mio. Singlehaushalte.

26. In einer Kiste sind 40% grüne Äpfel und 60% rote Äpfel. 30% der grünen Äpfel und 50% der roten Äpfel sind überreif. Wie viel Prozent der Äpfel sind also überreif?
Lösung: 30% von 40% sind grün und überreif und 50% von 60% sind rot und überreif. Also sind $\frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} + \frac{50}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{12}{100} + \frac{30}{100} = \frac{42}{100} \simeq 42\%$ der Äpfel überreif.

27. Nennen Sie eine 3-ziffrige Zahl, so dass, wenn Sie die Ziffern des Zehners und des Hunderters umdrehen, die resultierende Zahl 20% größer ist als die ursprüngliche Zahl.
Lösung: Es muss also gelten: $1,2 \cdot (h \cdot 100 + z \cdot 10 + e \cdot 1) = z \cdot 100 + h \cdot 10 + e \cdot 1 \Leftrightarrow 440 \cdot z - 550 \cdot h = e$. Man sucht nun $h, z \in \{1, \ldots, 9\}$ so, dass $e \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ist. Wegen der Nullen in $440 \cdot z - 550 \cdot h$ ist e also entweder gleich 0 oder eine Zahl, die ein Vielfaches von 10 ist. Wegen $e \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ bleibt also nur $e = 0$, also $440 \cdot z - 550 \cdot h = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot z - 5 \cdot h = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot z = 5 \cdot h$. Wähle z.B. $h = 4$ und $z = 5$. Probe: $450 \cdot 1.2 = 540$. Die Zahl 450 erfüllt also die Eigenschaft, die von der Aufgabe gefordert wurde.

28. Ein Würfel wird 3-mal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der ersten beiden Würfe die Augenzahl des dritten Wurfes ergibt?
Lösung: Nur 15 der möglichen $6 \cdot 6 = 36$ Zwei-Würfel-Kombinationen liefern eine würfelbare Summe (also 1-6), was man durch systematisches Probieren herausfindet: $15/6^3 = 15/216 = 5/72 \approx 0,0694$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt demnach also ungefähr $6,94\%$.

29. Auf einer Dartscheibe kann man vier Felder mit den Werten 7, 20, 26 und 27 treffen. Welche Felder muss man nach 5 Würfen getroffen haben, um genau 120 Punkte zu erhalten?
Lösung: 7 darf nicht vorkommen, denn sonst hat man höchstens $7 + 4 \cdot 27 = 115 < 120$. 20 darf nicht mehr als zweimal vorkommen, sonst hat man in der Summe höchstens $3 \cdot 20 + 2 \cdot 27 = 114 < 120$. 20 kommt mindestens einmal vor, sonst hat man mindestens $5 \cdot 26 = 130 > 120$. Kommt 20 nur einmal vor, dann ist die Summe mindestens $20 + 4 \cdot 26 = 124 > 120$. Also kommt 20 genau zweimal vor. Die letzten drei Zahlen müssen in der Summe also $120 - 2 \cdot 20 = 80$ ergeben. Wegen $3 \cdot 26 = 78 < 80$, $2 \cdot 26 + 27 = 79 < 80$, $3 \cdot 27 = 81 > 80$ bleibt nur noch: $26 + 2 \cdot 27 = 80$. Man muss also die folgenden Felder treffen: 20, 20, 26, 27, 27.

30. Lilly möchte die Ziffer 3 zur Zahl 2014 hinzufügen, so dass eine 5-stellige Zahl entsteht. Wohin muss sie die 3 schreiben, damit diese 5-stellige Zahl so klein, wie möglich, ist?
Lösung: Man muss die Ziffer 3 zwischen die Ziffer 1 und Ziffer 4 hinzufügen, denn unter allen Möglichkeiten ist 20134 die kleinste Zahl.

31. Zwei Leute laufen beide 8km in entgegengesetzter Richtung. Dann biegen beide 90 Grad nach links ab und gehen nochmal 6km. Wie weit sind die beiden nun voneinander entfernt?
Lösung: Die beiden sind $\sqrt{6^2 + 8^2} + \sqrt{8^2 + 6^2} = 2 \cdot \sqrt{100} = 20$ (km) voneinander entfernt.

32. Leoni möchte ein Auto kaufen und nimmt einen Kredit von 5000 Euro auf. Was muss Sie der Bank nach 3 Jahren insgesamt zurückzahlen, wenn Sie einen Jahreszins von 3,5% erhält? Lösung: Sie muss also $5000 \cdot (1,035)^3 = \frac{8869743}{1600} \approx 5543,59$ Euro zurückzahlen.

33. Wie viele Möglichkeiten gibt es vier Kinder, an einem runden Tisch zu sitzen? Hierbei sollen nur die Sitzordnungen berücksichtigt werden, die sich in mindestens einem Nachbarn unterscheiden.
Lösung: Die Lösung lautet: $\frac{4!}{4} = 3!$, denn es gibt 4! Möglichkeiten vier Zahlen anzuordnen und man muss durch 4 teilen, weil jeweils vier Anordnungen äquivalente Anordnungen auf dem Kreis sind, z.B.: $(1234) \sim (4123) \sim (3412) \sim (2341)$.

34. Eine Erbschaft von 140.000€ wird so unter drei Erben A, B, C aufgeteilt, dass A 20.000€ mehr erhält als B und C zusammen, und die Erbschaft von B und C sich wie 2 : 1 verhält. Wie viel erhält C?
Lösung: Es gilt also: $A + B + C = 140.000 = (B + C + 20.000) + B + C$, also $B + C = \frac{140.000 - 20.000}{2} = 60.000$. B erhält nach Voraussetzung doppelt so viel wie C, also $60.000 = B + C = (2 \cdot C) + C \Rightarrow C = 20.000$. C erhält von dem gesamten Erbe also 20.000€.

35. Zwei Züge, die 270km voneinander entfernt sind, fahren aufeinander auf parallelen Gleisen zu. Einer fährt mit 30km/h, der andere doppelt so schnell. Nach wie vielen Stunden werden sie sich treffen?
Lösung: Es gilt also $30 \cdot t + (2 \cdot 30) \cdot t = 270 \Leftrightarrow t = \frac{270}{90} = 3$. Folglich treffen sich die beiden nach 3 Stunden.

36. Ein kleiner Lastwagen benötigt 9 Fahrten mehr als ein großer, um allein Schutt wegzuführen. Beide gemeinsam könnten den Schutt in je 20 Fahrten wegführen. Wie viele Fahrten benötigt jeder allein?
Lösung: Sei l_g die Lastmenge, die der große Lastwagen pro Fahrt transportiert, und l_k die des kleinen Lastwagens pro Fahrt. Nach der zweiten Voraussetzung gilt $20 \cdot l_g + 20 \cdot l_k = s$, wobei s die Menge des gesamten Schutts sei, der wegzuführen ist. Nach der ersten Voraussetzung gilt: $f_g \cdot l_g = s$ und $f_k \cdot l_k = s$, wobei f_g die Anzahl der Fahrten des großen Lastwagens sei, die er benötigt, um den Schutt s alleine wegzuführen. Entsprechend sei dann f_g definiert. Es gilt dann folglich: $20 \cdot l_g + 20 \cdot l_k = s \Rightarrow l_g + l_k = \frac{s}{20} \Rightarrow \frac{s}{f_g} + \frac{s}{f_k} = \frac{s}{f_g} + \frac{s}{f_g + 9} = \frac{s}{20}$, denn der kleine Lastwagen benötigt 9 Fahrten mehr, um den Schutt alleine wegzuschaffen. Zusammengefasst gilt dann also folgendes: $\frac{1}{f_g} + \frac{1}{f_g + 9} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow f_g^2 - 31 \cdot f_g - 180 = 0 \Leftrightarrow f_g = 36 \vee f_g = -5$.

Weil f_g positiv sein muss, gilt $f_g = 36$, also $f_k = f_g + 9 = 45$. Der große Lastwagen braucht also 36 und der kleine 45 Fahrten.

37. Ein Fisch hat einen 9cm langen Kopf. Der Schwanz ist genauso groß wie der Kopf plus die Hälfte der Größe des Körpers. Der Körper hat die Größe des Kopfes plus des Schwanzes. Wie groß ist der Fisch?
Lösung: Es gilt also $ko = 9$, $s = ko + \frac{1}{2} \cdot kö$ und $kö = ko + s$. Also: $ko = 9$, $s = 9 + \frac{1}{2} \cdot kö$ und $kö = 9 + \left(9 + \frac{1}{2} \cdot kö\right) = 18 + \frac{1}{2} \cdot kö \Leftrightarrow kö = 2 \cdot 18 = 36$. Zusammengefasst hat man also: $ko = 9$, $kö = 36$ und $s = 9 + 18 = 27$. Der Fisch hat also die Länge $ko + kö + s = 9 + 36 + 27 = 72$.

38. In einer Klasse sind genauso viele Mädchen wie Jungen. 40% der Mädchen und 30% der Jungen sind schlau. An der Tafel steht ein schlaues Kind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses Kind ein Mädchen?
Lösung: 40% von 50% sind schlaue Mädchen und 30% von 50% sind schlaue Jungen. Also sind $\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{20+15}{100} \simeq$ 35% der Kinder schlau. Weil 20% schlaue Mädchen sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass das schlaue Kind an der Tafel ein Mädchen ist: $\frac{20\%}{35\%} = \frac{4}{7} \approx 57,14\%$.

39. In der Fußball-Bundesliga gibt es für einen Sieg drei Punkte, für ein Unentschieden einen und für eine Niederlage keinen Punkt. Wie oft hat ein Verein gewonnen, der nach 34 Spieltagen genau 100 Punkte aufweist?
Lösung: Sei s die Anzahl der Siege, dann kann man höchstens $s \cdot 3 + (34 - s) \cdot 1 = 2 \cdot s + 34$ Punkte erreichen. Ist s echt kleiner als 33, dann kann man höchstens 98 Punkte erreichen. Also muss die Anzahl der Siege mindestens 33 sein. Hat man alle Spiele gewonnen, dann hat man $34 \cdot 3 = 102$ Punkte, also ist die Anzahl der Siege 33, weswegen man also mindestens 99 Punkte hat. Es folgt, dass der Verein 33-mal gewonnen und einmal unentschieden gespielt hat.

40. Der Preis einer Jacke wurde zunächst um $38,50$€ reduziert, danach um weitere 10% herabgesetzt. Nun kostet die Jacke nur zwei Drittel des ursprünglichen Preises. Ermittle den damaligen und heutigen Preis der Jacke.
Lösung: Sei x der damalige Preis. Es gilt also die Gleichung: $\frac{100-10}{100} \cdot (x - 38,50) = \frac{2}{3} \cdot x \Leftrightarrow x = 148,50$. Daraus folgt, dass der heutige Preis $\frac{100-10}{100} \cdot (148,50 - 38,50) = 99$ (€) ist.

41. Maria erhält einen Rabatt von 5 Euro auf ihren 40 Euro-Einkauf. Sie hat unter anderem einen Snickers-5er-Pack für $1,25$ Euro eingekauft. Wie viel hat Maria für den Snickers-5er-Pack abzüglich Rabatt am Ende bezahlt?
Lösung: Maria hat einen Rabatt von $1/8$ bekommen, also $12,5\%$, also hat sie für die Snickers $100\% - 12,5\% = 87,5\%$ von $1,25$ Euro bezahlt, also $1,25 \cdot 0,875 = \frac{35}{32} \approx 1,09375$ Euro.

42. Ein Flugzeug fliegt 800km mit dem Wind mit. Mit derselben Leistung in derselben Zeit würde es gegen den Wind 720km fliegen. Die Windgeschwindigkeit ist 30km/h. Was ist die Geschwindigkeit des Flugzeugs ohne Wind?
Lösung: Sei v die Geschwindigkeit des Flugzeugs ohne Wind und t_F die Zeit, die es mit und gegen dem Wind fliegt. Es gilt dann nach der Aufgabe: $(v + 30) \cdot t_F = 800$ und $(v - 30) \cdot t_F = 720$, also nach Addition der beiden Gleichungen: $2 \cdot v \cdot t_F = 1520 \Leftrightarrow t_F = \frac{760}{v}$. Einsetzen liefert dann $(v + 30) \cdot t_F = 800 \Leftrightarrow (v + 30) \cdot \frac{760}{v} = 800$, also nach v aufgelöst: $v = 570$. Die Geschwindigkeit des Flugzeugs ohne Wind ist also 570km/h.

43. Die Herstellung einer Weinflasche (Glasflasche) kostet 22 Cent mehr als der Korken, der nur 8 Cent kostet. Der Wein hat einen hundertmal so hohen Wert, wie der Korken. Wie viel muss man für die Flasche Wein bezahlen?
Lösung: Der Korken kostet 8 Cent, die Glasflasche $8+22 = 30$ Cent und der Wein 8 Euro, also muss man für die Weinflasche $8,38$ Euro bezahlen.

44. Die Bundesrepublik Deutschland hat circa 80 Millionen Einwohner. Davon sind 55% wahlberechtigt für die Wahl des Deutschen Bundestages. Wie viele Bürger haben bei einer Wahlbeteiligung von 81% ihre Stimme abgegeben?
Lösung: Es haben $\frac{55}{100} \cdot \frac{81}{100} \cdot 80.000.000 = 35.640.000$ Bürger ihre Stimme abgegeben.

45. Es sei ein Revolver, in dessen Trommel 8 Patronen Platz haben, mit einer Patrone geladen, gegeben. Was ist besser?: Sich die Waffe an den Kopf halten und 5-mal nacheinander abdrücken oder vor jedem der 5-mal Abdrücken die Trommel rotieren?
Lösung: Wenn man 5-mal nacheinander abdrückt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass es knallt, $\frac{5}{8}$. Rotiert man die Trommel vor jedem der 5-mal Abdrücken, dann knallt es mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{7}{8}\right)^0 \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^1 \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^4 \cdot \frac{1}{8} < (1+1+1+1+1) \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. Es ist also besser, vor jedem Abdrücken die Trommel zu rotieren!

46. Ein Händler kauft einen Restposten von 100 Kaffeemaschinen zum Preis von 500€ auf, die er mit je 4€ Aufschlag weiter verkauft. Am Ende der Woche verschenkt er die nicht verkauften Maschinen und hat dennoch 220€ Reingewinn gemacht. Wie viele Maschinen hat er verkauft?
Lösung: Der Händler hat also pro Kaffeemaschine $500/100 = 5$€ bezahlt. Er verkäuft eine Kaffeemaschine für $5 + 4 = 9$€. Ein Reingewinn von 220€ heißt, dass er seine 500€ Ausgaben wieder drin hat und zusätzlich 220€ Gewinn gemacht hat. Also hat er Kaffeemaschinen im Wert von 720€ verkauft. Eine Kaffeemaschine kostete 9€, also hat er $\frac{720}{9} = 80$ Kaffeemaschinen verkauft.

47. Auf der linken Seite einer Balkenwaage brennen drei Kerzen, die zur Zeit 40g, 53g und 37g wiegen. Auf der rechten Seite brennen zwei Kerzen, die 48g und 57g wiegen. Pro Minute verbrennen pro Kerze 3g. Es soll jetzt berechnet werden, wann die Waage zum ersten Mal im Gleichgewicht ist.
Lösung: Die Kerzen auf der linken Seite wiegen zur Zeit 40g+53g+37g= 130g und die auf der rechten 48g+57g= 105g. Auf der linken Seite verbrennen pro Minute $3 \cdot 3$g= 9g, auf der rechten Seite $2 \cdot 3$g= 6g. Damit gilt für die Zeit t, nach der die Waage zum ersten Mal im Gleichgewicht ist: $130 - 9 \cdot t = 105 - 6 \cdot t \Leftrightarrow 3 \cdot t = 25 \Leftrightarrow t = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ (min). Also hat man nach 8 Minuten und 20 Sekunden das erste Mal Gleichgewicht.

48. Man habe in einem Regal nebeneinander Uhren in einer Reihe stehen. Zwei davon sind Kuckucksuhren. Eine Kuckucksuhr ist die sechste Uhr von links, die andere ist die achte Uhr von rechts! Zwischen den beiden Kuckucksuhren stehen genau drei andere Uhren. Wie viele Uhren stehen im Regal mindestens?
Lösung: Sei K_1 die Kuckucksuhr, die die sechste Uhr von links ist. Die andere Kuckucksuhr K_2 steht entweder links oder rechts von K_1, wobei sich zwischen den beiden genau drei Uhren befinden. Im ersten Fall befindet sich K_1 an der zweiten Position von links. Weil diese die achte von rechts ist, gibt es also genau 9 Plätze. Im anderen Fall steht K_2 rechts von K_1, also an der zehnten Position von links, weil zwischen K_1 und K_2 ja genau drei Uhren stehen. Weil K_2 die achte Uhr von rechts ist, gibt es also in diesem Fall 17 Plätze. In jedem Fall hat man also immer mindestens 9 Plätze.

49. Zwei gleich große und leer gleich schwere Gefäße sind bis zur Hälfte gefüllt: Das eine mit Wasser (Dichte: $1\text{g}/cm^3$), das andere mit Petroleum ($0,8\text{g}/cm^3$). Gießt man in jenes, das Petroleum enthält, $2,5$ Liter Petroleum nach, so werden beide Gefäße gleich schwer. Wie viele Liter fasst ein solches Gefäß?
Lösung: Es gilt zunächst $1l = 1000cm^3$. Sei V das ursprüngliche Volumen der beiden Flüssigkeiten (in Liter) in den Gefäßen. Das heißt also, dass ein Gefäß $2 \cdot V$ (in Liter) Fassungsvermögen hat, denn die Flüssigkeiten füllen die Gefäße genau bis zur Hälfte. Es gilt nach Voraussetzung in der Aufgabenstellung also: $1000 \cdot V \cdot 1 = 1000 \cdot (V + 2,5) \cdot 0,8$, also $V = 10$, d.h., dass die Gefäße ein Fassungsvermögen von genau 20 Litern haben.

50. Tina hat einige Kekse. Nachdem sie einen gegessen hat, gibt sie die Hälfte der verbleibenden Kekse an ihre Schwester. Nachdem sie noch einen Keks gegessen hat, gibt sie die Hälfte der nun verbleibenden Kekse ihrem Bruder. Nun hat Tina nur noch fünf Kekse übrig. Wie viele Kekse hatte sie am Anfang?
Lösung: Man rechnet rückwärts: Tina hatte am Anfang $2 \cdot (2 \cdot 5 + 1) + 1 = 23$ Kekse.

51. In einem Fass befinden sich 18 Liter Wein. Diese Menge soll mit Hilfe eines 2l-Bechers, eines 5l-Kruges und eines 8l-Eimers so verteilt werden, dass sich die Hälfte des Weines in dem Fass, ein Drittel des Weines in dem Eimer und ein Sechstel des Weines in dem Krug befindet. Welche Umfüllungen sind dazu notwendig?
Lösung: Man muss folgende Umfüllungen vornehmen: $F \to B$ bis B voll ist, $B \to E$, $F \to B$ bis B voll ist, $B \to E$, $F \to K$ bis K voll ist, $K \to B$ bis B voll ist, $B \to E$. Zusammengefasst hat man dann also: Das Fass hat 9l, der Becher 0l, der Krug 3l und der Eimer 6l Wein drin.

52. Martin muss für sein Rechenexamen 4 Prüfungen machen. Für die ersten 2 erzielt er eine $9,4$ und eine $9,8$. Was muss er im Durchschnitt für die nächsten 2 Prüfungen erzielen, wenn er eine $9,5$ im Durchschnitt erreichen will? Die zwei Prüfungen, die er noch machen muss, zählen zusammen zu 25% für die Endnote mit.
Lösung: Es muss also gelten: $\frac{9,4+9,8}{2} \cdot \frac{100-25}{100} + d \cdot \frac{25}{100} = 9,5$, also $d = 9,2$. Martin muss also in den letzten beiden Prüfungen die Durchschnittsnote $9,2$ erreichen.

53. Ein leeres Schwimmbecken kann durch die Zuflussleitung in 15 Stunden gefüllt werden. Ist das Becken voll, so dauert es 20 Stunden, um das Wasser wieder ablaufen zu lassen. Das Becken ist leer. Die Besitzerin will es füllen, vergisst jedoch, den Ablauf zu schließen. Wie lange dauert es, bis das Schwimmbecken trotzdem voll ist?
Lösung: Sei V_W das Volumen des Schwimmbeckens. Die Geschwindigkeit des Zuflusses ist also $v_Z = \frac{V_W}{15}$ und die des Abflusses $v_A = -\frac{V_W}{20}$. Zusammen haben die die Geschwindigkeit $v = v_Z + v_A = \frac{V_W}{15} - \frac{V_W}{20}$. Mit dieser Geschwindigkeit braucht man für das Füllen des Beckens: $t = \frac{V_W}{v} = \frac{V_W}{\frac{V_W}{15} - \frac{V_W}{20}} = \frac{1}{\frac{1}{15} - \frac{1}{20}} = 60$ (Stunden).

54. Otto will Invar machen. Invar ist eine Verbindung mit einem extrem niedrigen Ausdehnungskoeffizienten, der aus 36% Nickel und 64% Eisen besteht. Er hat 20kg einer Verbindung mit 20% Nickel und 80% Eisen. Und er hat 180kg einer Verbindung mit 50% Nickel und 50% Eisen. Wie viel Kilogramm Invar kann er maximal machen?
Lösung: Sei m_1 die Menge der 1. Substanz und m_2 die Menge der 2. Substanz (beide in kg). Es müssen dann folgende Gleichungen gelten: $0,20 \cdot m_1 + 0,50 \cdot m_2 = (m_1 + m_2) \cdot 0,36$ und $0,80 \cdot m_1 + 0,50 \cdot m_2 = (m_1 + m_2) \cdot 0,64$. Das ist äquivalent zu: $m_2 = \frac{8}{7} \cdot m_1$. Nun kann m_1 maximal 20kg sein. Ist m_1 maximal, dann auch m_2, weil m_1 und m_2 zueinander proportional sind. Man wähle also $m_1 = 20$, dann ist $m_2 = \frac{8}{7} \cdot 20 = \frac{160}{7} \approx 22,86$. Also kann man aus den beiden gegebenen Metallmischungen maximal $m_1 + m_2 = 20 + \frac{160}{7} \approx 42,86$ (kg) Invar herstellen.

55. Zwei unterschiedliche Läufer treffen sich an einem Sonntag, um einen besonderen Wettlauf durchzuführen. Der erste Läufer rennt um 8.00 Uhr, mit einer Geschwindigkeit von 6km/h los. Der zweite Läufer, der vier Stunden später losläuft, ist mit einer Geschwindigkeit von 9km/h unterwegs. Wann holt der zweite Läufer den ersten ein?
Lösung: Es muss also die folgende Gleichung gelten: $4 \cdot 6 + t \cdot 6 = 0 + t \cdot 9 \Leftrightarrow 24 = t \cdot 3 \Leftrightarrow t = 8$, wobei t die Zeit nach dem Start des zweiten Läufers sei. Weil vor dem Start des zweiten Läufers bereits 4 Stunden vergangen sind, holt der zweite Läufer den ersten nach insgesamt $8 + 4 = 12$ Stunden ein, so dass die beiden sich also um 20.00 Uhr treffen.

56. In einem Hafen hatten vier Schiffe festgemacht. An einem bestimmten Tag verließen sie gleichzeitig den Hafen. Es ist bekannt, dass das erste Schiff alle 4 Wochen in diesen Hafen zurückkehrte, das zweite Schiff alle 8 Wochen, das dritte alle 12 Wochen und das vierte alle 16 Wochen. Wann trafen alle Schiffe das erste Mal wieder in diesem Hafen zusammen?
Lösung: Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 4, 8, 12 und 16 ist die Zahl 48. Folglich trafen die Schiffe nach 48 Wochen (= 12 Monate = 1 Jahr) wieder zusammen.

57. Man hat ein Glas Milch und ein Glas Wasser, und zwar in beiden gleich viel. Es wird dann ein Löffel Milch in das Wasserglas getan und umgerührt. Dann nimmt man ein Löffel aus der Wasser-Milch-Mischung und tut es ins andere Glas und rührt es dann wieder um. Was lässt sich nun über den Wassergehalt in dem einen und den Milchgehalt in dem anderen Glas sagen?
Lösung: Sei $L = \frac{1}{\lambda} \cdot m$ die Menge eines Löffels aus dem Glas Milch. Man tut es nun in das Glas Wasser und im Milchglas ist

nur noch $\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\cdot m$ Milch. Die Mischung aus Wasser und dem Löffel Milch ist dann $w+\frac{1}{\lambda}\cdot m$. Man tut nun von dieser Mischung wieder genau ein Löffel zurück ins ursprüngliche Milchglas. Also hat man dann im ursprünglichen Milchglas: $\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\cdot m+\left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{1+\frac{1}{\lambda}}\cdot\left(w+\frac{1}{\lambda}\cdot m\right)\right)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\lambda}\cdot m+\frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda}\cdot w$. Im ursprünglichen Wasserglas hat man hingegen: $\frac{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{\lambda}}{1+\frac{1}{\lambda}}\cdot\left(w+\frac{1}{\lambda}\cdot m\right)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\lambda}\cdot w+\frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda}\cdot m$. Das bedeutet: Die Menge Milch, die man in dem einen Glas hat, ist gleich der Menge Wasser, die man im anderen Glas hat.

58. Hanne trifft Friederike bei einer eigenartigen Arbeit: Sie locht mit einem Locher buntes Papier. Was Sie denn da mache, wollte Hanne wissen. Konfetti für Karneval, sagte Friederike. Aber das sei doch wohl eine recht mühsame Sache, meinte Hanne. Nein, nein, widersprach Friederike, sie falte das Papier dreimal und hätte so die dreifache Menge. Das leuchtete Hanne ein, aber nach kurzem Überlegen sagt sie, Friederike müsste sogar die sechsfache Menge erhalten. Wer von den beiden hat Recht?
Lösung: Es hat keiner von beiden Recht, denn nach 3-maligem Falten locht man die $1\cdot 2\cdot 2\cdot 2=8$-fache Menge.

59. Man nehme an, der Äquator sei genau 40.000km lang und er wäre ein perfekter Kreis. Um den Äquator wird nun ein Seil von $40.000,001$km Länge, also 1m länger als der Äquator, gelegt. Nun wird der Meter mit in den Kreis einbezogen und gleichmäßig auf die gesamte Länge des Äquators verteilt (der Kreis wird also größer und es entsteht ein Abstand zwischen dem Seil und dem Erdboden. Kann nun eine Maus zwischen dem Seil und dem Äquator durchschlüpfen, ohne das Seil weiter anheben zu müssen?
Lösung: Der Umfang eines Kreises mit dem Radius r ist $U_K=2\pi\cdot r$. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aus der folgenden Differenz: $\frac{40.000.001}{2\pi}-\frac{40.000.000}{2\pi}\approx 0,1592$. Das Seil wäre also $15,92$cm über dem Erdboden. Also kann eine Maus problemlos unter dem Seil durchschlüpfen.

60. Eine Gruppe von Kindern geht zum Nüsse sammeln in den Wald. Dazu nehmen sie zwei Körbe mit. In den größeren der beiden Körbe passen genau doppelt so viele Nüsse wie in den kleineren Korb. Zuerst sammeln alle Kinder eine halbe Stunde lang Nüsse in den größeren Korb. Anschließend sammelt eine halbe Stunde lang die Hälfte der Kinder Nüsse in den größeren, die andere Hälfte in den kleineren Korb. Danach müssen alle bis auf ein Kind nach Hause. Dieses eine Kind sammelt dann noch zwei Stunden lang Nüsse in den kleineren Korb. Es soll nun bestimmt werden, wie viele Kinder Nüsse sammelten, wenn bekannt ist, dass alle Kinder gleich schnell sammelten und am Ende beide Körbe voll waren!
Lösung: Sei v die Geschwindigkeit, die alle Kinder zusammen beim Nüssesammeln haben, und sei k die Anzahl der Kinder. Es gilt dann: $K_g=v\cdot\frac{1}{2}+v\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ und $K_k=v\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+v\cdot 2\cdot\frac{1}{k}$. Wegen $2\cdot K_k=K_g$ gilt: $2\cdot\left(v\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+v\cdot 2\cdot\frac{1}{k}\right)=v\cdot\frac{1}{2}+v\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{4}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{4}{k}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow k=16$. Es sammelten also 16 Kinder.