

Algebraische Topologie

W. Ebeling und K. Hulek

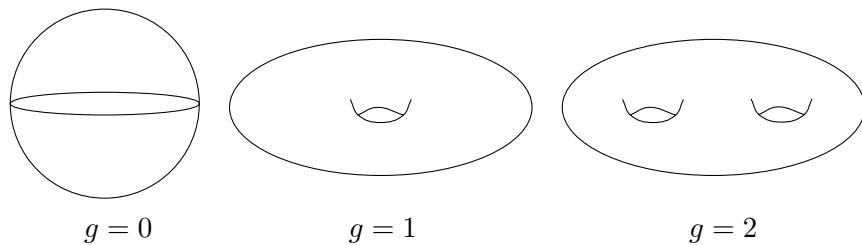
Einleitung

Grundzüge der algebraischen Topologie sieht man bereits in den Vorlesungen "Analysis" und "Funktionentheorie". Dort stellt sich beispielsweise die Frage, ob ein Integral der Form $\int_{\gamma} f(z)dz$ über einen geschlossenen Weg Null ist. Die Antwort ist im allgemeinen nein, wie etwa

$$\int_{S^1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

zeigt. Andererseits ist $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, wenn sich γ im Holomorphiegebiet von f "zusammenziehen" lässt, anders ausgedrückt, wenn f "nullhomotop" (besser noch "nullhomolog" ist).

Typische Fragen der Topologie sind etwa: Wann sind zwei Sphären S^n und S^m homöomorph? (Die Antwort ist, daß dies genau für $n = m$ der Fall ist). Welche kompakte, orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 gibt es? Dies sind genau die Flächen mit g -Löchern (oder äquivalent die Sphären mit g Henkeln), also



Die Idee der algebraischen Topologie besteht darin, topologischen Räumen algebraische Objekte zuzuordnen (Gruppen, Ringe, ...). Dies soll in "natürlicher" (d.h. funktorieller) Weise geschehen. Insbesondere sollen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ Morphismen der algebraischen Objekte zugeordnet werden. Sind dann die X und Y zugeordneten Objekte verschieden, so können X und Y nicht homöomorph gewesen sein.

Zur Wiederholung sei erwähnt

Definition Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einem System T offener Mengen, so daß gilt:

- (i) $\emptyset, X \in T$
- (ii) $U, V \in T \Rightarrow U \cap V \in T$
- (iii) $U_i \in T$ für $i \in I \Rightarrow \bigcup_i U_i \in T$.

Beispiele (i) Auf \mathbb{R}^n sei die euklidische Metrik

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben. Dann erhält man eine Topologie auf \mathbb{R}^n , wenn man U offen nennt, falls mit jedem Punkt $x \in U$ auch eine ε -Kugel $B_\varepsilon(x) = \{y; d(x, y) < \varepsilon\}$ in U liegt.

(ii) Dieselbe Topologie auf \mathbb{R}^n erhält man auch für die Metriken

$$\begin{aligned} d_p(x, y) : &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p \geq 2 \\ d_\infty(x, y) : &= \max |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

(iii) Auf jeder Menge M kann man die *diskrete Topologie* betrachten. In dieser Topologie ist jede Teilmenge von M offen.

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig*, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Die Abbildung f ist ein *Homöomorphismus*, falls es eine stetige Umkehrabbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt.

I Homotopietheorie

1 Die Fundamentalgruppe

Ein *Weg* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\sigma : I = [0, 1] \rightarrow X$. Wir betrachten nun zwei Wege $\sigma, \tau : I \rightarrow X$ mit demselben Anfangs- und Endpunkt, d.h. $\sigma(0) = \tau(0) = x_0, \sigma(1) = \tau(1) = x_1$.

Definition Die Wege σ und τ heißen *homotop* (relativ $\{0, 1\}$) falls es eine stetige Abbildung $F : I \times I \rightarrow X$ gibt, mit

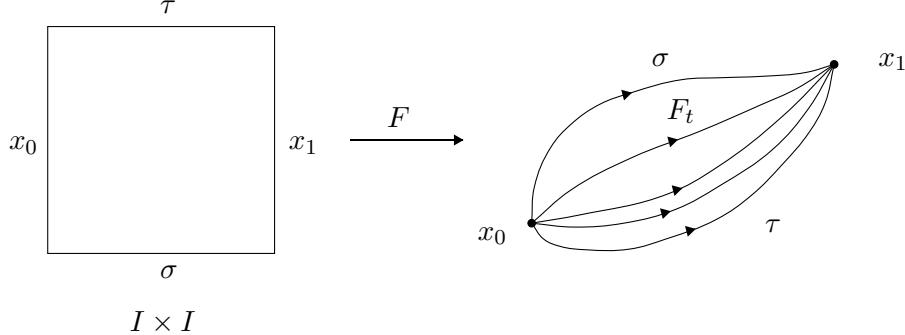
- (i) $F(s, 0) = \sigma(s)$ für $s \in I$
- (ii) $F(s, 1) = \tau(s)$ für $s \in I$
- (iii) $F(0, t) = x_0$ für $t \in I$

(iv) $F(1, t) = x_1$ für $t \in I$

Für festes $t \in I$ erhalten wir stets einen Weg

$$\begin{aligned} F_t : I &\longrightarrow X \\ F_t(s) &= F(s, t). \end{aligned}$$

Für homotope Wege σ, τ ist die *Bezeichnung* $\sigma \simeq \tau$ gebräuchlich. Man kann auch eine Homotopie wie folgt versinnbildlichen.



Man überprüft sofort, daß gilt:

- (1) $\sigma \simeq \sigma$
- (2) $\sigma \simeq \tau \Rightarrow \tau \simeq \sigma$
- (3) $\sigma \simeq \tau, \tau \simeq \rho \Rightarrow \sigma \simeq \rho.$

Definiert man ferner das *Produkt* von zwei Wegen σ und τ mit $\sigma(1) = \tau(0)$ durch

$$\begin{aligned} \sigma\tau : I &\longrightarrow X \\ \sigma\tau(s) &= \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

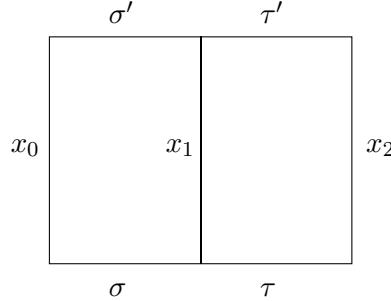
so gilt ferner

$$(4) \quad \sigma \simeq \sigma', \tau \simeq \tau' \Rightarrow \sigma\tau \simeq \sigma'\tau'.$$

Alle Aussagen sind leicht zu zeigen. Im Fall von (4) geht man wie folgt vor: Ist $F : I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie von σ und σ' , und $G : I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie von τ und τ' erhält man eine Homotopie von $\sigma\tau$ und $\sigma'\tau'$ durch

$$\begin{aligned} FG : I \times I &\longrightarrow X \\ FG(s, t) &= \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Man beachte, daß $F(1, t) = \sigma(1) = \tau(0) = G(0, t)$. Symbolisch kann man dies wie folgt darstellen:



Damit haben wir auf der Menge aller Wege eine Äquivalenzrelation definiert, die mit dem Produkt von Wegen verträglich ist.

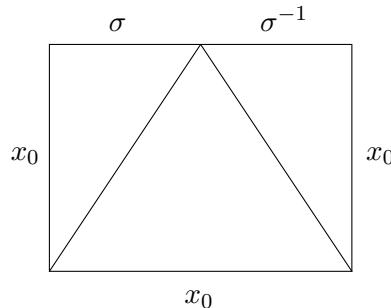
Wir betrachten nun einen festen Punkt $x_0 \in X$ und geschlossene Wege $\sigma : I \rightarrow X$ mit Anfangs- und Endpunkt x_0 .

Theorem I.1.1 *Es sei $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Homotopieklassen von geschlossenen Wegen mit Anfangs- und Endpunkt x_0 . Bezuglich dem Produkt von Wegen ist $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe, dessen neutrales Element durch den konstanten Weg x_0 gegeben wird und in der das zu einer Klasse $[\sigma]$ inverse Element durch $[\sigma^{-1}]$ gegeben wird, wobei $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1 - s)$ ist.*

Beweis. Alle Gruppeneigenschaften sind leicht nachzuprüfen. Wir zeigen hier $\sigma\sigma^{-1} \simeq x_0$. Eine Homotopie zwischen dem konstanten Weg x_0 und $\sigma\sigma^{-1}$ kann konkret wie folgt angegeben werden

$$F(s, t) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq 2s \leq t \\ \sigma(t) & t \leq 2s \leq 2 - t \\ \sigma^{-1}(2s - 1) & 2 - t \leq 2s \leq 2 \end{cases}$$

Symbolisch kann dies so dargestellt werden



F ist offensichtlich auf den eingezeichneten Dreiecken stetig. Da F wohldefiniert ist, d.h. daß die verschiedenen Definitionen auf den Durchschnitten

dieser Dreiecke übereinstimmen, ist F auf ganz $I \times I$ stetig. Klarerweise liefert F die gewünschte Homotopie. \square

Die nächste, offensichtliche, Frage ist, inwieweit die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ vom *Basispunkt* x_0 abhängt.

Satz I.1.2 *Ist α ein Weg von x_0 nach x_1 , so wird durch $\alpha_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, $[\sigma] \mapsto [\alpha^{-1}\sigma\alpha]$ ein Gruppenisomorphismus definiert.*

Beweis. Offensichtlich ist α_* wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus. Das Inverse wird durch $(\alpha^{-1})_*$ gegeben. \square

Bekanntlich heißt ein topologischer Raum X *wegzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte x_0, x_1 in X durch einen Weg verbunden werden können.

Korollar I.1.3 *Die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden topologischen Raums X hängt nicht vom Basispunkt ab.*

Wir betrachten schließlich eine Abbildung von punktierten topologischen Räumen:

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

d.h. eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Dann wird durch

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\sigma] &\mapsto [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus gegeben. Dabei gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad (id_x)_* &= id_{\pi_1}(X, x_0) \\ (2) \quad (f \circ g)_* &= f_* \circ g_* \end{aligned}$$

für Abbildungen $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$. Insbesondere folgt hieraus: Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus mit $f(x_0) = y_0$, so ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus, d.h. homöomorphe, wegzusammenhängende Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen. Auf diese Weise haben wir einen *Funktoren* von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen definiert.

2 Homotopie von Abbildungen

Wir betrachten Abbildungen $f, g : Y \rightarrow X$ zwischen topologischen Räumen. Es sei A eine Teilmenge von Y mit $f|_A = g|_A$.

Definition Die Abbildungen f und g heißen *homotop relativ der Teilmenge A* ($f \simeq g$ rel A) falls es eine stetige Abbildung $F : Y \times I \rightarrow X$ gibt, mit

- (i) $F(y, 0) = f(y)$ für $y \in Y$
- (ii) $F(y, 1) = g(y)$ für $y \in Y$
- (iii) $F(y, t) = f(y) = g(y)$ für $y \in A, t \in I$.

Ist A die leere Menge, so heißen f und g *homotope Abbildungen*.

Bemerkung Die Homotopie von zwei Wegen σ, τ , wie sie im obigen Abschnitt eingeführt wurde, ist ein Spezialfall der obigen Definition, wenn wir für A die Menge $\{0, 1\}$ wählen. Wir bleiben allerdings bei unserer (mißbräuchlichen) Notation $\sigma \simeq \tau$.

Beispiel Es sei X eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann sind je zwei stetige Abbildungen $f, g : Y \rightarrow X$ homotop. Eine Homotopie wird gegeben durch

$$F(y, t) = (1 - t)f(y) + tg(y).$$

Definition Ein topologischer Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn die Identität zu einer konstanten Abbildung auf einen Punkt $x_0 \in X$ homotop ist.

Auf Grund des obigen Beispiels sind alle konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n zusammenziehbar. Zusammenziehbare Räume sind insbesondere wegzusammenhängend.

Lemma I.2.1 *Ist X zusammenziehbar, so sind je zwei Abbildungen $f, g : Y \rightarrow X$ homotop.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß eine gegebene Abbildung $f : Y \rightarrow X$ homotop zur konstanten Abbildung x_0 ist. Es sei $F : Y \times I \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen id_X und x_0 , d.h. also $F(x, 0) = x, F(x, 1) = x_0$. Wir bekommen dann eine Homotopie zwischen f und x_0 durch

$$\begin{aligned} F' : & Y \times I \rightarrow X \\ & F'(y, t) = F(f(y), t). \end{aligned}$$

□

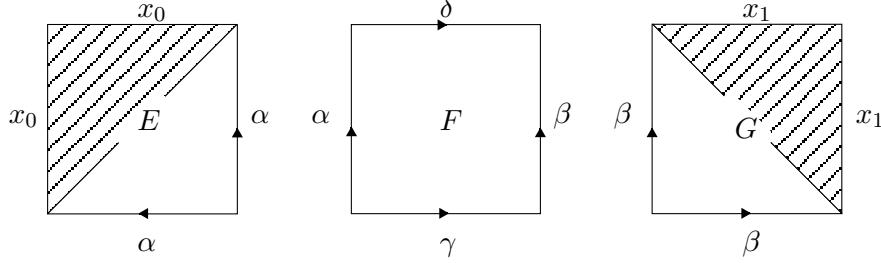
Definition Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend und die Fundamentalgruppe trivial ist.

Satz I.2.2 *Ein zusammenziehbarer Raum ist einfach zusammenhängend.*

Beweis. Es sei σ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt x_0 . Dann ist σ homotop (bezüglich der leeren Menge) zu dem konstanten Weg x_0 . Wir müssen zeigen, daß es auch eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ gibt. Hierzu beweisen wir das folgende

Lemma I.2.3 Es sei $F : I \times I \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Es sei $\alpha(t) = F(0, t), \beta(t) = F(1, t), \gamma(s) = F(s, 0), \delta(s) = F(s, 1)$. Dann gilt $\delta \simeq \alpha^{-1}\gamma\beta$ (im Sinn von Abschnitt (I.1))

Beweis. Wir erhalten die gesuchte Homotopie der Wege $\alpha^{-1}\gamma\beta$ und δ durch Zusammenfügen der folgenden drei Homotopien



wobei $x_0 = \delta(0) = \alpha(1), x_1 = \delta(1) = \beta(1)$ sowie

$$E(s, t) = \begin{cases} x_0 & s \leq t \\ \alpha(1 + t - s) & s \geq t \end{cases}$$

$$G(s, t) = \begin{cases} \beta(t + s) & 1 - s \geq t \\ x_1 & 1 - s \leq t. \end{cases}$$

□

Ende des Beweises von Satz (I.1.2): Der geschlossene Weg σ liefert eine stetige Abbildung $\sigma : S^1 \rightarrow X$. Da σ zu dem konstanten Weg x_0 homotop ist, gibt es eine entsprechende Homotopie

$$F : S^1 \times I \rightarrow X.$$

Dies liefert eine Abbildung

$$F' : I \times I \rightarrow X.$$

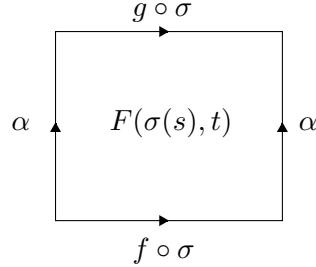
wie in Lemma (I.2.3) mit $\delta = \sigma, \gamma = x_0, \alpha = \beta$, d.h. $[\sigma] = [\alpha^{-1}][x_0][\alpha] = [x_0]$, da $[x_0]$ das neutrale Element ist. □

Lemma I.2.4 (i) Es seien $f, g : Y \rightarrow X$ homotope Abbildungen. Die Homotopie sei gegeben durch $F : Y \times I \rightarrow X$. Für einen Punkt $y_0 \in Y$ sei $x_0 = f(y_0), x_1 = g(y_0)$. Es sei α der Weg von x_0 nach x_1 , der durch $\alpha(t) = F(y_0, t)$ gegeben wird. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_0) \\ & \searrow g_* & \downarrow \alpha_* \\ & & \pi_1(X, x_1) \end{array}$$

(ii) f_* ist genau dann ein Isomorphismus, wenn g_* ein Isomorphismus ist.

Beweis. (i) Es sei σ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt y_0 . Dann folgt die Behauptung sofort aus der Homotopie



(ii) Dies folgt sofort aus (i). □

Definition (i) Eine Abbildung $f : Y \rightarrow X$ heißt eine *Homotopieäquivalenz*, falls es eine Abbildung $g : X \rightarrow Y$ gibt mit $f \circ g \simeq \text{id}_X, g \circ f \simeq \text{id}_Y$.
(ii) Die Räume X und Y heißen *homotopie-äquivalent*, falls es eine Homotopieäquivalenz $f : X \rightarrow Y$ gibt.

Schreibweise: Sind zwei Räume X und Y homotopie-äquivalent, so schreibt man $X \simeq Y$.

Beispiel Ist X eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n und p ein Punkt, so sind X und p homotopie-äquivalent.

Satz I.2.5 Ist $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ein Isomorphismus.

Beweis. Es gibt eine Abbildung $g : X \rightarrow Y$ mit $f \circ g \simeq \text{id}_X$ und $g \circ f \simeq \text{id}_Y$. Nach Lemma (I.2.4) sind dann $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ und $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ Isomorphismen, also auch f_* und g_* . □

Obiges Beispiel zeigt, daß etwa eine Kreisscheibe und ein einpunktiger Raum homotop äquivalent sind und daher isomorphe Fundamentalgruppe besitzen. Andererseits sind diese Räume nicht homöomorph (sie sind nicht einmal bijektiv aufeinander abbildbar). Homotopiegruppen eignen sich daher nicht so sehr, um Homöomorphieklassen, wohl aber um Homotopieklassen, zu unterscheiden.

3 Die Fundamentalgruppe des Kreises

Wir wollen hier die Fundamentalgruppe des Einheitskreises

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

berechnen. Hierzu verwenden wir die Exponentialabbildung

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ x &\longmapsto e^{2\pi i x}.\end{aligned}$$

Die Einschränkung dieser Abbildung auf das offene Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ liefert einen Homöomorphismus dieses Intervalls mit $S^1 \setminus \{-1\}$. Es sei Ψ die Umkehrabbildung.

Lemma I.3.1 (i) *Es sei $\sigma : I \rightarrow S^1$ ein Weg mit $\sigma(0) = 1$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\sigma}(0) = 0$ und $\Phi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.*

(ii) *Es sei $\tau : I \rightarrow S^1$ ein weiterer Weg mit $\tau(0) = 1$ und $F : I \times I \rightarrow S^1$ eine Homotopie von σ und τ relativ $\{0, 1\}$. Dann gibt es genau eine Homotopie $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ von $\tilde{\sigma}$ und $\tilde{\tau}$ relativ $\{0, 1\}$ mit $\Phi \circ \tilde{F} = F$.*

Beweis. Wir zeigen (i) und (ii) zugleich und setzen hierfür $Y = I$ oder $Y = I \times I$. Mit $0 \in Y$ sei der Punkt 0, bzw. $(0, 0)$ gemeint. Die Abbildung $f : Y \rightarrow S^1$ sei entweder σ oder F . Da Y kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig. Also gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $|y - y'| < \delta$ gilt $|f(y) - f(y')| < 1$, also insbesondere $f(y) \neq -f(y')$. Daher ist $\Psi(f(y)/f(y'))$ definiert. Wir können N so groß wählen, daß $|y| < N\varepsilon$ für alle Punkte $y \in Y$. Nach dieser Vorüberlegung ist die Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y) &= \Psi(f(y)/f(\frac{N-1}{N}y)) + \Psi(f(\frac{N-1}{N}y)/f(\frac{N-2}{N}y)) \\ &\quad + \dots + \Psi(f(\frac{1}{N}y)/f(0))\end{aligned}$$

gegeben wird, wohldefiniert, stetig mit $\tilde{f}(0) = N\Psi(1) = 0$, und es gilt $\Phi \circ \tilde{f} = f$.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß \tilde{f} eindeutig bestimmt ist. Es sei $\tilde{f}' : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere stetige Abbildung mit $\tilde{f}'(0) = 0$, $\Phi \circ \tilde{f}' = f$. Dann ist $\Psi(\tilde{f} - \tilde{f}') = 1$, d.h. $\tilde{f} - \tilde{f}'$ liegt in $\ker \Phi = \mathbb{Z}$. Da $\tilde{f} - \tilde{f}'$ stetig ist, ist die Abbildung konstant. Mit $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = 0$ folgt hiermit schließlich $\tilde{f} = \tilde{f}'$.

Es sei nun $Y = I \times I$. Dann ist $\tilde{F} = \tilde{f}$ eine Homotopie von $\tilde{\sigma}$ und $\tilde{\tau}$. Es bleibt zu zeigen, daß dies eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ ist, d.h. $\tilde{F}(0 \times I) = 0$ und $\tilde{F}(1 \times I) = \text{konstant}$. Da $\Phi \circ \tilde{F}(0 \times I) = F(0 \times I) = 1$ ist und $\tilde{F}(0, 0) = 0$ gilt, folgt $\tilde{F}(0 \times I) = 0$ wie im obigen Argument. Analog schließt man im Fall $\tilde{F}(1 \times I)$. \square

Korollar I.3.2 *Der Endpunkt $\tilde{\sigma}(1)$ hängt nur von der Homotopieklassse von σ ab.*

Damit können wir zeigen:

Theorem I.3.3 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach Korollar (I.3.2) ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\chi : \pi_1(S^1, 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \chi([\sigma]) &= \tilde{\sigma}(1)\end{aligned}$$

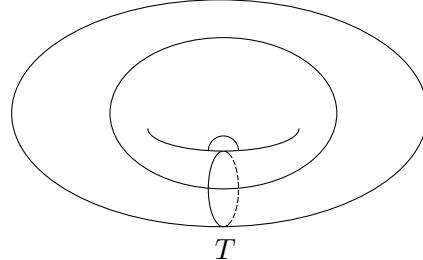
wohldefiniert. Die Abbildung χ ist ein Homomorphismus. Für $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(S^1, 1)$ gilt nämlich folgendes: Es seien $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$ die Liftungen von σ, τ nach Lemma (I.3.1). Es sei $m = \tilde{\sigma}(1)$, $n = \tilde{\tau}(1)$. Der Weg $\hat{\tau}$ sei durch $\hat{\tau} = \tilde{\tau} + m$ definiert. Dann ist $\tilde{\sigma}\hat{\tau}$ die Lifting von $\sigma\tau$ mit $\tilde{\sigma}\hat{\tau}(0) = 0$. Also gilt

$$\chi([\sigma\tau]) = \tilde{\sigma}\hat{\tau}(1) = m + n = \chi([\sigma]) + \chi([\tau]).$$

Die Abbildung χ ist surjektiv: Es sei $\tilde{\sigma}(s) = ns$. Dann gilt $\chi([\sigma]) = n$ für $\sigma = \Phi \circ \tilde{\sigma}$. Schließlich bleibt zu zeigen, daß χ injektiv ist. Sei $\chi([\sigma]) = 0$. Dann ist $\tilde{\sigma}$ ein geschlossener Weg mit $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}(1) = 0$. Da \mathbb{R} kontrahierbar ist, ist \mathbb{R} einfach zusammenhängend. Also gibt es eine Homotopie \tilde{F} von $\tilde{\sigma}$ mit dem konstanten Weg 0 (relativ $\{0, 1\}$). Dann liefert $F = \Phi \circ \tilde{F}$ eine Homotopie von σ mit dem konstanten Weg 1. \square

Die Zahl $\chi([\sigma])$ heißt auch *Windungszahl* des Weges σ . Diese Zahl kann auf vielfache Weise definiert werden.

Wir wollen nun noch eine Anwendung dieses Theorems diskutieren. Ein Torus T ist homöomorph zu dem Produkt $S^1 \times S^1$:



Satz I.3.4 $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Der Beweis dieses Satzes, ebenso wie seine Verallgemeinerung in höhere Dimensionen, folgt sofort aus:

Satz I.3.5 Es seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte Räume. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Beweis. Mit Hilfe der Projektionen

$$\begin{array}{ccc} & (X \times Y, (x_0, y_0)) & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ (X, x_0) & & (Y, y_0) \end{array}$$

erhält man einen Homomorphismus

$$(p_*, q_*) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Hierzu kann man sofort ein Inverses angeben: Für Wege σ in X mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ und τ in Y mit $\tau(0) = \tau(1) = y_0$ betrachten wir den Weg

$$(\sigma, \tau)(s) = (\sigma(s), \tau(s)).$$

Es ist klar, daß dies eine Abbildung

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$

liefert mit $(p_*, q_*) \circ \varphi_* = \text{id}$. Dies zeigt insbesondere, daß (p_*, q_*) surjektiv ist und φ_* injektiv ist. Die Abbildung φ_* ist auch surjektiv, da jeder Weg $\sigma' : I \rightarrow X \times Y$ von der Form $\sigma'(s) = (\sigma(s), \tau(s))$ ist. \square

4 Überlagerungstheorie

Es sei $p : E \rightarrow X$ eine stetige Abbildung topologischer Räume.

Definition $p : E \rightarrow X$ ist eine *Überlagerung*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt mit der Eigenschaft:

(*) $p^{-1}(U)$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Mengen S_i in E , so daß $p|_{S_i} : S_i \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

Die S_i heißen dann die *Blätter* über U .

Beispiel Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \Phi(x) = e^{2\pi i x}$ ist eine Überlagerung.

Analog zu diesem Beispiel kann man nun nach der "Liftung" von Wegen, Homotopien oder Abbildungen von X nach E fragen.

Definition Ist $f : Y \rightarrow X$ eine Abbildung, so ist eine *Liftung* von f bezüglich $p : E \rightarrow X$ eine Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ mit $p \circ \tilde{f} = f$, d.h. daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \nearrow \tilde{f} & \downarrow p & \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kommutiert.

Satz I.4.1 Es sei $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung und $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Abbildung. Falls Y zusammenhängend ist, gibt es höchstens eine Liftung $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ von f .

Beweis. Es sei $\tilde{f}' : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ eine weitere solche Liftung. Wir setzen

$$A = \{y \in Y; \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}.$$

Dann ist A nicht leer, da $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0) = e_0$, also $y_0 \in A$. Ist

$$B = \{y \in Y, \tilde{f}(y) \neq \tilde{f}'(y)\}$$

so ist Y die disjunkte Vereinigung von A und B . Offensichtlich ist B offen. Wenn wir nun zeigen können, daß A offen ist, so folgt, da Y zusammenhängend ist, daß $A = Y$ gilt. Es sei nun $a \in A$, und S das Blatt über einer geeigneten Umgebung U von $f(a)$ mit $\tilde{f}(a) = \tilde{f}'(a) \in S$. Dann ist $\tilde{f}^{-1}(S) \cap (\tilde{f}')^{-1}(S)$ eine offene Umgebung von a in A . \square

Theorem I.4.2 *Es sei $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung und σ ein Weg in X mit $\sigma(0) = x_0$. Dann gibt es genau eine Liftung $\tilde{\sigma}$ von σ mit $\tilde{\sigma}(0) = e_0$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit von $\tilde{\sigma}$ folgt sofort aus dem obigen Satz. Um die Existenz von $\tilde{\sigma}$ zu zeigen, unterteilen wir das Intervall $I = [0, 1]$ in Teilintervalle $[t_k, t_{k+1}]$ mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, so daß $\sigma([t_k, t_{k+1}])$ in einer Menge U_k enthalten ist, für die die Eigenschaft (*) gilt. Wir betrachten zunächst U_0 sowie das Blatt S_0 über U_0 mit $e_0 \in S_0$. Dann gibt es eine eindeutige Liftung $\tilde{\sigma}$ von $\sigma|_{[t_0, t_1]}$ mit $\tilde{\sigma}_0(0) = e_0$. Angenommen wir haben nun eine Liftung $\tilde{\sigma}_i : [0, t_{i+1}] \rightarrow E$ von $\sigma|_{[0, t_{i+1}]}$ mit $\tilde{\sigma}_i(0) = e_0$. Dann gibt es eine Liftung $\sigma'_{i+1} : [t_{i+1}, t_{i+2}] \rightarrow E$ mit $\sigma'_{i+1}(t_{i+1}) = \tilde{\sigma}_i(t_{i+1})$. Durch Zusammensetzen von $\tilde{\sigma}_i$ und σ'_{i+1} erhalten wir eine Liftung $\tilde{\sigma}_{i+1}$ von $\sigma|_{[0, t_{i+2}]}$ mit $\tilde{\sigma}_{i+1}(0) = e_0$. \square

Theorem I.4.3 *Es sei $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Die Abbildung $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ besitze eine Liftung $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ (d.h. $p \circ \tilde{f} = f$). Ferner sei $F : Y \times I \rightarrow X$ eine Homotopie mit $F(y, 0) = f(y)$ für $y \in Y$. Dann kann man F eindeutig zu einer Homotopie $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow E$ mit $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ liften.*

Beweis. Die Eindeutigkeit der Liftung folgt, da die Wege $\tilde{F}(y_0, s)$ für festes $y_0 \in Y$ durch die Bedingung $\tilde{F}(y_0, 0) = \tilde{f}(y_0)$ eindeutig bestimmt sind. Es bleibt also die Existenz zu zeigen. Hat X selbst die Eigenschaft (*), so ist dies klar. Ansonsten können wir X mit Umgebungen U_ν überdecken, die diese Eigenschaften besitzen. Wir können ferner zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung N_y von y finden, sowie eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, so daß $F(N_y \times [t_i, t_{i+1}])$ in einer solchen Menge U_γ enthalten ist. Wie im Beweis von Theorem (I.4.2) finden wir dann eine Liftung von $F|_{N_y \times I}$. Es bleibt zu überlegen, daß diese Liftungen zusammenkleben. Dazu sei $y_1 \in N_y \cap N_{y'}$. Da I zusammenhängend ist, stimmen die beiden Liftungen auf $y_1 \times I$ überein, und damit auf $(N_y \cap N_{y'}) \times I$. \square

Korollar I.4.4 Es seien σ, τ Wege in X mit $\sigma(0) = \tau(0) = x_0$. Ferner sei $\sigma \simeq \tau$ rel $\{0, 1\}$. Die eindeutig bestimmten Liftungen von σ und τ mit Anfangspunkt e_0 seien mit $\tilde{\sigma}_{e_0}, \tilde{\tau}_{e_0}$ bezeichnet. Dann gilt auch $\tilde{\sigma}_{e_0} \simeq \tilde{\tau}_{e_0}$ rel $\{0, 1\}$.

Korollar I.4.5 Die Abbildung $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv.

Beweis. Es sei σ' ein Weg in E mit $\sigma'(0) = \sigma'(1) = e_0$. Ist $p_*[\sigma'] = 1$, so gibt es also eine Homotopie von $p \circ \sigma'$ mit dem konstanten Weg x_0 . Nach Korollar (I.4.4) kann diese Homotopie zu einer Homotopie (relativ $\{0, 1\}$) der Wege σ' und e_0 geliftet werden. \square

Im allgemeinen ist jedoch folgendes zu beachten: Ist σ ein geschlossener Weg in X mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$, so ist dessen Liftung $\tilde{\sigma}_{e_0}$, die durch $\tilde{\sigma}_{e_0}(0) = e_0$ eindeutig bestimmt wird, im allgemeinen *kein* geschlossener Weg. Man kann lediglich sagen, daß der Endpunkt $\tilde{\sigma}_{e_0}(1)$ in der Faser $p^{-1}(x_0)$ enthalten ist. Dieser hängt nur von der Homotopieklassse von σ ab. Man erhält also eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ (e, [\sigma]) &\longmapsto e[\sigma] := \tilde{\sigma}_e(1). \end{aligned}$$

Damit *operiert* die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Menge $p^{-1}(x_0)$. Allgemein sagt man, eine Gruppe G operiert auf einer Menge X (von rechts), wenn es eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times G &\longrightarrow X \\ (x, g) &\longmapsto xg \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften gibt

$$x1 = x, \quad (xg)g' = x(gg').$$

Der *Stabilisator* von x bezüglich der Operation von G auf x ist dann die Untergruppe

$$G_x = \{g \in G; xg = x\}.$$

Man sagt ferner, daß G *transitiv* auf X operiert, falls es zu je zwei Elementen $x, x' \in X$ ein Gruppenelement $g \in G$ gibt mit $xg = x'$.

In unserem Fall ist der Stabilisator eines Punktes $e \in p^{-1}(x_0)$ die Untergruppe $p_*\pi_1(E, e)$ von $\pi_1(X, x_0)$. Ist E bogenweise zusammenhängend, so operiert $\pi_1(X, x_0)$ transitiv auf $p^{-1}(x_0)$. Es sei nämlich σ' ein Weg von e nach e' . Dann ist $\sigma = p \circ \sigma'$ ein geschlossener Weg in X und $e[\sigma] = e'$. Damit ergibt sich auch sofort

$$p_*\pi_1(E, e') = [\sigma]p_*\pi_1(E, e)[\sigma]^{-1}.$$

Das heißt, die Untergruppen $p_*\pi_1(E, e), e \in p^{-1}(x_0)$ von $\pi_1(X, x_0)$ sind alle zueinander *konjugiert*.

Definition Eine *Decktransformationen* der Überlagerung $p : E \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus $\Phi : E \rightarrow E$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

kommutiert, d.h. $p \circ \Phi = p$.

Offensichtlich bilden die Decktransformationen eine Gruppe.

Definition Ein topologischer Raum X heißt *lokal bogenweise zusammenhängend*, bzw. *lokal einfach zusammenhängend*, falls es zu jedem Punkt x und jeder Umgebung U von x eine Umgebung V von x mit $V \subset U$ gibt, die bogenweise zusammenhängend, bzw. einfach zusammenhängend ist.

Theorem I.4.6 *Es sei $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Falls E einfach zusammenhängend und lokal bogenweise zusammenhängend ist, gibt es einen natürlichen Isomorphismus von der Gruppe G der Decktransformationen in die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst einen Gruppenhomomorphismus $\chi : G \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Es sei dazu Φ eine Decktransformation. Da E einfach zusammenhängend ist, sind alle Wege σ' in E von e_0 nach $\Phi(e_0)$ homotop relativ $\{0, 1\}$. D.h. hierdurch wird eine wohlbestimmte Klasse $[\sigma] = [p \circ \sigma'] \in \pi_1(X, x_0)$ definiert und die so bestimmte Abbildung $\chi : G \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ist ein Homomorphismus. Nach Konstruktion gilt

$$\Phi(e_0) = e_0 \chi(\Phi) = e_0[\sigma].$$

χ ist injektiv, denn falls $\chi(\Phi) = 1$ gilt, folgt $\Phi(e_0) = e_0$. Da E zusammenhängend ist, folgt hieraus wegen Satz (I.4.1), daß $\Phi = \text{id}_E$.

Um zu zeigen, daß χ surjektiv ist, starten wir mit einem Element $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$. Wir konstruieren Φ wie folgt. Es sei $e \in E$ und wir wählen einen Weg τ' von e_0 nach e . Es sei $\tau = p \circ \tau'$. Dann ist $\tau^{-1} \sigma \tau$ ein geschlossener Weg um $x = p(e)$. Wir setzen

$$\Phi(e) = e[\tau^{-1} \sigma \tau] \in p^{-1}(p(e)).$$

Da E einfach zusammenhängend ist, hängt $\Phi(e)$ nur von $[\sigma]$ nicht aber von der Wahl von τ' ab. Es gilt $p \circ \Phi = p$. Die Abbildung Φ ist bijektiv, da dieselbe Konstruktion, angewandt auf σ^{-1} eine Umkehrabbildung liefert. Ebenso ist klar, daß $p \circ \Phi = p$ ist. Nach Konstruktion ist $X(\phi) = [\sigma]$, wenn wir gezeigt haben, daß Φ eine Decktransformation ist. Um die Stetigkeit von

Φ zu zeigen, gehen wir wie folgt vor: Es sei $e_1 \in E$. Ferner sei τ'' ein Weg von e nach e_1 . Dann gilt nach Konstruktion von Φ :

$$\Phi(e_1) = \widetilde{(p \circ \tau'')}_{\Phi(e)}(1).$$

Nun gibt es nach Voraussetzung an E , da $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung ist, eine Umgebung U_1 von $x_1 = p(e_1)$ in X , die sowohl die Eigenschaft (*) erfüllt, als auch lokal bogenweise zusammenhängend ist. Es seien nun S_1 , bzw. S'_1 die Blätter von E über U_1 in denen e_1 , bzw. $\Phi(e_1)$ liegt. Da S_1 und S'_1 bogenweise zusammenhängend ist, folgt sofort, daß

$$\Phi|_{S_1} = (p'_1)^{-1} \circ p_1 : S_1 \rightarrow S'_1$$

ist, wobei $p_1 = p|_{S_1} : S_1 \rightarrow U_1$ und $(p'_1)^{-1}$ die Umkehrung von $p|_{S'_1} : S'_1 \rightarrow U_1$ ist. Dies ist offensichtlich stetig. Dasselbe Argument zeigt die Stetigkeit von Φ^{-1} . \square

Für die Überlagerung $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ kann man nun allgemein nach der Existenz von *Liftung von Abbildungen* fragen, d.h. gibt es zu vorgegebener Abbildung $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Abbildung $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & (E, e_0) & \\ \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

kommutiert?

Theorem I.4.7 *Die Räume E , X und Y seien zusammenhängend und lokal bogenweise zusammenhängend. Dann existiert genau dann eine Liftung $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ der Abbildung $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ wenn*

$$f_* \pi_1(Y, y_0) \subset p_* \pi_1(E, e_0).$$

Beweis. Daß obige Bedingung notwendig ist folgt, da $p_* \circ \tilde{f}_* = f_*$ gilt. Wir gehen nun davon aus, daß diese Bedingung erfüllt ist, und konstruieren zunächst \tilde{f} mengentheoretisch. Es sei $y \in Y$. Wir wählen einen Weg σ in Y von y_0 nach y und setzen

$$\tilde{f}(y) = \widetilde{(f\sigma)}_{e_0}(1).$$

Auf Grund der Voraussetzung ist diese Definition unabhängig von der Wahl von σ . Wir können auch die Abhängigkeit von y_0 beseitigen. Es sei $y_1 \in Y$ beliebig und τ ein Weg von y_1 nach y . Wir behaupten, daß für $e_1 = \tilde{f}(y_1)$ gilt:

$$\tilde{f}(y) = \widetilde{(f\tau)}_{e_1}(1).$$

Um dies zu sehen sei σ_1 ein Weg von y_0 nach y_1 . Dann ist

$$\tilde{f}(y) = (\widetilde{f(\sigma_1\tau)})_{e_0}(1) = [(\widetilde{f\sigma_1})_{e_0}(\widetilde{f\tau})_{e_1}](1) = (\widetilde{f\tau})_{e_1}(1).$$

Um die Stetigkeit von \tilde{f} zu beweisen, wählen wir zunächst zu jedem Punkt $y \in Y$ eine Umgebung U_y , die bogenweise zusammenhängend ist, und so daß $f(U_y)$ in einer offenen Menge $V \subset X$ liegt, für die Eigenschaft (*) gilt. Dies geht nach Voraussetzung. Der Rest des Beweises verläuft analog zum Beweis von Theorem (I.4.6) \square

Korollar I.4.8 *Ist Y einfach zusammenhängend, so ist jede Abbildung $f : Y \rightarrow X$ liftbar.*

Definition Eine *universelle Überlagerung* von X ist eine Überlagerung $p : E \rightarrow X$ mit einem einfach zusammenhängenden Raum E .

Bemerkung Ist $q : F \rightarrow X$ eine beliebige Überlagerung und X lokal bogenweise zusammenhängend, so gibt es nach Korollar (I.4.8) stets ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & F \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

In diesem Sinn ist die universelle Überlagerung die "größte" Überlagerung von X .

Definition Zwei Überlagerungen $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $q : (F, f_0) \rightarrow (X, x_0)$ heißen *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus $\Phi : (E, e_0) \rightarrow (F, f_0)$ gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (E, e_0) & \xrightarrow{\Phi} & (F, f_0) \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

kommutiert.

Korollar I.4.9 *Es sei X lokal bogenweise zusammenhängend. Dann sind jede zwei universelle Überlagerungen von X äquivalent.*

Beweis. Für zwei universelle Überlagerungen $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $q : (F, f_0) \rightarrow (X, x_0)$ gibt es ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \Phi & \\
 (E, e_0) & \xrightarrow{\quad} & (F, f_0) \\
 & \Phi' & \\
 & \searrow p \quad \swarrow q & \\
 & (X, x_0) &
 \end{array}$$

Da $\Phi' \Phi(e_0) = e_0$ und wegen der Eindeutigkeit der Liftung folgt $\Phi' \Phi = \text{id}_E$ und analog $\Phi \Phi' = \text{id}_F$. \square

Es soll schließlich noch die Frage nach der Existenz der universellen Überlagerung beantwortet werden.

Definition Ein Raum X heißt *semi-lokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so daß jeder geschlossene Weg um x in U in X zusammenziehbar ist.

Ein Raum X , der eine universelle Überlagerung besitzt, hat notwendigerweise diese Eigenschaft. Beispiele für solche Räume sind topologische Mannigfaltigkeiten.

Definition Eine *topologische Mannigfaltigkeit* M ist ein Hausdorffraum, so daß jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung U besitzt, die homöomorph zu einer offenen Menge des \mathbb{R}^n ist.

Theorem I.4.10 Ein zusammenhängender, lokal bogenweise zusammenhängender, semi-lokal einfach zusammenhängender Raum X besitzt stets eine universelle Überlagerung.

Beweis. Wir wählen einen festen Punkt $x_0 \in X$. Auf der Menge der Wege in X mit Anfangspunkt x_0 betrachten wir die Äquivalenzrelation, die durch Homotopie relativ $\{0, 1\}$ gegeben ist. Insbesondere gilt für zwei äquivalente Wege α und β , daß $\alpha(1) = \beta(1)$. Die Äquivalenzklassen dieser Wege seien mit $\langle \alpha \rangle$ bezeichnet, und wir definieren E als die Menge all dieser Äquivalenzklassen. Durch $p(\langle \alpha \rangle) = \alpha(1)$ erhalten wir eine Abbildung nach X . Da X bogenweise zusammenhängend ist, ist die Abbildung surjektiv.

Wir müssen nun E mit einer geeigneten Topologie versetzen. Dies tun wir durch Angabe einer Basis: Es sei α ein Weg in X mit $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = p$ und V eine offene Umgebung von p . Dann definieren wir

$$\langle \alpha, V \rangle = \{ \langle \alpha \beta \rangle; \beta \text{ ist ein Weg in } V \text{ mit } \beta(0) = p \}.$$

Um zu zeigen, daß dies die Basis einer Topologie ist, müssen wir zeigen, daß jeder Durchschnitt $\langle \alpha, V \rangle \cap \langle \alpha', V' \rangle$ wieder als Vereinigung solcher

Mengen geschrieben werden kann. Es sei $\alpha'' \in \langle \alpha, V \rangle \cap \langle \alpha', V' \rangle$. Dann gilt $\langle \alpha'', V \rangle = \langle \alpha, V \rangle$ und $\langle \alpha'', V \cap V' \rangle \subset \langle \alpha, V \rangle \cap \langle \alpha', V' \rangle$. Die Abbildung p ist stetig, und da $p(\langle \alpha, V \rangle)$ die Bogenzusammenhangskomponente von V ist, die p enthält, auch offen. Wir zeigen als nächstes, daß p eine Überdeckung ist. Es sei dazu V eine Umgebung von p die bogenweise zusammenhängend ist, und so daß jeder geschlossene Weg in V in X kontrahierbar ist. Für zwei offene Mengen $\langle \alpha, V \rangle$ und $\langle \alpha', V' \rangle$ gilt dann, daß sie gleich oder disjunkt sind. Die Einschränkung von p auf $\langle \alpha, V \rangle$ ist surjektiv auf V . Es bleibt zu zeigen, daß sie injektiv ist. Gilt aber $p(\langle \alpha\beta \rangle) = p(\langle \alpha\beta' \rangle)$, so haben β und β' denselben Endpunkt. Nach Wahl von V bedeutet dies, daß $\beta \simeq \beta'$ relativ $\{0, 1\}$ also $\langle \alpha\beta \rangle = \langle \alpha\beta' \rangle$. Schließlich bleibt zu zeigen, daß E bogenweise zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Es sei $\tilde{x}_0 \in E$ die Klasse des konstanten Weges x_0 . Ist $\langle \alpha \rangle \in E$ so können wir \tilde{x}_0 und α in E wie folgt durch einen Weg verbinden:

$$\alpha_s(t) = \alpha(st) \quad s, t \in I.$$

Dann ist $\alpha_0(t) = x_0$ und $\alpha_1(t) = \alpha$. Man zeigt leicht, daß die Abbildung $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E, s \mapsto \langle \alpha_s \rangle$ stetig ist. Also ist E bogenweise zusammenhängend. Es gilt nach Konstruktion auch, daß $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, d.h. $\tilde{\alpha}$ ist eine Liftung von α nach E . Es sei nun $\tilde{\tau}$ ein Weg in E mit $\tilde{\tau}(0) = \tilde{\tau}(1) = \tilde{x}_0$. Dann ist $\alpha = p \circ \tilde{\tau}$ ein geschlossener Weg in X mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Der oben konstruierte Weg $\tilde{\alpha}$ ist eine Liftung von α mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung folgt $\tilde{\alpha} = \tilde{\tau}$. Insbesondere ist $\tilde{\alpha}$ geschlossen, d.h. $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1)$. Damit folgt aber, daß $\tilde{x}_0 = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1) = \langle \alpha \rangle$. D.h. α ist homotop zum trivialen Weg und nach Theorem (I.4.3) läßt sich diese Homotopie liften, d.h. $\tilde{\alpha} = \tilde{\tau}$ ist homotop trivial. \square

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß man auch *höhere Homotopiegruppen* definieren kann. Die Fundamentalgruppe kann man als die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $(S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ auffassen. Betrachtet man statt dessen Homotopieklassen von Abbildungen $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, so wird man auf die n -te Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ geführt. Die Berechnung der höheren Homotopiegruppen ist im allgemeinen schwierig. So sind immer noch nicht alle Homotopiegruppen $\pi_n(S^m, s_0)$ von Sphären bekannt.

II Singuläre Homologiegruppen

1 Affine Simplizes

Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$, so ist die *Verbindungsstrecke* zwischen x und y die Menge

$$\{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}.$$

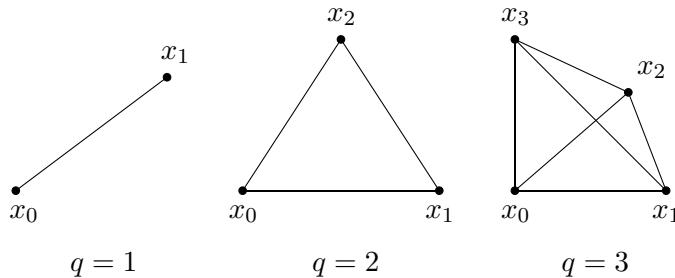
Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $x, y \in C$ auch die Verbindungsstrecke in C liegt. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so ist die *konvexe Hülle* von A definiert durch

$$C(A) = \bigcap_{\substack{C \supset A \\ C \text{ ist konvex}}} C.$$

Die konvexe Hülle von A ist die kleinste konvexe Menge, die A enthält.

Definition Ein *affines q -Simplex* ist die konvexe Hülle von $q + 1$ Punkten $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ in *allgemeiner Lage*, d.h. $x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0$ sind linear unabhängig.

Man beachte, daß es für die Frage, ob x_0, \dots, x_q in allgemeiner Lage sind, unerheblich ist, welchen Punkt man ausgezeichnet hat.



Satz II.1.1 Für Punkte x_0, \dots, x_q in \mathbb{R}^n sind äquivalent:

(i) $x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0$ sind linear unabhängig.

(ii) Aus $\sum_{i=0}^q a_i x_i = \sum_{i=0}^q b_i x_i$ und $\sum_{i=0}^q a_i = \sum_{i=0}^q b_i$ folgt $a_i = b_i$ für $i = 0, \dots, q$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Es sei $\sum_{i=0}^q a_i x_i = \sum_{i=0}^q b_i x_i$ und $\sum_{i=0}^q a_i = \sum_{i=0}^q b_i$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^q (a_i - b_i) x_i = \sum_{i=0}^q (a_i - b_i) x_i - \sum_{i=0}^q (a_i - b_i) x_0 \\ &= \sum_{i=1}^q (a_i - b_i) (x_i - x_0). \end{aligned}$$

Da $x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0$ linear unabhängig sind, folgt $a_i = b_i$ für $i = 1, \dots, q$ und mit $\sum a_i = \sum b_i$ folgt auch noch $a_0 = b_0$.

(ii) \Rightarrow (i). Es sei $\sum_{i=1}^q a_i(x_i - x_0) = 0$. Dies kann man auch schreiben als

$$\sum_{i=1}^q a_i x_i + 0x_0 = \sum_{i=1}^q 0x_i + \left(\sum_{i=1}^q a_i \right) x_0.$$

Nach (ii) folgt hieraus $a_i = 0$ für $i = 1, \dots, q$. \square

Sind $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ Punkte in allgemeiner Lage, so überlegt man sich leicht (vgl. den Fall der Verbindungsstrecke), daß das zugehörige Simplex S die Menge

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^q t_i x_i; \quad \sum_{i=0}^q t_i = 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

ist. Nach Satz (II.1.1) besitzt jeder Punkt $x \in S$ eine eindeutige Darstellung

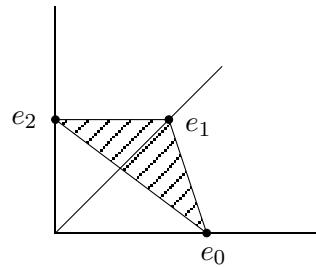
$$x = \sum_{i=0}^q t_i x_i \text{ mit } \sum_{i=0}^q t_i = 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1.$$

Die Zahlen t_0, \dots, t_q heißen die *baryzentrischen Koordinaten* von S . Der Punkt mit $t_0 = \dots = t_q = \frac{1}{q+1}$ ist der *Schwerpunkt* von S . (Ordnet man den Punkten x_i die Massen t_i zu, so wird $x = \sum_{i=0}^q t_i x_i$ zum Schwerpunkt).

Definition Ein *geordnetes q -Simplex* ist ein q -Simplex zusammen mit einer Ordnung der Eckpunkte.

Es sei e_0, \dots, e_q die Standardbasis des \mathbb{R}^{q+1} . Dann heißt das durch e_0, \dots, e_q bestimmte Simplex Δ^q das (*geordnete*) *Standard- q -Simplex*. Es gilt

$$\Delta^q = \{(t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1}; \sum_{i=0}^q t_i = 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1\}.$$



$$q = 2$$

Ist S ein weiteres q -Simplex, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \Delta^q &\rightarrow S \\ (t_0, \dots, t_q) &\mapsto \sum_{i=0}^q t_i x_i \end{aligned}$$

eine stetige bijektive Abbildung zwischen kompakten Mengen, also ein Homöomorphismus.

2 Definition der Homologiegruppen

Es sei X ein topologischer Raum.

Definition Ein *singuläres q -Simplex* in X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$.

Ein 0-Simplex ist also ein Punkt, ein 1-Simplex ein stetiger Weg.

Wir betrachten nun die *freie abelsche Gruppe*, die durch die Menge der singulären q -Simplizes erzeugt wird, d.h. die Menge der (formalen) endlichen Summen

$$c = \sum_{\text{endlich}} n_i \sigma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z},$$

wobei die σ_i (verschiedene) singuläre q -Simplizes sind. Diese Summen bilden in offensichtlicher Weise eine abelsche Gruppe, die wir mit $S_q(X)$ bezeichnen. Die Elemente von $S_q(X)$ heißen die *singulären q -Ketten*.

Etwas formaler kann man die von einer Menge A erzeugte freie abelsche Gruppe $F(A)$ wie folgt definieren:

$$F(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{Z}; f(a) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } a\}.$$

Identifiziert man dann ein Element $a \in A$ mit der Abbildung

$$\begin{aligned} f_a : A &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = a \\ 0 & \text{falls } x \neq a, \end{cases} \end{aligned}$$

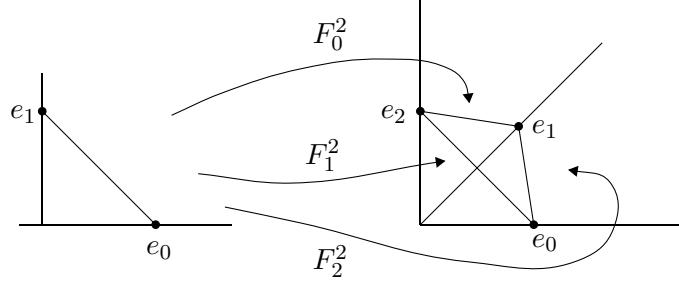
so erhält man für jedes Element $f \in F(A)$ eine Darstellung

$$f = \sum_{\text{endlich}} n_a a.$$

Für $q > 0$ und i mit $0 \leq i \leq q$ definieren wir nun die Abbildung

$$\begin{aligned} F_i^q : \Delta^{q-1} &\rightarrow \Delta^q \\ (t_0, \dots, t_{q-1}) &\mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{q-1}). \end{aligned}$$

Geometrisch bedeutet dies, daß man das Simplex Δ^{q-1} auf das der Ecke e_i gegenüberliegende Untersimplex von Δ^q abbildet:



Ist $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein singuläres Simplex, so wird die i -te Seite von σ definiert durch

$$\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^q : \Delta^{q-1} \rightarrow X.$$

Definition Der Rand des singulären Simplex σ ist definiert durch

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)}.$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir den sogenannten Randoperator

$$\begin{aligned} \partial : S_q(X) &\rightarrow S_{q-1}(X) \\ \partial(\sum n_i \sigma_i) &= \sum n_i \partial(\sigma_i). \end{aligned}$$

Satz II.2.1 $\partial \circ \partial = 0$.

Beweis. Unmittelbar aus der Definition folgt

$$F_i^q F_j^{q-1} = F_j^q F_{i-1}^{q-1} \quad \text{falls } j < i.$$

Es genügt zu zeigen, daß für ein Simplex σ gilt $\partial \circ \partial(\sigma) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \partial(\partial\sigma) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial\sigma^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (\sigma \circ F_i^q) \circ F_j^{q-1} \\ &= \sum_{j < i=1}^q (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_j^q F_{i-1}^{q-1}) + \sum_{0=i \leq j}^{q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_i^q F_j^{q-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt, wenn man im ersten Summanden $i' = j$ und $j' = i - 1$ setzt. \square

- Definition** (i) Eine q -Kette c heißt ein q -Zykel, falls $\partial(c) = 0$ gilt.
(ii) Eine q -Kette c heißt ein q -Rand, falls es eine $(q+1)$ -Kette c' gibt, so daß $c = \partial(c')$.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} Z_q(X) &= \{c; c \text{ ist } q\text{-Zykel}\} = \ker (\partial : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)) \\ B_q(X) &= \{c; c \text{ ist } q\text{-Rand}\} = \text{im } (\partial : S_{q+1}(X) \rightarrow S_q(X)). \end{aligned}$$

Nach Satz (II.2.1) gilt

$$B_q(X) \subset Z_q(X).$$

Definition Zwei q -Ketten $c_1, c_2 \in S_q(X)$ heißen *homolog* ($c_1 \sim c_2$) falls $c_1 - c_2$ ein q -Rand ist.

Definition Die q -te (*singuläre*) *Homologiegruppe* von X ist definiert als

$$H_q(X) = Z_q(X)/B_q(X).$$

Die durch einen q -Zykel c definierte Homologieklasse wird im folgenden mit $[c]$ bezeichnet.

Die oben auftretende Situation ist eine Standardsituation in vielen mathematischen Theorien. Hieraus hat sich die *homologische Algebra* entwickelt.

- Definition** (i) Eine *graduierte (abelsche) Gruppe* ist eine Familie $(G_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ abelscher Gruppen mit komponentenweiser Addition.
(ii) Sind G und G' graduierte abelsche Gruppen, so besteht ein *Homomorphismus* vom Grad r aus einer Familie von Homomorphismen $f_i : G_i \rightarrow G_{i+r}$.
(iii) Eine *graduierte Untergruppe* von G ist eine graduierte Gruppe $(H_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, so daß H_i Untergruppe von G_i ist. Der *Quotient* G/H wird definiert durch $(G/H)_i = G_i/H_i$.

Ist $f : G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus graduierter Gruppen, so kann man in offensichtlicher Weise das *Bild* im f und den *Kern* $\ker f$ definieren. Dies sind Untergruppen von G' , bzw. G .

Definition Ein *Kettenkomplex* (C, ∂) ist eine graduierte Gruppe $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ zusammen mit einem Homomorphismus $\partial : C \rightarrow C$ vom Grad -1 für den $\partial^2 = 0$ gilt.

Ist (C, ∂) ein Kettenkomplex, so haben wir also eine Sequenz von Homomorphismen

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \rightarrow \cdots$$

mit $\partial_q \partial_{q+1} = 0$.

Definition (i) Ist (C, ∂) ein Kettenkomplex so definiert man

$$Z_*(C) = \ker \partial, \quad B_*(C) = \text{im } \partial.$$

(ii) Die *Homologie* des Kettenkomplexes (C, ∂) ist

$$H_*(C) = Z_*(C)/B_*(C).$$

Nach Konstruktion ist die Homologie $H_*(C)$ eine graduierte Gruppe $H_*(C) = (H_q(C))_{q \in \mathbb{Z}}$ mit

$$H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C) = \ker \partial_q / \text{im } \partial_{q+1}.$$

Definition Ein *Homomorphismus* $\Phi : (C, \partial) \rightarrow (C', \partial')$ von Kettenkomplexen (oder auch eine *Kettenabbildung*) ist ein Homomorphismus $\Phi : C \rightarrow C'$ vom Grad 0 mit $\Phi \circ \partial = \partial' \circ \Phi$.

Analog definiert man auch Kettenabbildungen beliebigen Grades. Eine Kettenabbildung $\Phi : (C, \partial) \rightarrow (C', \partial')$ liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \Phi_q \downarrow & & \downarrow \Phi_{q-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

und man sieht sofort, daß

$$\Phi(Z_*(C)) \subset Z_*(C'), \quad \Phi(B_*(C)) \subset B_*(C').$$

Insbesondere induziert Φ daher einen Homomorphismus

$$\Phi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$$

graduierter Gruppen vom Grad 0.

Ist X ein topologischer Raum, so haben wir zuvor eine graduierte Gruppe $S_*(X) = (S_q(X))_{q \in \mathbb{Z}}$ definiert (wir setzen $S_q(X) = 0$ für $q \leq -1$). Zusammen mit dem Randoperator ∂ erhalten wir einen Kettenkomplex $(S_*(X), \partial)$ und die zugehörigen Homologiegruppen sind die singulären Homologiegruppen des Raumes X . Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein singuläres q -Simplex, so ist

$$f_*(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta^q \rightarrow Y$$

ein singuläres q -Simplex von Y . Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Homomorphismus vom Grad 0:

$$f_* : S_*(X) \rightarrow S_*(Y).$$

Dies ist sogar eine Kettenabbildung, da $\partial f_\#(\sigma) = f_\#(\partial\sigma)$. Letztere Gleichheit folgt sofort aus

$$(f \circ \sigma) \circ F_i^q = f \circ (\sigma \circ F_i^q).$$

Damit induziert $f_\#$ einen Homomorphismus

$$f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y).$$

Unmittelbar aus der Konstruktion folgt, daß

- (1) $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_*(X)}$
- (2) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ für stetige Abbildungen $g : X \rightarrow Y, f : Y \rightarrow Z$.

Das heißt, daß wir einen *Funktoren* konstruiert haben von der Kategorie bestehend aus topologischen Räumen und stetigen Abbildungen in die Kategorie der Kettenkomplexe und Kettenabbildungen. Als unmittelbare Anwendung ergibt sich

Satz II.2.2 *Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus, so ist $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ ein Isomorphismus.*

Beispiel Wir berechnen die Homologie des einpunktigen Raums $X = \{x\}$. Für jedes $q \geq 0$ gibt es genau ein Simplex $\sigma_q : \Delta^q \rightarrow X$, nämlich die konstante Abbildung. Also ist

$$S_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q \geq 0 \\ 0 & \text{für } q < 0. \end{cases}$$

Für $q > 0$ gilt $\sigma_q^{(i)} = \sigma_{q-1}$, also

$$\partial \sigma_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_q^{(i)} = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_{q-1}$$

d.h.

$$\partial \sigma_q = \begin{cases} \sigma_{q-1} & \text{für } q \text{ gerade, } q > 0 \\ 0 & \text{für } q \text{ sonst.} \end{cases}$$

Damit wird der Kettenkomplex

$$\dots \xrightarrow{\partial} S_2(\{x\}) \xrightarrow{\partial} S_1(\{x\}) \rightarrow S_0(\{x\}) \rightarrow 0$$

zu

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0,$$

also

$$H_q(\{x\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0 \\ 0 & \text{für } q \neq 0. \end{cases}$$

Satz II.2.3 Ist X ein nicht-leerer, wegzusammenhängender topologischer Raum, so gilt $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir betrachten

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \longrightarrow 0.$$

Es gilt $S_0(X) = Z_0(X) = F(X)$ die freie abelsche Gruppe, die durch die Punkte von X erzeugt wird, d.h. die Elemente in $Z_0(X)$ sind von der Form

$$z = \sum_{x \in X} n_x x, \quad \text{fast alle } n_x = 0.$$

Die Gruppe $S_1(X)$ ist die freie abelsche Gruppe, die von den Wegen $\sigma_1 : I \rightarrow X$ erzeugt wird. Ist σ_1 ein Weg von x_0 nach x_1 , so gilt

$$\partial\sigma_1 = x_1 - x_0.$$

Wir betrachten nun den *Augmentionshomomorphismus*

$$\begin{aligned} \varepsilon : S_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{x \in X} n_x x &\mapsto \sum_{x \in X} n_x. \end{aligned}$$

Da $X \neq \emptyset$, ist ε surjektiv.

Behauptung $B_0(X) = \ker \varepsilon$.

- (i) $B_0(X) \subset \ker \varepsilon$ folgt sofort, da $\varepsilon \partial \sigma_1 = \varepsilon(x_1 - x_0) = 0$.
- (ii) Es sei $c = \sum n_x x$ mit $\varepsilon(c) = \sum n_x = 0$. Dann gilt

$$c = \sum n_x x - \sum n_x x_0 = \sum n_x (x - x_0) = \partial \left(\sum n_x \sigma_x \right) \in B_0(X)$$

wobei σ_x ein Weg von x_0 nach x ist.

Damit folgt sofort

$$H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = \mathbb{Z}.$$

□

Man kann nun den Kettenkomplex

$$\dots \xrightarrow{\partial} S_2(X) \xrightarrow{\partial} S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \xrightarrow{0} 0$$

abändern zu

$$\dots \xrightarrow{\partial} S_2(X) \xrightarrow{\partial} S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

und erhält immer noch einen Kettenkomplex (da $\varepsilon \partial = 0$ für alle Räume X gilt). Man spricht dann vom *augmentierten* singulären Kettenkomplex.

Definition Die Homologiegruppen $\tilde{H}_q(X)$ des augmentierten singulären Kettenkomplexes heißen die *reduzierten singulären Homologiegruppen* von X .

Bemerkung Es gilt $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)$ für $q > 0$. Ist X wegzusammenhängend, so gilt $\tilde{H}_0(X) = 0$.

Man kann jeden topologischen Raum in seine *Wegzusammenhangskomponenten* zerlegen: Nennt man zwei Punkte $x, y \in X$ äquivalent ($x \sim y$), wenn es einen Weg von x nach y gibt, so definiert dies eine Äquivalenzrelation, und damit eine disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ in wegzusammenhängende Komponenten X_α . Da die Simplizes Δ^q wegzusammenhängend sind, ist jedes singuläre Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ in einer Komponente X_α enthalten. Es ergibt sich sofort, daß $H_q(X)$ die direkte Summe der Homologiegruppen $H_q(X_\alpha)$ ist, d.h.

$$H_q(X) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha).$$

Ist die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten r , so gilt insbesondere

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^r, \quad \tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{r-1}.$$

3 Homotopieinvarianz der singulären Homologiegruppen

Wir hatten jeder stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ Homomorphismen $f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ zugeordnet. Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis von folgendem wichtigen

Satz II.3.1 *Sind $f, g : X \rightarrow Y$ homotope Abbildungen, so gilt $f_* = g_*$.*

Daraus ergeben sich unmittelbar:

Korollar II.3.2 *Sind X und Y homotopie-äquivalent, so sind die Homologiegruppen isomorph, d.h. $H_q(X) \cong H_q(Y)$ für alle q .*

Beweis. Es gibt Abbildungen $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_X, f \circ g \simeq \text{id}_Y$ also $\text{id}_{H_q(X)} = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ sowie $\text{id}_{H_q(Y)} = (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. \square

Korollar II.3.3 *Ist X zusammenziehbar, so gilt $H_q(X) = 0$ für $q > 0$ und $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

Beweis. X ist homotopie-äquivalent zu einem Punkt x_0 . \square

Vor dem Beweis von Satz (II.3.1) benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Definition Es seien (C, ∂) und (C', ∂') Kettenkomplexe. Zwei Kettenabbildungen $f, g : C \rightarrow C'$ heißen *kettenhomotop*, wenn es einen Homomorphismus $K : C \rightarrow C'$ vom Grad 1 gibt, mit $\partial'K + K\partial = f - g$. Man nennt K dann eine *Kettenhomotopie* von f und g .

Lemma II.3.4 Für zwei kettenhomotope Abbildungen $f, g : C \rightarrow C'$ gilt $f_* = g_*$.

Beweis. Wegen

$$f_* - g_* = (f - g)_* = (\partial'K + K\partial)_*$$

genügt es zu zeigen, daß $(\partial'K + K\partial)_* = 0$ ist. Dies folgt, da für $z \in Z_q(C)$ gilt

$$(\partial'K + K\partial)(z) = \partial'K(z) \in B_q(C').$$

□

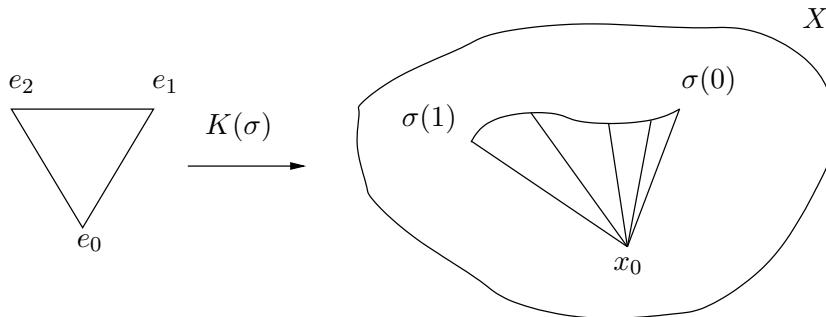
Es ist an dieser Stelle sinnvoll, zunächst den Spezialfall zu behandeln, daß X eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

Satz II.3.5 Ist X eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n , so gilt $H_q(X) = 0$ für $q > 0$ und $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Beweis. Da X zusammenhängend ist, gilt $H_0(X) = \mathbb{Z}$ nach Satz (II.2.3). Es genügt nun, für $q \geq 1$ eine Abbildung $K : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$ mit $\partial K + K\partial = \text{id}_{S_q(X)}$ zu konstruieren. Es gilt dann nämlich $\text{id}_* = (\partial K + K\partial)_* = 0$. Wir wählen $x_0 \in X$ fest.

Ist $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein singuläres q -Simplex, so definieren wir $K(\sigma) : \Delta^{q+1} \rightarrow X$ wie folgt:

$$K(\sigma)(t_0, \dots, t_{q+1}) = \begin{cases} (1 - t_0)\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{q+1}}{1-t_0}\right) + t_0x_0 & \text{für } t_0 < 1 \\ x_0 & \text{für } t_0 = 1. \end{cases}$$



Die Abbildung $K(\sigma)$ ist stetig, möglicherweise mit Ausnahme des Punktes $(1, 0, \dots, 0)$. Die Stetigkeit in diesem Punkt folgt, da

$$\begin{aligned} & \lim_{t_0 \rightarrow 1} \|K(\sigma)(t_0, \dots, t_{q+1}) - x_0\| = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 1} \|(1-t_0)\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{q+1}}{1-t_0}\right) - (1-t_0)x_0\| \\ &\leq \lim_{t_0 \rightarrow 1} (1-t_0) \left(\|\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{q+1}}{1-t_0}\right)\| + \|x_0\| \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwenden, daß der Ausdruck in der Klammer beschränkt ist.

Damit ist $K(\sigma) : \Delta^{q+1} \rightarrow X$ ein singuläres $(q+1)$ -Simplex mit $K(\sigma)^{(0)} = \sigma$ (nach Konstruktion). Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Homomorphismus

$$K : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X).$$

Für $q \geq 1$ und $1 \leq i \leq q+1$ gilt nun

$$(1) \quad K(\sigma)^{(i)} = K(\sigma^{(i-1)}).$$

Dies rechnet man sofort nach:

$$\begin{aligned} K(\sigma)^{(i)}(t_0, \dots, t_q) &= K(\sigma)(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_q) \\ &= (1-t_0)\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \frac{t_i}{1-t_0}, \dots, \frac{t_q}{1-t_0}\right) + t_0 x_0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} K(\sigma)^{(i-1)}(t_0, \dots, t_q) &= (1-t_0)\sigma^{(i-1)}\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_q}{1-t_0}\right) + t_0 x_0 \\ &= (1-t_0)\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \frac{t_i}{1-t_0}, \dots, \frac{t_q}{1-t_0}\right) + t_0 x_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \partial K(\sigma) &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i K(\sigma)^{(i)} \\ &= \left[K(\sigma)^{(0)} + \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i K(\sigma)^{(i)} \right] - \left[\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i K(\sigma^{(i-1)}) + \sum_{j=0}^q (-1)^j K(\sigma^{(j)}) \right] \\ &= \sigma - K(\partial\sigma) \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen Formel (1) verwendet haben. Insgesamt erhalten wir

$$\partial K + K\partial = \text{id}.$$

□

Beweis von Satz (II.3.1): Nach Lemma (II.3.4) genügt es zu zeigen, daß die Kettenabbildungen $f_\#, g_\# : S(X) \rightarrow S(Y)$ kettenhomotop sind.

Hierzu betrachten wir für $t \in I$ die Abbildung

$$\begin{aligned} h_t : X &\rightarrow X \times I \\ x &\mapsto (x, t). \end{aligned}$$

Durch $\{h_t\}$ wird eine Homotopie zwischen h_0 und h_1 gegeben.

Behauptung Es genügt zu zeigen, daß $(h_0)_\#$ und $(h_1)_\#$ kettenhomotop sind.

Die Behauptung zeigt man wie folgt: Es sei $F : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g . Dann ist $F \circ h_0 = f$ und $F \circ h_1 = g$. Falls die Abbildungen $(h_0)_\#, (h_1)_\# : S_*(X) \rightarrow S_*(X \times I)$ kettenhomotop sind, gibt es eine Kettenhomotopie $K : S_*(X) \rightarrow S_*(X \times I)$, d.h.

$$\partial K + K\partial = (h_0)_\# - (h_1)_\#.$$

Anwendung von $F_\#$ ergibt

$$F_\#(\partial K + K\partial) = F_\#(h_0)_\# - F_\#(h_1)_\#$$

und damit

$$\partial(F_\#K) + (F_\#K)\partial = f_\# - g_\#,$$

d.h. $F_\#K$ ist eine Kettenhomotopie zwischen $f_\#$ und $g_\#$. Dies ergibt die Behauptung.

Unser Ziel ist es nun, zu jedem Raum X und jedem $q \geq 0$ ein $K = K_X : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X \times I)$ zu konstruieren, so daß gilt:

(a) $\partial K + K\partial = (h_0)_\# - (h_1)_\#$

(b) Ist $\varphi : W \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} S_i(W) & \xrightarrow{K_W} & S_{i+1}(W \times I) \\ \varphi_\# \downarrow & & \downarrow (\varphi \times \text{id})_\# \\ S_i(X) & \xrightarrow{K_X} & S_{i+1}(X \times I). \end{array}$$

Wir konstruieren K_X induktiv.

Induktionsschritt Wir nehmen an, daß für alle Räume X und alle $i < q$ ein Homomorphismus $K_X : S_i(X) \rightarrow S_{i+1}(X \times I)$ mit den Eigenschaften (a) und (b) existiert.

Zunächst genügt es, K_X auf den singulären q -Simplizes zu definieren. Es sei $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein solches q -Simplex. Ist δ_q das q -Simplex auf Δ^q , das durch die Identität $\text{id} : \Delta^q \rightarrow \Delta^q$ gegeben wird, so ist $\sigma_{\#}(\delta_q) = \sigma$. Wenden wir nun die Eigenschaft (b) auf die Abbildung $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ an, so muß gelten:

$$(2) \quad K_X(\sigma) = K_X(\sigma_{\#}(\delta_q)) = (\sigma \times \text{id})_{\#}(K_{\Delta^q}(\delta_q)).$$

D.h. also, daß K_X durch K_{Δ^q} und (b) bereits festgelegt ist. Es sei nun τ ein singuläres q -Simplex auf Δ^q . Nach Induktionsannahme ist $K_{\Delta^q}(\partial\tau)$ erklärt. Wir betrachten nun

$$(3) \quad c = (h_0)_{\#}(\tau) - (h_1)_{\#}(\tau) - K_{\Delta^q}(\partial\tau) \in S_q(\Delta^q \times I),$$

wobei h_0 und h_1 bezüglich Δ^q zu verstehen sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial c &= \partial(h_0)_{\#}(\tau) - \partial(h_1)_{\#}(\tau) - \partial K_{\Delta^q}(\partial\tau) \\ &= (h_0)_{\#}(\partial\tau) - (h_1)_{\#}(\partial\tau) - [(h_0)_{\#}(\partial\tau) - (h_1)_{\#}(\partial\tau) - K_{\Delta^q}(\partial(\partial\tau))] \\ &= K_{\Delta^q}(\partial^2\tau) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist c ein q -Zykel in der konvexen Teilmenge $\Delta^q \times I \subset \mathbb{R}^{q+2}$. Nach Satz (II.3.5) ist $c \in B_q(\Delta^q \times I)$, d.h. es gibt ein $b \in S_{q+1}(\Delta^q \times I)$ mit $\partial b = c$. Wir setzen nun

$$K_{\Delta^q}(\tau) := b.$$

Dann gilt nach obiger Definition und wegen (3) daß

$$\partial K_{\Delta^q}(\tau) + K_{\Delta^q}(\partial\tau) = (h_0)_{\#}(\tau) - (h_1)_{\#}(\tau).$$

Es bleibt nun noch, K_{Δ^0} zu definieren. Dann haben wir K_{Δ^q} und somit auch K_X festgelegt. Zu der Kette

$$c = (h_0)_{\#}(\delta_0) - (h_1)_{\#}(\delta_0)$$

betrachten wir ein singuläres 1-Simplex in $\Delta^0 \times I$ mit $\partial b = c$ und definieren

$$K_{\Delta^0}(\delta_0) = b.$$

Damit können wir K_{Δ^q} für alle q und auch K_X für alle Räume X erklären. (Beachte, daß die Abbildungen K_{Δ^q} und damit auch K_X nicht eindeutig bestimmt sind.)

Wir müssen nun noch zeigen, daß die Eigenschaften (a) und (b) erfüllt sind. Um (a) zu beweisen, betrachten wir ein singuläres q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow$

X . Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial K_X(\sigma) + K_X(\partial\sigma) &= \partial K_X(\sigma_{\#}(\delta_q)) + K_X(\partial\sigma_{\#}(\delta_q)) \\
&= \partial(\sigma \times \text{id})_{\#} K_{\Delta^q}(\delta_q) + K_X(\sigma_{\#}(\partial\delta_q)) \\
&= (\sigma \times \text{id})_{\#} \partial K_{\Delta^q}(\delta_q) + (\sigma \times \text{id})_{\#} K_{\Delta^q}(\partial\delta_q) \\
&= (\sigma \times \text{id})_{\#} (\partial K_{\Delta^q}(\delta_q) + K_{\Delta^q}(\partial\delta_q)) \\
&= (\sigma \times \text{id})_{\#} ((h_0)_{\#}(\delta_q) - (h_1)_{\#}(\delta_q)) \\
&= (h_0)_{\#}(\sigma_{\#}(\delta_q)) - (h_1)_{\#}(\sigma_{\#}(\delta_q)) \\
&= (h_0)_{\#}(\sigma) - (h_1)_{\#}(\sigma).
\end{aligned}$$

Die Eigenschaft (b) gilt, da wegen (2) für $\varphi : W \rightarrow X$ und jedes q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow W$:

$$\begin{aligned}
K_X(\varphi_{\#}\sigma) &= K_X(\varphi \circ \sigma) = (\varphi \circ \sigma \times \text{id})_{\#} K_{\Delta^q}(\delta_q) \\
&= ((\varphi \times \text{id})_{\#} \circ (\sigma \times \text{id})_{\#}) K_{\Delta^q}(\delta_q) \\
&= (\varphi \times \text{id})_{\#} K_W(\sigma).
\end{aligned}$$

□

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem weiteren Korollar ab.

Definition (i) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt ein *Retrakt* von X , falls es eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow A$ mit $r \circ i = \text{id}_A$ gibt, wobei $i : A \rightarrow X$ die natürliche Inklusion ist. Die Abbildung r heißt dann eine *Retraktion* von X auf A .

(ii) A heißt *Deformationsretrakt* von X , wenn zusätzlich $i \circ r \simeq \text{id}_X$ gilt.

Korollar II.3.6 Ist A ein Deformationsretrakt von X , so gilt $H_q(A) \cong H_q(X)$ für alle q .

Beweis. Dies folgt aus Satz (II.3.4), da $i : A \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist. □

An dieser Stelle soll noch kurz auf den Zusammenhang zwischen erster Homologiegruppe und Fundamentalgruppe eingegangen werden. Ein Weg $\sigma : I \rightarrow X$ mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ definiert eine Homotopieklassse $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, kann aber auch als singulärer 1-Zykel auf X aufgefaßt werden. Die zugehörige Homologieklasse sei mit $\langle \sigma \rangle \in H_1(X)$ bezeichnet.

Ist G eine Gruppe, so wird der *Kommutator* G' von G wie folgt definiert:

$$G' = \langle \{ghg^{-1}h^{-1}; g, h \in G\} \rangle.$$

Man sieht leicht, daß G' ein Normalteiler von G , und daß G/G' abelsch ist. Man kann G' auch dadurch charakterisieren, daß es der kleinste Normalteiler von G ist, für den G/G' abelsch ist.

Satz II.3.7 *Die Abbildung*

$$h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X), [\sigma] \mapsto \langle \sigma \rangle$$

ist wohldefiniert und ein Homomorphismus. Ist X wegzusammenhängend, so ist h surjektiv und der Kern von h ist genau der Kommutator von $\pi_1(X, x_0)$.

Man nennt h den *Hurewicz-Homomorphismus*. (Es gibt auch ähnliche Vergleichssätze für die höheren Homotopie- und Homologiegruppen.) Ist X wegzusammenhängend, so ist die erste Homologiegruppe $H_1(X)$ gerade die abelsch gemachte Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.

4 Relative Homologiegruppen

Wir betrachten nun Paare (X, A) , wobei A ein Unterraum von X ist (d.h. $A \subset X$ ist mit der Relativtopologie versehen). Dann können wir ein singuläres q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow A$ auch als ein q -Simplex in X auffassen. Da dann auch $\partial\sigma$ eine Summe von $(q-1)$ -Simplizes in A ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & S_q(A) & \xrightarrow{\partial} & S_{q-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial} & S_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial'} & S_q(X)/S_q(A) & \xrightarrow{\partial'} & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

wobei ∂' der induzierte Homomorphismus ist, also $\partial'(\bar{c}) = (\bar{\partial}c)$. Es gilt $(\partial')^2 = 0$, also können wir auch von dem unteren Komplex die Homologie betrachten.

Definition Die Homologiegruppe

$$H_q(X, A) := H_q(S_*(X)/S_*(A))$$

heißt die q -te relative singuläre Homologiegruppe von X bezüglich A (bzw. mod A).

Man kann diese Homologiegruppe auch anders definieren. Dazu betrachten wir nochmals das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{\partial} & S_{q-1}(X) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S_q(X)/S_q(A) & \xrightarrow{\partial'} & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A), \end{array}$$

wobei π die Projektion ist. Ist $c \in S_q(X)$, so daß $\partial'(\bar{c}) = 0$, so gilt auch $(\bar{\partial}c) = 0$, also $\partial c \in S_{q-1}(A)$. Dies führt auf die Gruppe

$$Z_q(X, A) := \{c \in S_q(X); \partial c \in S_{q-1}(A)\}.$$

Wir nennen die Elemente von $Z_q(X, A)$ *relative q-Zykeln von X bezüglich A*. Andererseits gilt für $c \in S_q(X)$, daß $\bar{c} \in \text{im } \partial'$ genau dann, wenn es ein $c' \in S_q(A)$ gibt, mit $c - c' \in \text{im } \partial = B_q(X)$. Wir betrachten also

$$B_q(X, A) := \{c \in S_q(X); c - c' \in B_q(X) \text{ für ein } c' \in S_q(A)\}$$

Die Elemente in $B_q(X, A)$ heißen *relative q-Ränder von X bezüglich A*.

Lemma II.4.1 $H_q(X, A) \cong Z_q(X, A)/B_q(X, A)$.

Beweis. Es gilt nach obigem

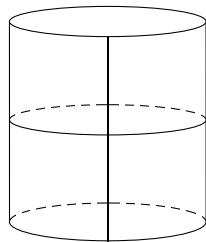
$$\begin{aligned} \ker \partial' &= Z_q(X, A)/S_q(A) \\ \text{im } \partial' &= B_q(X, A)/S_q(A). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$H_q(X, A) = \ker \partial' / \text{im } \partial' \cong Z_q(X, A)/B_q(X, A).$$

□

Beispiel Wir betrachten den Zylinder $X = I \times S^1$ mit $A = \{0\} \times S^1 \cup \{1\} \times S^1$. Ein relativer 1-Zykel ist ein Weg mit Anfangs- und Endpunkt in A , also etwa eine Mantellinie. Beispiele für relative 1-Ränder sind alle horizontalen Kreise.



Ist $A = \emptyset$, so hat man offensichtlich $S_q(A) = 0$, also $H_q(X) = H_q(X, \emptyset)$.

Definition Eine *Abbildung* $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subset B$.

Eine solche Abbildung induziert Homomorphismen

$$f_{\#} : S_q(X) \rightarrow S_q(Y), f_{\#}(S_q(A)) \subset S_q(B)$$

und damit auch Homomorphismen

$$f_* : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$$

wobei wieder

$$\text{id}_* = \text{id}, \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

gilt.

Definition Zwei Abbildungen $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ heißen *homotop* (als Abbildungen von Paaren), wenn es eine Abbildung

$$F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$$

gibt mit $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$.

Aus der Definition folgt, daß für festes t für die Abbildung $f_t(x) = F(x, t)$ gilt, daß $f_t(A) \subset B$, d.h. $f_t : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren ist.

Satz II.4.2 Sind die Abbildungen $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotop als Abbildung von Paaren, so gilt $f_* = g_* : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$.

Beweis. Dies folgt im wesentlichen aus dem Beweis von Satz (II.3.1). Die dort betrachteten Abbildungen $h_0, h_1 : X \rightarrow X \times I$ können als Abbildungen von Paaren $h_0, h_1 : (X, A) \rightarrow (X \times I, A \times I)$ aufgefaßt werden. Für die Homomorphismen

$$K : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X \times I)$$

folgt nach Konstruktion, daß $K(S_q(A)) \subset S_{q+1}(A \times I)$ gilt. Deshalb induziert K eine Kettenhomotopie

$$K : S_q(X)/S_q(A) \rightarrow S_{q+1}(X \times I)/S_{q+1}(A \times I).$$

□

Beispiel Den Unterschied zwischen Homotopie von Abbildungen und Homotopie von Abbildungen von Paaren kann man an folgendem Beispiel veranschaulichen: Sei $X = [0, 1]$, $A = \{0, 1\}$, $Y = S^1$, $B = \{1\}$. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} f : (X, A) &\rightarrow (Y, B), \quad x \mapsto e^{2\pi i x} \\ g : (X, A) &\rightarrow (Y, B), \quad x \mapsto 1 \end{aligned}$$

sind absolut homotop, nicht aber homotop als Abbildungen von Paaren.

5 Die lange exakte Homologiesequenz

Eine Sequenz von abelschen Gruppen

$$\cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exakt*, falls $\text{im } f_{i-1} = \ker f_i$, für alle i gilt. Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

heißt auch eine *kurze exakte Sequenz*. Dies ist äquivalent dazu, daß f injektiv, g surjektiv und $\text{im } f = \ker g$ ist.

Eine *kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen* ist eine Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

so daß für alle q die Sequenz

$$0 \longrightarrow C_q \xrightarrow{f} D_q \xrightarrow{g} E_q \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Gruppen ist.

Satz II.5.1 Eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$ von Kettenkomplexen induziert eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen

$$\cdots \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{q-1}(D) \longrightarrow \cdots$$

Definition Man nennt ∂_* die *Verbindungshomomorphismen*.

Beweis. Durch die Abbildungen f und g erhalten wir Homomorphismen

$$H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E)$$

1. Schritt: Wir zeigen zunächst, daß dieses Tripel exakt ist. Da $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$ folgt $\text{im } f_* \subset \ker g_*$. Um $\ker g_* \subset \text{im } f_*$ zu zeigen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{f} & D_{q+1} & \xrightarrow{g} & E_{q+1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
0 & \longrightarrow & C_q & \xrightarrow{f} & D_q & \xrightarrow{g} & E_q \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
0 & \longrightarrow & C_{q-1} & \xrightarrow{f} & D_{q-1} & \xrightarrow{g} & E_{q-1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

dessen Zeilen exakt sind. Es sei nun $d \in Z_q(D)$ mit $g_*[d] = 0$. D.h. es gibt $e \in E_{q+1}$ mit $\partial e = g(d)$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $d' \in D_{q+1}$ mit $g(d') = e$. Dann gilt:

$$g(d - \partial d') = g(d) - g(\partial d') = g(d) - \partial g(d') = \partial e - \partial e = 0.$$

Also finden wir ein $c \in C_q$ mit $f(c) = d - \partial d'$. Wir behaupten, daß $c \in Z_{q-1}(C)$. Dies folgt, da $f(\partial c) = \partial(f(c)) = \partial d - \partial(\partial d') = 0$. Damit definiert c eine Homologiekasse $[c] \in H_q(C)$ und es gilt:

$$f_*[c] = [d - \partial d'] = [d].$$

2. Schritt: Wir konstruieren nun den Verbindungshomomorphismus. Dazu betrachten wir ein Element $[z] \in H_q(E)$ repräsentiert durch einen q -Zykel $z \in Z_q(E)$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $d \in D_q$ mit $g(d) = z$. Es gilt

$$g(\partial d) = \partial g(d) = \partial z = 0$$

d.h. wir können ein $c \in C_{q-1}$ finden mit $f(c) = \partial(d)$. Wir behaupten, daß c sogar ein $(q-1)$ -Zykel ist, d.h. $\partial c = 0$ gilt. Dies folgt aus

$$f(\partial c) = \partial f(c) = \partial(\partial d) = 0$$

und der Injektivität von f . Der Verbindungshomomorphismus soll dann definiert werden durch

$$\begin{aligned}
\partial_* : H_q(E) &\rightarrow H_{q-1}(C). \\
[z] &\mapsto [c]
\end{aligned}$$

Dazu muß man zeigen, daß die obige Konstruktion wohldefiniert ist auf dem Niveau der Homologieklassen. Es seien $z, z' \in Z_q(E)$ homolog, d.h. $z - z' = \partial e$ für ein $e \in E_{q+1}$. Ferner seien $d, d' \in D_q$ mit $g(d) = z, g(d') = z'$ und $c, c' \in C_{q-1}$ mit $f(c) = \partial d, f(c') = \partial d'$.

Behauptung $c \sim c'$.

Da g surjektiv ist, gibt es ein $a \in D_{q+1}$ mit $g(a) = e$. Damit gilt

$$\begin{aligned} g(d - d' - \partial a) &= g(d) - g(d') - g(\partial a) \\ &= z - z' - \partial g(a) \\ &= z - z' - \partial e = 0. \end{aligned}$$

Also gibt es ein $b \in C_q$ mit $f(b) = d - d' - \partial a$. Nun gilt

$$\begin{aligned} f(\partial b) &= \partial f(b) = \partial d - \partial d' \\ &= f(c) - f(c') \\ &= f(c - c'). \end{aligned}$$

Wiederum aus der Injektivität von f folgt $c - c' = \partial b$, also $c \sim c'$.

Die Homomorphismeneigenschaft folgt unmittelbar aus der Konstruktion. Wir haben also nun die lange Homologiesequenz konstruiert. Es bleibt, ihre Exaktheit nachzuprüfen.

3. Schritt: Wir haben noch die Exaktheit an den Stellen $H_q(E)$ und $H_{q-1}(C)$ zu überprüfen.

(1) Exaktheit bei $H_q(E)$:

- (1a) $\text{im } g_* \subset \ker \partial_*$: Es sei $d \in Z_q(D)$. Dann wird $\partial_* g_*[d]$ durch ein $c \in C_{q-1}$ mit $f(c) = \partial d = 0$ repräsentiert. Da f injektiv ist, folgt $c = 0$.
- (1b) $\ker \partial_* \subset \text{im } g_*$: Wir betrachten $z \in Z_q(E)$ mit $\partial_*[z] = 0$. Es sei $d \in D_q$ mit $g(d) = z$ und $c \in C_{q-1}$ mit $f(c) = \partial d$, also $[c] = \partial_*[z] = 0$. Also gibt es $a \in C_q$ mit $\partial a = c$. Dann gilt:

$$\partial(d - f(a)) = \partial d - f(\partial a) = f(c) - f(c) = 0.$$

D.h. $d - f(a) \in Z_q(D)$. Andererseits gilt:

$$g(d - f(a)) = g(d) - g(f(a)) = z$$

d.h. $g_*[d - f(a)] = [z]$.

- (2) Exaktheit bei $H_{q-1}(C)$: Dies wird mit völlig analogen Argumenten bewiesen.

□

Satz II.5.2 *Der Verbindungshomomorphismus ist natürlich in folgendem Sinn: Ist*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow 0 \\
& & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' \longrightarrow 0
\end{array}$$

ein kommutatives und exaktes Diagramm von Kettenkomplexen, so ist auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_q(D) & \xrightarrow{g_*} & H_q(E) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{q-1}(D) \longrightarrow \cdots \\
& & \beta_* \downarrow & & \gamma_* \downarrow & & \alpha_* \downarrow & & \beta_* \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & H_q(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_q(E') & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{q-1}(C') \xrightarrow{f'_*} H_{q-1}(D') \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Dies folgt aus der Konstruktion des verbindenden Homomorphismus. \square

Ein *Unterkomplex* eines Kettenkomplexes (C, ∂) ist eine graduierte Untergruppe D von C mit $\partial(D) \subset D$. Dann ist D zusammen mit der Einschränkung von ∂ auf D selbst ein Kettenkomplex. Wir schreiben $(D, \partial) \subset (C, \partial)$. In dieser Situation erhalten wir in natürlicher Weise auch einen *Quotientenkomplex* $(C/D, \partial')$ mit $(C/D)_q = C_q/D_q$ und $\partial' \bar{c} = \bar{\partial c}$. Dies liefert eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C/D \longrightarrow 0$$

wobei i die Inklusion und π die Projektion bezeichnet. Dies wiederum liefert eine lange exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H_q(D) \xrightarrow{i_*} H_q(C) \xrightarrow{\pi_*} H_q(C/D) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(D) \longrightarrow \cdots$$

wobei

$$\partial_*[\bar{c}] = [\partial c].$$

Wir können diese Überlegungen nun speziell in der Situation anwenden, wenn (X, A) ein Raumpaar ist. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S_*(A) \xrightarrow{i^\#} S_*(X) \xrightarrow{j^\#} S_*(X)/S_*(A) \longrightarrow 0$$

liefert eine lange Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots.$$

Dabei ist der Verbindungshomomorphismus wie folgt definiert: Für $z \in Z_q(X, A)$ gilt $\partial_*[z] = [\partial z]$.

Ebenfalls aus der langen exakten Homologiesequenz liest man ab, daß $i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X)$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $H_*(X, A) = 0$ ist.

Insbesondere folgt:

Satz II.5.3 *Ist A ein Deformationsretrakt von X , so ist $H_*(X, A) = 0$.*

Die lange exakte Homologiesequenz von Paaren ist natürlich in folgendem Sinn: Ist $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Paaren, so kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) & \longrightarrow & H_{q-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_q(B) & \longrightarrow & H_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y, B) & \longrightarrow & H_{q-1}(B) & \longrightarrow & \cdots. \end{array}$$

Ist (X, A, B) ein *Tripel* von Räumen, so definiert die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S_*(A)/S_*(B) \rightarrow S_*(X)/S_*(B) \rightarrow S_*(X)/S_*(A) \rightarrow 0$$

eine lange exakte Homologiesequenz

$$\cdots \rightarrow H_q(A, B) \rightarrow H_q(X, B) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A, B) \rightarrow \cdots,$$

die in der naheliegenden Weise natürlich ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit folgendem Beispiel, welches später bei der Berechnung der Homologiegruppen der Sphären nützlich sein wird. Sei

$$\begin{aligned} X &= D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \\ A &= S^{n-1} = \partial D^n. \end{aligned}$$

Da D^n konvex ist, folgt nach Satz (II.3.5), daß $H_q(D^n) = 0$ für $q \geq 1$. Also folgt aus der langen Homologiesequenz des Paars (D^n, S^{n-1}) , daß

$$\partial_* : H_q(D^n, S^{n-1}) \cong H_{q-1}(S^{n-1}) \text{ für } q \geq 2.$$

Für $q = 1$ erhalten wir aus der langen Homologiesequenz

$$0 \rightarrow H_1(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_0(D^n) \rightarrow 0.$$

Für $n \geq 2$ ist S^{n-1} zusammenhängend und daher ist $i_* : H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(D^n)$ ein Isomorphismus. Damit folgt

$$H_1(D^n, S^{n-1}) = 0 \quad \text{für } n \geq 2.$$

Für $n = 1$ ist $S^0 = \{1, -1\}$, also

$$H_0(S^0) \cong \mathbb{Z}^2$$

und

$$H_1(D^1, S^0) \cong \ker i_* \cong \mathbb{Z}.$$

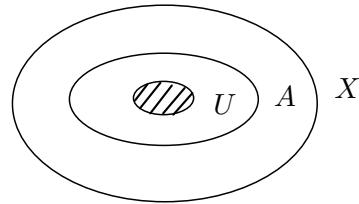
6 Der Ausschneidungssatz

Der Ausschneidungssatz ist ein wesentliches Hilfsmittel bei der Berechnung von Homologiegruppen. In dieser Form gilt der Ausschneidungssatz nur in der Homologie $-$, nicht jedoch der Homotopietheorie.

Definition Es sei (X, A) ein Paar topologischer Räume. Man sagt, ein Unterraum $U \subset A$ kann *ausgeschnitten* werden, wenn die natürliche Inklusion $i : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus

$$i_* : H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A) \quad \text{für alle } q$$

induziert. Man nennt dann $i : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ auch eine *Ausschneidung*.



Theorem II.6.1 (Ausschneidungssatz) Ist (X, A) ein Paar topologischer Räume, und gilt $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, so kann U ausgeschnitten werden.

Wir werden den Beweis dieses Satzes zurückstellen und zunächst Anwendungen diskutieren. Wir nennen ein Paar $(Y, B) \subset (X, A)$ einen Deformationsretrakt, falls es eine stetige Abbildung $r : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ gibt mit $r \circ i = id_{(Y, B)}$ und $i \circ r \simeq id_{(X, A)}$. Dann induziert die Inklusion $i : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ Isomorphismen $i : H_*(Y, B) \cong H_*(X, A)$.

Satz II.6.2 Es sei $V \subset U \subset A$. Kann V ausgeschnitten werden, und ist $(X - U, A - U)$ ein Deformationsretrakt von $(X - V, A - V)$, so kann auch U ausgeschnitten werden.

Beweis. Wir betrachten die Inklusion

$$i' : (X - U, A - U) \rightarrow (X - V, A - V)$$

Da $(X - U, A - U)$ Deformationsretrakt von $(X - V, A - V)$ ist, gilt

$$i'_* : H_q(X - U, A - U) \cong H_q(X - V, A - V) \text{ für alle } q.$$

Da V ausgeschnitten werden kann, ist

$$H_q(X - V, A - V) \cong H_q(X, A) \text{ für alle } q.$$

Hintereinanderschaltung der beiden Isomorphismen liefert die Behauptung. \square

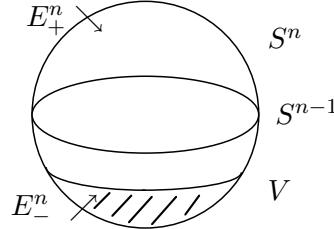
Wir wollen nun die Homologiegruppen der Sphären berechnen, und betrachten dazu

$$\begin{aligned} S^n &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \\ E_+^n &= \{x \in S^n; x_{n+1} \geq 0\} \\ E_-^n &= \{x \in S^n; x_{n+1} \leq 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$E_+^n \cap E_-^n = S^{n-1}$$

wobei S^{n-1} als "Äquator" von S^n interpretiert werden kann. Die Teilmenge



$$U := \overset{\circ}{E_-^n} = \{x \in S^n; x_{n+1} < 0\}.$$

ist die "südliche Hemisphäre" (ohne Äquator). Es gilt

$$E_+^n = S^n - U, \quad S^{n-1} = E_-^n - U.$$

Lemma II.6.3 $\overset{\circ}{E_-^n}$ kann ausgeschnitten werden, d.h.

$$i : (E_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, E_-^n)$$

induziert einen Isomorphismus der Homologiegruppen.

Beweis. Da $\bar{U} = E_-^n \not\subset \overset{\circ}{E}_-^n$ können wir den Ausschneidungssatz nicht unmittelbar anwenden. Deshalb betrachten wir

$$V = \left\{ x \in S^n; x_{n+1} < -\frac{1}{2} \right\}$$

Da $\bar{V} \subset \overset{\circ}{E}_-^n$, können wir den Ausschneidungssatz auf V anwenden. Ferner ist $(S^n - U, E_-^n - U)$ ein Deformationsretrakt von $(S^n - V, E_-^n - V)$. Nun folgt die Behauptung aus Satz (II.6.2). \square

Die Projektionen auf die ersten n Koordinaten liefern Homöomorphismen

$$\begin{aligned} p^+ : (E_+^n, S^{n-1}) &\rightarrow (D^n, S^{n-1}) \\ p^- : (E_-^n, S^{n-1}) &\rightarrow (D^n, S^{n-1}). \end{aligned}$$

Da $D^n \subset \mathbb{R}^n$ konvex ist, folgt

$$H_q(E_-^n) = H_q(E_+^n) = H_q(D_n) = 0 \text{ für alle } q \geq 1.$$

Die lange exakte Homologiesequenz des Paars (S^n, E_-^n) ist

$$\cdots \rightarrow H_q(E_-^n) \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_q(S^n, E_-^n) \rightarrow H_{q-1}(E_-^n) \rightarrow \cdots$$

und liefert daher

$$H_q(S^n) \cong H_q(S^n, E_-^n) \quad \text{für } q \geq 1.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} H_q(S^n, E_-^n) &\cong H_q(E_+^n, S^{n-1}) \quad (\text{nach Lemma (II.6.3)}) \\ &\cong H_q(D^n, S^{n-1}) \quad (\text{mittels } p_*^+) \\ &\cong H_{q-1}(S^{n-1}) \quad (\text{für } q \geq 2). \end{aligned}$$

wobei der letzte Isomorphismus aus dem im vorigen Abschnitt behandelten Beispiel folgt, wo wir auch gezeigt haben, daß

$$H_1(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 2 \\ \mathbb{Z} & \text{für } n = 1. \end{cases}$$

Damit folgt sofort, daß

$$H_1(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n > 1 \\ \mathbb{Z} & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

Für $q \geq 2, n \geq 1$ folgt ferner

$$H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$$

und daher gilt mittels Induktion für $q \geq 2$

$$H_q(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \neq n, q \geq 2 \\ \mathbb{Z} & \text{für } q = n. \end{cases}$$

Zusammenfassend erhalten wir:

Satz II.6.4 (i) Für $n \geq 1$ gilt

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) für $n = 0$ gilt

$$H_q(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{für } q = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Korollar II.6.5 Für $n \neq m$ haben S^n und S^m verschiedenen Homotopietyp.

Korollar II.6.6 Es gibt keine Retraktion von D^n auf S^{n-1} .

Beweis. Für $n = 1$ folgt dies, da D^1 zusammenhängend ist, aber S^0 nicht. Es sei $n > 1$ und $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ eine Retraktionsabbildung, d.h. eine stetige Abbildung mit $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$, wobei $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ die Inklusion ist. Dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

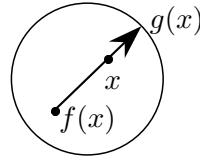
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} = H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\text{id}} & H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z} \\ & \searrow i_* & \nearrow r_* \\ & H_{n-1}(D^n) & \\ & \parallel & \\ & 0 & \end{array}$$

und damit offensichtlich einen Widerspruch. \square

Korollar II.6.7 Jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt einen Punkt x mit $f(x) = x$.

Beweis. Es sei $f: D^n \rightarrow D^n$ eine Abbildung ohne Fixpunkt. Wir wollen zeigen, daß es dann eine Retraktion $g: D^n \rightarrow S^{n-1}$ gibt. Die Abbildung g kann wie folgt definiert werden: Für $x \in D^n$ sei $g(x) \in S^{n-1}$ derjenige Punkt, an dem der Strahl von $f(x)$ durch x die Sphäre S^{n-1} schneidet (siehe Abbildung auf der nächsten Seite).

Da f stetig ist, ist auch g stetig, und es gilt, daß g eingeschränkt auf S^{n-1} die Identität ist. \square



Es sei nun $n \geq 1$ und $f : S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung. Ist $\alpha \in H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, so ist

$$f_*(\alpha) = m\alpha$$

für ein $m \in \mathbb{Z}$. Die Zahl m ist unabhängig von der Wahl des erzeugenden Elements α , da $f_*(-\alpha) = -m\alpha = m(-\alpha)$.

Definition Die Zahl m heißt der *Grad* von f .

Ist $n = 1$, so kann man $f : S^1 \rightarrow S^1$ als geschlossenen Weg in S^1 auffassen. Dann stimmt m mit der *Umlaufzahl* überein.

Um Satz (II.6.1) zu beweisen, benötigen wir einige Vorbereitungen. Wir betrachten hierzu eine Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X . Ein singuläres q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ heißt *klein von der Ordnung* \mathfrak{U} , wenn $\sigma(\Delta^q) \subset U_i$ für ein $i \in I$ gilt. Wir betrachten die Untergruppe $S_q^{\mathfrak{U}}(X)$ von $S_q(X)$, die von allen q -Simplizes erzeugt wird, die klein von der Ordnung \mathfrak{U} sind. Ist σ klein von der Ordnung \mathfrak{U} , so ist $\partial\sigma \in S_{q-1}^{\mathfrak{U}}(X)$. Wir erhalten also einen Unterkomplex $S_*^{\mathfrak{U}}(X)$ von $S_*(X)$ mit einer Inklusion

$$i : S_*^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow S_*(X).$$

Die Zuordnung, die \mathfrak{U} den Komplex $S_*^{\mathfrak{U}}(X)$ zuordnet, ist in folgendem Sinn natürlich. Es sei $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ eine Überdeckung eines topologischen Raums Y und $f : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so daß es zu jedem $j \in J$ ein $i(j) \in I$ gibt mit $f(V_j) \subset U_{i(j)}$. Dann gibt es einen Homomorphismus $f_{\#} : S_*^{\mathfrak{V}}(Y) \rightarrow S_*^{\mathfrak{U}}(X)$, so daß

$$\begin{array}{ccc} S_*^{\mathfrak{V}}(Y) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_*^{\mathfrak{U}}(X) \\ (i_Y)_{\#} \downarrow & & \downarrow (i_X)_{\#} \\ S_*(Y) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_*(X) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen ist.

Das wesentliche Hilfsmittel beim Beweis von Satz (II.6.1) ist der folgende Satz.

Satz II.6.8 Es sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X , so daß $\overset{\circ}{\mathfrak{U}} = (\overset{\circ}{U}_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist. Dann ist

$$i_* : H_q(S_*^{\mathfrak{U}}(X)) \rightarrow H_q(X)$$

ein Isomorphismus für alle q .

Wir werden dann diesen Satz auf die Überdeckung $\{X - U, \overset{\circ}{A}\}$ anwenden, und so den Ausschneidungssatz beweisen. Um Satz (II.6.8) zu beweisen, benötigen wir noch weitere Vorbereitungen.

Es seien $C \subset \mathbb{R}^n$ und $C' \subset \mathbb{R}^m$ konvexe Mengen.

Definition Eine Abbildung $f : C \rightarrow C'$ heißt *affin*, wenn für alle $x, y \in C$ und $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

Beispiele solcher Abbildungen sind die Einschränkungen affiner Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft, daß $F(C) \subset C'$. In der Tat kommt jede affine Abbildung $f : C \rightarrow C'$ auf diese Weise zustande, wenn auch im allgemeinen F nicht eindeutig bestimmt ist.

Ist f eine affine Abbildung, und ist $x_0, \dots, x_p \in C, t_0, \dots, t_p$ mit $\sum t_i = 1$, so gilt

$$f(\sum t_i x_i) = \sum t_i f(x_i).$$

Insbesondere bildet f Simplizes auf Simplizes ab.

Es sei nun $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge. Mit $A_q(C) \subset S_q(C)$ bezeichnen wir diejenige Untergruppe, die von den *affinen* singulären q -Simplizes $\sigma : \Delta^q \rightarrow C$ erzeugt wird. Die Ecken von Δ^q sind $e_0, \dots, e_q \in \mathbb{R}^{q+1}$. Ein affines singuläres q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow C$ ist durch die Eckpunkte $x_i = \sigma(e_i)$ vollständig bestimmt. Wir bezeichnen es mit (x_0, \dots, x_q) . In dieser Notation gilt dann

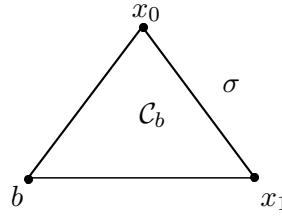
$$(x_0, \dots, x_q)^{(i)} = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q).$$

Insbesondere gilt $\partial(A_q(C)) \subset A_{q-1}(C)$ und wir können $A_*(C)$ als Unterkomplex von $S_*(C)$ auffassen.

Ist $\sigma = (x_0, \dots, x_q)$ ein affines singuläres q -Simplex in C und $b \in C$, so definieren wir ein affines singuläres $(q+1)$ -Simplex durch

$$\mathcal{C}_b(\sigma) = (b, x_0, x_1, \dots, x_q).$$

Man nennt $\mathcal{C}_b(\sigma)$ den *Kegel* über σ (mit Spitze b).



Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Homomorphismus

$$\mathcal{C}_b : A_q(C) \rightarrow A_{q+1}(C).$$

Als nächsten Schritt definieren wir nun eine Kettenabbildung

$$\mathcal{S}' : A_q(C) \rightarrow A_q(C)$$

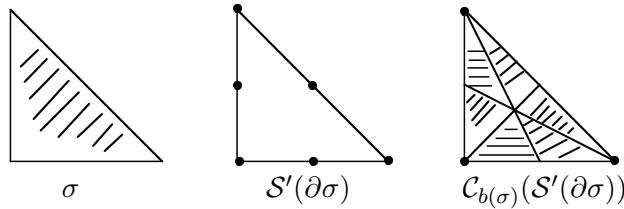
wobei \mathcal{S}' für "simplicial division" steht. (Wir werden später noch für beliebige Räume X Abbildungen $\mathcal{S} : S_q(X) \rightarrow S_q(X)$ konstruieren). Die Konstruktion geschieht durch Induktion nach q . Zunächst setzen wir $\mathcal{S}' = \text{id}$ für $q = 0$. Es sei nun \mathcal{S}' in jeder Dimension $< q$ definiert. Ist $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_q)$ ein affines singuläres q -Simplex in C , so ist der *Schwerpunkt* von σ definiert durch

$$b = b(\sigma) = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_q}{q+1}$$

Damit definieren wir

$$\mathcal{S}'(\sigma) := \mathcal{C}_{b(\sigma)}(\mathcal{S}'(\partial\sigma)).$$

Diese Konstruktion lässt sich wie folgt veranschaulichen:



Wir zeigen nun, daß \mathcal{S}' eine Kettenabbildung ist.

Lemma II.6.9 *Es gilt*

$$\mathcal{S}' \circ \partial = \partial \circ \mathcal{S}'.$$

Beweis. Wir machen Induktion nach q . Für $q = 0$ ist die Aussage trivial. Um den Induktionsschritt von $q - 1$ nach q durchzuführen, genügt es, die Aussage für ein affines singuläres q -Simplex zu beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{S}'(\sigma) &= \partial(\mathcal{C}_b(\mathcal{S}'(\partial\sigma))) \\ &= \mathcal{S}'\partial(\sigma) - \mathcal{C}_b(\partial(\mathcal{S}'(\partial\sigma))). \end{aligned}$$

Dabei kommt die Summe dadurch zustande, daß man alle $(q-1)$ –Simplizes zusammenfaßt, die b nicht enthalten, bzw. b enthalten. Das Vorzeichen kommt dadurch zustande, daß b jeweils der erste Punkt in einem Simplex der Form $\mathcal{C}_b(\tau)$ ist. Nach Induktionsannahme gilt nun

$$\partial \mathcal{S}'(\partial \sigma) = \mathcal{S}'(\partial^2 \sigma) = 0.$$

□

Da Unterteilung von Simplizes die Homologie nicht verändern sollte, kann man erwarten, daß \mathcal{S}' kettenhomotop zur Identität ist. Wir konstruieren im folgenden eine solche Kettenhomotopie, d.h. eine Abbildung

$$K' : A_q(C) \rightarrow A_{q+1}(C)$$

mit

$$\partial K' + K' \partial = \mathcal{S}' - \text{id}.$$

Dazu führen wir wiederum eine Konstruktion mittels Induktion durch. Für $q = 0$ sei $K' = 0$. Wir nehmen nun an, daß K' auf allen Ketten der Dimension $< q$ bereits definiert ist. Für ein affines singuläres q –Simplex definieren wir dann

$$K'(\sigma) := \mathcal{C}_{b(\sigma)}(\mathcal{S}'\sigma - \sigma - K'\partial\sigma).$$

Lemma II.6.10 *Es gilt*

$$\partial K' + K' \partial = \mathcal{S}' - \text{id}.$$

Beweis. Wir machen erneut Induktion nach q , wobei der Induktionsanfang $q = 0$ offensichtlich ist. Um den Induktionsschritt von $q - 1$ nach q durchzuführen, betrachten wir ein affines singuläres q –Simplex mit Schwerpunkt $b = b(\sigma)$. Entsprechend wie im Beweis von Lemma (II.6.9) gilt:

$$\begin{aligned} \partial K'(\sigma) &= \partial \mathcal{C}_b(\mathcal{S}'\sigma - \sigma - K'\partial\sigma) \\ &= \mathcal{S}'\sigma - \sigma - K'\partial\sigma - \mathcal{C}_b\partial(\mathcal{S}'\sigma - \sigma - K'\partial\sigma). \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\partial(\mathcal{S}'\sigma - \sigma - K'\partial\sigma) = \mathcal{S}'\partial\sigma - \partial\sigma + K'\partial\partial\sigma - \mathcal{S}'\partial\sigma + \partial\sigma = 0.$$

□

Wir wollen nun die obigen Konstruktionen auf beliebige topologische Räume übertragen. Das Ziel ist es, Homomorphismen $\mathcal{S} : S_q(X) \rightarrow S_q(X)$ und $K : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$ zu konstruieren, die funktoriell sind. Dies heißt folgendes: Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so sind die folgenden Abbildungen kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & S_q(X) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow f_\# \\ S_q(Y) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & S_q(Y) \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{K} & S_{q+1}(X) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow f_\# \\ S_q(Y) & \xrightarrow{K} & S_{q+1}(Y). \end{array}$$

Hierdurch wird auch klar, wie $\mathcal{S}d$ und K für einen Raum X zu definieren sind (vgl. auch den Beweis von Satz (II.3.1).) Es sei dazu $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein singuläres q -Simplex. Dann ist $\sigma = \sigma_\#(\delta_q)$, wobei $\delta_q : \Delta^q \rightarrow \Delta^q$ die Identität ist. Wir erhalten dann aus obigen Diagrammen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\sigma) &= \mathcal{S}\sigma_\#(\delta_q) &= \sigma_\#(\mathcal{S}(\delta_q)) &:= \sigma_\#(\mathcal{S}'(\delta_q)), \\ K(\sigma) &= K\sigma_\#(\delta_q) &= \sigma_\#(K(\delta_q)) &:= \sigma_\#(K'(\delta_q)). \end{aligned}$$

Lemma II.6.11 (i) $\partial\mathcal{S} = \mathcal{S}\partial$

(ii) $\partial K + K\partial = \mathcal{S}d - \text{id.}$

Beweis. Unmittelbar aus Lemma (II.6.9) und Lemma (II.6.10). \square

Wir benötigen noch weitere Hilfssätze aus der konvexen Geometrie.

Definition Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, abgeschlossene konvexe Menge, so ist der *Durchmesser* von C definiert als

$$d(C) := \sup_{x, y \in C} \|x - y\|.$$

Lemma II.6.12 Ist σ ein q -Simplex mit Ecken x_0, \dots, x_q , so gilt

$$d(\sigma) = \max_{0 \leq i, j \leq q} \|x_i - x_j\|.$$

Beweis. Es sei $x = \sum t_i x_i$, sowie $x' = \sum t'_i x_i$. Wir lassen x fest und variieren x' . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x - x'\| &= \|x - \sum t'_i x_i\| &= \|\sum t'_i (x - x'_i)\| \\ &\leq \sum |t'_i| \|x_i - x'_i\| &= \sum t'_i \|x - x_i\| \\ &\leq \sum t'_i \max \|x - x_i\| &= \max \|x - x_i\|. \end{aligned}$$

Indem wir die Abschätzung wiederholen, nun aber x variieren, erhalten wir

$$\|x - x'\| \leq \max \|x_j - x_i\|.$$

□

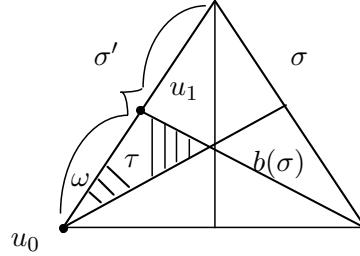
Lemma II.6.13 *Es sei σ ein affines q -Simplex in \mathbb{R}^n . Dann hat jedes affine singuläre Simplex in der q -Kette $\mathcal{S}'\sigma$ als Durchmesser höchstens den Wert $qd(\sigma)/q + 1$.*

Beweis. Wir machen wieder Induktion nach q . Für $q = 0$ ist $\mathcal{S}'(s) = s$ und $d(\sigma) = 0$. Wir nehmen nun an, daß die Behauptung für $(q - 1)$ -Simplizes gilt.

Ist τ ein affines singuläres q -Simplex in $\mathcal{S}'(\sigma)$, so gilt

$$\tau = (b(\sigma), u_0, \dots, u_{q-1})$$

wobei $b(\sigma)$ der Schwerpunkt von σ und u_0, u_1, \dots, u_{q-1} die Ecken eines $(q - 1)$ -Simplex ω in $\mathcal{S}'(\partial\sigma)$ sind. Es sei σ' das $(q - 1)$ -Simplex in $\partial\sigma$, das ω enthält:



Nach Lemma (II.6.11) gilt

$$d(\tau) = \max\{\|u_i - u_j\|; \|u_i - b(\sigma)\|\}.$$

Nach Induktionsannahme gilt

$$\|u_i - u_j\| \leq d(\omega) \leq \frac{(q-1)d(\sigma')}{q} \leq \frac{qd(\sigma)}{q+1}$$

wobei wir bei der letzten Abschätzung $(q-1)/q \leq q/(q+1)$ und $d(\sigma') \leq d(\sigma)$ verwenden.

Ist $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_q)$, so gilt

$$b(\sigma) = \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^q x_i.$$

Nun gilt

$$\|u_i - b(\sigma)\| \leq \|x_j - b(\sigma)\| \quad \text{für ein } j.$$

Letzteres läßt sich wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} \|x_j - b(\sigma)\| &= \|x_j - \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^q x_i\| \\ &= \left\| \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq j}} (x_j - x_i) / (q+1) \right\| \\ &\leq \frac{1}{(q+1)} \sum_{i \neq j} \|x_j - x_i\| \\ &\leq \frac{q}{q+1} \max_i \|x_j - x_i\| \\ &= \frac{q}{q+1} d(\sigma). \end{aligned}$$

□

Lemma II.6.14 *Es sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{V} = (V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und σ ein singuläres Simplex in X . Dann gibt es ein $m > 0$, so daß $\mathcal{S}^m \sigma$ eine Linearkombination von singulären Simplizes ist, die klein von Ordnung \mathfrak{V} sind.*

Beweis. Es sei $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein singuläres q -Simplex. Dann ist $\mathfrak{W} = \{\sigma^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Δ^q . Da Δ^q kompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß es für jeden Punkt $x \in \Delta^q$ einen Index $i(x) \in I$ gibt mit $B_\varepsilon(x) \subset \sigma^{-1}V_{i(x)}$. Wegen Lemma (II.6.12) und wegen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{q}{q+1} \right)^m = 0$$

gibt es ein $m > 0$, so daß die affinen singulären q -Simplizes in der q -Kette $\mathcal{S}^m \delta_q$ einen Durchmesser $< \varepsilon$ haben. Daraus folgt

$$\mathcal{S}^m \sigma = \sigma_{\#}(\mathcal{S}^m \delta_q) \in S_q^{\mathfrak{V}}(X).$$

□

Beweis von Satz (II.6.8): Ziel ist es, eine Kettenabbildung

$$\phi : S_*(X) \rightarrow S_*^{\mathfrak{U}}(X)$$

zu konstruieren mit $\phi \circ i = \text{id}$ und $i \circ \phi$ kettenhomotop zur Identität.

Nach Lemma (II.6.13) angewandt auf die Überdeckung $\mathring{\mathfrak{U}} = \{\mathring{U}_i\}_{i \in I}$ gibt es für jedes singuläre q -Simplex σ in X eine Zahl $m(\sigma) \geq 0$, so daß gilt

$$\mathcal{S}^{m(\sigma)} \sigma \in S_q^{\mathfrak{U}}(X).$$

Wir nehmen an, daß $m(\sigma)$ jeweils minimal gewählt ist. Es gilt $m(\sigma^{(i)}) \leq m(\sigma)$. Nach Lemma (II.6.11) gilt

$$(1) \quad \partial K + K \partial = \mathcal{S} - \text{id}.$$

Da \mathcal{S} eine Kettenabbildung ist, folgt, daß für alle $k \geq 1$ gilt:

$$(2) \quad \partial K \mathcal{S}^{k-1} + K \mathcal{S}^{k-1} \partial = \mathcal{S}^k - \mathcal{S}^{k-1}.$$

Durch Addition ergibt sich

$$(3) \quad \partial K(\text{id} + \dots + \mathcal{S}^{m-1}) + K(\text{id} + \dots + \mathcal{S}^{m-1})\partial = \mathcal{S}^m - \text{id}.$$

Wir setzen nun für beliebiges σ :

$$(4) \quad \mathcal{K}(\sigma) := K(\text{id} + \mathcal{S} + \dots + \mathcal{S}^{m(\sigma)-1})(\sigma).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\partial \mathcal{K} + \mathcal{K} \partial)(\sigma) &= \partial K(\text{id} + \dots + \mathcal{S}^{m(\sigma)-1})(\sigma) \\ &\quad + \sum_{i=0}^q (-1)^i K(\text{id} + \dots + \mathcal{S}^{m(\sigma^{(i)})-1})\sigma^{(i)} \\ (3) \quad &= \mathcal{S}^{m(\sigma)}\sigma - \sigma - K(\text{id} + \dots + \mathcal{S}^{m(\sigma)-1})\partial\sigma \\ &\quad + \sum_{i=0}^q (-1)^i K(\text{id} + \dots + \mathcal{S}^{m(\sigma^{(i)})-1})\sigma^{(i)} \\ &= \mathcal{S}^{m(\sigma)}\sigma - \sigma \\ &\quad - \sum_{i=0}^q (-1)^i K(\mathcal{S}^{m(\sigma^{(i)})} + \dots + \mathcal{S}^{m(\sigma)-1})\sigma^{(i)}. \end{aligned}$$

Dies führt uns auf die folgende Definition:

$$\phi(\sigma) := \mathcal{S}^{m(\sigma)}\sigma - \sum_{i=0}^q (-1)^i K(\mathcal{S}^{m(\sigma^{(i)})} + \dots + \mathcal{S}^{m(\sigma)-1})\sigma^{(i)}.$$

Nach Wahl von $m(\sigma)$ gilt

$$\phi(\sigma) \in S_q^{\mathfrak{U}}(X).$$

Nach Konstruktion von ϕ gilt

$$\partial \mathcal{K} + \mathcal{K} \partial = i \circ \phi - \text{id}$$

also ist $i \circ \phi$ kettenhomotop zur Identität. Ist andererseits $\sigma \in S_q^{\mathfrak{U}}(X)$, dann gilt $m(\sigma) = 0$ und daher $\phi \circ i = \text{id}$. \square

Wir benötigen im folgenden noch das

Lemma II.6.15 (Fünferlemma) *Es sei*

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & C_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & C_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & C_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & C_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ D_1 & \xrightarrow{\beta_1} & D_2 & \xrightarrow{\beta_2} & D_3 & \xrightarrow{\beta_3} & D_4 & \xrightarrow{\beta_4} & D_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm abelscher Gruppen mit exakten Zeilen. Sind f_1, f_2, f_4 und f_5 Isomorphismen, dann ist auch f_3 ein Isomorphismus.

Beweis. Übungsaufgabe □

Schließlich können wir nun den Ausschneidungssatz beweisen.

Beweis von Satz (II.6.1). Wir betrachten die Überdeckung $\mathfrak{U} = (X - U, \overset{\circ}{A})$ von X . Wegen $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$ überdecken auch die offenen Mengen $(\overset{\circ}{X - U}) = X - \bar{U}$ und $\overset{\circ}{A}$ den Raum X . Analog ist $\mathfrak{U}' = (A - U, \overset{\circ}{A})$ eine Überdeckung von A . Nach Satz (II.6.8) induzieren die Inklusionen

$$i : S_*^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow S_*(X), \quad i' : S_*^{\mathfrak{U}'}(A) \rightarrow S_*(A)$$

Isomorphismen

$$i_* : H_q(S_*^{\mathfrak{U}}(X)) \rightarrow H_q(X), \quad i'_* : H_q(S_*^{\mathfrak{U}'}(A)) \rightarrow H_q(A).$$

für alle q .

Da wir $S_*^{\mathfrak{U}'}(A)$ als Unterkomplex von $S_*^{\mathfrak{U}}(X)$ betrachten können, haben wir eine Kettenabbildung

$$j : S_*^{\mathfrak{U}}(X)/S_*^{\mathfrak{U}'}(A) \rightarrow S_*(X)/S_*(A).$$

Die Kettenabbildungen i, i' und j induzieren nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(S_*^{\mathfrak{U}'}(A)) & \longrightarrow & H_q(S_*^{\mathfrak{U}}(X)) & \longrightarrow & H_q(S_*^{\mathfrak{U}}(X)/S_*^{\mathfrak{U}'}(A)) \longrightarrow \\ & & \downarrow i'_* & & \downarrow i_* & & \downarrow j_* \\ \cdots & \longrightarrow & H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow & & H_{q-1}(S_*^{\mathfrak{U}'}(A)) & \longrightarrow & H_{q-1}(S_*^{\mathfrak{U}}(X)) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i'_* & & \downarrow i_* & & \\ \longrightarrow & & H_{q-1}(A) & \longrightarrow & H_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Da i_* und i'_* für alle q Isomorphismen sind, ist auch j_* nach dem Fünferlemma ein Isomorphismus.

Nach Definition von \mathfrak{U} und \mathfrak{U}' haben wir

$$\begin{aligned} S_*^{\mathfrak{U}}(X) &= S_*(X - U) + S_*(\overset{\circ}{A}) \\ S_*^{\mathfrak{U}'}(A) &= S_*(A - U) + S_*(\overset{\circ}{A}) \end{aligned}$$

wobei die Summe nicht notwendig exakt ist. Also folgt

$$S_*^{\mathfrak{U}}(X)/S_*^{\mathfrak{U}'}(A) \cong S_*(X - U)/S_*(A - U).$$

Damit gilt

$$H_q(S_*^{\mathfrak{U}}(X)/S_*^{\mathfrak{U}'}(A)) \cong H_q(X - U, A - U) \text{ für alle } q.$$

Hintereinanderschaltung mit j_* zeigt, daß

$$i_* : H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A)$$

für alle q ein Isomorphismus ist. \square

7 Die Mayer-Vietoris-Sequenz

Wir betrachten einen topologischen Raum X zusammen mit einer Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U, V\}$ von der wir annehmen, daß auch $\mathring{\mathfrak{U}} = \{\mathring{U}, \mathring{V}\}$ eine Überdeckung von X ist. Dann haben wir natürliche Inkarnationen

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nearrow i & & \searrow k & \\ U \cap V & & & & U \cup V = X. \\ & \searrow j & & \nearrow l & \\ & & V & & \end{array}$$

Satz II.7.1 (Mayer-Vietoris-Sequenz) *Es gibt eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{h_*} H_q(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

mit $g_* = (i_*, -j_*)$, $h_* = k_* + l_*$.

Beweis. Wir betrachten

$$\begin{aligned} A' &= \{\sigma; \sigma : \Delta^q \rightarrow U \text{ ist ein singuläres } q\text{-Simplex in } U\} \\ A'' &= \{\sigma; \sigma : \Delta^q \rightarrow V \text{ ist ein singuläres } q\text{-Simplex in } V\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_q(U) &= F(A'), S_q(V) = F(A'') \\ S_q(U \cap V) &= F(A' \cap A''), S_q^{\mathfrak{U}}(X) = F(A' \cup A''). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Sequenz

$$0 \rightarrow F(A' \cap A'') \xrightarrow{g} F(A') \oplus F(A'') \xrightarrow{h} F(A' \cup A'') \rightarrow 0$$

mit

$$g(\sigma) = (\sigma, -\sigma), \quad h(\sigma', \sigma'') = \sigma' + \sigma''$$

und behaupten, daß diese Sequenz exakt ist. Offensichtlich ist g injektiv, h surjektiv und $h \circ g = 0$. Es bleibt zu zeigen, daß $\ker h \subset \text{im } g$ ist. Es sei also

$$0 = h \left(\sum n_i \sigma'_i, \sum m_j \sigma''_j \right) = \sum n_i \sigma'_i + \sum m_j \sigma''_j$$

wobei die σ'_i paarweise verschieden sind, und dasselbe für die σ''_j gilt. Dann muß es zu jedem $n_i \neq 0$ ein j geben mit $m_j = -n_i$ und $\sigma'_i = \sigma''_j$, d.h. also

$$-\sum m_j \sigma_j'' = x = \sum n_i \sigma_i' \in F(A' \cap A'')$$

und damit $(\sum n_i \sigma'_i, \sum m_j \sigma''_j) = (x, -x) = g(x)$. Daß heißt, wir haben eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow S_*(U \cap V) \xrightarrow{g} S_*(U) \oplus S_*(V) \xrightarrow{h} S_*^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow 0.$$

Auf Grund von Satz (II.5.1) liefert dies eine lange exakte Homologiesequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{h_*} H_q(S_*^{\mathfrak{U}}(X)) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

Da nach Satz (II.6.8) gilt, daß $H_q(S_*^{\mathfrak{U}}(X)) = H_q(X)$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung Der Verbindungshomomorphismus ∂_* kann wie folgt beschrieben werden. Jede Homologieklass $[w] \in H_q(X)$ besitzt eine Darstellung $[w] = [c + d]$ mit $c \in S_q(U)$, $d \in S_q(V)$. Wegen $\partial w = \partial c + \partial d = 0$ ist $\partial c = -\partial d \in S_{q-1}(U \cap V)$ und $(\partial c, \partial d) = (\partial c, -\partial c) = g(\partial c)$. Dann gilt

$$\partial_*[w] = \partial_*[c+d] = [\partial c].$$

Bemerkung Die Mayer-Vietoris Sequenz ist in folgendem Sinn natürlich. Es sei X' ein weiterer topologischer Raum und $\{U', V'\}$ eine Überdeckung von X' mit $\overset{\circ}{U'} \cup \overset{\circ}{V'} = X'$. Es sei $f : X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung mit $f(U) \subset U'$ und $f(V) \subset V'$. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(U \cap V) & \xrightarrow{g_*} & H_q(U) \oplus H_q(V) & \xrightarrow{h_*} & H_q(X) \\
& & f_* \downarrow & & f_* \oplus f_* \downarrow & & f_* \downarrow \\
\cdots & \xrightarrow{\partial'_*} & H_q(U' \cap V') & \xrightarrow{g'_*} & H_q(U') \oplus H_q(V') & \xrightarrow{h'_*} & H_q(X') \\
& & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(U \cap V) & \longrightarrow \cdots & & \\
& & & f_* \downarrow & & & \\
& & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{q-1}(U' \cap V') & \longrightarrow \cdots & &
\end{array}$$

Dies folgt unmittelbar aus der Konstruktion.

8 Das Anheften von Räumen

Es sei X ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit X/\sim bezeichnet und die natürliche Projektion mit $\pi : X \rightarrow X/\sim$. Die *Quotienten topologie* ist die feinste Topologie auf X/\sim , so daß die natürliche Projektion π stetig ist. Es gilt

$$U \subset X/\sim \text{ offen} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ offen in } X.$$

Wir wollen zunächst untersuchen, wann X/\sim ein Hausdorffraum ist. Die Diagonale von X ist die Menge

$$D = \{(x, x) \in X \times X; x \in X\} \subset X \times X.$$

Aus der mengentheoretischen Topologie kennt man den

Satz II.8.1 *X ist genau dann ein Hausdorffraum, wenn die Diagonale D abgeschlossen in $X \times X$ ist.*

Wir betrachten nun die stetige Abbildung

$$\pi \times \pi : X \times X \rightarrow (X/\sim) \times (X/\sim)$$

und bezeichnen die Diagonale in $(X/\sim) \times (X/\sim)$ mit Δ . Die Menge

$$\Gamma := (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in X \times X; x \sim y\}$$

heißt *Graph* der Relation \sim . Die Relation \sim heißt *abgeschlossen*, falls der Graph Γ abgeschlossen in $X \times X$ ist. Ist X/\sim Hausdorffraum, so ist Γ offensichtlich abgeschlossen. Falls X kompakt ist, gilt auch die Umkehrung.

Satz II.8.2 *Es sei X ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist X/\sim genau dann ein Hausdorffraum, wenn \sim abgeschlossen ist.*

Beweis. Wir hatten bereits gesehen, daß für jeden Raum X aus der Hausdorff-eigenschaft von X/\sim die Abgeschlossenheit von \sim folgt. Wir nehmen nun an, daß \sim abgeschlossen ist. Da X kompakt und Hausdorff ist, ist eine Teilmenge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen, wenn sie kompakt ist. Wir zeigen nun, daß das Bild $\pi(A)$ einer abgeschlossenen Menge A in X ebenfalls abgeschlossen ist. Es seien dazu p_1 und p_2 die Projektion auf den ersten und den zweiten Faktor von $X \times X$. Dann gilt

$$p_2(p_1^{-1}(A) \cap \Gamma) = \{y \in X; y \sim x \text{ für ein } x \in A\} = \pi^{-1}(\pi(A)).$$

Da Γ abgeschlossen ist, ist auch $\pi_1^{-1}(A) \cap \Gamma$ abgeschlossen und somit kompakt. Damit gilt dasselbe für $p_2(p_1^{-1}(A \cap \Gamma)) = \pi^{-1}(\pi(A))$. Aus der Konstruktion der Quotienten topologie folgt, daß dann auch $\pi(A)$ abgeschlossen ist. Ist $x \in X$ ein Punkt, so ist x kompakt, also abgeschlossen. Damit gilt

dasselbe für $\bar{x} = \pi(x)$ und $\pi^{-1}(\pi(x))$. Ist $\bar{x} \neq \bar{y}$, so sind $\pi^{-1}(\bar{x})$ und $\pi^{-1}(\bar{y})$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Da X kompakt und Hausdorff ist, ist X auch normal, also gibt es offene Umgebungen U, V von $\pi^{-1}(\bar{x})$, bzw. $\pi^{-1}(\bar{y})$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wir setzen $U' = X - U, V' = X - V$. Dann sind U', V' abgeschlossen und nach obiger Bemerkung sind auch $\pi(U')$ und $\pi(V')$ abgeschlossen. Also sind $\tilde{U} = (X/\sim) - \pi(U')$ und $\tilde{V} = (X/\sim) - \pi(V')$ offen. Da $\bar{x} \in \tilde{U}, \bar{y} \in \tilde{V}$ und $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ haben wir gezeigt, daß sich \bar{x} und \bar{y} in X/\sim durch offene Umgebungen trennen lassen. \square

Ist \sim' eine Relation auf X , so können wir daraus stets eine Äquivalenzrelation machen, indem wir setzen:

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{es gibt eine Folge } x_0, x_1, \dots, x_n \in X \text{ mit } x_0 = x \text{ und } x_n = y, \text{ so daß}$$

- (i) $x_{i+1} = x_i$ oder
- (ii) $x_{i+1} \sim' x_i$ oder
- (iii) $x_i \sim' x_{i+1}$.

Dann heißt \sim die durch \sim' erzeugte Äquivalenzrelation.

Beispiele (1) Es sei $X = S^n, n \geq 1$ und \sim die durch $x \sim -x$ erzeugte Äquivalenzrelation. Dann ist

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / \sim$$

der *n-dimensionale reelle projektive Raum*. Für den Graphen Γ gilt

$$\Gamma = D \cup D', \quad D' = \{(x, -x); x \in S^n\},$$

also ist \sim abgeschlossen. Daher ist $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ein kompakter Hausdorffraum. In der Tat ist $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ eine topologische (und auch differenzierbare) Mannigfaltigkeit. Wir hätten $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ auch auf folgende Art einführen können:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

wobei

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{es gibt } \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ mit } x = \lambda y.$$

Geometrisch ist $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ also die Menge der Geraden in \mathbb{R}^{n+1} durch den Ursprung.

(2) Wir identifizieren

$$\mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1} = \{(z_0, \dots, z_n); z_i \in \mathbb{C}\}.$$

Dann wird die Einheitssphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ gegeben durch

$$S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}; |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}.$$

Wir definieren hierauf eine Äquivalenzrelation durch

$$z \sim z' \Leftrightarrow \text{es gibt } \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \text{ mit } z = \lambda z'.$$

Der Quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = S^{2n+1} / \sim$$

ist wiederum ein kompakter Hausdorffraum (und sogar eine komplexe Mannigfaltigkeit). Analog hätten wir definieren können:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

mit

$$z \sim z' \Leftrightarrow \text{es gibt } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } z = \lambda z'.$$

Also ist $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ der Raum der (komplexen) Geraden in \mathbb{C}^{n+1} durch den Ursprung.

Wir betrachten nun folgende Situation: Es seien X, Y disjunkte topologische Räume, A ein Unterraum von X . Auf der Vereinigung $X \cup Y$ führen wir die Summentopologie ein (d.h. die offenen Mengen sind die Vereinigungen $U \cup V$, wobei U und V offen in X bzw. Y sind; insbesondere sind X, Y offene und abgeschlossene Teilmengen). Ferner sei $f : A \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Es sei \sim die Äquivalenzrelation, die durch

$$x \sim f(x) \quad \text{für } x \in A$$

auf $X \cup Y$ erzeugt wird.

Definition (i) Der Raum

$$X \cup_f Y := X \cup Y / \sim$$

heißt der aus Y durch *Anheften von X an Y mittels $f : A \rightarrow Y$* entstandene Raum.

(ii) Ist speziell $X = D^n$ und $A = \partial D^n = S^{n-1}$, so heißt

$$Y_f := D^n \cup_f Y$$

der durch *Anheften einer n -Zelle an Y mittels f* entstandene Raum.

Satz II.8.3 *Sind X und Y kompakte Hausdorffräume und ist A abgeschlossen in X , dann ist $X \cup_f Y$ ein kompakter Hausdorffraum.*

Beweis. Da X und Y kompakt sind, gilt dasselbe für $X \cup Y$ und also für $X \cup_f Y$. Nach Satz (II.8.2) genügt es dann zu zeigen, daß \sim abgeschlossen ist. Der Graph Γ von \sim ist

$$\Gamma = D_{X \cup Y} \cup \Gamma_f \cup \Gamma'_f \cup (f \times f)^{-1}(D_Y)$$

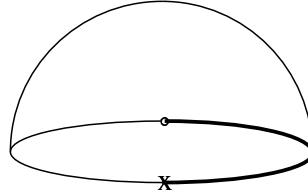
wobei $D_{X \cup Y}$ die Diagonale von $X \cup Y$, und

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)); a \in A\}, \quad \Gamma'_f = \{(f(a), a); a \in A\}$$

ist. Ferner ist D_Y die Diagonale von Y . Da X und Y kompakte Hausdorffräume sind, sind alle diese Räume ebenfalls kompakt und abgeschlossen. \square

Bemerkung Wir halten an dieser Stelle noch fest, daß in dieser Situation die Inklusion $i : Y \rightarrow X \cup_f Y$ einen Homöomorphismus von Y auf das Bild $i(Y)$ liefert.

Um diesen Prozeß zu illustrieren, betrachten wir nochmals die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Man kann $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ aus E_+^2 durch Identifizieren von Diametralpunkten auf dem Rand $\partial E_+^2 = S^1$ erhalten:



Wir erhalten damit

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = X \cup_f Y$$

mit $X = D^2$ (man erinnere sich daran, daß D^2 homöomorph zu E_+^2 ist), $A = S^1 = \partial D^2$, Y eine weitere Kopie von S^1 und

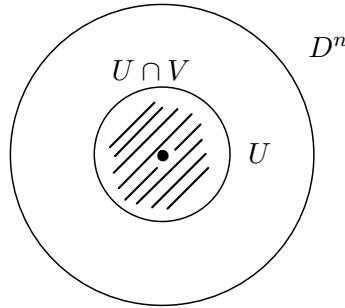
$$f : A \rightarrow S^1, \quad e^{i\varphi} \mapsto e^{2i\varphi}.$$

Dies wollen wir benutzen, um im folgenden die Homologie von projektiven Räumen zu berechnen. Wir kehren jedoch zunächst zum allgemeinen Prozeß des Anheftens von n -Zellen zurück.

Satz II.8.4 *Ist $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und Y_f der Raum, der aus Y durch Anheften einer n -Zelle entsteht, so gibt es eine exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H_q(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} H_q(Y) \xrightarrow{i_*} H_q(Y_f) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(Y) \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_0(Y_f) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei U die offene Kugel in D^n vom Radius $\frac{1}{2}$ um den Nullpunkt 0, sowie $V = Y_f - \{0\}$. Dann definieren U, V eine offene Überdeckung von Y_f , auf die die Mayer-Vietoris-Sequenz angewendet werden kann:



$$\cdots \rightarrow H_q(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{h_*} H_q(Y_f) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

Nun hat $U \cap V$ den Homotopietyp von S^{n-1} . Die Menge U ist konvex und Y ist ein Deformationsretrakt von V . Dabei kann man die Retraktion auf $V - Y$ durch $f \circ r$ definieren, wobei r eine Retraktion von $D^n - \{0\}$ auf S^{n-1} ist. Zusammen ergibt dies die Behauptung. \square

Wir wollen dies nun benutzen, um die Homologie von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zu berechnen

Satz II.8.5 Für die reelle projektive Ebene gilt

$$H_q(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \geq 2 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{für } q = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{für } q = 0. \end{cases}$$

Beweis. Wir benutzen die Darstellung $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = Y_f$ aus unserem früheren Beispiel, wobei $Y = S^1$ und $f : S^1 \rightarrow S^1$ durch $f(e^{i\varphi}) = e^{2i\varphi}$ gegeben ist. Aus dem Teil

$$H_q(S^1) \xrightarrow{i_*} H_q(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(S^1)$$

der in Satz II.8.4 bewiesenen Sequenz folgt $H_q(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 0$ für $q \geq 3$. Der Rest der Sequenz lautet

Dabei ist

$$g_*(\sigma) = (\sigma, -\sigma), \quad h_*(\sigma', \sigma'') = \sigma' + \sigma''.$$

Für die Abbildung f_* gilt

$$f_*(\alpha) = 2\alpha.$$

Damit folgt

$$H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2.$$

Die Behauptung für $H_0(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ folgt ebenfalls aus der obigen Sequenz, aber auch direkt daraus, daß $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ wegzusammenhängend ist. \square

Wir beweisen nun ein Kriterium, wie man beweisen kann, daß ein Raum aus dem Ankleben eines Raums an einen anderen entstanden ist.

Satz II.8.6 *Es seien X, Y und W kompakte Hausdorffräume, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \rightarrow Y$ stetig. Existiert eine stetige surjektive Abbildung $g : X \cup Y \rightarrow W$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $w \in W$ entweder $g^{-1}(w) = \{x\}, x \in X - A$ oder $g^{-1}(w) = f^{-1}(y) \cup \{y\}, y \in Y$ gilt, so ist W homöomorph zu $X \cup_f Y$.*

Beweis. Es sei $\pi : X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y$ die Restklassenabbildung. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \cup Y & \xrightarrow{g} & W \\ \pi \searrow & & \swarrow h \\ & X \cup_f Y & \end{array}$$

wobei h durch g induziert wird. Nach den Voraussetzungen ist h bijektiv. Da g stetig ist, und h eine Faktorisierung von g über den Quotienten, so ist auch h stetig. Nach Voraussetzung ist h bijektiv. Da $X \cup_f Y$ und W kompakt und Hausdorffsch sind (für $X \cup_f Y$ folgt dies aus Satz (II.8.3)), ist h sogar ein Homöomorphismus. \square

Wir kehren nun nochmals zu unserem Beispiel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / \sim$ zurück. Dabei ist $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ die Quotientenabbildung. Wir können nun π dazu benutzen, um an $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ eine n -Zelle anzuheften. Wir behaupten, daß dann gilt:

$$\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R}) = D^{n+1} \cup_{\pi} \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

Hierzu betrachten wir die Einbettung

$$\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & S^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto & (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \end{array}$$

die S^n als Äquator von S^{n+1} darstellt. Dies induziert eine Einbettung

$$i : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R}).$$

Wir erinnern an die Zerlegung

$$S^{n+1} = E_+^{n+1} \cup E_-^{n+1}, E_+^{n+1} \cap E_-^{n+1} = S^n.$$

Die Projektion p_+ liefert einen Homöomorphismus $p_+^{-1} : D^{n+1} \rightarrow E_+^{n+1}$. Ist $\pi' : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R})$ die Quotientenabbildung, so definieren wir

$$g_1 : D^{n+1} \xrightarrow{p_+^{-1}} E_+^{n+1} \subset S^{n+1} \xrightarrow{\pi'} \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R}).$$

Schließlich definieren wir

$$g : D^{n+1} \cup \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R})$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{für } x \in D^{n+1} \\ i(x) & \text{für } x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Die Abbildung g ist surjektiv, da schon g_1 surjektiv ist. Für $w \in \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R})$ gilt

$$g^{-1}(w) = \{x\} \subset D^{n+1} - S^n \text{ für } w \in \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R}) - i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$$

oder

$$g^{-1}(w) = \{x, -x\} \cup \{i^{-1}(w)\} \text{ für } w \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

Da g offensichtlich stetig ist, können wir Satz (II.8.6) anwenden.

Analog können wir im Fall des komplexen projektiven Raums argumentieren. Es sei

$$f : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1} / \sim = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

die Quotientenabbildung. Dann gilt genau wie oben

$$\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) = D^{2n+2} \cup_f \mathbb{P}^n(\mathbb{C}).$$

Wir können nun die Homologie von $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ berechnen.

Satz II.8.7 *Es gilt*

$$H_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0, 2, \dots, 2n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir machen einen Induktionsbeweis nach n . Die Behauptung ist richtig für $n = 0$, da $\mathbb{P}^0(\mathbb{C}) = \{pt\}$, und $n = 1$, da $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$ gilt. (Letzteres sieht man z.B. daran, daß $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ aus $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ durch Anheften einer 2-Zelle entsteht). Aus Satz (II.8.4) erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_q(S^{2n+1}) \xrightarrow{f_*} H_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \xrightarrow{i_*} H_q(\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(S^{2n+1}) \rightarrow \cdots$$

für $q > 0$. Nun gilt

$$H_q(S^{2n+1}) = 0 \text{ für } q \neq 0, 2n+1$$

und auf Grund der Induktionsvoraussetzung

$$H_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = 0 \text{ für } q \text{ ungerade.}$$

Also ist

$$f_* : H_q(S^{2n+1}) \rightarrow H_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

die Nullabbildung für alle $q > 0$. Damit erhalten wir für $q > 1$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \xrightarrow{i_*} H_q(\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(S^{2n+1}) \rightarrow 0$$

und damit die Behauptung in diesem Bereich. Für $q = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) &\rightarrow H_1(\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})) \rightarrow 0. \\ &\quad \parallel \\ &\quad 0 \end{aligned}$$

Die Surjektivität folgt dabei aus der Tatsache, daß die Abbildung

$$H_0(S^{2n+1}) \rightarrow H_0(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \oplus \mathbb{Z}$$

injektiv ist. Schließlich ist $H_0(\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$, da $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist. \square

Mit derselben Methode, aber etwas mehr Aufwand, beweist man für die reellen projektiven Räume

Satz II.8.8 *Es gilt*

$$H_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0 \text{ und } q = n \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{für } 1 \leq q \leq n-1, q \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

9 Zellenkomplexe

Zellenkomplexe sind topologische Räume, die durch sukzessives Anheften von n -Zellen an eine endliche Menge von Punkten entstehen.

Definition Es sei (X, A) ein Paar von Räumen und \sim die Äquivalenzrelation, die durch $x \sim y$ für alle $x, y \in A$ erzeugt wird. Der Quotientenraum X/\sim wird mit X/A bezeichnet, und heißt der aus X durch *Zusammenschlügen von A auf einen Punkt* entstandene Raum.

Bemerkungen (i) Ist $f : A \rightarrow \{pt\}$ die konstante Abbildung, so ist $X/A = X \cup_f \{pt\}$.
(ii) Ist X kompakter Hausdorffraum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist auch X/A ein kompakter Hausdorffraum.

Definition Ein Unterraum A von X heißt ein *starker Deformationsretrakt* von X , wenn es eine stetige Abbildung $F : X \times I \rightarrow X$ gibt, mit

- (i) $F(x, 0) = x$ für alle $x \in X$,
- (ii) $F(x, 1) \in A$ für alle $x \in X$,
- (iii) $F(a, t) = a$ für alle $a \in A, t \in I$.

Bemerkung Ein starker Deformationsretrakt ist insbesondere ein Deformationsretrakt mit Retraktionsabbildung $r(x) = F(x, 1)$.

Lemma II.9.1 *Es sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen, $\pi : X \rightarrow X/A$ die Identifizierungsabbildung, $y := \pi(A) \in X/A$. Ist A ein starker Deformationsretrakt von X , dann ist $\{y\}$ starker Deformationsretrakt von X/A .*

Beweis. Es sei $F : X \times I \rightarrow X$ die starke Deformationsretraktion von X auf A . Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow \pi \times \text{id} & & \downarrow \pi \\ (X/A) \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & X/A \end{array}$$

Wir setzen

$$\tilde{F}(\bar{x}, t) = \pi \circ F \circ (\pi \times \text{id})^{-1}(\bar{x}, t).$$

Wegen (iii) ist dies wohldefiniert. Aus (i), (ii) folgt

$$\tilde{F}(\bar{x}, 0) = \bar{x}, \tilde{F}(\bar{x}, 1) = y \quad \text{für } \bar{x} \in X/A.$$

Ferner liefert (iii)

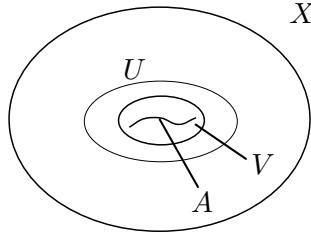
$$\tilde{F}(y, t) = y \quad \text{für } t \in I.$$

Es bleibt zu zeigen, daß \tilde{F} stetig ist. Dies folgt aber sofort aus der Stetigkeit von F und der Definition der Quotiententopologie. \square

Satz II.9.2 *Es sei X ein kompakter Hausdorffraum und $A \subset X$ abgeschlossen. Ferner sei A starker Deformationsretrakt einer abgeschlossenen Umgebung von A in X . Dann induziert die Quotientenabbildung $\pi : X \rightarrow X/(A)$ einen Isomorphismus*

$$\pi_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(X/A, y).$$

Beweis. Es sei A starker Deformationsretrakt der kompakten Umgebung U von A in X .



Da A starker Deformationsretrakt von U ist, folgt aus der langen Homologiesequenz des Tripels (X, U, A) :

daß

$$H_*(X, A) \cong H_*(X, U).$$

Nach Lemma (II.9.1) ist $\{y\}$ starker Deformationsretrakt von $\pi(U)$, also folgt analog

$$H_*(X/A, \{y\}) \cong H_*(X/A, \pi(U))$$

Da X kompakter Hausdorffraum ist, ist X normal, d.h. es gibt eine offene Menge V mit $A \subset V \subset \overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{U}$. Der Ausschneidungssatz liefert dann einen Isomorphismus

$$H_*(X - V, U - V) \cong H_*(X, U)$$

und analog

$$H_*(X/A - \pi(V), \pi(U) - \pi(V)) \cong H_*(X/A, \pi(U)).$$

Wegen $A \subset V$ liefert die Einschränkung von π einen Homöomorphismus von Paaren

$$\pi : (X - V, U - V) \rightarrow (X/A - \pi(V), \pi(U) - \pi(V))$$

und daher einen Isomorphismus

$$H_*(X - V, U - V) \cong H_*(X/A - \pi(V), \pi(U) - \pi(V)).$$

Zusammen ergeben diese Isomorphismen die Behauptung.

Definition Eine Abbildung $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren heißt ein *relativer Homöomorphismus*, wenn f die Menge $X - A$ bijektiv auf $Y - B$ abbildet.

Satz II.9.3 Ist $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ein relativer Homöomorphismus zwischen kompakten Hausdorffräumen, wobei A (bzw. B) abgeschlossen und starker Deformationsretrakt einer abgeschlossenen Umgebung in X (bzw. Y) ist, ist

$$f_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Wie im Beweis von Lemma II.9.1 erhalten wir ein kommutatives Diagramm steiger Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X/A & \xrightarrow{f'} & Y/B. \end{array}$$

Da f ein relativer Homöomorphismus ist, ist f' bijektiv und daher ein Homöomorphismus, da X/A und Y/B kompakt sind. Es sei $x_0 = \pi(A)$, $y_0 := \pi(B)$. Zusammen mit Satz (II.9.2) erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} H_*(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y, B) \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi'_* \\ H_*(X/A, x_0) & \xrightarrow{f'_*} & H_*(Y/B, y_0). \end{array}$$

□

Wir können nun Zellenkomplexe definieren.

Definition Ein (*endlicher*) *Zellenkomplex* (oder ein *endlicher CW-Komplex*) ist ein kompakter Hausdorffraum X , der eine endliche Zerlegung $\{e_i^q; q = 0, 1, \dots, n, i = 1, \dots, r_q\}$ in disjunkte Teilmengen mit den folgenden Eigenschaften besitzt. Es sei

$$X^q := \bigcup_{\substack{p \leq q \\ 1 \leq j \leq r_p}} e_j^p, \quad X^{-1} := \emptyset.$$

Dann soll gelten:

- (i) Jedes $x \in X$ ist in genau einem e_i^q enthalten.
- (ii) Zu jedem i und q existiert ein relativer Homöomorphismus

$$\varphi : (D^q, S^{q-1}) \rightarrow (e_i^q \cup X^{q-1}, X^{q-1}).$$

Dann heißt e_i^q eine (offene) q -Zelle von X , φ heißt *charakteristische Abbildung* von e_i^q , und der Unterraum X^q heißt das q -*Gerüst* von X .

Die Bezeichnung *CW-Komplex* stammt von J.H.C. Whitehead, der auch unendliche Zellkomplexe untersucht hat, und dabei die *CW-Bedingungen* formuliert hat. Die q -Gerüste X^q sind abgeschlossen. Wir erhalten den Raum X^q , indem wir eine q -Zelle mittels der Abbildung $f = \varphi|_{S^{q-1}}$ an $X^q - e_i^q$ anheften.

Definition Ist $X^{n-1} \neq X$, aber $X^n = X$, so heißt n die *Dimension* des *CW-Komplexes* X .

Beispiele Wir haben folgende Beispiele kennengelernt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) &= e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \dots \cup e^n \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) &= e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n} \\ S^n &= e^0 \cup e^n \\ T &= S^1 \times S^1 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2.\end{aligned}$$

Die Homologie von *CW-Komplexen* lässt sich in vielen Fällen schrittweise über die Homologie der q -Gerüste ausrechnen. Hierzu benötigen wir den Begriff des *Unterkomplexes*.

Definition Es sei X ein Zellenkomplex mit Zellen $\{e_i^q\}$. Eine Teilmenge A von X heißt ein *Unterkomplex*, falls für alle i, q gilt: Ist $A \cap e_i^q \neq \emptyset$, so ist $e_i^q \subset A$.

Bemerkung Ist A ein Unterkomplex von X , so ist A abgeschlossen und mit der von X induzierten Zellenzerlegung selbst wieder ein Zellenkomplex.

Unser nächstes Ziel ist nun der

Satz II.9.4 Ist A ein Unterkomplex eines Zellenkomplexes X , so ist A starker Deformationsretrakt einer kompakten Umgebung von A in X .

Als Vorbereitung hierzu zeigen wir zuerst:

Lemma II.9.5 Es sei Y ein kompakter Hausdorffraum, $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und Y_f der durch Anheften einer n -Zelle an Y mittels f entstandene Raum. Dann ist Y ein starker Deformationsretrakt einer kompakten Umgebung von Y in Y_f .

Beweis. Es sei

$$U := \left\{ x \in D^n; \|x\| \geq \frac{1}{2} \right\}$$

Dann ist U eine kompakte Umgebung von S^{n-1} in D^n . Definiere

$$\begin{aligned} F : (U \cup Y) \times I &\rightarrow U \cup Y \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in Y \\ (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|} & \text{falls } x \in U. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt: F ist stetig, $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \subset S^{n-1} \cup Y$ für alle x , $F(x, t) = x$ für alle $x \in S^{n-1} \cup Y$ und alle t . Also ist F eine starke Deformationsretraktion von $U \cup Y$ auf $S^{n-1} \cup Y$.

Nun sei $\pi : D^n \cup Y \rightarrow Y_f$ die Quotientenabbildung. Wie zuvor erhalten wir ein kommutatives Diagramm stetiger Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} (U \cup Y) \times I & \xrightarrow{F} & U \cup Y \\ \downarrow \pi \times \text{id} & & \downarrow \pi \\ \pi(U \cup Y) \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & \pi(U \cup Y). \end{array}$$

Die Abbildung \tilde{F} liefert dann eine starke Deformationsretraktion der kompakten Umgebung $\pi(U \cup Y)$ von $\pi(Y)$ auf $\pi(Y)$. \square

Beweis von Satz (II.9.4): Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Anzahl der Zellen N in $X - A$. Für $N = 0$ ist die Aussage trivial, für $N = 1$ folgt sie aus obigem Lemma (II.9.5). Um den Induktionsschritt durchzuführen, nehmen wir an, daß die Aussage für jedes Paar (Y, B) , wobei $Y - B$ höchstens $N - 1$ Zellen enthält, richtig ist.

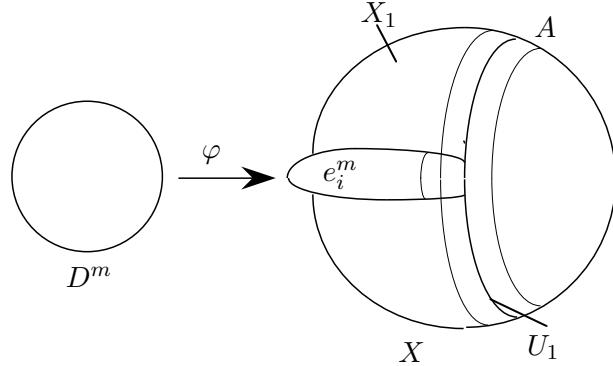
Es sei e_i^m eine Zelle maximaler Dimension in $X - A$. Setze

$$X_1 = X - e_i^m.$$

Dann ist X_1 Unterkomplex von X und A ist Unterkomplex von X_1 . Wenden wir die Induktionsannahme auf $X_1 - A$ an, so folgt die Existenz einer abgeschlossenen Umgebung U_1 von A in X_1 , so daß A starker Deformationsretrakt von U_1 ist.

Nach Definition des Zellenkomplexes gibt es einen relativen Homöomorphismus

$$\varphi : (D^m, S^{m-1}) \rightarrow (e_i^m \cup X^{m-1}, X^{m-1}) \subset (e_i^m \cup X_1, X_1).$$



Es sei $r : D^m - \{0\} \rightarrow S^{m-1}$ die durch $r(x) = x/\|x\|$ gegebene radiale Projektion. Wir definieren

$$V := \{\varphi(x); x \in D^m, \|x\| \geq \frac{1}{2}, r(x) \in \varphi^{-1}(U_1)\},$$

$$U := U_1 \cup V.$$

Dann ist U eine kompakte Umgebung von A in X . Zusammen mit der nach der Induktionsannahme existierenden Retraktion von U_1 nach A erhalten wir dann, daß A ein starker Deformationsretrakt von U ist. \square

Satz II.9.6 *Es sei X ein Zellenkomplex mit r q -Zellen. Dann gilt*

$$H_j(X^q, X^{q-1}) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq q \\ \mathbb{Z}^r & \text{für } j = q. \end{cases}$$

Beweis. X^{q-1} ist ein Unterkomplex von X^q , und damit nach Satz (II.9.4) starker Deformationsretrakt einer Umgebung von X^{q-1} . Auf Grund der Definition eines Zellenkomplexes gibt es einen relativen Homöomorphismus

$$\varphi : (D_1^q \cup \dots \cup D_r^q, S_1^{q-1} \cup \dots \cup S_r^{q-1}) \rightarrow (X^q, X^{q-1}).$$

Nach Satz (II.9.3) ist φ_* ein Isomorphismus, also

$$\begin{aligned} H_j(X^q, X^{q-1}) &\cong H_j(D_1^q \cup \dots \cup D_r^q, S_1^{q-1} \cup \dots \cup S_r^{q-1}) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^r H_j(D_i^q, S_i^{q-1}) \\ &\cong \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq q \\ \mathbb{Z}^r & \text{für } j = q. \end{cases} \end{aligned}$$

\square

Wir wollen an dieser Stelle noch kurz auf die Begriffe Bettizahl und Eulercharakteristik eingehen. Dazu sei an folgenden algebraischen Sachverhalt erinnert. Jede endlich erzeugt abelsche Gruppe ist von der Form

$$A = \mathbb{Z}^r \oplus T$$

wobei T die Torsionsuntergruppe von A ist. Die Zahl r ist eindeutig bestimmt, und heißt der *Rang* von A .

Wir betrachten im folgenden nur Räume X , deren Homologie $H_*(X)$ endlich erzeugt ist.

Definition (i) Die i -te *Bettizahl* von X ist definiert durch

$$b_i(X) = \text{rang } H_i(X).$$

(ii) Die *Eulerzahl* von X ist definiert durch

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i b_i.$$

Nach Voraussetzung ist diese Summe endlich.

Beispiel Für $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ gilt $b_0 = b_2 = \dots = b_{2n} = 1$ und $b_i = 0$ sonst. Also gilt

$$\chi(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = n + 1.$$

Satz II.9.7 Ist X ein Zellenkomplex der Dimension n , so gilt:

- (i) $H_j(X) = 0$ für $j > n$.
- (ii) $H_*(X)$ ist endlich erzeugt.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis nach n . Für $n = 0$ besteht X aus endlich vielen Punkten und die Aussage ist klar. Für den Induktionsschritt betrachten wir die Sequenz des Paares (X^n, X^{n-1}) :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H_j(X^{n-1}) \rightarrow H_j(X^n) \rightarrow H_j(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{j-1}(X^{n-1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Die Aussage folgt dann aus der Induktionsvoraussetzung und Satz (II.9.6).

□

Schließlich halten wir noch fest:

Satz II.9.8 Ist X ein CW-Komplex mit α_i Zellen der Dimension i , so gilt

$$\chi(X) = \sum (-1)^i \alpha_i.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

III Poincare-Dualität

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz über die Poincare-Dualität.

1 Orientierung auf Mannigfaltigkeiten

Im folgenden sei X stets eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$ (d.h. X ist ein Hausdorffraum und jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung, die homöomorph zu einer Kugel im \mathbb{R}^n ist).

Lemma III.1.1 *Für jeden Punkt $x \in X$ gilt*

$$H_n(X, X - \{x\}) \cong \mathbb{Z}.$$

Beweis. Es sei U eine "Koordinatenumgebung" von x , d.h. U sei homöomorph zu einer offenen Kugel in \mathbb{R}^n . Dann kann man die abgeschlossene Menge $X - U$ aus $X - \{x\}$ ausschneiden und der Ausschneidungssatz liefert einen Isomorphismus

$$H_n(U, U - \{x\}) \cong H_n(X, X - \{x\}).$$

Da U konvex ist, liefert die Sequenz des Paares $(U, U - \{x\})$ einen Isomorphismus

$$H_n(U, U - \{x\}) \cong \tilde{H}_{n-1}(U - \{x\}).$$

Da schließlich $U - \{x\}$ homotop äquivalent zu S^{n-1} ist, folgt

$$\tilde{H}_{n-1}(U - \{x\}) \cong \mathbb{Z}$$

und daher die Behauptung. \square

Ist $n = 2$, so entsprechen die beiden Erzeugenden von $H_n(X, X - \{x\})$ den beiden Homologieklassen, die durch die einfach geschlossenen Wege um x definiert werden. Sie unterscheiden sich um die Orientierung. Im allgemeinen Fall kann man S^{n-1} mit dem Rand des n -Simplex Δ^n identifizieren. Ist $\delta_n : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ das singuläre n -Simplex, das durch die Identität gegeben ist, so entsprechen die beiden Erzeugenden gerade $\pm \partial \delta_n$.

Definition Eine *Orientierung im Punkt x* ist die Wahl eines Erzeugers von $H_n(X, X - \{x\})$.

Wir wollen nun untersuchen, inwieweit man Orientierungen global wählen kann.

Lemma III.1.2 (Fortsetzungslemma): *Es sei $\alpha_x \in H_n(X, X - \{x\})$. Dann gibt es eine Umgebung U von x und ein Element $\alpha \in H_n(X, X - U)$, so daß $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$, wobei*

$$j_x^U : H_n(X, X - U) \rightarrow H_n(X, X - \{x\})$$

die durch die Inklusion definierte Abbildung ist.

Beweis. Es sei $a \in Z_n(X, X - \{x\})$ ein relativer Zykel, der α_x repräsentiert. Dann ist der Träger $|\partial a|$ eine kompakte Menge in $X - \{x\}$. Also ist $U = X - |\partial a|$ eine offene Umgebung von x und $a \in Z_n(X, X - U)$. Wir können für α die durch a repräsentierte Homologieklasse wählen. \square

Satz III.1.3 *Jede Umgebung W von x enthält eine Umgebung U von x , so daß für alle $y \in U$ die Abbildung j_y^U ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Wir wählen eine Koordinatenumgebung V von x in W . Sei $U \subset V$ eine Untermenge, die einer in V enthaltenen Kugel entspricht. Dann haben wir für jedes $y \in U$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X - U) & \xleftarrow{\cong} & H_n(V, V - U) \\ j_y^U \downarrow & & \downarrow \\ H_n(X, X - \{y\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(V, V - \{y\}) \end{array}$$

Dabei sind die horizontalen Pfeile Ausschneidungsisomorphismen. Da $(V, V - U)$ und $(V, V - \{y\})$ homotop äquivalent sind, ist auch der rechte senkrechte Pfeil ein Isomorphismus, und damit auch j_y^U . \square

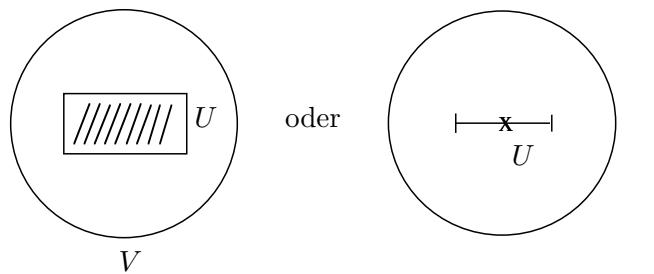
Ein Element $\alpha \in H_n(X, X - U)$ mit $j_x^U(\alpha) = \alpha_x$ heißt eine *Fortsetzung* von α_x . Für $y \in U$ setzen wir

$$\alpha_y := j_y^U(\alpha).$$

Korollar III.1.4 *Ist $\alpha_x \in H_n(X, X - \{x\})$, so gibt es eine Umgebung U von x mit:*

- (i) *α_x kann eindeutig zu $\alpha \in H_n(X, X - U)$ fortgesetzt werden.*
- (ii) *Ist α_x Erzeuger, dann auch α_y für $y \in U$.*

Bemerkung Der Beweis von Satz (III.1.3) zeigt, daß man in diesem Beweis die offene Menge U auch durch einen Quader der Dimension $d \leq n$ ersetzen kann.



Definition Eine Orientierung von X entlang U ist ein Element $\alpha \in H_n(X, X - U)$, so daß α_y für alle $y \in U$ ein Erzeuger ist.

Ist $V \subset U$ so haben wir einen natürlichen Homomorphismus

$$j_V^U : H_n(X, X - U) \rightarrow H_n(X, X - V)$$

so daß für alle $y \in V$ gilt

$$j_y^V(j_V^U(\alpha)) = j_y^U(\alpha).$$

Definition (i) Ein globales Orientierungssystem von X ist eine Familie $(U_i, \alpha_i)_{i \in I}$ wobei

- (a) $(U_i)_{i \in I}$ ist eine offene Überdeckung von X ,
- (b) $\alpha_i \in H_n(X, X - U_i)$ ist eine Orientierung entlang U_i ,
- (c) ist $x \in U_i \cap U_k$, so gilt $j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_k}(\alpha_k) =: \alpha_x$.

(ii) Zwei Orientierungssysteme (U_i, α_i) und (V_j, β_j) heißen äquivalent, falls stets $\alpha_x = \beta_x$.

Definition Eine Mannigfaltigkeit X heißt orientierbar, falls es ein globales Orientierungssystem auf X gibt. Eine Orientierung ist eine Äquivalenzklasse von Orientierungssystemen.

Bemerkung Die folgenden Aussagen sind im wesentlichen offensichtlich:

- (i) Ist X orientierbar und $V \subset X$ offen, so ist auch V orientierbar.
- (ii) X ist genau dann orientierbar, wenn jede Zusammenhangskomponente von X orientierbar ist.

Satz III.1.5 (i) X sei zusammenhängend. Dann stimmen zwei Orientierungen, die in einem Punkt übereinstimmen, überall überein.

(ii) Eine zusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeit besitzt genau zwei Orientierungen.

Beweis. Es genügt (i) zu zeigen. Es sei A die Menge der Punkte, in denen die beiden Orientierungen übereinstimmen. Nach Satz (III.1.3) sind sowohl A als auch $X - A$ offen. \square

Beispiel (i) Für $X = S^n$ gilt $H_n(S^n, S^n - \{x\}) \cong H_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Also kann man ein Orientierungssystem wählen, das aus einer einzigen offenen Menge und einem der beiden Erzeuger besteht.

(ii) Das Möbiusband und $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind nicht orientierbar.

Es sei X eine Mannigfaltigkeit. Dann definieren wir die Menge

$$X_{\mathbb{Z}} := \{(x, \alpha_x); x \in X, \alpha_x \in H_n(X, X - \{x\})\}.$$

Wir haben eine natürliche Abbildung

$$p : X_{\mathbb{Z}} \rightarrow X, \quad (x, \alpha_x) \mapsto x,$$

deren Fasern bijektiv zu \mathbb{Z} sind. Wir wollen nun $X_{\mathbb{Z}}$ zu einem topologischen Raum machen. Eine Basis der Topologie soll aus folgenden Mengen bestehen:

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, \alpha_x); x \in U, \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\}$$

wobei $U \subset X$ offen und $\alpha_U \in H_n(X, X - U)$ ist. Wir müssen zeigen, daß dies tatsächlich die Basis einer Topologie definiert. Sei dazu

$$(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle.$$

Dann gibt es nach Satz (III.1.3) eine Umgebung $U'' \subset U \cap U'$ und ein Element $\alpha_{U''} \in H_n(X, X - U'')$ mit $j_{U''}^U(\alpha_U) = \alpha_{U''} = j_{U''}^{U'}(\alpha_{U'})$, d.h. also

$$\langle U'', \alpha_{U''} \rangle \subset \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle.$$

Mit dieser Topologie wird $p : X_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ eine Überlagerung.

Wir können nun eine Abbildung

$$\begin{aligned} v : X_{\mathbb{Z}} &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ v(x, \alpha_x) &= |\alpha_x| \end{aligned}$$

betrachten, da für $\alpha_x \in H_n(X, X - \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ der Absolutbetrag wohldefiniert ist. Dann besteht

$$X_{\pm} := v^{-1}(1) \subset X_{\mathbb{Z}}$$

aus allen Paaren (x, α_x) , wobei α_x ein Erzeuger ist. Mittels p ist

$$p : X_{\pm} \rightarrow X$$

eine zweifache Überlagerung. X ist genau dann orientierbar, wenn diese Überlagerung einen Schnitt hat, d.h. wenn es eine stetige Abbildung

$$s : X \rightarrow X_{\pm} \text{ mit } p \circ s = \text{id}_X$$

gibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn X_{\pm} in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt. Insbesondere ist jede Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe keine Untergruppe vom Index 2 hat, orientierbar. Dies gilt speziell für einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. Dies führt uns auf folgende

Definition Ist A ein Unterraum von X , so ist ein *Schnitt* über A eine stetige Abbildung $s : A \rightarrow X_{\mathbb{Z}}$ mit $p \circ s = \text{id}_A$. Die Menge der Schnitte wird mit ΓA bezeichnet.

Jeder Schnitt $s \in \Gamma A$ lässt sich in der Form

$$s(x) = (x, s'(x)), \quad s'(x) \in H_n(X, X - \{x\})$$

darstellen. Zwei Schnitte $s_1, s_2 \in \Gamma A$ lassen sich addieren durch

$$(s_1 + s_2)(x) := (x, s'_1(x) + s'_2(x))$$

sowie mit einer Zahl $n \in \mathbb{Z}$ multiplizieren:

$$(ns)(x) := (x, ns'(x)).$$

Damit wird ΓA zu einer abelschen Gruppe, bzw. einem \mathbb{Z} -Modul.

Definition (i) $X_{\mathbb{Z}}$ heißt die *Orientierungsgarbe* von X .

(ii) Schnitte, die über ganz X definiert sind, heißen *globale Schnitte*.

Definition Wir sagen, daß X orientierbar entlang eines Unterraums A ist, wenn es einen Schnitt $s \in \Gamma A$ gibt mit $s(a) \in X_{\pm}$ für alle $a \in A$ (d.h. $s'(a) \in H_n(X, X - \{a\})$ ist Erzeuger).

Satz III.1.6 X ist genau dann orientierbar entlang A , wenn es einen Homöomorphismus $\Phi : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{Z}$ gibt (hierbei trägt \mathbb{Z} die diskrete Topologie), so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(A) & \xrightarrow{\Phi} & A \times \mathbb{Z} \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & A & \end{array}$$

kommutiert. Ist X orientierbar entlang A und hat A genau k Zusammenhangskomponenten, so gilt $\Gamma A = \mathbb{Z}^k$.

Beweis. Ist X orientierbar entlang A , so gibt es einen Schnitt $s : A \rightarrow v^{-1}(1)$. Insbesondere ist $s'(x) \in H_n(X, X - \{x\})$ ein Erzeuger. Also gibt es zu jedem $(x, \alpha_x) \in p^{-1}(A)$ ein $\lambda_x \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha_x = \lambda_x s'(x)$. Wir definieren

$$\Phi : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{Z}, \quad (x, \alpha_x) \mapsto (x, \lambda_x).$$

Ist U eine offene Menge, so daß α_x eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\alpha_U \in H_n(X, X - U)$ besitzt, so bildet Φ die offene Menge $\langle U, \alpha_U \rangle$ auf $U \times \{\lambda_x\}$

ab. Da Φ offensichtlich bijektiv ist, ist es ein Homöomorphismus. Ist umgekehrt Φ gegeben, so erhält man eine Orientierung durch $s(x) := \Phi^{-1}(x, 1)$.

□

Wir betrachten nun den kanonischen Homomorphismus

$$\begin{aligned} j_A : H_n(X, X - A) &\rightarrow \Gamma A \\ j_A(\alpha)(x) &:= (x, j_x^A(\alpha)). \end{aligned}$$

(Die Stetigkeit der Abbildung $j_A(\alpha)$ folgt sofort aus der Konstruktion der Topologie auf $X_{\mathbb{Z}}$). Ist $B \subset A$, so haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X - A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma A \\ j_B^A \downarrow & & \downarrow r \\ H_n(X, X - B) & \xrightarrow{j_B} & \Gamma B \end{array}$$

wobei r die Einschränkung von Schnitten bedeutet.

Definition Wir sagen, daß $s \in \Gamma A$ *kompakten Träger* hat, falls es eine kompakte Menge K in A gibt, mit $s(x) = (x, 0)$ für $x \notin K$.

Die Menge der Schnitte mit kompaktem Träger wird mit $\Gamma_c A$ bezeichnet. $\Gamma_c A$ ist ein Untermodul von ΓA . Ist A kompakt, so ist $\Gamma_c A = \Gamma A$.

Theorem III.1.7 *Es sei X eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und A eine abgeschlossene Teilmenge von X . Dann gilt:*

- (i) $H_q(X, X - A) = 0$ für $q > n$
- (ii) j_A ist injektiv mit Bild $\Gamma_c A$, d.h.

$$j_A : H_n(X, X - A) \xrightarrow{\cong} \Gamma_c A.$$

Insbesondere gilt $j_X : H_n(X) \xrightarrow{\cong} \Gamma_c X$ und $H_q(X) = 0$ für $q > n$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir einige Folgerungen festhalten.

Korollar III.1.8 *Ist A abgeschlossen, zusammenhängend und nicht kompakt, dann ist $H_n(X, X - A) = 0$. Insbesondere ist $H_n(X) = 0$, falls X zusammenhängend und nicht kompakt ist.*

Beweis. Es sei $\alpha \in H_n(X, X - A)$. Da A zusammenhängend ist, ist $v(j_A(\alpha))$ konstant. Da $j_A(\alpha)$ kompakten Träger hat, und A nicht kompakt ist, folgt $v(j_A(\alpha)) = 0$, d.h. $j_A(\alpha) = 0$ und da j_A injektiv ist, auch $\alpha = 0$. □

Korollar III.1.9 *A sei kompakt und habe k Zusammenhangskomponenten. Ist X orientierbar entlang A , so gilt $H_n(X, X - A) \cong \mathbb{Z}^k$.*

Beweis. Aus Satz (III.1.6) folgt, da A kompakt ist, $\Gamma_c A = \Gamma A \cong \mathbb{Z}^k$. \square

Korollar III.1.10 *Es sei A eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, mit k Zusammenhangskomponenten. Dann ist $b_{n-1}(\mathbb{R}^n - A) = k$.*

Beweis. Es gilt

$$H_{n-1}(\mathbb{R}^n - A) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - A) \cong \mathbb{Z}^k$$

nach Korollar (III.1.9), da \mathbb{R}^n orientierbar ist. \square

Korollar III.1.11 *Es sei X eine kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } X \text{ orientierbar ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Falls X orientierbar ist, gilt nach Satz (III.1.6), daß $\Gamma_c X = \Gamma X = \mathbb{Z}$. Sei umgekehrt $s \in \Gamma X$ mit $s \neq 0$. Dann ist $v(s(x))$ konstant, und von 0 verschieden. Also erhält man eine Orientierung durch $s(x) = (x, s'(x)/a)$ mit $a = v(s(x))$. \square

Bemerkung Dies zeigt, daß $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ nicht orientierbar ist.

Ist X kompakt, zusammenhängend und orientierbar, so entspricht eine Orientierung einem Erzeuger $\varphi \in H_n(X)$. Die lokale Orientierung im Punkt x ist dann gegeben durch $j_x^X(\varphi) \in H_n(X, X - \{x\})$.

Definition Die Klasse φ heißt die *Fundamentalklasse* der orientierten Mannigfaltigkeit X .

Bevor wir Theorem (III.1.7) beweisen können, benötigen wir noch folgenden

Satz III.1.12 *Es sei X ein topologischer Raum, A_1, A_2 seien abgeschlossene Teilmengen von X und $A = A_1 \cup A_2$. Dann gibt es eine Mayer-Vietoris Sequenz*

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow H_q(X, X - A) \rightarrow H_q(X, X - A_1) \oplus H_q(X, X - A_2) \\ &\rightarrow H_q(X, X - A_1 \cap A_2) \rightarrow H_{q-1}(X, X - A) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Beweis. Analog zum Beweis der Mayer-Vietoris Sequenz. \square

Beweis von Theorem (III.1.7): Wir gehen in mehreren Schritten vor.

0. Schritt: $A = \emptyset$. Hier ist die Aussage trivial.

1. Schritt: Falls die Aussage für A_1, A_2 und $A_1 \cap A_2$ gilt, dann auch für $A = A_1 \cup A_2$. Die Mayer-Vietoris Sequenz von Satz (III.1.12) liefert zunächst $H_q(X, X - A) = 0$ für $q > n$ und weiter ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_n(X, X - A) & \longrightarrow & H_n(X, X - A_1) \oplus H_n(X, X - A_2) & \longrightarrow & H_n(X, X - A_1 \cap A_2) \\
 & & \downarrow j_A & & \cong \downarrow j_{A_1} \oplus j_{A_2} & & \cong \downarrow j_{A_1 \cap A_2} \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma_c A & \xrightarrow{(r_1, -r_2)} & \Gamma_c A_1 \oplus \Gamma_c A_2 & \xrightarrow{r_1 + r_2} & \Gamma_c(A_1 \cap A_2)
 \end{array}$$

wobei r_1, r_2 die Einschränkungsabbildungen sind. (Die Bilder unter j_A haben kompakte Träger, da dies für j_{A_1} und j_{A_2} gilt.) Aus dem Fünferlemma folgt dann, daß j_A ein Isomorphismus ist.

2. Schritt: Wir nehmen an, daß A kompakt und zusammenhängend und in einer Koordinatenumgebung enthalten ist. Mittels Ausschneidung können wir X durch D^n ersetzen, d.h. $H_q(X, X - A) = H_q(D^n, D^n - A)$.

Fall 1: A ist ein Quader der Dimension $\leq n$. Dann gilt $H_q(D^n, D^n - A) \cong \tilde{H}_{q-1}(D^n - A) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$. Insbesondere ist $H_q(D^n, D^n - A) = 0$ für $q > n$. Dies zeigt (i). Die Aussage (ii) folgt, da $\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z} = \Gamma A$, wobei wir bei der letzten Gleichheit die Orientierbarkeit von D^n und Satz (III.1.6) verwenden.

Fall 2: $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ wobei die A_i Quader sind, deren Seiten parallel zu Koordinatenebenen sind. Wegen Fall 1 können wir schon annehmen, daß $m \geq 2$ ist. Wir machen Induktion nach m . Sei $A' = A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$. Dann ist $A' \cap A_m$ vom selben Typ und besteht aus höchstens $m-1$ Quadern (möglicherweise kleinerer Dimension). Also können wir die Induktionsvoraussetzung auf A' und $A' \cap A_m$ anwenden und dann mit Schritt 1 schließen.

Fall 3: A kompakt.

Wir beweisen zunächst die Surjektivität von j_A . Es sei also $s \in \Gamma A$ gegeben. Auf Grund von Satz (III.1.6) gibt es $s^* \in \Gamma X$ mit $s^*|A = s$ (beachte, daß $s(A)$ wegen des Zusammenhangs der Menge a das Bild in einer Komponente von $p^{-1}X$ liegen muß). Wir wählen nun zu jedem $x \in A$ einen Quader in X der Dimension n , der X in seinem Inneren enthält, und dessen Seiten parallel zu den Koordinatenebenen liegen. Es sei A' die Vereinigung endlich vieler solcher Quadern, die A umfaßt. Dann haben wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(X, X - A') & \xrightarrow[j_{A'}]{\cong} & \Gamma A' \ni s^*|A' \\
 j_{A'}^A \downarrow & & \downarrow \\
 H_n(X, X - A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma A \ni s
 \end{array}$$

wobei $j_{A'}$ nach Fall 2 ein Isomorphismus ist. Also ist

$$s = j_A \left(j_{A'}^{A'} (j_{A'}^{-1}(s^*|A')) \right).$$

Es sei nun $\alpha \in H_n(X, X - A)$ mit $j_A(\alpha) = 0$. Wir müssen zeigen, daß $\alpha = 0$. Es sei z ein relativer Zykel, der α repräsentiert. Dann ist $V = X - |\partial z|$ eine offene Menge, die A enthält. Es sei α' die Homologieklasse von z in $H_n(X, X - V)$. Es gilt $j_x^V(\alpha') = j_x^A(\alpha) = 0$ für alle $x \in A$. Also gibt es nach Korollar (III.1.4) eine offene Umgebung V' mit $A \subset V' \subset V$, so daß $j_x^V(\alpha') = 0$ für alle $x \in V'$. Wir konstruieren nun ein A' wie oben mit $A \subset A' \subset V'$. Dann gilt $j_{A'}(\alpha)(x) = j_x^V(\alpha') = 0$ für alle $x \in A'$. Mit Hilfe von Fall 2 schließen wir dann, daß $\alpha' = 0$ ist und damit auch $\alpha = 0$. Ein analoges Argument zeigt auch, daß $H_q(X, X \setminus A) = 0$ für $q > n$.

3. Schritt: A ist kompakt.

Dann ist A endliche Vereinigung von kompakten, zusammenhängenden Mengen A_1, \dots, A_m , die in Koordinatenumgebungen liegen. Wir machen dann unter Verwendung von Schritt 1 und Schritt 2 einen Induktionsbeweis.

4. Schritt: $A \subset U, U$ offen, aber \bar{U} kompakt. Dann gilt der Satz für das Paar (U, A) .

Wir betrachten das Tripel

$$(X, U \cup (X - \bar{U}), (U - A) \cup (X - \bar{U})).$$

Mit Hilfe des Ausschneidungssatzes folgt

$$H_q(U, U - A) \cong H_q(U \cup (X - \bar{U}), (U - A) \cup (X - \bar{U})).$$

Dann liefert uns die exakte Homologiesequenz des obigen Tripels

$$\dots \rightarrow H_{q+1}(X, U \cup (X - \bar{U})) \rightarrow H_q(U, U - A) \rightarrow H_q(X, (U - A) \cup (X - \bar{U})) \rightarrow \dots$$

Wir können Schritt 3 für die Mannigfaltigkeit X und die kompakten Mengen $\bar{U} - U$ und $\bar{A} \cup (\bar{U} - U)$ anwenden. Daraus ergibt sich, daß die beiden äußeren Terme der obigen Sequenz und damit auch der mittlere für $q > n$ gleich 0 sind. Für $q = n$ haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(U, U - A) & \longrightarrow & H_n(X, (U - A) \cup (X - \bar{U})) & \longrightarrow & H_n(X, U \cup (X - \bar{U})) \\ & & \downarrow j_A & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c A & \xrightarrow{i} & \Gamma_c(\bar{A} \cup (\bar{U} - U)) & \xrightarrow{r} & \Gamma_c(\bar{U} - U). \end{array}$$

Dabei ist r die Einschränkung und i ist wie folgt definiert: Es sei $s \in \Gamma_c A$. Dann ist $s = 0$ außerhalb einer kompakten Menge $K \subset A$ und wir setzen

$$i(s) = \begin{cases} s \text{ auf } A \\ 0 \text{ außerhalb von } K. \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert und stetig. Die Abbildung i ist injektiv und das Diagramm zeigt, daß j_A ein Isomorphismus ist (es zeigt insbesondere auch, daß das Bild von j_A in $\Gamma_c A$ enthalten ist).

5. Schritt: Der allgemeine Fall. Wir stellen zunächst fest, daß alle Elemente im Bild von j_A kompakten Träger haben: Ist $\alpha \in H_n(X, X - A)$, so wähle man einen repräsentierenden Zykel z von α . Dann ist der Träger $|z|$ von z kompakt, und wegen des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_n(|z|, |z| - A) & \longrightarrow & H_n(X, X - A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(|z|, |z| - \{x\}) & \longrightarrow & H_n(X, X - \{x\}) \end{array}$$

folgt $j_A(\alpha)(x) = 0$ falls $x \notin |z|$.

Wir zeigen als nächstes, daß das Bild von j_A ganz $\Gamma_c A$ ist. Es sei dazu $s \in \Gamma_c A$ und $K \subset A$ kompakt mit $s = 0$ außerhalb von K . Dann können wir eine offene Umgebung U von K wählen mit \bar{U} kompakt. Wir betrachten $A' = A \cap U$ und den Schnitt $s' = s|_{A'}$. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U - A') & \longrightarrow & H_n(X, X - A) \\ \cong \downarrow j_{A'} & & \downarrow j_A \\ s' \in \Gamma_c A' & \xrightarrow{i} & \Gamma_c A \ni s. \end{array}$$

Hierbei ist $j_{A'}$ auf Grund von Schritt 4 ein Isomorphismus. Damit ist die Surjektivität gezeigt.

Es sei nun $\alpha \in H_q(X, X - A)$ mit $q > n$ oder es sei $q = n$ und $j_A(\alpha) = 0$. Wir müssen zeigen, daß $\alpha = 0$. Wir wählen eine offene Menge U mit $|z| \subset U$ und \bar{U} kompakt, wobei z wieder α repräsentiert. Es sei wieder $A' = A \cap U$. Für $q = n$ folgt die Aussage aus obigem Diagramm. Für $q > n$ verwenden wir wieder Schritt 4 (ist z homolog zu einem Zykel in $U - A'$, dann erst recht in $X - A$). \square

2 Kohomologie

In diesem Abschnitt führen wir die Kohomologiegruppen ein. Diese spielen bei den Dualitätssätzen auf Mannigfaltigkeiten eine entscheidende Rolle.

Sind A und G abelsche Gruppen, so ist die Menge der Gruppenhomomorphismen von A nach G

$$\text{Hom}(A, G) = \{\varphi; \varphi : A \rightarrow G \text{ ist Homomorphismus}\}$$

selbst wieder eine Gruppe, wobei die Verknüpfung gegeben wird durch

$$(\varphi + \psi)(a) := \varphi(a) + \psi(a).$$

Wir halten nun die abelsche Gruppe G fest. Zu jedem Gruppenhomomorphismus $f : A \rightarrow B$ gibt es einen G -dualen Homomorphismus

$$\begin{aligned} f^\# : \text{Hom}(B, G) &\rightarrow \text{Hom}(A, G) \\ \varphi &\mapsto f^\#(\varphi) = \varphi \circ f. \end{aligned}$$

Es gilt $\text{id}^\# = \text{id}$. Ist $g : B \rightarrow C$ ein weiterer Homomorphismus, so ist $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$. Damit wird die Zuordnung $A \mapsto \text{Hom}(A, G)$, $f \mapsto f^\#$ zu einem *kontravarianten Funktor*.

Definition Man sagt, die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

spaltet, wenn g ein Rechtsinverses besitzt, d.h. es gibt einen Homomorphismus $r : C \rightarrow B$ mit $g \circ r = \text{id}_C$.

Man drückt dies meist mit folgender Notation aus:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\begin{smallmatrix} g \\ \uparrow r \end{smallmatrix}} C \rightarrow 0.$$

Satz III.2.1 Es sei $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Sequenz spaltet.
- (ii) Es gibt zu f ein Linksinverses, d.h. einen Homomorphismus $l : B \rightarrow A$ mit $l \circ f = \text{id}_A$.
- (iii) Es gibt einen Isomorphismus $\varphi : A \oplus C \rightarrow B$ mit $\varphi(a, 0) = f(a)$ und $g \circ \varphi(a, c) = c$.

Beweis. (i) \Rightarrow (iii). Wir definieren $\varphi(a, c) = f(a) + r(c)$. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus C & \xrightarrow{\pi_C} & C \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \varphi & & \downarrow \text{id}_C \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

und das Fünferlemma zeigt, daß φ ein Isomorphismus ist.

(iii) \Rightarrow (i). Setze $r(c) = \varphi(0, c)$.

(ii) \Rightarrow (iii). Wir erhalten einen Isomorphismus $\psi : B \rightarrow A \oplus C$ durch $\psi(b) = l(b) + g(b)$ und setzen dann $\varphi = \psi^{-1}$.

(iii) \Rightarrow (ii). Es sei $\psi = \varphi^{-1}$. Dann erhalten wir l durch $l(b) = (\pi_A \circ \psi)(b)$. \square

Daß nicht jede kurze exakte Sequenz von Gruppen spaltet, zeigt das Beispiel

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow 0.$$

Andererseits gilt der

Satz III.2.2 *Ist $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen und C eine freie abelsche Gruppe, so spaltet die Sequenz.*

Beweis. Es sei $(c_i)_{i \in I}$ eine Basis von C . Da g surjektiv ist, können wir $b_i \in B$ wählen mit $g(b_i) = c_i$. Dann wird durch $r(c_i) = b_i$ ein Gruppenhomomorphismus $r : C \rightarrow B$ definiert, für den $g \circ r = \text{id}_C$ gilt. \square

Satz III.2.3 (i) *Ist $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz, so ist auch die Sequenz*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, G) \xrightarrow{g^\#} \text{Hom}(B, G) \xrightarrow{f^\#} \text{Hom}(A, G)$$

exakt.

(ii) *Ist $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ eine kurze exakte spaltende Sequenz, so gilt dasselbe für*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, G) \xrightarrow{g^\#} \text{Hom}(B, G) \xrightarrow{f^\#} \text{Hom}(A, G) \rightarrow 0.$$

Beweis. (i) $g^\#$ ist injektiv: $0 = g^\#(\varphi) = \varphi \circ g$ impliziert $\varphi = 0$, da g surjektiv ist. Die Aussage $\text{im } g^\# \subset \ker f^\#$ folgt wegen $f^\# \circ g^\# = (g \circ f)^\# = 0^\# = 0$. Es bleibt $\ker f^\# \subset \text{im } g^\#$ zu zeigen. Es sei dazu $\varphi \in \text{Hom}(B, G)$ mit $0 = f^\#(\varphi) = \varphi \circ f$. Also ist $\varphi|_{\text{im } f = \ker g} = 0$. Damit ist $\psi(c) = \varphi(g^{-1}\{c\})$ für $c \in C$ wohldefiniert und liefert einen Homomorphismus $\psi : C \rightarrow G$ mit $\varphi = \psi \circ g = g^\#(\psi)$, d.h. es ist $\varphi \in \text{im } g^\#$.

(ii) Dies folgt aus Satz (II.2.1): Ist $l : B \rightarrow A$ ein Linksinverses von f , d.h. gilt $l \circ f = \text{id}_A$, so folgt $f^\# \circ l^\# = \text{id}_{\text{Hom}(A, G)}$, d.h. $l^\#$ ist Rechtsinverses von $f^\#$ und insbesondere ist $f^\#$ surjektiv. \square

Das Beispiel vor Satz (II.2.2) zeigt auch, daß $f^\#$ im allgemeinen nicht surjektiv ist. Man sagt auch, daß $\text{Hom}(-, G)$ ein linksexakter Funktor ist. Wir wollen nun messen, inwieweit $f^\#$ nicht surjektiv ist.

Definition Eine *freie Auflösung* von A ist eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$$

wobei F eine freie abelsche Gruppe ist.

Beispiele (1) Die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow 0$$

ist eine freie Auflösung von \mathbb{Z}/n .

(2) Jede abelsche Gruppe A besitzt eine freie Auflösung. Wir betrachten hierzu die durch die Menge A erzeugte freie abelsche Gruppe

$$F(A) = \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{Z}; \quad \varphi(a) = 0 \text{ für fast alle } a \in A\}.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} p : F(A) &\rightarrow A \\ \varphi &\mapsto \sum_{a \in A} \varphi(a)a \end{aligned}$$

ist surjektiv. Ist $R = \ker p$, so ist

$$0 \rightarrow R \rightarrow F(A) \rightarrow A \rightarrow 0$$

eine freie Auflösung von A . Wir nennen dies die *Standardauflösung*.

Definition Es sei $0 \rightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \rightarrow 0$ eine freie Auflösung der abelschen Gruppe A . Definiere

$$\text{Ext}(A, G) = \text{Hom}(R, G) / \text{im}(i^\#).$$

Satz III.2.4 $\text{Ext}(A, G)$ hängt nur von den Gruppen A und G , nicht jedoch von der Wahl der freien Auflösung ab.

Beweis.

(a) Es sei $0 \rightarrow R' \xrightarrow{i'} F' \xrightarrow{p'} A \rightarrow 0$ eine weitere freie Auflösung der Gruppe A . Wir definieren zunächst Homomorphismen $f : F \rightarrow F'$ und $f' : R \rightarrow R'$ so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{p} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & \searrow p & \\ 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{i'} & F' & \xrightarrow{p'} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

kommutiert. Dies geschieht wie folgt: Es sei B eine Basis von F . Zu jedem $b \in B$ wählen wir ein Element $x'_b \in F'$ mit $p'(x'_b) = p(b)$ und definieren $f : F \rightarrow F'$ durch $f(b) = x'_b$. Dann gilt $p' \circ f = p$. Daher gilt auch $p' \circ f \circ i = p \circ i = 0$, d.h. $\text{im}(f \circ i) \subset \ker p' = \text{im } i'$. Wir können also

$$f' = i'^{-1} \circ f \circ i$$

setzen (wobei i'^{-1} auf $\text{im } i'$ wohldefiniert ist).

(b) Sind nun $f_1 : F \rightarrow F'$ und $f'_1 : R \rightarrow R'$ weitere solche Homomorphismen, so gibt es einen Homomorphismus $\alpha : F \rightarrow R'$ mit $f - f_1 = i' \circ \alpha$ und $f' - f'_1 = \alpha \circ i$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{p} & A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f' - f'_1 & \swarrow \alpha & \downarrow f - f_1 & \searrow p' & \\
 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{i'} & F' & &
 \end{array}$$

Für $x \in F$ ist nämlich $f(x) - f_1(x) \in \ker p' = \text{im } i'$, d.h. man kann definieren

$$\alpha = i'^{-1} \circ (f - f_1).$$

Damit folgt sofort, daß $i' \circ \alpha = f - f_1$ und weiterhin

$$i' \circ (f' - f'_1) = (f - f_1) \circ i = i' \circ \alpha \circ i.$$

Da i' injektiv ist, ergibt dies

$$f' - f'_1 = \alpha \circ i.$$

(c) Das duale Diagramm sieht nun wie folgt aus

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Hom}(F, G) & \xrightarrow{i^\#} & \text{Hom}(R, G) \\
 & \nearrow p^\# & \uparrow f^\# & & \uparrow (f')^\# \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(A, G) & & \\
 & \searrow (p')^\# & & & \\
 & & \text{Hom}(F', G) & \xrightarrow{(i')^\#} & \text{Hom}(R', G).
 \end{array}$$

Wegen der Kommutativität des Diagramms bildet $(f')^\#$ insbesondere das Bild $\text{im}(i')^\#$ nach $\text{im } i^\#$ ab, d.h. $(f')^\#$ induziert einen Isomorphismus

$$\psi : \text{Hom}(R', G) / \text{im}(i')^\# \rightarrow \text{Hom}(R, G) / \text{im } i^\#.$$

Dieser Homomorphismus hängt nicht von der Wahl von f und f' ab: Ist nämlich $\varphi' \in \text{Hom}(R', G)$, dann gilt

$$((f')^\# - (f'_1)^\#)(\varphi') = (\alpha i)^\#(\varphi') = i^\#(\alpha^\# \varphi') \in \text{im } i^\#.$$

(d) Durch Vertauschen der Rollen der beiden Auflösungen erhält man umgekehrt einen Homomorphismus

$$\psi' : \text{Hom}(R, G) / \text{im } i^\# \rightarrow \text{Hom}(R', G) / \text{im } (i')^\#.$$

Aus (c) folgt $\psi \circ \psi' = \text{id}$ und $\psi' \circ \psi = \text{id}$ und damit die Behauptung. \square

Satz III.2.5 *Es gelten folgende Aussagen:*

- (i) *Ist A eine freie abelsche Gruppe, so gilt $\text{Ext}(A, G) = 0$ für jede Gruppe G .*
- (ii) $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n, G) \cong G/nG$ für $n > 0$ wobei $nG = \{ng; g \in G\}$.
- (iii) $\text{Ext}(A_1 \oplus A_2, G) \cong \text{Ext}(A_1, G) \oplus \text{Ext}(A_2, G)$.

Beweis.

- (i) Ist A eine freie abelsche Gruppe, so ist

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\text{id}} A \rightarrow 0$$

eine freie Auflösung von A .

- (ii) Dualisiert man die freie Auflösung

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/n \rightarrow 0$$

so erhält man

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}/n, G) \xrightarrow{p^\#} \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G \xrightarrow{n} \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G.$$

- (iii) Sind $0 \rightarrow R_i \rightarrow F_i \rightarrow A_i \rightarrow 0$ freie Auflösungen von A_i für $i = 1, 2$, so ist

$$0 \rightarrow R_1 \oplus R_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow 0$$

eine freie Auflösung von $A_1 \oplus A_2$. \square

Es sei nun (C_*, ∂) ein Kettenkomplex. Anwendung des Funktors $\text{Hom}(-, G)$ ergibt

$$\begin{aligned} C^q &:= \text{Hom}(C_q, G) \\ \delta_{q-1} &:= \partial_q^\# : C^{q-1} \rightarrow C^q \end{aligned}$$

mit $\delta_q \circ \delta_{q-1} = \partial_{q+1}^\# \circ \partial_q^\# = (\partial_q \circ \partial_{q+1})^\# = 0$. Dies führt auf die folgende Definition.

Definition Ein *Kettenkomplex* (C^*, δ) ist eine Sequenz von abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$\dots \xrightarrow{\delta} C^q \xrightarrow{\delta} C^{q+1} \xrightarrow{\delta} \dots$$

mit $\delta^2 = 0$.

Definition (i) Ist (C^*, δ) ein Kokettenkomplex so heißt

$$Z^q(C) = \ker(\delta : C^q \rightarrow C^{q+1})$$

die Gruppe der *q-Kozykel*.

(ii) Die Gruppe der *q-Koränder* ist definiert durch

$$B^q(C) = \text{im } (\delta : C^{q-1} \rightarrow C^q).$$

(iii) Die *q-te Kohomologiegruppe* von (C^*, δ) ist

$$H^q(C) = Z^q(C)/B^q(C).$$

Beispiel Es sei U ein Gebiet in \mathbb{R}^n , und $\Omega^q(U)$ der Vektorraum der *q*-Formen. Zusammen mit der äußeren Ableitung $d : \Omega^q(U) \rightarrow \Omega^{q+1}(U)$ erhalten wir einen Kokettenkomplex $(\Omega^*(U), d)$. Die *q-te de Rhamsche Kohomologiegruppe* ist definiert durch

$$H_{dR}^q(U) = Z^q(\Omega^*(U))/B^q(\Omega^*(U)).$$

Die Elemente in $Z^q(\Omega^*(U))$ heißen die *geschlossenen* Formen, die Elemente in $B^q(\Omega^*(U))$ die *exakten* Formen. Das Poincarsche Lemma besagt dann für konvexe Mengen, daß jede geschlossene Form exakt ist, d.h., daß $H_{dR}^q(U) = 0$ ist für $q > 0$, falls U konvex ist.

Definition (i) Sind (C^*, δ) und (D^*, δ') Kokettenkomplexe, so ist eine Kokettenabbildung $f : C^* \rightarrow D^*$ eine Familie von Homomorphismen $f^q : C^q \rightarrow D^q$ mit $f \circ \delta = \delta' \circ f$.

(ii) Zwei Kokettenabbildungen f und g heißen *kokettenhomotop*, falls es eine Familie von Homomorphismen $K^q : C^q \rightarrow D^{q-1}$ gibt mit $\delta' K + K \delta = f - g$.

Wir betrachten nun wieder den Fall, daß $C = (C_*, \partial)$ ein Kettenkomplex ist, und definieren (C^*, δ) durch $C^q = \text{Hom}(C_q, G)$ und $\delta = \partial^\#$, wobei wir die Gruppe G fest gewählt haben. In diesem Fall benutzen wir die Bezeichnung

$$H^q(C, G) = H^q(C^*).$$

Ist $f : (C_*, \partial) \rightarrow (D_*, \partial')$ eine Kettenabbildung, so ist $f^\# : (D^*, \delta') \rightarrow (C^*, \delta)$ eine Kokettenabbildung und definiert daher einen Homomorphismus

$$f^* : H^*(D, G) \rightarrow H^*(C, G).$$

Sind f und g kettenhomotop, so sind $f^\#$ und $g^\#$ kokettenhomotop und es gilt $f^* = g^*$.

Ist $\varphi \in C^q = \text{Hom}(C_q, G)$ und $c \in C_q$, so setzen wir

$$\langle \varphi, c \rangle := \varphi(c).$$

Hierdurch erhalten wir eine bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C^q \times C_q \rightarrow G$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned}\langle \varphi_1 + \varphi_2, c \rangle &= \langle \varphi_1, c \rangle + \langle \varphi_2, c \rangle \\ \langle \varphi, c_1 + c_2 \rangle &= \langle \varphi, c_1 \rangle + \langle \varphi, c_2 \rangle.\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\langle \delta\varphi, c \rangle = \langle \varphi, \partial c \rangle. \quad (1)$$

Beispiel Ist $C^q = \Omega^q(U)$, so haben wir eine Bilinearform

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega^q(U) \times S_q(U) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \langle \omega, c \rangle &= \int_c \omega.\end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß diese Bilinearform nicht ausgeartet ist und damit $\Omega^q(U)$ mit $\text{Hom}(S_q(U), \mathbb{R})$ identifizieren. Dann entspricht Formel (1) gerade dem Satz von Stokes.

Es gilt nun

$$\begin{aligned}\varphi \in Z^q(C) &\Leftrightarrow \langle \delta\varphi, c' \rangle = 0 \quad \text{für } c' \in C_{q+1} \\ &\Leftrightarrow \langle \varphi, \partial c' \rangle = 0 \quad \text{für } c' \in C_{q+1} \\ &\Leftrightarrow \varphi|_{B_q(C)} \equiv 0.\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\varphi \in B^q(C) &\Leftrightarrow \varphi = \delta\varphi' \text{ für ein } \varphi' \in C^{q-1} \\ &\Rightarrow \langle \varphi, c \rangle = \langle \delta\varphi', c \rangle = \langle \varphi', \partial c \rangle \text{ für } c \in Z_q(C) \\ &\Rightarrow \varphi|_{Z_q(C)} \equiv 0.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : H^q(C, G) \times H_q(C) &\rightarrow G \\ \langle [\varphi], [c] \rangle &= \langle \varphi, c \rangle\end{aligned}$$

definiert.

Definition Man nennt die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das *Kroneckerprodukt*.

Dieses Produkt bestimmt wiederum einen Homomorphismus

$$\begin{aligned}\kappa : H^q(C, G) &\rightarrow \text{Hom}(H_q(C), G) \\ \kappa(\alpha')(\alpha) &:= \langle \alpha', \alpha \rangle\end{aligned}$$

für $\alpha' \in H^q(C, G)$ und $\alpha \in H_q(C)$.

Wir wollen nun die Eigenschaften des Homomorphismus κ untersuchen.

Definition Ein Kettenkomplex $C = (C_*, \partial)$ heißt *frei*, wenn alle C_q freie abelsche Gruppen sind.

Nach einem nichttrivialen Satz der Algebra ist jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe wieder frei. Also sind insbesondere die Untergruppen $Z_q = \ker \partial_q$ und $B_q = \text{im } \partial_{q+1}$ frei, falls C ein freier Komplex ist. Nach Satz (III.2.2) spaltet die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow Z_q \xrightarrow{j_q} C_q \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} B_{q-1} \rightarrow 0,$$

wobei j_q die Inklusion und $\tilde{\partial}_q(x) = \partial_q(x)$ ist. Nach Satz (III.2.3) ist die duale Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(B_{q-1}, G) \xrightarrow{\tilde{\partial}_q^\#} \text{Hom}(C_q, G) \xrightarrow{j_q^\#} \text{Hom}(Z_q, G) \rightarrow 0$$

ebenfalls exakt und spaltet.

Außerdem hat man die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow B_{q-1} \xrightarrow{i_{q-1}} Z_{q-1} \xrightarrow{p_{q-1}} H_{q-1}(C) \rightarrow 0.$$

Dies ist eine freie Auflösung von $H_{q-1}(C)$. Nach Satz (III.2.4) gilt dann

$$\text{Ext}(H_{q-1}(C), G) = \text{Hom}(B_{q-1}, G) / \text{im } i_{q-1}^\#.$$

Lemma III.2.6 Der Homomorphismus $\tilde{\partial}_q^\#$ bildet $\text{Hom}(B_{q-1}, G)$ nach Z^q und $\text{im } i_{q-1}^\#$ nach B^q ab, induziert also einen Homomorphismus

$$\bar{\delta} : \text{Ext}(H_{q-1}(C), G) \rightarrow H^q(C, G).$$

Beweis. a) Es sei $\varphi \in \text{Hom}(B_{q-1}, G)$. Dann gilt

$$\delta_q(\tilde{\partial}_q^\#(\varphi)) = \delta_q(\varphi \tilde{\partial}_q) = \partial_{q+1}^\#(\varphi \tilde{\partial}_q) = \varphi \tilde{\partial}_q \partial_{q+1} = 0.$$

Also gilt $\tilde{\partial}_q^\#(\varphi) \in Z^q$.

b) Es sei $\varphi \in \text{im } i_{q-1}^\#$. Dann gibt es einen Homomorphismus $\varphi' \in \text{Hom}(Z_{q-1}, G)$ mit $\varphi = \varphi'|_{B_{q-1}}$. Da die Sequenz

$$0 \rightarrow Z_{q-1} \xrightarrow{j_{q-1}} C_{q-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{q-1}} B_{q-2} \rightarrow 0$$

spaltet, gibt es einen Homomorphismus $l : C_{q-1} \rightarrow Z_{q-1}$ mit $l \circ j_{q-1} = \text{id}$. Definiere

$$\psi = \varphi' l \in \text{Hom}(C_{q-1}, G).$$

Dann ist $\psi \in C^{q-1}$ und $\psi|_{B_{q-1}} = \varphi$. Also gilt

$$\delta_{q-1}(\psi) = \psi \partial_q = \varphi \tilde{\partial}_q = \tilde{\partial}_q^\#(\varphi),$$

d.h. $\tilde{\partial}_q^\#(\varphi) \in B^q$. □

Theorem III.2.7 (Universelles Koeffiziententheorem:) Ist C ein freier Kettenkomplex, so ist für jedes $q \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{q-1}(C), G) \xrightarrow{\bar{\delta}} H^q(C, G) \xrightarrow{\kappa} \text{Hom}(H_q(C), G) \rightarrow 0$$

exakt und spaltet. Insbesondere gibt es daher einen (nichtkanonischen) Isomorphismus

$$H^q(C, G) \cong \text{Hom}(H_q(C), G) \oplus \text{Ext}(H_{q-1}(C), G).$$

Beweis.

a) $\bar{\delta}$ ist injektiv. Es sei $\varphi \in \text{Hom}(B_{q-1}, G)$ mit $\bar{\delta}(\varphi) = 0$ in $H^q(C, G)$. Dann gibt es ein $\chi \in \text{Hom}(C_{q-1}, G)$ mit $\bar{\delta}(\varphi) = \varphi \tilde{\partial}_q = \delta_{q-1} \chi = \chi \partial_q = \chi j_{q-1} i_{q-1} \tilde{\partial}_q$. Da $\tilde{\partial}_q$ surjektiv ist, folgt daraus

$$\varphi = \chi j_{q-1} i_{q-1} = i_{q-1}^\#(\chi j_{q-1}) \in \text{im } i_{q-1}^\#,$$

d.h. $\varphi = 0$ in $\text{Ext}(H_{q-1}(C), G)$.

b) $\text{im } \bar{\delta} \subset \ker \kappa$: Es sei $\varphi \in \text{Hom}(B_{q-1}, G)$. Für alle $[z] \in H_q(C)$ gilt:

$$\kappa(\bar{\delta}(\varphi))[z] = \langle \tilde{\partial}_q^\#(\varphi), z \rangle = \langle \varphi, \tilde{\partial}_q(z) \rangle = \langle \varphi, 0 \rangle = 0.$$

Also ist $\bar{\delta}(\varphi) \in \ker \kappa$.

c) $\ker \kappa \subset \text{im } \bar{\delta}$: Es sei $[\varphi] \in H^q(C, G)$ mit $\kappa([\varphi]) = 0$. Dann gilt für alle $z \in Z_q$:

$$\kappa([\varphi])([z]) = \langle \varphi, z \rangle = 0.$$

Also ist $0 = \varphi \circ j_q = j_q^\#(\varphi)$. Also folgt

$$\varphi \in \ker(j_q^\#) = \text{im } (\tilde{\partial}_q^\#)$$

und daher $[\varphi] \in \text{im } \bar{\delta}$.

d) κ hat ein Rechtsinverses κ' : Wir definieren

$$\begin{aligned}\kappa' : \text{Hom}(H_q(C), G) &\rightarrow H^q(C, G) \\ \varphi &\mapsto [\varphi \circ p_q \circ l_q]\end{aligned}$$

wobei $l_q : C_q \rightarrow Z_q$ wie im Beweis von Lemma (III.2.6) gewählt ist. Dies ist wohldefiniert, da

$$\delta_q(\varphi \circ p_q \circ l_q) = \varphi \circ p_q \circ l_q \circ \partial_{q+1} = 0$$

d.h. $\varphi \circ p_q \circ l_q \in Z^q(C, G)$. Nach Konstruktion ist $\kappa \circ \kappa' = \text{id}$. Insbesondere ist κ surjektiv und die Sequenz spaltet. \square

Wir können nun die singulären Kohomologiegruppen von topologischen Räumen einführen. Es sei (X, A) ein Paar von Räumen. Wir hatten bereits die Gruppen

$$S_q(X, A) = S_q(X)/S_q(A)$$

eingeführt. Dies ist ein freier Kettenkomplex, da man $S_q(X, A)$ mit der freien abelschen Gruppe identifizieren kann, die durch singuläre Simplizes, deren Träger nicht in A enthalten ist, identifizieren kann.

Definition (i) Die Elemente der Gruppen

$$S^q(X, A) = \text{Hom}(S_q(X, A), \mathbb{Z})$$

heißen q -Ketten in X mod A .

(ii) Die Gruppe $H^q(X, A)$ heißt die q -te *singuläre Kohomologiegruppe* von (X, A) (mit Werten in \mathbb{Z}).

Bemerkungen (i) Definiert man für eine beliebige abelsche Gruppe G den Komplex

$$S^q(X, A; G) = \text{Hom}(S_q(X, A), G)$$

so führt dies auf die singulären Kohomologiegruppen mit Werten in G .

(ii) Analog kann man den Komplex

$$S(X, A; G) = S(X, A) \otimes G$$

betrachten und erhält auf diese Weise die singulären Homologiegruppen $H_q(X, A; G)$ mit Werten in G .

Bemerkung Der Satz von de Rham besagt, daß für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M gilt

$$H_{dR}^q(M) \cong H^q(M, \mathbb{R}).$$

Das universelle Koeffiziententheorem gibt uns einen Zusammenhang zwischen Homologie- und Kohomologiegruppen.

Satz III.2.8 *Es sei X ein topologischer Raum, so daß $H_*(X)$ endlich erzeugt ist. Es sei T_{q-1} die Torsionsuntergruppe von $H_{q-1}(X)$ und F_q der Quotient von $H_q(X)$ nach T_q . Dann gilt*

$$H^q(X) \cong T_{q-1} \oplus F_q.$$

Beweis. Das universelle Koeffiziententheorem liefert einen Isomorphismus

$$H^q(X) \cong \text{Ext}(H_{q-1}(X), \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(H_q(X), \mathbb{Z}).$$

Die Behauptung folgt dann aus folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= 0, & \text{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}_n \\ \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}, & \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) &= 0. \end{aligned}$$

□

Da $S_*(X, A)$ ein freier Kettenkomplex ist, ist

$$0 \rightarrow S_*(A) \rightarrow S_*(X) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0$$

eine kurze exakte, spaltende Sequenz. Nach Satz (III.2.3) gilt dies auch für

$$0 \rightarrow S^*(X, A) \rightarrow S^*(X) \rightarrow S^*(A) \rightarrow 0.$$

Die zugehörige lange Homologiesequenz lautet dann

$$\cdots \rightarrow H^q(X, A) \rightarrow H^q(X) \rightarrow H^q(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X, A) \rightarrow \cdots.$$

Ist schließlich $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Paaren, so induziert dies einen Homomorphismus:

$$f^* : H^*(Y, B) \rightarrow H^*(X, A).$$

Wir können nun die Eigenschaften der Kohomologiegruppen in folgendem Satz zusammenfassen.

Satz III.2.9 *Die singulären Kohomologiegruppen haben die folgenden Eigenschaften:*

- (1) Kontravarianter Funktor

- (i) Sind $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ und $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ stetige Abbildungen von Paaren, so gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- (ii) Für $\text{id} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ gilt $\text{id}^* = \text{id}$.
- (2) Exakte Kohomologiesequenz
Man hat eine exakte Kohomologiesequenz
- $$\cdots \rightarrow H^q(X, A) \rightarrow H^q(X) \rightarrow H^q(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X, A) \rightarrow \cdots$$
- (3) Kommutative Diagramme
Ist $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Paaren, so kommutiert das Diagramm
- $$\begin{array}{ccc} H^q(A) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{q+1}(X, A) \\ \uparrow (f|_A)^* & & \uparrow f^* \\ H^q(B) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{q+1}(Y, B). \end{array}$$
- (4) Homotopieinvarianz
Sind $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotop als Abbildungen von Paaren, so gilt $f^ = g^*$.*
- (5) Ausschneidung
Ist (X, A) ein Paar von Räumen und $U \subset A$ mit $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, so induziert die Inklusion $i : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus
- $$i^* : H^*(X, A) \rightarrow H^*(X - U, A - U).$$

- (6) Kohomologie eines Punktes

$$H^q(\{pt\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0 \\ 0 & \text{für } q \neq 0. \end{cases}$$

Beweis. Man kann dies aus den entsprechenden Aussagen für die Homologiengruppen ableiten. \square

Die obigen Aussagen (1)-(6) sind die Axiome von Eilenberg-Steenrod für eine Kohomologietheorie. Man kann zeigen, daß es für Paare von Zellkomplexen bis auf Isomorphie nur eine Kohomologietheorie gibt, die diesen Aussagen genügt.

3 Cup- und Cap-Produkt

Ein Vorteil der Kohomologietheorie gegenüber der Homologietheorie besteht darin, daß auf der graduierten Kohomologiegruppe eine natürliche Multiplikation, das Cup-Produkt besteht. Dieses Produkt und das davon abgeleitete Cap-Produkt zwischen Kohomologieklassen und Homologieklassen soll hier eingeführt werden.

Es sei X ein topologischer Raum und $S^*(X)$ die Gruppe der Koketten. Wir wollen zunächst eine bilineare Abbildung

$$\begin{aligned}\cup : S^p(X) \times S^q(X) &\rightarrow S^{p+q}(X) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \varphi \cup \psi\end{aligned}$$

einführen. Hierzu genügt es $\langle \varphi \cup \psi, \sigma \rangle$ für jedes singuläre $(p+q)$ -Simplex σ zu definieren. Dazu betrachten wir die folgenden affinen Simplizes

$$\begin{aligned}\lambda_p &= (e_0, \dots, e_p) & : \Delta^p \rightarrow \Delta^{p+q} \\ \rho_q &= (e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}) & : \Delta^q \rightarrow \Delta^{p+q}\end{aligned}$$

wobei e_0, \dots, e_{p+q} die Ecken des $(p+q)$ -Standardsimplex Δ^{p+q} sind.

Definition Ist $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$ ein singuläres $(p+q)$ -Simplex, so heißt $\sigma \circ \lambda_p$ die p -dimensionale Vorderseite und $\sigma \circ \rho_q$ die q -dimensionale Rückseite von σ .

Definition Für $\varphi \in S^p(X)$ und $\psi \in S^q(X)$ ist $\varphi \cup \psi \in S^{p+q}(X)$ definiert durch

$$\langle \varphi \cup \psi, \sigma \rangle = \langle \varphi, \sigma \lambda_p \rangle \langle \psi, \sigma \rho_q \rangle$$

für $\sigma \in S_{p+q}(X)$.

Satz III.3.1 Für $\varphi \in S^p(X)$ und $\psi \in S^q(X)$ gilt

$$\delta(\varphi \cup \psi) = \delta\varphi \cup \psi + (-1)^p \varphi \cup \delta\psi.$$

Beweis. Es sei $\sigma : \Delta^{p+q+1} \rightarrow X$ ein singuläres $(p+q+1)$ -Simplex. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle \delta\varphi \cup \psi, \sigma \rangle &= \langle \delta\varphi, \sigma \lambda_{p+1} \rangle \cdot \langle \psi, \sigma \rho_q \rangle \\ &= \langle \varphi, \partial(\sigma \lambda_{p+1}) \rangle \cdot \langle \psi, \sigma \rho_q \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \langle \varphi, (\sigma \lambda_{p+1})^{(i)} \rangle \langle \psi, \sigma \rho_q \rangle \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle \varphi, \sigma^{(i)} \lambda_p \rangle \langle \psi, \sigma \rho_q \rangle + (-1)^{p+1} \langle \varphi, \sigma \lambda_p \rangle \langle \psi, \sigma \rho_q \rangle.\end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi \cup \delta\psi, \sigma \rangle &= \langle \varphi, \sigma\lambda_p \rangle \langle \psi, \partial(\sigma\rho_{q+1}) \rangle \\
&= \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^{i-p} \langle \varphi, \sigma\lambda_p \rangle \langle \psi, (\sigma\rho_{q+1})^{(i-p)} \rangle \\
&= \langle \varphi, \sigma\lambda_p \rangle \langle \psi, \sigma\rho_q \rangle + (-1)^p \sum_{i=p+1}^{p+q+1} (-1)^i \langle \varphi, \sigma\lambda_p \rangle \langle \psi, \sigma^{(i)}\rho_q \rangle.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies

$$\begin{aligned}
&\langle \delta\varphi \cup \psi + (-1)^p \varphi \cup \delta\psi, \sigma \rangle = \\
&= \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \langle \varphi, \sigma^{(i)}\lambda_p \rangle \langle \psi, \sigma^{(i)}\rho_q \rangle \\
&= \langle \varphi \cup \psi, \partial\sigma \rangle \\
&= \langle \delta(\varphi \cup \psi), \sigma \rangle.
\end{aligned}$$

(Hierbei beachte man, daß für alle $i \geq p+1$ gilt $\sigma^{(i)}\lambda_p = \sigma\lambda_p$ und analog $\sigma^{(k)}\rho_q = \sigma\rho_q$ für $k \leq p$). \square

Korollar III.3.2 (i) Für $\varphi \in Z^p(X), \psi \in Z^q(X)$ gilt $\varphi \cup \psi \in Z^{p+q}(X)$.

(ii) Ist $\varphi \in Z^p(X), \psi \in B^q(X)$ oder $\varphi \in B^p(X), \psi \in Z^q(X)$, so gilt $\varphi \cup \psi \in B^{p+q}(X)$.

Beweis. (i) Aus $\delta\varphi = 0, \delta\psi = 0$ folgt sofort aus Satz (III.3.1), daß auch $\delta(\varphi \cup \psi) = 0$.

(ii) Ist $\varphi = \delta\varphi'$ mit $\varphi' \in S^{p-1}(X)$ und $\delta\psi = 0$, so folgt

$$\varphi \cup \psi = \delta\varphi' \cup \psi = \delta(\varphi' \cup \psi) \in B^{p+q}(X)$$

wobei die letzte Gleichung ebenfalls wieder aus Satz (III.3.1) folgt. Die erste Aussage beweist man analog. \square

Damit überträgt sich das Cup-Produkt auf Kohomologieklassen.

Definition Für $\alpha = [\varphi] \in H^p(X)$ und $\beta = [\psi] \in H^q(X)$ wird das *Cup-Produkt* definiert durch

$$\alpha \cup \beta := [\varphi \cup \psi] \in H^{p+q}(X).$$

Dies liefert eine bilineare Abbildung

$$\cup : H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow H^{p+q}(X).$$

Der Vollständigkeit halber notieren wir hier den folgenden Satz, den wir jedoch im folgenden nicht benutzen werden.

Theorem III.3.3 Das Cup-Produkt ist schiefsymmetrisch, d.h. es gilt

$$a \cup b = (-1)^{pq} b \cup a$$

für $a \in H^p(X)$, $b \in H^q(X)$.

Beweis. Der Beweis ist erstaunlich aufwendig und führt auf die Theorie der azyklischen Modelle. Der Leser wird hierzu auf [GH, section 24] oder [V, chapter 4] verwiesen. \square

Bemerkung Stellt man mittels der de-Rham-Kohomologie Kohomologieklassen durch Differentialformen dar, dann entspricht das Cup-Produkt dem \wedge -Produkt und der obige Satz folgt sofort.

Wir untersuchen nun das Verhalten des Cup-Produkts unter Abbildungen.

Satz III.3.4 (i) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so gilt $f^\#(\varphi \cup \psi) = f^\#(\varphi) \cup f^\#(\psi)$ für $\varphi \in S^p(Y)$ und $\psi \in S^q(Y)$.
(ii) $f^*(\alpha \cup \beta) = f^*(\alpha) \cup f^*(\beta)$ für $\alpha \in H^p(Y)$ und $\beta \in H^q(Y)$, d.h. f^* ist ein Ringhomomorphismus.

Beweis. (i) Es sei $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$ ein singuläres $(p+q)$ -Simplex. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle f^\#(\varphi \cup \psi), \sigma \rangle &= \langle \varphi \cup \psi, f\sigma \rangle \\ &= \langle \varphi, f\sigma\lambda_p \rangle \langle \psi, f\sigma\rho_q \rangle \\ &= \langle f^\#\varphi, \sigma\lambda_p \rangle \langle f^\#\psi, \sigma\rho_q \rangle \\ &= \langle f^\#\varphi \cup f^\#\psi, \sigma \rangle. \end{aligned}$$

(ii) folgt sofort aus (i). \square

Wir betrachten nun die zu dem Cup-Produkt assoziierte Operation, das Cap-Produkt. Ziel ist es zunächst, eine bilineare Abbildung

$$\cap : S^q(X) \times S_{p+q}(X) \rightarrow S_p(X)$$

zu definieren, die zu dem Cup-Produkt adjungiert ist, d.h. für $\psi \in S^q(X)$ und $c \in S_{p+q}(X)$ soll $\psi \cap c$ die eindeutig bestimmte p -Kette sein mit

$$\langle \varphi, \psi \cap c \rangle = \langle \varphi \cup \psi, c \rangle \text{ für alle } \varphi \in S^p(X).$$

Definition (i) Für ein $\psi \in S^q(X)$ und ein singuläres $(p+q)$ -Simplex $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$ sei

$$\psi \cap \sigma = \langle \psi, \sigma\rho_q \rangle \sigma\lambda_p.$$

- (ii) Für eine $(p+q)$ -Kette $c = \sum n_\sigma \sigma$ definieren wir $\psi \cap c$ durch lineare Fortsetzung

$$\psi \cap c = \sum n_\sigma \psi \cap \sigma.$$

Satz III.3.5 Für $\varphi \in S^p(X)$, $\psi \in S^q(X)$ und $c \in S_{p+q}(X)$ gilt

$$\langle \varphi, \psi \cap c \rangle = \langle \varphi \cup \psi, c \rangle.$$

Beweis. Es genügt, dies für ein $(p+q)$ -Simplex σ zu beweisen. Dann gilt:

$$\langle \varphi \cup \psi, \sigma \rangle = \langle \varphi, \sigma \lambda_p \rangle \langle \psi, \sigma \rho_q \rangle = \langle \varphi, \psi \cap \sigma \rangle.$$

□

Satz III.3.6 Für $\psi \in S^q(X)$, $c \in S_{p+q}(X)$ gilt

$$\partial(\psi \cap c) = \psi \cap \partial c - (-1)^p \delta \psi \cap c.$$

Beweis. Wir betrachten das Kroneckerprodukt mit Elementen $\varphi \in S^{p-1}(X)$:

$$\langle \varphi, \partial(\psi \cap c) \rangle = \langle \delta \varphi, \psi \cap c \rangle = \langle \delta \varphi \cup \psi, c \rangle$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen nach Satz (III.3.5) gilt. Weiter gilt nach Satz (III.3.1) und Satz (III.3.5):

$$\begin{aligned} \langle \delta \varphi \cup \psi, c \rangle &= \langle \delta(\varphi \cup \psi) - (-1)^p \varphi \cup \delta \psi, c \rangle \\ &= \langle \varphi \cup \psi, \partial c \rangle - (-1)^p \langle \varphi \cup \delta \psi, c \rangle \\ &= \langle \varphi, \psi \cap \partial c \rangle - (-1)^p \langle \varphi, \delta \psi \cap c \rangle \\ &= \langle \varphi, \psi \cap \partial c - (-1)^p \delta \psi \cap c \rangle. \end{aligned}$$

Da dies für alle $\varphi \in S^{p-1}(X)$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. □

Korollar III.3.7 (i) Für $\psi \in Z^q(X)$, $c \in Z_{p+q}(X)$ gilt $\psi \cap c \in Z_p(X)$.

(ii) Für $\psi \in B^q(X)$, $c \in Z_{p+q}(X)$ oder $\psi \in Z^q(X)$, $c \in B_{p+q}(X)$ gilt $\psi \cap c \in B_p(X)$.

Beweis. Dies folgt aus Satz (III.3.6), vgl. den Beweis von Korollar (III.3.2). □

Damit lässt sich das Cap-Produkt auf Kohomologie- und Homologieklassen übertragen.

Definition Für $\beta = [\psi] \in H^q(X)$, $\gamma = [c] \in H_{p+q}(X)$ definieren wir das *Cap-Produkt*

$$\beta \cap \gamma := [\psi \cap c] \in H_p(X).$$

Wir erhalten auf diese Weise eine bilineare Abbildung

$$\cap : H^q(X) \times H_{p+q}(X) \rightarrow H_p(X).$$

Satz III.3.8 Für eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gilt:

- (i) $f_{\#}(f^{\#}(\psi) \cap c) = \psi \cap f_{\#}(c)$ für $\psi \in S^q(Y), c \in S_{p+q}(X)$.
- (ii) $f_{*}(f^{*}(\beta) \cap \gamma) = \beta \cap f_{*}(\gamma)$ für $\beta \in H^q(Y), \gamma \in H_{p+q}(X)$.

Beweis. (i) Für alle $\varphi \in S^p(Y)$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, f_{\#}(f^{\#}(\psi) \cap c) \rangle &= \langle f^{\#}\varphi, f^{\#}(\psi) \cap c \rangle \\ &= \langle f^{\#}(\varphi \cup \psi), c \rangle \\ &= \langle \varphi \cup \psi, f_{\#}(c) \rangle \\ &= \langle \varphi, \psi \cap f_{\#}(c) \rangle. \end{aligned}$$

(ii) Folgt sofort aus (i). \square

Es sei ε die 0-Kokette mit $\langle \varepsilon, x \rangle = 1$ für alle $x \in X$. Dann ist ε ein 0-Kozykel, da für jedes 1-Simplex σ gilt $\langle \delta\varepsilon, \sigma \rangle = \langle \varepsilon, \partial\sigma \rangle = \langle \varepsilon, \sigma(1) - \sigma(0) \rangle = 0$.

Definition Wir setzen $1_X := [\varepsilon] \in H^0(X)$.

Satz III.3.9 (i) Es gilt $1_X \cup \beta = \beta \cup 1_X = \beta$ für alle $\beta \in H^p(X)$, d.h. 1_X ist Einselement des Kohomologierings $H^*(X)$.

(ii) Es gilt $1_X \cap \gamma = \gamma$ für alle $\gamma \in H_p(X)$.

Beweis. (i) Nach Definition des Cup-Produkts gilt

$$\langle \varepsilon \cup \varphi, \sigma \rangle = \langle \varepsilon, \sigma \lambda_0 \rangle \langle \varphi, \sigma \rho_p \rangle = 1 \cdot \langle \varphi, \sigma \rangle$$

für alle singulären p -Simplizes σ .

(ii) Folgt sofort aus (i) und Satz (III.3.5). \square

Beispiel X sei wegzusammenhängend. Dann gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ und $H_0(X)$ wird erzeugt von der Klasse $[x]$ eines Punktes $x \in X$. Nach dem universellen Koeffiziententheorem ist auch $H^0(X) \cong \mathbb{Z}$ und wird durch $1_X = [\varepsilon]$ erzeugt. Für $\beta \in H^p(X)$ und $\gamma \in H_p(X)$ gilt

$$\beta \cap \gamma = \langle \beta, \gamma \rangle [x].$$

Dies folgt, da $\langle \varepsilon, \beta \cap \gamma \rangle = \langle \varepsilon \cup \beta, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle$.

Man kann auch eine relative Version des Cap-Produkts definieren. Es gibt Abbildungen

$$\begin{aligned}\cap : H^q(X, A) \times H_{p+q}(X, A) &\rightarrow H_p(X) \\ \cap : H^q(X) \times H_{p+q}(X, A) &\rightarrow H_p(X, A).\end{aligned}$$

Wir begründen dies im ersten Fall: Es sei $c \in Z^q(X, A) \subset Z^q(X)$ und $z \in Z_{p+q}(X, A)$. Wir zeigen zunächst, daß $c \cap z$ wohldefiniert ist. Hierzu sei w singuläres $p+q$ -Simplex in A . Dann gilt für $\varphi \in S^p(X)$:

$$\langle \varphi, c \cap w \rangle = \langle \varphi \cup c, w \rangle = \langle \varphi, w \lambda_p \rangle \langle c, w \rho_q \rangle = 0$$

da $w \rho_q \in S_q(A)$. Schließlich ist noch zu zeigen, daß $c \cap z$ ein p -Zykel ist auf X . Nach Satz (III.3.6) gilt

$$\partial(c \cap z) = c \cap \partial z - (-1)^p \delta c \cap z.$$

Es gilt $\delta c = 0$ und $\partial z \in S_{p+q-1}(A)$. Dann folgt wie oben, daß $c \cap \partial z = 0$ ist, also $\partial(c \cap z) = 0$. Die zweite Paarung behandelt man analog.

4 Algebraische Limiten

Um Kohomologie mit kompakten Träger einzuführen, benötigen wir noch einige algebraische Vorbereitungen.

Definition Ein *gerichtetes System* ist eine Menge I zusammen mit einer Teilordnung \leq , so daß es für je zwei Elemente $i, i' \in I$ ein i'' gibt mit $i \leq i''$ und $i' \leq i''$.

Beispiele (1) Es sei $I = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Dann sei $j \leq j'$ genau dann wenn $j|j'$. In diesem Fall können wir für i'' das kleinste gemeinsame Vielfache von i und i' wählen.

(2) Es sei X eine Menge und $K \subset X$ eine Teilmenge. Sei I das System aller Mengen, die K enthalten. Die Teilordnung sei dadurch definiert, daß $V \leq V'$ genau dann, wenn $V' \subset V$. Dann können wir für V'' den Durchschnitt $V \cap V'$ nehmen.

Definition Es sei I ein gerichtetes System. Ein *gerichtetes (induktives) System von abelschen Gruppen* ist eine Familie $(G_i)_{i \in I}$ von abelschen Gruppen zusammen mit Homomorphismen $\varphi_{i',i} : G_i \rightarrow G_{i'}$ für $i \leq i'$, so daß gilt:

- (1) $\varphi_{i'',i'} \circ \varphi_{i',i} = \varphi_{i'',i}$ für $i \leq i', i' \leq i''$.
- (2) $\varphi_{i,i} = \text{id}_{G_i}$.

Definition Es sei $(G_i)_{i \in I}$ ein induktives System von abelschen Gruppen. Ein *direkter (induktiver) Limes* dieses Systems ist eine abelsche Gruppe G , zusammen mit Homomorphismen $\varphi_i : G_i \rightarrow G$, so daß gilt:

- (i) $\varphi_{i'} \circ \varphi_{i',i} = \varphi_i$ für $i \leq i'$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\varphi_{i',i}} & G_{i'} \\ \varphi_i \searrow & & \swarrow \varphi_{i'} \\ & G & \end{array}$$

kommutiert.

- (ii) G erfüllt folgende *universelle Eigenschaft*: Ist G' eine weitere abelsche Gruppe, zusammen mit Homomorphismen $\psi_i : G_i \rightarrow G'$ mit $\psi_{i'} \circ \varphi_{i',i} = \psi_i$ für $i \leq i'$, so gibt es genau einen Homomorphismus $\psi : G \rightarrow G'$ mit $\psi_i = \psi \circ \varphi_i$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\varphi_i} & G \\ \psi_i \searrow & & \downarrow \psi \\ & G' & \end{array}$$

kommutiert für alle $i \in I$.

Beispiel Es sei $p \in \mathbb{R}^n$ und I sei das System der offenen Umgebungen von p . Wir betrachten die Gruppen

$$\mathcal{F}(U) := \{f; f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar}\}.$$

Für $U \subset V$ sei

$$i_{U,V} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

die Einschränkungsabbildung. Dies definiert ein induktives System abelscher Gruppen. Der induktive Limes ist der *Halm* der differenzierbaren Funktionen im Punkt p , der aus den *Keimen* der differenzierbaren Funktionen in p besteht.

Satz III.4.1 *Der induktive Limes existiert und ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die *Eindeutigkeit* folgt wie üblich aus der universellen Eigenschaft. Es seien G, G' zwei induktive Limiten. Dann gibt es eindeutig bestimmte Homomorphismen

$$\psi : G \rightarrow G', \quad \varphi : G' \rightarrow G$$

Nochmalige Anwendung der universellen Eigenschaften liefert weiterhin $\varphi \circ \psi = \text{id}_G$ und $\psi \circ \varphi = \text{id}_{G'}$.

Um die *Existenz* zu zeigen, betrachten wir die direkte Summe

$$\tilde{G} = \bigoplus_{i \in I} G_i$$

zusammen mit den offensichtlichen Inklusionen

$$\varphi_i^+ : G_i \rightarrow \tilde{G}.$$

In \tilde{G} betrachten wir die Untergruppe H , die erzeugt wird von den Elementen

$$\varphi_{i'}^+(\varphi_{i',i}(x)) - \varphi_i^+(x); \quad i \leq i', x \in G_i.$$

Es sei

$$G = \tilde{G}/H$$

und

$$\varphi_i := \pi \circ \varphi_i^+ : G_i \rightarrow G,$$

wobei π die Projektion ist. Die Gruppe G erfüllt die Eigenschaften eines induktiven Limes: Es seien nämlich $\psi_i : G_i \rightarrow G'$ Homomorphismen mit $\psi_{i'} \circ \varphi_{i',i} = \psi_i$, dann erhält man $\psi : G \rightarrow G'$ durch $\psi([\varphi_i^+(x)]) = \psi_i(x)$ für $x \in G_i$. Dies ist auch die einzige Möglichkeit, um ψ zu definieren. \square

Bemerkungen (i) Sind alle G_i Untergruppen einer Gruppe \tilde{G} , so kann man für den induktiven Limes wählen

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i$$

und die φ_i als die natürlichen Inklusionen. Daß G tatsächlich eine Untergruppe ist, folgt aus den Eigenschaften eines gerichteten Systems.

(ii) Es gilt für einen induktiven Limes, daß

$$G = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(G).$$

Die Begründung ist wie folgt. Offensichtlich ist die rechte Seite ein induktiver Limes G' . Dann sei $i : G' \rightarrow G$ die Abbildung, die auf Grund der universellen Eigenschaft von G' existiert. Andererseits gibt es auf Grund der universellen Eigenschaft von G auch eine Abbildung $p : G \rightarrow G'$ mit $p \circ i = \text{id}_{G'}$, und $i \circ p = \text{id}_G$. Also ist $G' \cong G$.

Bezeichnung Wir verwenden die Notation

$$G = \varinjlim G_i, \quad \psi = \varinjlim \psi_i.$$

Lemma III.4.2 (Additivität) Es sei $G_i = H_i \oplus U_i$ für alle $i \in I$, so daß für $i \leq i'$ der Homomorphismus $\varphi_{i',i}$ eine direkte Summe $\varphi_{i',i} = \lambda_{i',i} + \rho_{i',i}$ ist. Es sei $H = \varinjlim H_i$ und $U = \varinjlim U_i$. Dann erhalten wir induzierte Homomorphismen $\lambda : H \rightarrow G, \rho : U \rightarrow G$ mit $\lambda\lambda_i = \varphi_i|_{H_i}, \rho\rho_i = \varphi_i|_{U_i}$. Diese definieren einen Isomorphismus

$$\lambda \oplus \rho : H \oplus U \xrightarrow{\cong} G.$$

Beweis. Wir konstruieren eine zu $\lambda \oplus \rho$ inverse Abbildung. Es sei dazu $x \in G$. Dann wählen wir $i \in I$ und $x_i \in G_i$ mit $x = \varphi_i(x_i)$. Für x_i haben wir eine (eindeutige) Darstellung $x_i = y_i + z_i$ mit $y_i \in H_i, z_i \in U_i$. Sei

$$\Theta(x) = (\lambda_i y_i, \rho_i z_i) \in H \oplus U.$$

Dann prüft man leicht nach, daß $\Theta(x)$ unabhängig ist von der Wahl von x_i , und es gilt $\Theta = (\lambda \oplus \rho)^{-1}$. \square

In manchen Fällen ist es nicht notwendig, alle Gruppen G_i zu betrachten, um den induktiven Limes zu bestimmen.

Definition Eine Teilmenge $J \subset I$ heißt ein *finales System*, falls J mit der induzierten Ordnung ein gerichtetes System ist, und falls es zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ gibt mit $i \leq j$.

Ist $J \subset I$ ein finales System, so liefert uns die universelle Eigenschaft einen Homomorphismus

$$\lambda : \varinjlim G_j \rightarrow \varinjlim G_i.$$

Satz III.4.3 λ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Es sei $G = \varinjlim G_i, G' = \varinjlim G_j$. Ferner sei $\varphi'_j : G_j \rightarrow G'$ der kanonische Homomorphismus. Es gilt dann $\lambda\varphi'_j = \varphi_j$.

Surjektivität von λ : Es sei $x \in G$. Dann ist $x = \varphi_i(x_i)$ für ein $i \in I$. Da J final ist, gibt es $j \geq i$. Es sei $x_j = \varphi_{j,i}(x_i)$. Dann gilt

$$x = \varphi_j(x_j) = \lambda\varphi'_j(x_j).$$

Injectivität von λ : Es sei $x' \in G'$ mit $\lambda(x') = 0$. Wir können $x' = \varphi'_j(x_j)$ schreiben für ein $x_j \in G_j$. Dann gilt also $\varphi_j(x_j) = 0$.

Behauptung Ist $\varphi_i(x_i) = 0$, so gibt es i' mit $i \leq i'$, so daß $\varphi_{i',i}(x_i) = 0$.

Wir nehmen zunächst an, daß diese Behauptung gilt. Dann gibt es $i' \in I$ mit $j \leq i'$ und $\varphi_{i',j}(x_j) = 0$. Da J final ist, gibt es ein $j' \in J$ mit $i' \leq j'$. Dann gilt $\varphi_{j',j}(x_j) = \varphi_{j',i'}\varphi_{i',j}(x_j) = 0$. Also ist $x' = \varphi'_{j'}\varphi_{j',j}(x_j) = 0$.

Beweis der Behauptung: Wir verwenden die Konstruktion von G von Satz (III.4.1). Da $\varphi_i(x_i) = 0$ ist, ist $\varphi_i^+(x_i)$ endliche Summe von Elementen der Form:

$$\varphi_{k'}^+(\varphi_{k',k}(y_{k',k})) - \varphi_k^+(y_{k',k}) \quad (y_{k',k} \in G_k).$$

Nach Definition von φ_i^+ gilt

$$x_i = \sum_{k'=i} \varphi_{k',k}(y_{k',k}) - \sum_{k=i} y_{k',k} \quad (1)$$

und

$$0 = \sum_{k'=h} \varphi_{k',k}(y_{k',k}) - \sum_{k=h} y_{k',k} \text{ für } h \neq i. \quad (2)$$

Wir wählen nun ein i' mit $i' \geq k'$ für alle auftretenden Elemente k' . Wir wenden $\varphi_{i',i}$ auf Gleichung (1) und $\varphi_{i',h}$ auf alle Gleichungen (2) an. Addition ergibt

$$\varphi_{i',i}(x_i) = \sum_{(k',k)} \varphi_{i',k'}\varphi_{k',k}(y_{k',k}) - \varphi_{i',k}(y_{k',k}) = 0$$

wobei die letzte Gleichheit aus den Eigenschaften des induktiven Systems folgt. \square

Folgerung Falls es ein Element $m \in I$ gibt, so daß $i \leq m$ für alle $i \in I$, so ist

$$\varphi_m : G_m \rightarrow G$$

ein Isomorphismus.

Induktive Limiten sind kompatibel mit exakten Sequenzen. Es sei hierzu für jedes $i \in I$ eine exakte Sequenz

$$G_i^* \xrightarrow{\lambda_i} G_i \xrightarrow{\rho_i} \hat{G}_i$$

gegeben, so daß für $i \leq i'$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G_i^* & \xrightarrow{\lambda_i} & G_i & \xrightarrow{\rho_i} & \hat{G}_i \\ \varphi_{i',i}^* \downarrow & & \varphi_{i',i} \downarrow & & \hat{\varphi}_{i',i} \downarrow \\ G_{i'}^* & \xrightarrow{\lambda_{i'}} & G_{i'} & \xrightarrow{\rho_{i'}} & \hat{G}_{i'} \end{array}$$

kommutiert. Dann induziert dies eine Sequenz

$$G^* \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\rho} \hat{G}$$

mit $\lambda\varphi_i^* = \varphi_i\lambda_i$, $\rho\varphi_i = \hat{\varphi}_i\rho_i$ für $i \in I$.

Lemma III.4.4 *Die Sequenz $G^* \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\rho} \hat{G}$ ist exakt.*

Beweis. Es sei $x^* \in G^*$. Wähle $x_i^* \in G_i^*$ mit $x^* = \varphi_i^*(x_i^*)$. Dann gilt $\rho\lambda x^* = \hat{\varphi}_i\rho_i\lambda_i(x_i^*) = 0$.

Sei ferner $x \in G$ mit $\rho(x) = 0$. Wir schreiben $x = \varphi_i(x_i)$ für ein $x_i \in G_i$. Da $\hat{\varphi}_i\rho_i(x_i) = 0$ gibt es ein i' mit $i \leq i'$, so daß $0 = \hat{\varphi}_{i',i}\rho_i(x_i) = \rho_{i'}\varphi_{i',i}(x_i)$. Wegen der Exaktheit der ursprünglichen Sequenzen gibt es ein $x_{i'}^* \in G_{i'}^*$ mit $\varphi_{i',i}(x_i) = \lambda_{i'}(x_{i'}^*)$. Dann gilt $\lambda\varphi_{i'}^*(x_{i'}^*) = \varphi_{i'}\lambda_{i'}(x_{i'}^*) = \varphi_{i'}\varphi_{i',i}(x_i) = \varphi_i(x_i) = x$. \square

Schließlich betrachten wir noch iterierte Limiten. Es seien nun I, J gerichtet Systeme. Ferner nehmen wir an, daß es zu jedem $j \in J$ eine gerichtete Teilmenge $I_j \subset I$ gibt, so daß für $j \leq j'$ gilt $I_j \subset I_{j'}$. Wir setzen ferner voraus, daß

$$I = \bigcup_j I_j.$$

Zunächst können wir für jedes j den induktiven Limes

$$G_j^* = \varinjlim_{i \in I_j} G_i$$

bilden. Ist $j \leq j'$, so können wir nun Homomorphismen $\psi_{j',j} : G_j^* \rightarrow G_{j'}^*$ wie folgt definieren. Es sei $x \in G_j^*$. Wähle dann $i \in I_j$ und $x_i \in G_i$ mit $x = \varphi_i^*(x_i)$, wobei $\varphi_i^* : G_i \rightarrow G_j^*$ der kanonische Homomorphismus ist. Wähle $i' \in I_{j'}$ mit $i \leq i'$ und setze $\psi_{j',j}(x) = \varphi_{i'}^*\varphi_{i',i}(x_i)$ (dies ist unabhängig von den getroffenen Wahlen). Die Homomorphismen $\psi_{j',j}$ definieren auch ein induktives System. Wir betrachten dessen induktiven Limes

$$G^* = \varinjlim_{j \in J} G_j^*.$$

Schließlich sei $G = \varinjlim_{i \in I} G_i$. Dann gibt es eindeutige, zueinander inverse Homomorphismen $\psi : G^* \rightarrow G$, $\Theta : G \rightarrow G^*$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G_i & \longrightarrow & G_j^* & \longrightarrow & G^* \\ & \searrow & \downarrow \psi & \nearrow \Theta & \\ & & G & & \end{array}$$

für alle $j \in J$ und $i \in I_j$ kommutativ ist.

5 Poincar-Dualität

In diesem Abschnitt wollen wir den Satz über die Poincar-Dualität beweisen. Im folgenden sei X stets eine *orientierte* Mannigfaltigkeit der Dimension n mit fest gewählter Orientierung. Der Isomorphismus $H_n(X, X - K) \cong \Gamma K$ von Theorem (III.1.7) (hierbei ist K eine kompakte Teilmenge von X) und die Orientierung definieren dann eine *Fundamentalklasse*

$$\rho_K \in H_n(X, X - K).$$

Die kompakten Mengen auf X bilden, zusammen mit der Inklusion, ein gerichtetes System ($K \leq K'$ bedeutet hier $K \subset K'$). Ist $K \subset K'$, so induziert die Inklusion $(X, X - K') \subset (X, X - K)$ einen Homomorphismus

$$H^q(X, X - K) \rightarrow H^q(X, X - K').$$

Auf diese Weise erhalten wir ein induktives System von abelschen Gruppen.

Definition Der induktive Limes

$$H_c^q(X) = \varinjlim_K H^q(X, X - K)$$

heißt die q -te *Kohomologiegruppe* von X mit *kompaktem Träger*.

Bemerkungen (i) Ist X kompakt, so ist X ein finales Objekt und es gilt $H_c^q(X) = H^q(X)$.

(ii) Eine Kohomologieklasse in $H_c^q(X)$ wird durch einen Kozykel repräsentiert, der alle Ketten mit Träger in $X - K$ annuliert. Dies erklärt die Bezeichnung "Kohomologie mit kompaktem Träger".

Es sei nun U eine offene Teilmenge von X . Ist $K \subset U$, so definiert die Inklusion $(U, U - K) \subset (X, X - K)$ auf Grund des Ausschneidungssatzes einen Isomorphismus $H^q(X, X - K) \rightarrow H^q(U, U - K)$ mit Inversem $H^q(U, U - K) \rightarrow H^q(X, X - K)$. Diese Abbildungen sind mit Einschränkungen verträglich und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(U, U - K) & \longrightarrow & H^q(X, X - K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^q(U) & \longrightarrow & H_c^q(X) \end{array}$$

wobei die Abbildung $H_c^q(U) \rightarrow H_c^q(X)$ als Limesabbildung definiert ist.

Beispiel Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Wir erhalten ein finales System von kompakten Mengen durch

$$K_m = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq m\} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Die K_m sind zusammenziehbar und $\mathbb{R}^n - K_m$ ist homotopieäquivalent zur Sphäre S^{n-1} . Also gilt

$$H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K_m) \cong \tilde{H}^{q-1}(\mathbb{R}^n - K_m) \cong \tilde{H}^{q-1}(S^{n-1}).$$

Also gilt

$$H_c^q(\mathbb{R}^n) \cong \tilde{H}^{q-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei nun $K \subset X$ kompakt. Wir hatten am Ende von Abschnitt (III.3) gesehen, daß das Cap-Produkt eine Abbildung

$$\begin{aligned} \cap \rho_K : H^q(X, X - K) &\rightarrow H_{n-q}(X) \\ \gamma &\mapsto \gamma \cap \rho_K \end{aligned}$$

definiert. Ist $K \subset K'$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, X - K) & & \\ \downarrow & \searrow \cap \rho_K & \\ & & H_{n-q}(X) \\ \downarrow & \nearrow \cap \rho_{K'} & \\ H^q(X, X - K') & & \end{array}$$

Der Übergang zum induktiven Limes definiert dann einen Homomorphismus

$$D : H_c^q(X) \rightarrow H_{n-q}(X).$$

Ist U eine offene Teilmenge von X , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(U) & \xrightarrow{D} & H_{n-q}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^q(X) & \xrightarrow{D} & H_{n-q}(X). \end{array}$$

Theorem III.5.1 *Es sei X eine orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist der Homomorphismus*

$$D : H_c^q(X) \rightarrow H_{n-q}(X)$$

ein Isomorphismus für alle q .

Bevor wir den Beweis dieses Satzes geben können, benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Es seien C und C' Kettenkomplexe.

Definition Eine Kettenabbildung $f : C \rightarrow C'$ ist eine *Kettenhomotopieäquivalenz*, falls es eine Kettenabbildung $g : C' \rightarrow C$ gibt mit $fg \simeq \text{id}_{C'}$ und $gf \simeq \text{id}_C$.

In diesem Fall induziert f einen Isomorphismus $f_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$. Für freie Kettenkomplexe gilt auch die Umkehrung:

Satz III.5.2 *Seien C und C' freie Kettenkomplexe. Falls die Kettenabbildung $f : C \rightarrow C'$ einen Isomorphismus $f_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ definiert, so ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz.*

Beispiel Ist $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung, so induziert $i : S_*^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$ einen Isomorphismus $H_*(S_*^{\mathfrak{U}}(X)) \rightarrow H_*(X)$, ist also eine Kettenhomotopieäquivalenz. Wir werden dies dann auch auf die Mayer-Vietoris-Sequenz anwenden.

Um obigen Satz zu beweisen, führen wir den Begriff des Abbildungskegels einer Kettenabbildung $f : C \rightarrow C'$ ein.

Definition Der *Abbildungskegel* (Cf, ∂^f) von $f : C \rightarrow C'$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} (Cf)_q &= C'_q \oplus C_{q-1} \\ \partial^f(x, y) &= (\partial'x + f(y), -\partial y). \end{aligned}$$

Dies ist wieder ein Komplex, da

$$\begin{aligned} \partial^f(\partial^f(x, y)) &= \partial^f(\partial'x + f(y), -\partial y) \\ &= (\partial'\partial'x + \partial'f(y) - f\partial(y), \partial^2y) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Wir können daher folgende exakte Sequenz von Kettenkomplexen betrachten

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} Cf \xrightarrow{j} C^+ \rightarrow 0$$

wobei

$$\begin{aligned} (C^+)_q &= C_{q-1} \\ \partial_q^+ &= \partial_{q-1}, \quad i(x) = (x, 0), \quad j(x, y) = y. \end{aligned}$$

Die zugehörige lange Homologiesequenz lautet dann

$$\rightarrow H_q(C') \xrightarrow{i_*} H_q(Cf) \xrightarrow{j_*} H_q(C^+) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(C') \rightarrow \dots$$

Dabei kann der verbindende Homomorphismus ∂ wie folgt beschrieben werden: Es sei $y \in C^+$ mit $\partial^+(y) = 0$. Dann ist $\partial^f(x, y) = (\partial'x + f(y), 0)$. Also gilt

$$\partial\bar{y} = \overline{f(y)}$$

und wir erhalten also, daß $\partial = f_*$ ist, d.h. wir haben

$$\dots \xrightarrow{f_*} H_q(C') \xrightarrow{i_*} H_q(Cf) \xrightarrow{j_*} H_q(C^+) \xrightarrow{f_*} H_{q-1}(C') \rightarrow \dots$$

Damit ergibt sich unmittelbar

Lemma III.5.3 Ist f_* ein Isomorphismus, so gilt $H_*(Cf) = 0$.

Lemma III.5.4 Ist C ein freier Kettenkomplex mit $H_*(C) = 0$, so ist die Identität $\text{id} : C \rightarrow C$ kettenhomotop zur Nullabbildung.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $Z_q = B_q$ für alle q , d.h. wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow B_q \rightarrow C_q \xrightarrow[k]{\partial} B_{q-1} \rightarrow 0.$$

Da C freier Kettenkomplex ist, ist auch B_{q-1} frei und die obige Sequenz spaltet nach Satz (III.2.2), d.h. es gibt einen Homomorphismus $k : B_{q-1} \rightarrow C_q$ mit $\partial k = \text{id}$. Also ist

$$C_q \cong B_q \oplus B_{q-1}$$

und $\partial : C_q \rightarrow C_{q-1}$ ist von der Form $\partial(x, y) = (y, 0)$. Wir definieren Homomorphismen

$$\begin{aligned} D_q : C_q &\rightarrow C_{q+1} \\ D_q(x, y) &= (0, x). \end{aligned}$$

Dies definiert eine Abbildung $D : C \rightarrow C$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\partial D + D\partial)(x, y) &= \partial(0, x) + D(y, 0) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

Also ist $\text{id} \simeq 0$. □

Lemma III.5.5 Es sei $f : C \rightarrow C'$ eine Kettenabbildung zwischen freien Kettenkomplexen, für die $H_*(Cf) = 0$ gilt. Dann ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz.

Beweis. Nach Lemma (III.5.4) gibt es eine Kettenhomotopie $D : Cf \rightarrow Cf$ mit $\partial^f D + D\partial^f = \text{id}$. Die Abbildung

$$D_q : C'_q \oplus C_{q-1} \rightarrow C'_{q+1} \oplus C_q$$

definiert vier Abbildungen

$$\begin{aligned} S_q : C'_q &\rightarrow C'_{q+1}, & g_q : C'_q &\rightarrow C_q \\ E_{q-1} : C_{q-1} &\rightarrow C'_{q+1}, & T_{q-1} : C_{q-1} &\rightarrow C_q \end{aligned}$$

so daß gilt

$$D_q(x, y) = (S_q(x) + E_{q-1}(y), g_q(x) + T_{q-1}(y)).$$

Nach Definition von ∂^f gilt

$$\partial^f D(x, y) = (\partial' S(x) + \partial' E(y) + fg(x) + fT(y), -\partial g(x) - \partial T(y)).$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned} D\partial^f(x, y) &= D(\partial'x + f(y), -\partial y) \\ &= (S\partial'(x) + Sf(y) - E\partial(y), g\partial'(x) + gf(y) - T\partial(y)). \end{aligned}$$

Addition beider Formeln für den Spezialfall $(x, 0)$ gibt

$$(x, 0) = (\partial'S(x) + fg(x) + S\partial'(x), -\partial g(x) + g\partial'(x)).$$

Die erste Komponente dieser Gleichung zeigt

$$\text{id} - fg = \partial'S + S\partial'.$$

Die zweite Komponente zeigt zudem, daß g eine Kettenabbildung ist. Schließlich ergibt Addition der beiden obigen Gleichungen im Spezialfall $(0, y)$ in der zweiten Komponente die Beziehung

$$y = -\partial T(y) + gf(y) - T\partial(y)$$

also

$$\text{id} - gf = \partial(-T) + (-T)\partial.$$

□

Beweis von Satz (III.5.2) Da f_* ein Isomorphismus ist, folgt nach Lemma (III.5.3), daß $H_*(Cf) = 0$. Dann folgt aus obigem Lemma (III.5.5), daß f eine Kettenhomotopieäquivalenz ist. □

Für das folgende benötigen wir die relative Version der Mayer-Vietoris-Sequenz für die Kohomologie

Satz III.5.6 *Es sei X ein topologischer Raum und A_1, A_2 seien abgeschlossene Zeilmengen von X . Es sei $A = A_1 \cup A_2$. Dann gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz*

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^q(X, X - (A_1 \cap A_2)) \rightarrow H^q(X, X - A_1) \oplus H^q(X, X - A_2) \rightarrow \\ &\rightarrow H^q(X, X - A) \rightarrow H^{q+1}(X, X - (A_1 \cap A_2)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis ist eine direkte Übertragung des Beweises für die gewöhnliche Mayer-Vietoris-Sequenz. □

Beweis von Theorem (III.5.1) Wir gehen in mehreren Schritten vor.

Schritt 1: Gilt das Theorem für die offenen Mengen U, V und $B = U \cap V$, dann gilt es auch für $Y = U \cup V$.

Es seien K (bzw. L) kompakt in U (bzw. V). Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \leftarrow H^{q+1}(B, B - (K \cap L)) & \xleftarrow{\quad} & H^q(Y, Y - (K \cup L)) & \xleftarrow{\quad} & \\
 \downarrow \cap \zeta_{K \cap L} & & & \downarrow \cap \zeta_{K \cup L} & \\
 H_{n-q-1}(B) & \xleftarrow{\quad} & & H_{n-q}(Y) & \xleftarrow{\quad} \\
 \\
 \leftarrow H^q(U, U - K) \oplus H^q(V, V - L) & \xleftarrow{\quad} & H^q(B, B - (K \cap L)) & & \\
 \downarrow \cap \zeta_K \oplus \cap \zeta_L & & & \downarrow \cap \zeta_{K \cap L} & \\
 \leftarrow H_{n-q}(U) \oplus H_{n-q}(V) & \xleftarrow{\quad} & & H_{n-q}(B) &
 \end{array}$$

Dabei ist die untere Zeile eine gewöhnliche Mayer-Vietoris-Sequenz. Die obere Zeile ist die relative Version der Mayer-Vietoris-Sequenz für die Kohomologie zusammen mit Ausschneidungsabbildungen der Form $(W, W - S) \subset (Y, Y - S)$. Die beiden rechten Quadrate in diesem Diagramm kommutieren auf Grund der Natürlichkeit des Cap-Produkts (Satz (III.3.8)). Der wesentliche Schritt ist nun der Beweis der

Behauptung Das folgende Diagramm kommutiert bis auf $(-1)^{q+1}$:

$$\begin{array}{ccc}
 H^{q+1}(Y, Y - (K \cap L)) & \xleftarrow{\gamma} & H^q(Y, Y - (K \cup L)) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cap \zeta_{K \cup L} \\
 H^{q+1}(B, B - (K \cap L)) & & \\
 \downarrow \cap \zeta_{K \cap L} & & \downarrow \\
 H_{n-q-1}(B) & \xleftarrow{\Gamma} & H_{n-q}(Y).
 \end{array}$$

Hierbei sind γ, Γ Korandabbildungen der Mayer-Vietoris-Sequenz und der senkrechte Isomorphismus ist eine Ausschneidungsabbildung.

Beweis der Behauptung: Wir müssen γ und Γ auf dem Niveau der Koränder, bzw. Ränder berechnen. Hierzu betrachten wir folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
& (1) & (4) & (6) & \\
\\
S^*(Y, Y - (K \cup L)) & \xleftarrow{\quad} & S^*(Y, Y - K) & \xleftarrow{\quad} & S^*(Y, Y - (K \cap L)) \\
\uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow \\
(5) S^*(U, U - K) & & & (8) S^*(B, B - (K \cap L)) & \\
\uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow \\
S^*(X, X - (K \cup L)) & \xleftarrow{\quad} & S^*(X, X - K) & \xleftarrow{\quad} & S^*(X, X - (K \cap L)) \\
& (2) & (3) & (7) &
\end{array}$$

Hierbei sind alle Abbildungen durch Inklusionen induziert. Im folgenden verwenden wir folgende Notation: Ist $R \subset S \subset X$ und $j : (X, X - S) \rightarrow (X, X - R)$ die Inklusion, so gilt für $x \in S^*(X, X - R)$:

$$x \cap \zeta_R = j_{\#}(j^{\#}(x) \cap \zeta_S).$$

in $S_*(X)$ (wegen Satz (III.3.8)). Wir schreiben hierfür abkürzend

$$x \cap \zeta_R = x \cap \zeta_S.$$

Es sei nun c in (1) mit $\delta c = 0$. Sei a_2 in (2) das Bild von c unter einer Kettenabbildung, die ein Inverses (modulo Kettenhomotopie) zur Ausschneidungsabbildung ist (vgl. Satz (III.5.2)). Dann ist $\delta a_2 = 0$. Es sei a_3 ein Element in (3), so daß δa_3 in (7) ein Repräsentant des Bildes von a_2 unter dem Randoperator der Mayer-Vietoris-Sequenz ist (vgl. die Konstruktion des Randoperators in der Mayer-Vietoris-Sequenz). Es seien a_4 und a_5 die Bilder von a_3 in (4) und (5). Dann ist das Bild von a_4 in (1) gleich $c + \delta Dc$, wobei D eine Kettenhomotopie ist. Also wird $\gamma(c)$ in (6) durch δa_4 repräsentiert. Auf Grund der Kommutativität des obigen Diagramms sind die Bilder von δa_4 und δa_3 in (8) gleich. Es gilt

$$\gamma(c) \cap \zeta_{K \cap L} = \delta a_4 \cap \zeta_{K \cap L} = \delta a_3 \cap \zeta_{K \cap L}$$

in $S_*(X)$. (Dies ist ein Element im Bild von $S_*(B)$). Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\delta a_3 \cap \zeta_{K \cap L} &= \delta a_3 \cap \zeta_K = (-1)^{q+1} \partial(a_3 \cap \zeta_K) \\
&= (-1)^{q+1} \partial(a_4 \cap \zeta_K) \\
&= (-1)^{q+1} \partial(a_5 \cap \zeta_K)
\end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aus Satz (III.3.6) folgt. Andererseits gilt

$$a_4 \cap \zeta_K = a_4 \cap \zeta_{K \cup L} = (c + \delta Dc) \cap \zeta_{K \cup L}$$

$$= c \cap \zeta_{K \cup L} + (-1)^q \partial(Dc \cap \zeta_{K \cup L})$$

(wiederum mit Satz (III.3.6)). Also wird, nach Konstruktion des Korand-operators in der Mayer-Vietoris-Sequenz, das Bild $\Gamma(c \cap \zeta_{K \cup L})$ durch $\partial(a_4 \cap \zeta_K) = \partial(a_5 \cap \zeta_K)$ repräsentiert (wobei wir $S_*(B) \subset S_*(U) \subset S_*(Y)$ verwenden.). Das heißt also, wir erhalten, wenn wir das Diagramm auf verschiedene Weise durchlaufen, Elemente in $S_*(B)$, welche in $S_*(X)$ bis auf $(-1)^{q+1}$ gleich sind. Da $S_*(B) \rightarrow S_*(X)$ injektiv ist, folgt die Behauptung. \square

Jede kompakte Menge in Y ist von der Form $K \cup L$ mit $K \subset U$ und $L \subset V$. Übergang zum Limes gibt ein Diagramm, das bis auf Vorzeichen kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccc} \longleftarrow H_c^{q+1}(B) & \longleftarrow & H_c^q(Y) & \longleftarrow & H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) & \longleftarrow & H_c^q(B) & \longleftarrow \\ \downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D+D & & \downarrow D & \\ H_{n-q-1}(B) & \longleftarrow & H_{n-q}(Y) & \longleftarrow & H_{n-q}(U) \oplus H_{n-q}(V) & \longleftarrow & H_{n-q}(B) & \longleftarrow \end{array}$$

Die Zeilen dieses Diagramms sind exakt. Die senkrechten Pfeile sind Isomorphismen, außer möglicherweise in den Fällen, in denen der Raum Y vorkommt. Die Behauptung folgt damit auf dem Fünferlemma.

Schritt 2: Es sei $(U_i)_{i \in I}$ ein (bezüglich der Inklusion) total geordnetes System offener Mengen und U die Vereinigung dieser offenen Mengen. Gilt der Satz für alle U_i , dann auch für U .

Um dies zu zeigen, genügt es zu sehen, daß die Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi_1 &: \lim_{\rightarrow} H_{n-q}(U_i) \rightarrow H_{n-q}(U) \\ \psi_2 &: \lim_{\rightarrow} H_c^q(U_i) \rightarrow H_c^q(U) \end{aligned}$$

Isomorphismen sind. Dies gilt aus folgendem Grund: Ist $K \subset U$ eine kompakte Menge, so ist, da das System der $(U_i)_{i \in I}$ total geordnet ist, $K \subset U_i$ für ein $i \in I$. Dies zeigt, daß ψ_1 ein Isomorphismus ist (jede singuläre Kette hat nämlich kompakten Träger). Die Behauptung für ψ_2 schließt man analog, wobei man noch die Aussage über iterierte Limiten zu Ende des letzten Abschnitts verwenden muß.

Schritt 3: U ist in einer Koordinatenumgebung enthalten (d.h. wir können U als offene Teilmenge des \mathbb{R}^n auffassen).

Fall 1: U ist konvex. Dann ist U homöomorph zur offenen Kugel $\overset{\circ}{D}{}^n$. Um $\lim_{\rightarrow} H^q(\overset{\circ}{D}{}^n, \overset{\circ}{D}{}^n - K)$ zu berechnen, genügt es K ein finales System abgeschlossener Kugeln um den Ursprung durchlaufen zu lassen (Satz (III.4.3)).

Für eine solche Menge gilt dann $H^q(\overset{\circ}{D^n}, \overset{\circ}{D^n} - K) = 0$ für $q \neq n$. Außerdem ist

$$\cap \zeta_K : H^n(\overset{\circ}{D^n}, \overset{\circ}{D^n} - K) \rightarrow H_0(\overset{\circ}{D^n}) \cong \mathbb{Z}$$

ein Isomorphismus (da $\gamma \cap \zeta_K = \langle \zeta_K, \gamma \rangle$ und ζ_K erzeugendes Element ist). Also ist auch der Limeshomomorphismus D ein Isomorphismus.

Fall 2: U sei beliebig. Die Menge der Punkte in U mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar. Wie wählen eine solche Abzählung. Es sei $V_j \subset U$ eine offene konvexe Menge um den j -ten Punkt. Sei

$$U_1 = V_1, \quad U_i = U_{i-1} \cup V_i \quad (i > 1).$$

Ein Induktionsbeweis, zusammen mit Schritt 1 zeigt dann, da das Theorem für alle U_i gilt (der Induktionsanfang ist Schritt 3, Fall 1). Mit Schritt 2 gilt es auch für U .

Schritt 4: Das Theorem gilt für X . Das Zornsche Lemma (zusammen mit Schritt 2) zeigt, daß es eine maximale Menge $U \subset X$ gibt, für die das Theorem gilt. Ist $U \neq X$, so erhält man mit Hilfe von Schritt 1 und 3 sofort einen Widerspruch. \square

Korollar III.5.7 *Ist X zusammenhängend und orientierbar, so ist $H_c^n(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Die Voraussetzung orientierbar ist notwendig, wie etwa das Beispiel $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zeigt, da $H_c^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$ gilt.

Im folgenden setzen wir stets voraus, daß die Bettizahlen $\beta_i = \text{rang } H_i(X)$ endlich sind. Wir notieren aber:

Theorem III.5.8 *Ist X eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n , so gilt*

- (i) *X kann in den \mathbb{R}^{2n} eingebettet werden.*
- (ii) *X hat die Struktur eines endlichen CW-Komplexes.*
- (iii) *Die Homologie von X ist endlich erzeugt.*

Korollar III.5.9 *Ist X eine kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n , so gilt $\beta_i(X) = \beta_{n-i}(X)$.*

Beweis. Nach dem universellen Koeffiziententheorem bzw. Satz (III.2.8) gilt $\text{rang } (H^i(X, \mathbb{Z})) = \text{rang } (H_i(X, \mathbb{Z}))$. Dann folgt die Behauptung aus der Poincar-Dualität. \square

Wir erhalten auch eine Aussage über die Torsionsuntergruppen. Es sei T_q die Torsionsuntergruppe von $H_q(X)$. Dann gilt

Korollar III.5.10 $T_q \cong T_{n-q-1}$.

Beweis. Ebenfalls aus Satz (III.2.8) und Satz (III.3.5). \square

Korollar III.5.11 *Ist X eine kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit ungerader Dimension, so gilt für die Eulerzahl $\chi(X) = 0$.*

Korollar III.5.12 *Ist X kompakt, orientierbar mit gerader Dimension, die aber nicht durch 4 teilbar ist, so ist $\chi(X)$ gerade.*

Beweis. Es sei $n = 4k + 2$. Es ist zu zeigen, daß $\beta_{2k+1}(X)$ gerade ist. Das Cup-Produkt liefert eine nicht-ausgeartete Bilinearform

$$H^{2k+1}(X) \otimes \mathbb{Q} \times H^{2k+1}(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}.$$

Diese Form ist nach Theorem (III.3.3) schiefsymmetrisch, also ist β_{2k+1} gerade. \square

Poincar-Dualität kann man auch benutzen, um den Kohomologiering $H^*(X) = \bigoplus_{k \geq 0} H^k(X)$ von Mannigfaltigkeiten zu bestimmen. Es sei etwa $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ und $\zeta_4 \in H_4(X) \cong \mathbb{Z}$ eine Fundamentalklasse. Es sei $h \in H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ ein Erzeuger. Dann folgt aus der Poincar-Dualität, daß $h \cap \zeta_4 \in H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ ein Erzeuger ist. Da das Kroneckerprodukt

$$H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \times H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z}$$

nicht ausgeartet ist, erzeugt

$$\langle h, h \cap \zeta_4 \rangle = \langle h \cup h, \zeta_4 \rangle$$

die Gruppe \mathbb{Z} . Also ist $h \cup h$ ein Erzeuger von $H^4(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$. Da $h^3 = h \cup h \cup h \in H^6(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 0$ ist, gilt

$$H^*(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[h]/(h^3).$$

Durch Induktion erhält man

Satz III.5.13 $H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$.

LITERATUR:

- M. Greenberg, J. Harper: *Algebraic Topology*, Benjamin.
- J. Vick: *Homology Theory*, Academic Press.
- W. Fulton: *Algebraic Topology*, Springer Verlag.
- R. Stöcker, H. Zieschang: *Topology*, Teubner Verlag.
- E. Spanier: *Algebraic Topology*, Mc Graw Hill.