

Analysis I

Prof. Dr. Dirk Ferus

Wintersemester 2006/07

Version vom 10.04.2008

Inhaltsverzeichnis

0	Literatur	5
1	Die reellen Zahlen	7
1.1	Die Körperaxiome	8
1.2	Die Anordnungsaxiome	10
1.3	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	14
2	Die komplexen Zahlen	21
3	Mengen und Abbildungen	24
4	Elementares über Funktionen	29
4.1	Polynome	29
4.2	Rationale Funktionen	33
4.3	Eine Buckelfunktion	35
4.4	Zwei wichtige Eigenschaften von Funktionen	37
5	Zahlenfolgen und Konvergenz	38
5.1	Konvergenz und Vollständigkeit	38
5.2	Rechenregeln für konvergente Folgen	47
5.3	Noch einmal Vollständigkeit	51
5.4	Konvergenz in \mathbb{C}	57
6	Stetigkeit	59
6.1	Grenzwerte von Funktionen	59
6.2	Drei bedeutende Sätze über stetige Funktionen	68
7	Differentiation	72
7.1	Die Ableitung	72
7.2	Der Mittelwertsatz	79
7.3	Exponentialfunktion, Logarithmus und Potenzen	82
7.4	Hyperbelfunktionen, Areafunktionen	88
7.5	Die Regel von Bernoulli - de L'Hospital	91
7.6	Die Stetigkeit der Ableitung	94
8	Höhere Ableitungen	97
8.1	Höhere Ableitungen	97
8.2	Die Taylorapproximation	102
8.3	Lokale Extrema, Diskretisierung	105

8.4	Trigonometrische Funktionen	108
8.5	Arcus-Funktionen	114
8.6	Die Eulersche Formel	116
9	Integration	118
9.1	Das Regelintegral	118
9.2	Regelfunktionen	126
9.3	Numerische Integration	130
9.4	Das unbestimmte Integral	131
9.5	Integrationsregeln	135
9.6	Ergänzungen zur Integration	140
9.6.1	Elliptische Integrale	141
9.6.2	Integration komplexwertiger Funktionen	145
9.6.3	Integration rationaler Funktionen	147
9.7	Uneigentliche Integrale	149
10	Unendliche Reihen	152
10.1	Konvergenz von Reihen, geometrische Reihe	152
10.2	Konvergenzkriterien für unendliche Reihen I	155
10.3	Konvergenzkriterien für unendliche Reihen II	163
10.4	Die Segnungen absoluter Konvergenz	166
10.5	Potenzreihen	169
10.6	Differentiation von Potenzreihen	172
10.7	Abelscher Grenzwertsatz	175
10.8	Die Taylorreihe	178
10.9	Die komplexe Exponentialfunktion	181
11	Ein Ausblick auf die Fourierreihen	182
	Anhang 1: Darstellung reeller Zahlen	187
	Anhang 2: Subtileres über die Stetigkeit	190
	Anhang 3: Nullstellen von C^∞-Funktionen	192
	Anhang 4: Differentiation von Reihen	194
	Anhang 5: Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion	195

0 Literatur

Zur Analysis

- M. Barner/F. Flohr: Analysis I. Walter de Gruyter.
O. Forster: Analysis I. Differential und Integralrechnung in einer Variablen. Vieweg.
H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. Teubner.
S. Hildebrandt: Analysis I, Springer 2002.
S. Lang: Analysis I, Addison-Wesley, 1968.
W. Rudin: Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill 1964

Zum Aufbau des Zahlensystems aus den natürlichen Zahlen

- E. Landau: Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930

Zur Geschichte der Mathematik (und der Analysis)

- M. Cantor: Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 4 Bände, um 1900
N. Bourbaki: Elements of the History of Mathematics, Springer
M. Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Univ. Pres 1972

Die historische Entwicklung der Analysis wird in der heute üblichen (und auch in diesem Skriptum gebotenen) Darstellung nur dann reflektiert, wenn man "reflektieren" wörtlich als "spiegeln" versteht. Ein Lehrbuch der Analysis mit der historischen Reihenfolge ist das sehr lesenswerte

- E. Hairer/G. Wanner: Analysis by Its History, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 1995

Zur Integration durch elementare Funktionen

- R. Risch: The problem of integration in finite terms. Trans. AMS 139 (1969), 167-189
M. Rosenlicht: Integration in finite terms. American Math. Monthly 9 (1972), 963-972

Das Griechische Alphabet

α	A	Alpha	ι	I	Iota	ρ	P	Rho
β	B	Beta	κ	K	Kappa	σ	Σ	Sigma
γ	Γ	Gamma	λ	Λ	Lambda	τ	T	Tau
δ	Δ	Delta	μ	M	My	υ	Y	Ypsilon
ϵ, ε	E	Epsilon	ν	N	Ny	ϕ, φ	Φ	Phi
ζ	Z	Zeta	ξ	Ξ	Xi	χ	X	Chi
η	H	Eta	o	O	Omikron	ψ	Ψ	Psi
θ, ϑ	Θ	Theta	π	Π	Pi	ω	Ω	Omega

1 Die reellen Zahlen

Wir setzen die reellen Zahlen als gegeben voraus und schreiben zunächst auf, welche ihrer Eigenschaften wir (ausschließlich) benutzen werden. Wir tun das in Form von „Axiomen“, die wir in drei Gruppen zusammenfassen:

1. Die Rechenregeln für Addition und Multiplikation (Körperaxiome).
2. Die Rechenregeln für Ungleichungen (Anordnungsaxiome).
3. Die Vollständigkeit. Diese Gruppe enthält nur ein Axiom, das wir bis zum Abschnitt 5.1 zurückstellen. Es unterscheidet die reellen von den rationalen Zahlen und wird nötig, wenn wir über Grenzwerte sprechen wollen.

Man kann auf einem sehr viel niedrigeren Niveau ansetzen, mit den sogenannten Peano-Axiomen für die *natürlichen* Zahlen und aus diesen die ganzen, rationalen und reellen Zahlen konstruieren und ihre Eigenschaften beweisen; aber das kostet mehr Zeit, als wir zur Verfügung haben. Vergleichen Sie dazu das hübsche Büchlein von Edmund Landau.

1.1 Die Körperaxiome

Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen mit \mathbb{R} . Wir setzen voraus, dass darin eine Addition und eine Multiplikation gegeben sind, die je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ eine neue reelle Zahl $a + b$ bzw. ab zuordnen und folgende Eigenschaften haben:

1. Axiome für die Addition

(A1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

(A2) Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $a + 0 = a$. (Neutrales Element der Addition)

(ii) Es gibt genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $a + b = 0$. (Additives Inverses)

(A3) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$a + b = b + a. \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

2. Axiome für die Multiplikation

(M1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a(bc) = (ab)c. \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

(M2) Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $a1 = a$. (Neutrales Element der Multiplikation)

(ii) Falls $a \neq 0$, gibt genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $ab = 1$. (Multiplikatives Inverses)

(M3) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$ab = ba. \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

3. Distributivgesetz

(D) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Das additive Inverse von a bezeichnen wir mit $-a$, das multiplikative Inverse mit $\frac{1}{a}$ oder a^{-1} . Beachten Sie, dass nur für $a \neq 0$ ein multiplikatives Inverses existiert, so dass $\frac{a}{0}$ nicht erklärt ist.

Statt der Menge der reellen Zahlen hätten wir zum Beispiel auch die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen oder die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen nehmen können, auch dafür gelten die vorstehenden Axiome. Allgemein nennt man eine Menge, in der eine „Addition“ und eine „Multiplikation“ mit den obigen Axiomen erklärt sind, einen *Körper*.

Aus diesen Axiomen folgen die Ihnen vertrauten Rechenregeln für die beiden Grundrechenarten. Wir geben zwei Beispiele

Beispiel 1. Zunächst gilt

$$0c \underset{A2.i}{=} (0 + 0)c \underset{D}{=} 0c + 0c. \quad (1)$$

Jetzt „ziehen wir auf beiden Seiten $0c$ ab“.

$$0 \underset{A2.ii}{=} 0c + (-0c) \underset{(1)}{=} (0c + 0c) + (-0c) \underset{A1}{=} 0c + (0c + (-0c)) \underset{A2.ii}{=} 0c + 0 \underset{A2.i}{=} 0c$$

Also haben wir bewiesen, dass für alle $c \in \mathbb{R}$

$$0c = 0. \tag{2}$$

□

Beispiel 2.

$$ab + (-a)b \underset{D}{=} (a + (-a))b \underset{A2.ii}{=} 0b \underset{(2)}{=} 0.$$

Andrerseits ist

$$ab + (-ab) \underset{A2.ii}{=} 0.$$

Aus der Eindeutigkeit im Axiom A2.ii folgt daher für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$(-a)b = -(ab).$$

□

Weiter kann man beweisen, dass die Gleichung

$$ax = b$$

für $a \neq 0$ und beliebiges b genau eine Lösung x hat, nämlich $x = b(a^{-1})$, wofür wir auch $\frac{b}{a}$ schreiben.

Ebenso schreiben wir $a - b$ für $a + (-b)$.

Weitere Beispiele für Rechenregeln, die aus den Axiomen folgen:

$$\begin{aligned} -(-a) &= a, \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + bc}{bd}, \\ ab = 0 &\implies a = 0 \text{ oder } b = 0, \\ (-a) + (-b) &= -(a + b). \end{aligned}$$

1.2 Die Anordnungsaxiome

Die Anordnungsaxiome regeln das Rechnen mit Ungleichungen. Wir setzen voraus, dass für je zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die Aussage „ a ist kleiner als b “, geschrieben $a < b$ entweder wahr oder falsch ist, und dass die folgenden Axiome gelten:

Anordnungsaxiome

(O1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist genau eine der folgenden Aussagen wahr:

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b. \quad (\text{Trichotomie})$$

(O2) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a < b \text{ und } b < c \implies a < c. \quad (\text{Transitivität})$$

(O3) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a < b \implies a + c < b + c. \quad (\text{Additive Monotonie})$$

(O4) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c$ gilt

$$a < b \implies ac < bc. \quad (\text{Multiplikative Monotonie})$$

Reelle Zahlen a mit $0 < a$ heißen *positiv*, solche mit $a < 0$ *negativ*.

Statt $a < b$ schreibt man auch $b > a$ und sagt „ b ist größer als a “.

Man schreibt $a \leq b$, gelesen „ a kleiner (oder) gleich b “, falls $a < b$ oder $a = b$. Entsprechend ist $a \geq b$ erklärt.

Wieder folgt aus diesen Axiomen eine Fülle weiterer mehr oder weniger bekannter Regeln.

Beispiel 3. Wir zeigen

$$a > 0 \implies -a < 0.$$

Nach (O3) folgt nämlich aus der Voraussetzung $0 < a$, dass

$$0 + (-a) < a + (-a),$$

also $-a < 0$. Ebenso zeigt man

$$a < 0 \implies -a > 0.$$

□

Beispiel 4. Bei Multiplikation mit negativen Zahlen kehren Ungleichungen sich um:

$$x < y \text{ und } a < 0 \implies ax > ay.$$

Nach dem letzten Beispiel ist $-a > 0$ und daher nach (O4)

$$(-a)x < (-a)y, \text{ d.h. } -ax < -ay.$$

Nach (O3) können wir dazu $ax + ay$ addieren und erhalten

$$-ax + ax + ay < -ay + ax + ay,$$

also $ay < ax$ wie behauptet.

□

Beispiel 5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Ist $a > 0$, so folgt aus (O4)

$$0 = 0a < aa =: a^2.$$

Ist andererseits $a < 0$, so folgt aus dem letzten Beispiel

$$a^2 = aa > 0a = 0.$$

Damit haben wir gezeigt:

$$a \neq 0 \implies a^2 > 0.$$

Insbesondere ist $1 = 1 \cdot 1 > 0$ und daher $-1 < 0$.

□

Beispiel 6. Nur nicht-negative Zahlen $b \geq 0$ können nach dem vorstehenden Beispiel eine Quadratwurzel in \mathbb{R} besitzen. Genauer: Die Gleichung

$$x^2 = b \tag{3}$$

hat allenfalls für $b \geq 0$ Lösungen. Wieviele? Ist $a^2 = b$, so ist natürlich auch $(-a)^2 = b$, und wir behaupten, dass das alle möglichen Lösungen sind, d.h. dass die Gleichung (3) höchstens 2 Lösungen hat. Ist nämlich

$$a^2 = b \text{ und } c^2 = b,$$

so folgt

$$0 = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c).$$

Also ist $c = a$ oder $c = -a$. Insbesondere hat die Gleichung für nicht-negatives b höchstens eine nicht-negative Lösung $a \geq 0$. Gegebenenfalls nennt man die dann die (*Quadrat*)*Wurzel* \sqrt{b} aus b . Dass wirklich jedes reelle $b \geq 0$ eine Quadratwurzel besitzt, werden wir später sehen.

□

Ein Körper, in dem eine „<“-Beziehung mit den obigen Axiomen gegeben ist, nennt man einen *angeordneten Körper*. In den rationalen Zahlen \mathbb{Q} hat man „dieselbe“ Anordnung wie in den reellen Zahlen gegeben. Aber im Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen gibt es keine Anordnung mit den obigen Axiomen. Sonst wäre nämlich nach dem eben Bewiesenen $0 > -1 = i^2 > 0$. Widerspruch!

Mittels „<“ kann man den Betrag reeller Zahlen definieren:

Definition 7 (Betrag). Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

$|a|$ liest man „ a absolut“ oder „Betrag a “.

Offenbar ist

$$|-a| = |a|.$$

Ist $a < 0$, so ist $-a > 0$, also

$$a < 0 < -a = |a|.$$

Ist andererseits $a \geq 0$, so ist $a \leq |a|$, in Wahrheit nämlich $a = |a|$. Also gilt für alle a , dass $a \leq |a|$. Ebenso zeigt man $-|a| \leq a$ für alle a . Damit gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

Wir führen einige weitere Eigenschaften des Betrags als Satz auf:

Satz 8 (Betrag). Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |a| \geq 0 \text{ mit } |a| = 0 \text{ genau dann, wenn } a = 0, \\ |ab| = |a| |b|, \\ |a + b| \leq |a| + |b|. \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung, der Beweis der beiden anderen Aussagen ist sehr leicht.

Aus $a \leq |a|$ (und $b \leq |b|$) folgt

$$a + b \leq |a| + |b|,$$

und aus $-a \leq |a|$ (und $-b \leq |b|$) folgt

$$-(a + b) \leq |a| + |b|,$$

Eine der beiden linken Seiten ist aber $= |a + b|$, und damit ist die Dreiecksungleichung bewiesen. \square

Für das Abschätzen von Differenzen ist folgende Ungleichung nützlich:

Korollar 9. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$||b| - |a|| \leq |b - a|.$$

Beweis. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|b| = |a + (b - a)| \leq |a| + |b - a|,$$

also

$$|b| - |a| \leq |b - a|.$$

Daraus folgt unter Vertauschung von a und b

$$-(|b| - |a|) = |a| - |b| \leq |a - b| = |b - a|.$$

Wieder ist $||b| - |a|| = (|b| - |a|)$ oder $||b| - |a|| = -(|b| - |a|)$, und aus einer der beiden letzten Ungleichungen ergibt sich die Behauptung. \square

Mit der Anordnungsbeziehung definiert man wichtige Teilmengen von \mathbb{R} :

Definition 10 (Intervalle). Eine Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$ heißt ein *Intervall*, wenn sie mit je zwei „Punkten“ auch alle dazwischen liegenden enthält:

$$J \text{ Intervall} \iff \forall_{u,v,x \in \mathbb{R}} (u < x < v \text{ und } u \in J \text{ und } v \in J \implies x \in J).$$

Beispiel 11. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Ist $b = a$, so besteht $[a, b]$ nur aus dem Punkt a , ist $b < a$, so ist $[a, b]$ die leere Menge \emptyset . In jedem Fall ist $[a, b]$ ein Intervall. Sind nämlich $u, x, v \in \mathbb{R}$ mit $u \in [a, b], v \in [a, b]$ und $u < x < v$ so folgt

$$a \leq u < x < v \leq b,$$

also $a \leq x \leq b$ nach der Transitivität.

Ebenso sieht man, dass die Mengen

$$\begin{aligned}]a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \\ [a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\]a, \infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\ [a, \infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\]-\infty, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \\]-\infty, \infty[&:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Intervalle sind.

Man nennt $[a, b]$ das *abgeschlossene* oder *kompakte* Intervall zwischen a und b .

Intervalle der Form $]a, b[$ heißen *offen*, Intervalle der Form $]a, b]$ oder $[a, b[$ *halboffen*.

Es ist wahr, aber aus den bisher angeführten Axiomen noch nicht beweisbar, dass *jedes* Intervall in \mathbb{R} von einem dieser Typen ist.

□

Übungsaufgabe. Finden Sie die Mathematische Fachbibliothek und in dieser das Analysis-Buch von S. Hildebrandt. Lesen Sie darin Seite 1-8.

1.3 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Eine wichtige Teilmenge der reellen Zahlen bilden die natürlichen Zahlen, die wir jetzt definieren wollen.

Definition 12. Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv*, wenn für sie gilt:

1. $0 \in N$
2. Ist $a \in N$, so ist auch $a + 1 \in N$.

Beispiel 13. Die Menge $N = \mathbb{R}$ ist trivialerweise induktiv.

Weil $0 < 1$, ist $a < a + 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Daher ist $N = [0, +\infty[$ eine induktive Menge. □

Es ist klar, dass eine induktive Menge mindestens die reellen Zahlen $0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots$ enthalten muss: Eben die natürlichen Zahlen nach unserem naiven Verständnis.

Lemma 14. *Der Durchschnitt von beliebig vielen induktiven Mengen ist wieder induktiv.*

Beweis. Sei I eine Menge und $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie von induktiven Mengen und

$$N := \bigcap_{i \in I} N_i := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in N_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Weil $0 \in N_i$ für alle $i \in I$, ist $0 \in N$.

Ist weiter $a \in N$, also $a \in N_i$ für alle $i \in I$, so ist auch $a + 1$ in N_i für alle $i \in I$, also $a + 1 \in N$. □

Definition 15 (Natürliche Zahlen). Die Menge der *natürlichen Zahlen* ist definiert als Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von \mathbb{R} :

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\mathbb{R} \supset N \text{ induktiv}} N.$$

Sie ist also die kleinste induktive Menge. Insbesondere ist $n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weil $[0, \infty[$ induktiv ist.

Bemerkung. Die Literatur ist sich nicht einig, ob \mathbb{N} die 0 einschließt oder nicht. Die DIN-Norm DIN 5473 oder der *Forster* meinen "ja", und das wollen wir hier übernehmen. Der *Barner/Flohr* bezeichnet diese Menge mit \mathbb{N}_0 .

Definition 16. Die Menge

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

heißt die Menge der *ganzen Zahlen*.

Die Menge

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

heißt die Menge der *rationalen Zahlen*.

Satz 17 (Vollständige Induktion). Sei $W \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

1. $0 \in W$
2. Ist $a \in W$, so ist auch $a + 1 \in W$.

Dann gilt $W = \mathbb{N}$.

Beweis. Der Beweis ist trivial: Offenbar ist W eine induktive Menge. Weil \mathbb{N} nach Definition in jeder induktiven Menge enthalten ist, ist daher $\mathbb{N} \subset W$. Nach Voraussetzung ist aber $W \subset \mathbb{N}$, also $W = \mathbb{N}$. \square

Dieser Satz ist ein wichtiges Beweismittel, er ermöglicht Beweise über Aussagen für natürliche Zahlen durch die sogenannte

Vollständige Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Kann man zeigen, dass sie

1. für $n = 0$ wahr ist und
2. für $n + 1$ wahr ist, falls sie für n wahr ist,

so folgt, dass sie für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist: Man setze einfach

$$W := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Dann ist $W \subset \mathbb{N}$ induktiv, also $W = \mathbb{N}$ nach Satz 17.

Für Beispiele zur vollständigen Induktion ist es hilfreich, Addition und Multiplikation in den reellen Zahlen nicht nur für zwei, sondern für eine beliebige Anzahl $n \in \mathbb{N}$ von Summanden bzw. Faktoren zu haben.¹ Die offensichtlichen Verallgemeinerungen von Assoziativgesetz, Kommutativgesetz und Distributivgesetz auf diese Fälle beweist man ebenfalls mit vollständiger Induktion.

Wir stellen hier die Eigenschaften des Summen- und Produktzeichens zusammen:

Seien $m \leq n$ ganze Zahlen und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq k \leq n$ sei a_k eine reelle Zahl. Dann setzt man

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n,$$
$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m a_{m+1} \dots a_n.$$

Ist $m > n$, so vereinbart man

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0,$$
$$\prod_{k=m}^n a_k := 1.$$

¹ Die exakte Definition dieser Operationen über den sogenannten *Rekursionssatz* benutzt selbst die vollständige Induktion. Wir gehen darauf nicht ein, vgl. *Barner/Flohr*, §2.3

Insbesondere setzt man für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$

$$a^n := \prod_{k=1}^n a = a \cdot \dots \cdot a$$

und erhält

$$a^0 := 1.$$

Zurück zur vollständigen Induktion. Wir geben Beispiele:

Beispiel 18. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 0$. Nach Definition ist

$$\sum_{k=1}^0 k = 0.$$

Andrerseits ist

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0.$$

Also ist die Aussage für $n = 0$ wahr.

Induktionsschritt: $n \rightarrow (n+1)$. Wir nehmen an, dass die Aussage für n wahr sei, dass also gilt

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zu zeigen: Dann ist sie auch für $n+1$ gültig, d.h. es gilt auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Das zeigen wir so:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1).$$

Nach unserer Induktionsannahme können wir den ersten Summanden rechts ersetzen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

Beispiel 19 (Bernoullische Ungleichung). Für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Beweis durch vollständige Induktion.

$n = 0$. Dann ist

$$(1+x)^0 = 1, \\ 1 + 0 \cdot x = 1.$$

Also stimmt die Behauptung.

$n \rightarrow (n+1)$. Es gelte bereits

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Dann folgt durch Multiplikation mit der (positiven!) Zahl $1+x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

□

Als nächstes Beispiel wollen wir die allgemeine Binomialformel beweisen. Dafür noch zwei Definitionen:

Definition 20 (Fakultät). Wir definieren n Fakultät durch

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere ist $0! = \prod_{k=1}^0 k = 1$. Durch vollständige Induktion(!) kann man zeigen, dass man $n!$ interpretieren kann als die Anzahl der Möglichkeiten, n Dinge linear anzuordnen (=Anzahl der Permutationen von n Elementen).

Definition 21 (Binomialkoeffizienten). Für $n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$ definieren wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

Das hat im Zähler wie im Nenner ein Produkt von k Faktoren. Wir setzen weiter

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Offenbar gilt

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n.$$

Weiter ist für alle $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{4}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{5}$$

Für $1 \leq k \leq n$ ist nämlich

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k) \cdot \dots \cdot 1}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k},$$

und das beweist (4) in diesem Fall. Die Fälle $k = 0, k < 0, k > n$ kann man im Kopf nachprüfen.

Nun ist

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
 &\stackrel{(6)}{=} (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \\
 &\stackrel{(**)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k \\
 &\stackrel{(7)}{=} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt (7). Überlegen Sie sich, dass bei der mit (*) gekennzeichneten Gleichung die zweiten Summen auf beiden Seiten gleich sind, dass also die „Indexverschiebung“ den Wert der Summe nicht ändert. Bei der Gleichheit (**) haben wir benutzt, dass $\binom{n}{n+1} = 0 = \binom{n}{-1}$. \square

Beispiel 23. Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

Beweis. Beim Ausmultiplizieren von

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ Faktoren}}$$

erhält man die Summe von allen Produkten, die aus k Klammern den Faktor b und aus $(n-k)$ Klammern den Faktor a auswählen. Für festes k liefert das gerade $\binom{n}{k}$ -mal das Monom $a^{n-k}b^k$. So viele Möglichkeiten gibt es also zur Auswahl von k „ b -Klammern“. \square

Eine ganze Reihe von Eigenschaften der natürlichen Zahlen, die Ihnen selbstverständlich vorkommen, sind auf dem Hintergrund unserer Definition gar nicht selbstverständlich:

- Warum sind die Summe oder das Produkt von zwei natürlichen Zahlen wieder eine solche?
- Warum folgt aus $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$, dass $n - m \in \mathbb{N}$?

Diese Aussagen lassen sich aber (mit vollständiger Induktion) aus unseren Axiomen beweisen, vgl. *Barner/Flohr*.

Als Konsequenz ergibt sich, dass für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\} = \{m + n_0 \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Hieraus folgt ziemlich leicht eine öfter benutzte

Variante der vollständige Induktion: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und sei $B(n)$ eine Aussage, die für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ wahr oder falsch ist. Kann man zeigen, dass sie

1. für $n = n_0$ wahr ist und
2. für $n + 1$ wahr ist ($n \geq n_0$), falls sie für n wahr ist,

so folgt, dass sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ wahr ist.

Etwas kniffliger, aber ebenfalls mit der Methode der vollständigen Induktion, zeigt man:

Satz 24 (Wohlordnungsprinzip). *Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.*

Beweis. Vgl. Barner/Flohr. □

Dagegen läßt sich der folgende Satz aus den bisherigen Axiomen für die reellen Zahlen **nicht** beweisen, der Körper der hyperreellen Zahlen der Nonstandard-Analysis ist ein angeordneter, aber nicht archimedisch-angeordneter Körper. Wir führen den Satz hier an, weil er manchmal als weiteres Anordnungsaxiom fungiert. Vergleichen Sie den Abschnitt 5.1.

Satz 25 (Archimedisches Prinzip). *Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$x < n.$$

Für den Beweis vergleiche Satz 67.

Wir sind also mit der Axiomatik der reellen Zahlen noch nicht fertig, aber fürs erste ist das nicht weiter schlimm: Über weite Strecken scheint es, als könnten wir mit den bisherigen Axiomen schon alles tun, was wir mit den reellen Zahlen vorhaben. Also machen wir erst einmal unbeschwert weiter.

Im Kapitel 5 werden wir dann allerdings mit der dringenden Notwendigkeit konfrontiert, unser Axiomensystem durch das *Vollständigkeitsaxiom* zu vervollständigen.

2 Die komplexen Zahlen

Weil wir bewiesen haben, dass das Quadrat einer reellen Zahl immer ≥ 0 ist, gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$. Die komplexen Zahlen erhält man durch „Erweiterung“ der reellen Zahlen um Ausdrücke der Form $x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und i eine Zahl(?) mit

$$i^2 = -1$$

ist. Das klingt mysteriös, wenn nicht gar unsinnig. Woher soll denn dieses i kommen?

Seit dem 16. Jahrhundert benutzten Mathematiker die komplexen Zahlen und zwar nicht um $x^2 = -1$ lösen zu können, das wäre ihnen wirklich als unsinnig erschienen. Vielmehr traten die „imaginären“, also „(nur) eingebildeten Zahlen“ zunächst als Hilfskonstruktion bei der Lösung von Gleichungen dritten Grades der Form $x^3 + px + q = 0$ auf. Dafür hatte man folgende Formel gefunden: Man bildet $D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$ und daraus

$$u_{\pm} := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}}.$$

Dann gibt $x_1 = u_+ + u_-$ eine Lösung. Sie wissen aus der Schule, dass man dann durch Division mit $(x - x_1)$ auf eine quadratische Gleichung kommt, die „im allgemeinen“ zwei weitere Nullstellen der Gleichung liefert.

Beispiel 26 (Kubische Gleichungen und komplexe Zahlen). Wir betrachten

$$x^3 - 15x - 4 =: x^3 + px + q = 0.$$

Nach den Cardanischen Formeln bildet man zunächst

$$D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 = (-5)^3 + (-2)^2 = -121$$

und

$$u_{\pm} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}} = \sqrt[3]{2 \pm 11i} = 2 \pm i.$$

Daraus erhalten wir eine makellos reelle Nullstelle

$$x_1 = u_+ + u_- = 4.$$

□

Auch Leonhard Euler (1707-1783) benutzte komplexe Zahlen auf diese Weise und fand seine berühmte Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Die hat wiederum sehr praktische Konsequenzen: Wegen

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \end{aligned}$$

sind die etwas komplizierten Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

nichts anderes als die simple (allerdings komplexe) Formel

$$e^{ix+iy} = e^{ix} e^{iy}.$$

Vergleichen Sie dazu die Abschnitte 8.6 und 10.9.

Seit Mitte des 19. Jahrhunderts gibt es komplexe Zahlen nun aber doch! Sie sind ebenso real wie die reellen Zahlen (– oder ebenso nur ein Produkt des menschlichen Geistes wie die letzteren). C.F. Gauß hat klargestellt, dass, wenn man sich die reellen Zahlen als Punkte auf dem Zahlenstrahl vorstellt, die komplexen Zahlen einfach die Punkte einer Ebene sind, die die reelle Zahlengerade enthält. Die „Zahl“ $x + iy$ ist dann einfach der Punkt mit den Koordinaten (x, y) . Man muss nur erklären, wie man Punkte in der Ebene addiert und multipliziert (so wie man das früher für Punkte auf der Zahlengeraden tun musste).

Definition 27 (Der Körper \mathbb{C}). Sei

$$\mathbb{C} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen. Wir definieren in \mathbb{C} eine *Addition*, also eine Abbildung

$$. + . : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

vermöge

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und eine *Multiplikation* vermöge

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Dann rechnet man nach, dass die Körperaxiome (A1) - (A3), (M1) - (M3) und (D) gelten. Insbesondere ist $(0, 0)$ das neutrale Element der Addition, $(1, 0)$ das neutrale Element der Multiplikation und für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist das multiplikative Inverse gegeben durch

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

\mathbb{C} mit diesen Operationen heißt der *Körper der komplexen Zahlen*.

Die Einbettung der reellen Zahlen in die komplexen Zahlen. Nach der bisherigen Definition ist $\mathbb{R} \cap \mathbb{C} = \emptyset$. Aber man hat

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Schreibt man also einfach x_1 statt $(x_1, 0)$, so fallen reelle und komplexe Rechenoperationen zusammen. Wir können daher die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen interpretieren, indem wir zwischen x und $(x, 0)$ nicht mehr unterscheiden. Dann gilt für $x_1, y_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zum Beispiel

$$(x_1, y_1)x_2 = (x_1, y_1)(x_2, 0) = (x_1x_2, x_2y_1).$$

Setzen wir weiter

$$i := (0, 1),$$

so gilt

$$\boxed{(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1)y = x + iy.}$$

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ läßt sich also eindeutig in der Form

$$z = x + iy$$

mit reellen(!) x und y schreiben. Man nennt

$$x = \operatorname{Re} z$$

den *Realteil* und

$$y := \operatorname{Im} z$$

den *Imaginärteil* von z . Der Imaginärteil ist also reell. Zahlen der Form iy mit $y \in \mathbb{R}$ heißen auch (*rein*) *imaginär*.

Wunderbarer Weise ist nun nach der Definition der Multiplikation

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0^2 - 1^2, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl. Für komplexe Zahlen gibt es keine Anordnung mit den Axiomen (O1) - (O4), denn dann wäre $i^2 > 0$. Aber man definiert für $z \in \mathbb{C}$ (im Vorgriff auf die später zu definierende Wurzelfunktion) den *Betrag* als

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Weil der Betrag reell ist, machen Ungleichungen über den Betrag komplexer Zahlen Sinn und werden viel benutzt. Für den Betrag kann man die Eigenschaften aus Satz 8 nachweisen:

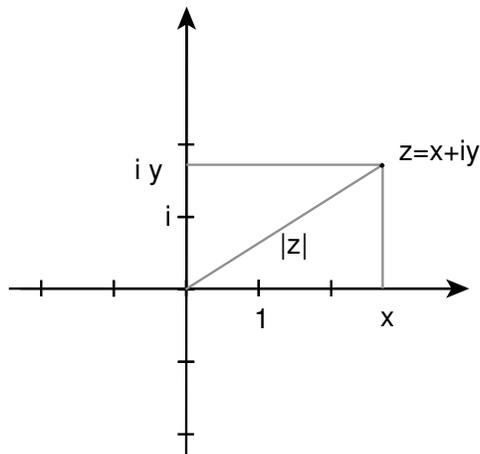
Satz 28. Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z| \geq 0 \text{ mit Gleichheit nur für } z = 0,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Wir kommen darauf später zurück und schließen mit einem Bild der sogenannten *Gaußschen Zahlenebene*:



3 Mengen und Abbildungen

Wir setzen den (naiven) Mengenbegriff und die elementaren Begriffe und Bezeichnungsweisen der Mengenlehre voraus. Sie sollten die in dem folgenden Beispiel zusammengestellten Aussagen verstehen können.

Beispiel 29. Seien X, Y, Z Mengen.

1. $X \subset Y \iff \forall_{x \in X} x \in Y$.
2. $X \subset Y \wedge Y \subset Z \implies X \subset Z$.
3. $X \subset Y \iff Y \supset X$.
4. $X \subset X$.
So wollen wir das Symbol „ \subset “ verwenden, es schließt mögliche Gleichheit ein.
Anderorts finden Sie dafür „ \subseteq “.
5. $X \subset Y \wedge X \neq Y \iff X \subsetneq Y$.
6. $X \cap Y \neq \emptyset \iff \exists_x x \in X \wedge x \in Y$.
7. $X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$.
8. Ist A eine Menge und für jedes $\alpha \in A$ eine Menge X_α gegeben, so nennt man $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ auch eine *Familie von Mengen mit Indexmenge A* .

$$\bigcup_A X_\alpha = \{x \mid \exists_{\alpha \in A} x \in X_\alpha\}.$$

9. $\mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subset X\}$ heißt die *Potenzmenge* von X .
10. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
11. $x \in X \iff \{x\} \subset X \iff \{x\} \in \mathcal{P}(X)$.
12. $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ heißt das *kartesische Produkt* der Mengen X und Y . Seine Elemente sind die *geordneten Paare* (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$.
Analog definiert man das kartesische Produkt von mehr als zwei Mengen:

$$X_1 \times \dots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

13. Mit $\#X$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente oder die *Mächtigkeit* von X . Zum Beispiel ist $\#\{1, \dots, n\} = n$ oder $\#\mathbb{N} = \infty$.

□

Eine *Abbildung*

$$f : X \rightarrow Y$$

von der Menge X in die Menge Y ist eine Vorschrift, die *jedem* Element $x \in X$ *genau ein* Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Wir schreiben auch

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x),$$

weil das die Möglichkeit gibt, die Wirkung von f zu beschreiben, etwa

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Eine formalere Definition sieht so aus:

Seien X, Y Mengen. Eine *Abbildung von X nach Y* ist eine Teilmenge $\Gamma \subset X \times Y$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $x \in X$ gibt es ein und nur ein $y \in Y$, so dass

$$(x, y) \in \Gamma.$$

Dieses y bezeichnet man dann als $f_\Gamma(x)$ und erhält eine „Abbildungsvorschrift“. Umgekehrt liefert jede „Abbildungsvorschrift“ $f : X \rightarrow Y$ eine Teilmenge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y = f(x) \in Y\} \subset X \times Y,$$

mit obiger Eigenschaft, den sogenannten *Graphen* von f .

Beispiel 30. (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3.$

(ii) Für X, Y beliebig und $y \in Y$ hat man die *konstante Abbildung vom Wert y* :

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto y.$$

(iii) Für X beliebig hat man die *identische Abbildung*

$$\text{id}_X : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x.$$

□

Definition 31. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

(i) Die Menge X heißt der *Definitionsbereich*, die Menge Y der *Zielbereich* oder *Wertebereich* von f .

(ii) Für $x \in X$ heißt $f(x)$ das *Bild* von x unter f , kurz das *f -Bild* oder, wenn f klar ist, einfach das *Bild* von x . Es heißt auch der *Wert* von f auf x oder an der Stelle x .

(iii) Die Menge

$$\{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$

heißt die *Wertemenge* von f .

(iv) Für $A \subset X$ heißt

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

das *Bild* von A unter f .

(v) Für $B \subset Y$ heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\} \subset X$$

das *Urbild* von B unter f . (Es kann $= \emptyset$ sein.)

Zwei Abbildungen f und g heißen gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich X besitzen und für alle $x \in X$

$$f(x) = g(x)$$

gilt.

Definition 32 (Einschränkung). Seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subset X$. Dann bezeichnen wir mit

$$f|_A : A \rightarrow Y$$

die Abbildung, die jedem $x \in A$ den Wert $f(x) \in Y$ zuordnet. Also

$$f|_A : A \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x).$$

$f|_A$ heißt die *Einschränkung* (oder *Restriktion*) von f auf A . Ist $A \neq X$, so gelten f und $f|_A$ also als verschiedene Abbildungen, obwohl sie mit jedem $x \in A$ „dasselbe machen“.

Definition 33 (Injektiv, surjektiv, bijektiv). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

(i) f heißt *injektiv*, wenn eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \forall_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)), \\ \forall_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2), \\ \forall_{y \in Y} \#f^{-1}(\{y\}) \leq 1. \end{aligned}$$

(ii) f heißt *surjektiv bezüglich* $B \subset Y$ oder *surjektiv auf* B , wenn

$$f(X) = B.$$

(iii) f heißt *bijektiv bezüglich* $B \subset Y$ oder *bijektiv auf* B , wenn es injektiv und surjektiv bezüglich B ist, d.h. wenn jedes $y \in B$ das Bild genau eines $x \in X$ ist.

Beispiel 34. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ ist

- nicht injektiv, weil z.B. $f(-3) = f(3)$ ist,
- nicht surjektiv bezüglich \mathbb{R} , weil z.B. $-13 \in \mathbb{R}$ kein Wert von f ist,
- surjektiv bezüglich $[0, +\infty[$.
- Weiter ist $f|_{[0, +\infty[}$ injektiv.

□

Definition 35 (Umkehrabbildung). Ist $f : X \rightarrow Y$ injektiv und setzt man $B := f(X)$, so ist f bijektiv bezüglich B . Zu jedem $y \in B$ gibt es also genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir bezeichnen dieses x mit $f^{-1}(y)$ und haben damit eine Abbildung

$$f^{-1} : B \rightarrow X$$

definiert, die die *Umkehrabbildung von* f heißt.

Die Umkehrabbildung existiert also nur für *injektive* Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, und ihr Definitionsbereich ist $f(X)$.

Die definierende Gleichung für f^{-1} (bei *injektivem* f) ist also

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)}. \quad (8)$$

Man hat dann für alle $x \in X$

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x}. \quad (9)$$

Beachten Sie: Das Symbol f^{-1} kommt in zwei verschiedenen Bedeutungen vor:

- Bei der Urbildmenge $f^{-1}(B)$. Dann ist das Argument eine *Teilmenge* von Y .
- Bei der Umkehrabbildung einer injektiven Abbildung f . Dann ist das Argument ein *Element* aus $f(X) \subset Y$.

Im zweiten Fall gilt für alle $y \in f(X)$

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}.$$

Lemma 36. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann gilt (natürlich!)

$$f^{-1}(f(X)) = X.$$

Ist f injektiv, so ist auch $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ injektiv und

$$(f^{-1})^{-1} = f : X \rightarrow f(X).$$

Beweis. Seien $y_1, y_2 \in f(X)$ und $f^{-1}(y_i) = x_i$ für $i = 1, 2$. Nach (8) ist dann $f(x_i) = y_i$. Daher gilt

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \implies x_1 = x_2 \implies y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2.$$

Daher ist f^{-1} injektiv. Weiter gilt nach (8)

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \iff x = f^{-1}(f(x)),$$

aber die rechte Seite ist wahr nach (9). □

Definition 37 (Komposition von Abbildungen). Seien

$$f : X \rightarrow U \text{ und } g : Y \rightarrow V$$

zwei Abbildungen. Dann ist die *Komposition von f mit g* die folgende Abbildung

$$g \circ f : f^{-1}(Y) \rightarrow V, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

Das ist nur interessant, wenn $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$ (sonst erhält man die *leere Abbildung*), und insbesondere im Fall $U = Y$. Dann ist nämlich $f^{-1}(Y) = X$.

Beispiel 38. Sei $f : X \rightarrow Y$ injektiv. Dann gilt

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_{f(X)}.$$

□

Lemma 39. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ zwei Abbildungen mit

$$g \circ f = \text{id}_X \text{ und } f \circ g = \text{id}_Y.$$

Dann ist f bijektiv bezüglich Y und g die Umkehrabbildung von f , also $g = f^{-1}$.

Beweis. Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so folgt

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2.$$

Also ist f injektiv. Ist $y \in Y$ und setzt man $x = g(y) \in X$, so ist

$$f(x) = f(g(y)) = y.$$

Also ist $f(X) = Y$ und f surjektiv bezüglich Y . Damit ist f bijektiv bezüglich Y . Aus der letzten Gleichung folgt zusammen mit der Definition der Umkehrabbildung sofort $g = f^{-1}$. □

Definition 40 (Abzählbare Mengen). Eine Menge X heißt (*höchstens*) *abzählbar*, wenn $X = \emptyset$ oder es eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{N} \rightarrow X$$

von \mathbb{N} auf X gibt. Andernfalls heißt sie *überabzählbar*.

Beispiel 41. Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. Mit dem sogenannten Cantorschen Diagonalverfahren beweisen wir zunächst, dass die nicht-negativen rationalen Zahlen abzählbar sind. Dazu betrachten wir folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccccccc} 1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & \dots & & \\ 1/2 & 2/2 & 3/2 & \dots & & & \\ 1/3 & 2/3 & 3/3 & \dots & & & \\ 1/4 & 2/4 & 3/4 & \dots & & & \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

und definieren eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, indem wir den Diagonalen in diesem Schema folgen: Wir setzen

$$\begin{aligned} f(0) &:= 0 \\ f(1) &:= 1/1 \\ f(2) &:= 1/2, & f(3) &:= 2/1 \\ f(4) &:= 1/3, & f(5) &:= 2/2, & f(6) &:= 3/1 \\ f(7) &:= 1/4, & f(8) &:= 2/3, & f(9) &:= 3/2, & f(10) &:= 4/1 \\ & \dots \end{aligned}$$

Das definiert offensichtlich eine surjektive Abbildung von \mathbb{N} auf die nicht-negativen rationalen Zahlen. Ebenso beweist man, dass die Menge der nicht-positiven rationalen Zahlen abzählbar ist. Nun müsste man noch wissen, dass die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen abzählbar ist. Wir zeigen allgemeiner, dass die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} X_i$$

abzählbarer Mengen X_i abzählbar ist, wenn auch die Indexmenge I abzählbar ist. Das geht ebenfalls mit dem Cantorschen Diagonalverfahren: Ist $g : \mathbb{N} \rightarrow I$ surjektiv und sind $f_k : \mathbb{N} \rightarrow X_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ surjektive Abbildungen, so erhält man eine surjektive Abbildung

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

durch „Verfolgen“ der Diagonalen in dem Schema

$$\begin{array}{ccccccc} f_{g(0)}(0) & f_{g(0)}(1) & f_{g(0)}(2) & f_{g(0)}(3) & \dots & & \\ f_{g(1)}(0) & f_{g(1)}(1) & f_{g(1)}(2) & f_{g(1)}(3) & \dots & & \\ f_{g(2)}(0) & f_{g(2)}(1) & f_{g(2)}(2) & f_{g(2)}(3) & \dots & & \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

Ein ähnliches Verfahren liefert später auch einen Beweis dafür, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.

□

4 Elementares über Funktionen

Funktionen sind eigentlich nichts anderes als Abbildungen, aber wir verwenden diesen Namen vor allem dann, wenn der Zielbereich ein Zahlbereich ist. Wir werden es in diesem Semester vor allem mit Funktionen zu tun haben, deren Zielbereich \mathbb{R} und deren Definitionsbereich I eine Teilmenge von \mathbb{R} ist. Solche Funktionen nennen wir *reelle Funktionen*. Daneben betrachten wir auch komplexe Funktionen, deren Werte in \mathbb{C} liegen, und deren Definitionsbereich eine Teilmenge von \mathbb{C} ist. Wir geben nun eine Reihe konkreter Beispiele für einfache Funktionen und deren Eigenschaften.

4.1 Polynome

Definition 42. Ein *reelles Polynom* oder eine *reelle ganzrationale Funktion* ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die sich in der Form

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (10)$$

schreiben läßt, wobei die *Koeffizienten* a_k Zahlen aus \mathbb{R} sind. Ersetzt man hier überall \mathbb{R} durch \mathbb{C} , so erhält man ein *komplexes Polynom*. Für diese bezeichnet man die Variable gern mit z statt mit x .

Beispiel 43. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x - 3)^7 + 12(x - 3)^2 - 9$$

ist ein Polynom, wie man durch Ausmultiplizieren zeigt. □

Satz 44 (Identitätssatz für Polynome). *Seien*

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

und

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^m b_k z^k.$$

zwei Polynome mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$. Es gelte $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt $m = n$ und

$$a_k = b_k \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Beweis. Die Differenz $h = f - g$ ist wieder ein Polynom

$$h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\max(m,n)} c_k z^k,$$

wobei $c_k = a_k - b_k$, und nicht definierte Koeffizienten einfach $= 0$ gesetzt sind. Nach Voraussetzung ist $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es genügt also zu zeigen:

$$h(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \implies c_0 = \dots = c_n = 0. \quad (11)$$

Gibt es einen Koeffizienten $c_k \neq 0$, so gibt es einen höchsten Koeffizienten $\neq 0$ und wir können annehmen, dass $c_n \neq 0$.

Für $|z| \geq 1$ und $0 \leq k \leq n-1$ ist $|z|^k \leq |z|^{n-1}$ und daher nach der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k z^k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \right) |z|^{n-1} =: C |z|^{n-1}.$$

Nach Korollar 9 ist daher für $|z| \geq 1$

$$|h(z)| \geq |c_n| |z|^n - C |z|^{n-1} = |z|^{n-1} (|c_n| |z| - C). \quad (12)$$

Ist $c_n \neq 0$, so ist die rechte Seite für $|z| > \max(1, \frac{C}{|c_n|})$ positiv. Insbesondere ist also

$$|h(x)| \geq x^{n-1} (|c_n| x - C) > 0$$

für reelles $x > \max(1, \frac{C}{|c_n|})$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $c_n = 0$. Daraus folgt die Behauptung (11). \square

Bemerkung. Die Voraussetzung des Satzes läßt sich erheblich abschwächen. Für den Beweis genügt offenbar, dass $f(x) = g(x)$ für alle hinreichend großen $x \in \mathbb{R}$, d.h. die Existenz eines $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x > x_0$.

Aber es geht noch besser: Die Koeffizienten a_0, \dots, a_n von f sind bereits durch die Funktionswerte $f(z_0), \dots, f(z_n)$ an $(n+1)$ paarweise verschiedenen reellen oder komplexen Stellen z_i eindeutig bestimmt, wie Sie in der Linearen Algebra lernen können: Die Bedingungen $f(z_i) = w_i$ bilden ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten, dessen Matrix die sogenannte Vandermondesche Matrix ist. Die ist regulär, und daher hat das System genau eine Lösung.

Definition 45. Ist

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

ein Polynom mit $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von f . (Analog für reelle Polynome). Wie wir gleich sehen werden, ist es praktisch, dem Nullpolynom $f = 0$ den Grad $-\infty$ zu verpassen. Dann ist also

$$\text{Grad } f = 0 \iff f \text{ konstant } \neq 0.$$

Beachten Sie: Diese Definition macht nur Sinn, weil durch die Funktion f die Koeffizienten a_k und damit auch der größte Index n eines nicht verschwindenden Koeffizienten nach dem vorausgehenden Satz eindeutig bestimmt sind!

Man sieht leicht, dass für zwei Polynome $f \neq 0 \neq g$

$$\text{Grad}(fg) = \text{Grad } f + \text{Grad } g,$$

und wenn man großzügig und suggestiv $-\infty = n + (-\infty)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ rechnet, gilt diese Formel sogar, wenn $f = 0$ oder $g = 0$.

Der Divisionsalgorithmus für Polynome ist Ihnen ja wohl aus der Schule bekannt:

Satz 46 (Polynomdivision mit Rest). Seien f, g zwei reelle oder komplexe Polynome und $\text{Grad } g > 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome q, r mit

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \text{Grad } r < \text{Grad } g.$$

Sind f und g reell, so auch q und r .

Beweis. Zur Existenz: Die Menge

$$\{f - qg \mid q \text{ reelles bzw. komplexes Polynom}\}$$

enthält (nach dem Wohlordnungsprinzip) ein Polynom r kleinsten Grades, so dass

$$f - qg = r$$

für ein geeignetes Polynom q .

Annahme: $\text{Grad } r \geq \text{Grad } g$, also etwa $r(z) = \sum_{k=0}^n r_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^m g_k z^k$ mit $n \geq m$ und $r_n \neq 0 \neq g_m$. Dann wäre

$$\tilde{r}(z) := r(z) - \frac{r_n}{g_m} z^{n-m} g(z) \tag{13}$$

ein Polynom vom Grad kleiner als $\text{Grad } r$ und

$$\tilde{r}(z) = f(z) - q(z)g(z) - \frac{r_n}{g_m} z^{n-m} g(z) = f(z) - \underbrace{\left(q(z) + \frac{r_n}{g_m} z^{n-m} \right)}_{=: \tilde{q}(z)} g(z)$$

im Widerspruch zur Wahl von r . Also ist

$$\text{Grad } r < \text{Grad } g.$$

Zur Eindeutigkeit: Aus

$$r_1 + q_1 g = f = r_2 + q_2 g$$

mit r_1, r_2 von minimalem Grad folgt

$$r_1 - r_2 = (q_2 - q_1)g$$

und daraus

$$\text{Grad } g > \text{Grad}(r_1 - r_2) = \text{Grad}(q_2 - q_1) + \text{Grad } g,$$

was nur möglich ist, wenn $\text{Grad}(r_1 - r_2) = -\infty = \text{Grad}(q_2 - q_1)$, also $r_1 = r_2$ und $q_1 = q_2$. Also sind q und r eindeutig bestimmt. \square

Korollar 47. *Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom $\neq 0$, und ist $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f , so gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = (z - a)q(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Entsprechendes gilt für reelle Polynome und reelle Nullstellen.

Die vorstehenden Sätze und das Korollar galten gleichermaßen für reelle wie komplexe Polynome. Der folgende, hier nicht bewiesene sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra* gilt dagegen nur, wenn (ungeachtet der Koeffizienten) das Argument komplex ist:

Satz 48. *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Natürlich hat damit auch jedes nicht-konstante Polynom mit reellen Koeffizienten eine komplexe Nullstelle, aber eben nicht unbedingt eine reelle, wie $x^2 + 1$ zeigt.

Aus dem Korollar zum Satz über die Division mit Rest folgt unmittelbar, dass jedes komplexe Polynom vom Grad n dann genau n Nullstellen hat, wenn man sie mit "Vielfachheiten" zählt. Insbesondere ist ein Polynom mit unendlich vielen Nullstellen das Nullpolynom. Genauer:

Jedes komplexe Polynom vom Grad $n > 0$ hat eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Darstellung

$$\boxed{f(z) = a_n(z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_r)^{k_r}} \quad (14)$$

mit $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, paarweise verschiedenen $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ und positiven natürlichen Zahlen k_1, \dots, k_r , für die

$$k_1 + \dots + k_r = n.$$

Man kann (10), aber ebenso auch (14), als eine *Normalform* des Polynoms f ansehen. Die letztere gilt allerdings nur bei Einbeziehung der komplexen Nullstellen für alle reellen oder komplexen Polynome und ist der eigentliche Grund, warum man bei der Untersuchung von Polynomen lieber komplex als reell arbeitet.

4.2 Rationale Funktionen

Definition 49 (Rationale Funktionen). Sind f und $g \neq 0$ zwei Polynome und ist $N(g)$ die Menge der Nullstellen von g , so heißt die auf dem Komplement von $N(g)$ definierte Funktion

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus N(g) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

bzw.

$$\frac{f}{g} : \mathbb{C} \setminus N(g) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$$

eine (*gebrochen-*)rationale Funktion.

Nach dem Divisionsalgorithmus für Polynome ist jede rationale Funktion h darstellbar als

$$h = q + \frac{f}{g}$$

mit Polynomen f, g, q , wobei der Grad von g echt größer als der von f ist.

Auch für die rationalen Funktionen wollen wir Normalformen untersuchen. Dabei ist es wieder einfacher, *komplexe* rationale Funktionen, also die Quotienten zweier komplexer Polynome, zu betrachten. Dann ist eine mögliche Normalform

$$h(z) = A \frac{(z - w_1)^{l_1} \dots (z - w_s)^{l_s}}{(z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_r)^{k_r}}$$

mit $A \in \mathbb{C}$, positiven Exponenten $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und paarweise verschiedenen $z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s \in \mathbb{C}$.

Eine weitere Normalform rationaler Funktionen wird insbesondere in der Integrationstheorie nützlich sein. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad, so dass kein polynomialer Summand q auftritt.

Satz 50 (Partialbruchzerlegung). Sei $\frac{f(z)}{g(z)}$ eine komplexe rationale Funktion für die $0 \leq \text{Grad } f < \text{Grad } g$. Sei

$$g(z) = (z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_r)^{k_r}$$

mit paarweise verschiedenen z_1, \dots, z_r , die keine Nullstellen des Zählers sind (ausgekürzter Bruch), und positiven Exponenten $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es eindeutig bestimmte $A_{ij} \in \mathbb{C}$ für $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq k_i$, so dass

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z - z_i)^j} \tag{15}$$

für alle $z \notin \{z_1, \dots, z_r\}$.

Ist $\frac{f(z)}{g(z)}$ eine reelle rationale Funktion, und sind alle Nullstellen z_1, \dots, z_r von g reell, so sind auch die A_{ij} reell.

Beweis. Vollständige Induktion über den Nennergrad $n := k_1 + \dots + k_r$.

$n = 1$. Dann ist $\text{Grad } f < 1$, also f konstant und

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_1)}{z - z_1}.$$

Die Darstellung ist eindeutig.

Induktionsschritt. Sei der Satz für Nennerpolynome vom Grad $< n$ bereits bewiesen. Wir schreiben $g(z) = q(z)(z - z_r)^{k_r}$, wobei dann $q(z_r) \neq 0$. Wir setzen

$$A := A_{rk_r} := \frac{f(z_r)}{q(z_r)}. \quad (16)$$

Dann ist

$$f(z) - \frac{A}{(z - z_r)^{k_r}} g(z) = f(z) - Aq(z)$$

ein Polynom mit z_r als Nullstelle, also von der Form $\tilde{f}(z)(z - z_r)$, und

$$\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{(z - z_r)^{k_r}} = \frac{\tilde{f}(z)}{q(z)(z - z_r)^{k_r - 1}}$$

hat nach Induktionsvoraussetzung eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{(z - z_r)^{k_r}} = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z - z_i)^j} + \sum_{j=1}^{k_r-1} \frac{A_{rj}}{(z - z_r)^j}.$$

Damit ist die Existenz der Partialbruchzerlegung bewiesen.

Es fehlt noch der Nachweis, dass der Koeffizient A_{rk_r} in (15) eindeutig bestimmt ist. Dann liefert der Induktionsbeweis auch die Eindeutigkeit im Satz. Aber aus (15) folgt

$$A_{rk_r} = (z - z_r)^{k_r} \left(\frac{f(z)}{g(z)} - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z - z_i)^j} - \sum_{j=1}^{k_r-1} \frac{A_{rj}}{(z - z_r)^j} \right),$$

für alle $z \notin \{z_1, \dots, z_r\}$ und damit die Eindeutigkeit.

Die Aussage über reelle Polynome mit reellen Nullstellen ist klar. □

“Zuhaltmethode”. Der Beweis des Satzes, konkret die Formel (16), gibt Informationen, wie man die A_{ij} finden kann: Ist $\frac{f(z)}{(z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_r)^{k_r}}$ ausgekürzt und der Zählergrad kleiner als der Nennergrad, so erhält man die “Top-Koeffizienten” A_{ik_i} , indem man im Nenner den Term $(z - z_i)^{k_i}$ “zuhält” und $z = z_i$ einsetzt. Sind alle Nullstellen einfach, so ist man dann fertig. Andernfalls ermittelt man die anderen Koeffizienten durch Multiplikation von (15) mit dem Hauptnenner und Koeffizientenvergleich oder Einsetzen von Werten.

Beispiel 51. Bestimme A, B, C in der Partialbruchzerlegung

$$\frac{z}{(z - 1)(z + 1)^2} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 1} + \frac{C}{(z + 1)^2}.$$

Mit der “Zuhaltmethode” findet man

$$A = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Aus

$$\frac{z}{(z - 1)(z + 1)^2} = \frac{1/4}{z - 1} + \frac{B}{z + 1} + \frac{1/2}{(z + 1)^2}$$

folgt

$$z = \frac{1}{4}(z + 1)^2 + B(z - 1)(z + 1) + \frac{1}{2}(z - 1).$$

Für $z = 0$ ergibt sich

$$0 = \frac{1}{4} - B - \frac{1}{2}$$

oder $B = -\frac{1}{4}$.

□

4.3 Eine Buckelfunktion

Dieser Abschnitt verfolgt zwei Ziele: Einmal soll er Ihre Vorstellungskraft durch die Umsetzung analytischer (= formelmäßiger) Sachverhalte in anschauliche Eigenschaften des Graphen fördern. Zum andern werden die hier konstruierten „Buckelfunktionen“ in verschiedenen Bereichen der Analysis als wichtiges Hilfsmittel eingesetzt.

Seien $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\begin{aligned}\psi(x) &= 0 \text{ für } x \leq 0, \\ \psi(x) &> 0 \text{ für } x > 0,\end{aligned}$$

etwa

$$\psi(x) := x + |x| \quad \text{oder} \quad \psi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^n & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

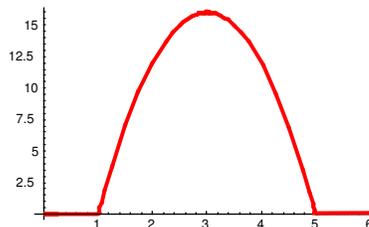
und seien $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$.

In den folgenden Abbildungen verwenden wir

$$\psi(x) = x + |x| \text{ und } a_1 = 1, a_2 = 2, b_2 = 4, b_1 = 5.$$

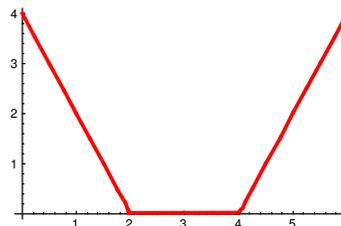
1. Die Funktion

$\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x)$
verschwindet für $x \leq a_1$ oder $x \geq b_1$
und ist auf $]a_1, b_1[$ positiv.



2. Die Funktion

$\psi(x - b_2) + \psi(a_2 - x)$
verschwindet für $x \leq b_2$ und $x \geq a_2$ und
ist außerhalb von $[a_2, b_2]$ positiv.

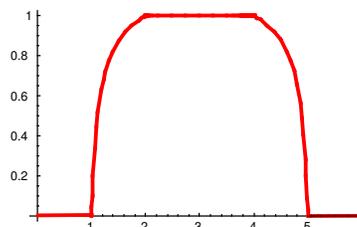


3. Die Funktion

$$\phi(x) := \frac{\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x)}{\psi(x - a_1)\psi(b_1 - x) + \psi(x - b_2) + \psi(a_2 - x)}$$

hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}0 &\leq \phi(x) \leq 1, \\ \phi|_{[a_2, b_2]} &= 1, \\ \phi(x) &> 0 \text{ für } x \in]a_1, b_1[, \\ \phi(x) &= 0 \text{ für } x \notin]a_1, b_1[.\end{aligned}$$



Beispiel 52 (Zerlegung der Eins). Sei $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$ eine Familie von offenen Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$, d.h. die Intervallfamilie ist eine *offene Überdeckung* von \mathbb{R} .
2. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass

$$]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap]a_i, b_i[\neq \emptyset \text{ nur für endlich viele } i \in I.$$

In diesem Fall nennt man die Überdeckung *lokal endlich*.

Dann gibt es nach dem ersten Schritt der obigen Überlegungen zu jedem $i \in I$ eine Funktion $\tilde{\phi}_i$ mit

$$\tilde{\phi}_i > 0 \text{ auf }]a_i, b_i[, \quad \tilde{\phi}_i = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \setminus]a_i, b_i[.$$

Weil die Überdeckung lokal endlich ist, kann man für $x \in \mathbb{R}$

$$\sigma(x) := \sum_{i \in I} \tilde{\phi}_i(x)$$

definieren, denn in der Summe rechts sind nur endlich viele Glieder $\neq 0$. Mindestens eines ist aber > 0 , und daher ist die Funktion $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ überall positiv. Setzt man

$$\phi_i := \tilde{\phi}_i / \sigma,$$

so erhält man eine Familie von Funktionen mit

$$\phi_i > 0 \text{ auf }]a_i, b_i[, \quad \phi_i = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \setminus]a_i, b_i[,$$

und

$$\sum_{i \in I} \phi_i = 1.$$

Eine solche Familie nennt man eine *Zerlegung (oder auch Partition) der Eins* zu der gegebenen Überdeckung.

Man benutzt diese Überlegungen zum Beispiel zum Zweck der „Lokalisation“: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion und benutzt man zur Konstruktion der Buckelfunktion ebenfalls eine stetige Funktion, so ist

$$f = \sum_{i \in I} f \phi_i$$

eine Summe *stetiger* Funktionen, die jeweils außerhalb des Intervalls $]a_i, b_i[$ verschwinden, also in $]a_i, b_i[$ „lokalisiert“ sind.

□

4.4 Zwei wichtige Eigenschaften von Funktionen

Definition 53 (Monotonie). Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$ gilt

$$x < y \implies f(x) \leq f(y),$$

(Zum Beispiel sind konstante Funktionen monoton wachsend.)

- *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$ gilt

$$x < y \implies f(x) < f(y).$$

Entsprechend definiert man *(streng) monoton fallend*. Eine Funktion heißt *(streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Für komplexwertige Funktionen macht Monotonie keinen Sinn.

Beispiel 54. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist streng monoton wachsend. Zum Beweis beachte, dass

$$y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2) = (y - x) \left(\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \right).$$

Für $x < y$ ist deshalb offensichtlich $x^3 < y^3$.

□

Definition 55 (Beschränktheit von Funktionen). Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

M heißt dann eine *obere Schranke* für f .

Entsprechend definiert man *nach unten beschränkt* und *untere Schranke*.

Eine Funktion heißt *beschränkt*, wenn sie sowohl nach oben wie nach unten beschränkt ist, d.h. wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|f(x)| \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

Diese letzte Bedingung benutzt man, um Beschränktheit auch für komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ zu definieren.

Beispiel 56. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ mit $n > 0$ ist nicht beschränkt. Das ist klar für $n = 1$. Und für $n > 1$ folgt aus $x > 1$, dass

$$x^n > x^{n-1} > \dots > x$$

und damit die Behauptung.

□

Beispiel 57. Allgemeiner ist ein Polynom

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

vom Grad $n > 0$ nicht beschränkt. Das folgt aus der Gleichung (12) im Beweis des Identitätssatzes zusammen mit dem letzten Beispiel.

□

5 Zahlenfolgen und Konvergenz

5.1 Konvergenz und Vollständigkeit

Definition 58 (Folge). Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen \mathbb{N} in die reellen Zahlen:

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n$$

Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird also die reelle Zahl x_n zugeordnet.

Notationen: (x_n) oder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Oft schreibt man auch die ersten Werte der Folge:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Manchmal beginnt man die Numerierung der Folge mit 1 statt mit 0, gelegentlich auch mit einer anderen Zahl.

Reelle Folgen sind also reelle Funktionen, so dass zum Beispiel Begriffe wie „Monotonie“ oder „Beschränktheit“ für Folgen bereits definiert sind.

Beispiel 59.

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad (17)$$

$$(x_n = 1)_{n \in \mathbb{N}} : 1, 1, \dots \quad (18)$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n > 0} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \quad (19)$$

$$\left((-1)^{n+1}n^2\right)_{n \in \mathbb{N}} : 0, 1, -4, 9, -25, \dots \quad (20)$$

□

Häufig kommen sogenannte rekursive Folgen vor: Man gibt einen (oder mehrere) Anfangswerte und eine Vorschrift, wie sich die Folgenglieder aus den vorangehenden Gliedern „entwickeln“:

Beispiel 60. Seien $x_0, b > 0$ gegeben. Setze

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right). \quad (21)$$

Für $b = 2$ und $x_0 = 1$ liefert das

$$x_1 = 1.5000000$$

$$x_2 = 1.4166667$$

$$x_3 = 1.4142157$$

$$x_4 = 1.4142136$$

$$x_5 = 1.4142136$$

...

□

Beispiel 61. Die *Fibonacci-Folge* ist gegeben durch

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Das ergibt

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Diese Folge hat zu tun mit der Vermehrung von Kaninchen. Sie besitzt eine eigene Zeitschrift. \square

Beispiel 62. Eine weitere rekursiv definierte Folge ist „die“ Collatz-Folge: Man beginnt mit einer beliebigen *natürlichen* Zahl c_0 und definiert

$$c_{n+1} := \begin{cases} 3c_n + 1 & \text{falls } c_n \text{ ungerade und } \neq 1, \\ (c_n)/2 & \text{falls } c_n \text{ gerade,} \\ 1 & \text{falls } c_n = 1. \end{cases}$$

Also etwa

$$9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 1, 1, \dots$$

Es gibt also unendlich viele Collatz-Folgen: eine zu jedem Anfangswert c_0 . Und wenn eine Collatz-Folge den Wert 1 annimmt, sind alle weiteren Folgenglieder auch 1. \square

Die Differentialrechnung wurde im 17. Jahrhundert von Newton und Leibniz erfunden und Grenzwertbetrachtungen für die Flächenberechnung sind noch viel älter. Aber für die Konvergenz einer Folge gegen eine reelle Zahl gibt es erst seit Anfang des 19. Jahrhunderts eine präzise

Definition 63 (Konvergenz und Divergenz). Die Folge (x_n) heißt *konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Man schreibt dann $x_n \rightarrow a$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, auch kurz

$$\lim x_n = a.$$

Die Zahl a heißt *der Grenzwert* oder *Limes* der Folge. Man nennt die Folge (x_n) *konvergent*, wenn es ein a gibt, gegen das sie konvergiert. Andernfalls nennt man sie *divergent*.

Sprachlich kann man das so formulieren:

Jede – noch so kleine! – Toleranz ϵ für die Abweichung vom Grenzwert a wird nur von *endlich vielen* Folgengliedern (nämlich höchstens denen mit $n < N$) überschritten.

Lemma 64 (Eindeutigkeit des Grenzwerts). *Aus*

$$\lim x_n = a \text{ und } \lim x_n = b$$

folgt $a = b$. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt, so dass der bestimmte Artikel gerechtfertigt ist.*

Beweis. Andernfalls ist $\epsilon := \frac{|b-a|}{2} > 0$. Dann gilt

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 |x_n - a| < \epsilon \text{ und } \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 |x_n - b| < \epsilon.$$

Für $N = \max\{N_1, N_2\}$ findet man also

$$|x_N - a| < \epsilon, \quad |x_N - b| < \epsilon.$$

Dann ist aber nach der Dreiecksungleichung

$$|b - a| \leq |b - x_N| + |x_N - a| < 2\epsilon = |b - a|.$$

Widerspruch! □

Beispiel 65 (DAS fundamentale Beispiel für Konvergenz). Die Folge $(\frac{1}{n})_{n>0}$ konvergiert gegen 0.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.}$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl N mit $N > \frac{1}{\epsilon}$. Wir wählen eine solche und erhalten für alle $n \geq N$ ebenfalls $n > \frac{1}{\epsilon}$ und daher

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

□

HALT! Der vorstehende Beweis enthält eine wesentliche Lücke.

Er verwendet nämlich das Archimedische Prinzip: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ (im Beweis hieß es $1/\epsilon$) gibt es eine natürliche Zahl $N > x$.

Wir haben früher festgestellt, dass genau dieses sich aber nicht aus den bisherigen Axiomen für die reellen Zahlen beweisen läßt. Jedenfalls *haben* wir es nicht bewiesen.

Wir fordern nun ein weiteres Axiom für die reellen Zahlen, das

Vollständigkeitsaxiom:

(V) Jede monotone und beschränkte reelle Folge ist konvergent.

Beispiel 66. Die Folge $(\frac{1}{n})_{n>0}$ ist monoton fallend und beschränkt: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. Also ist sie nach dem Axiom konvergent: Da ist nichts mehr zu beweisen, außer dass der Grenzwert 0 ist. Das folgt wie oben aus dem Archimedischen Prinzip, das wir jetzt beweisen.

□

Satz 67 (Archimedisches Prinzip). Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x < n.$$

Beweis. Die Folge $(n)_n$ ist monoton wachsend. Gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $n \leq x$ für *alle* $n \in \mathbb{N}$, so wäre sie auch beschränkt, also (hier verwenden wir unser neues Axiom!) konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|n - a| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq N$. Das gilt insbesondere für $n = N$ und $n = N + 1$:

$$|N - a| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |(N + 1) - a| < \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$1 = |(N + 1) - N| = |N + 1 - a + a - N| \leq |(N + 1) - a| + |N - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Aber $1 < 1$ ist ein Widerspruch! □

Beispiel 68. Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ für } |x| < 1.$$

Falls $x = 0$, ist $x^n = 0$ für alle $n \geq 1$ und die Behauptung klar.

Sei also $x \neq 0$ und sei $\epsilon > 0$. Wir suchen ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\epsilon > |x^n - 0| = |x|^n \quad \text{für alle } n \geq N. \quad (22)$$

Die letzte Ungleichung ist aber äquivalent zu

$$\frac{1}{\epsilon} < \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1 + \alpha)^n \quad \text{für alle } n \geq N.$$

mit positivem $\alpha := \frac{1}{|x|} - 1$. (Hier benutzen wir $|x| < 1$.)

Nach der Bernoullischen Ungleichung (Beispiel 19) ist dann aber $(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha$. Wählt man also $N > \frac{1}{\epsilon\alpha}$, was nach dem Archimedischen Axiom ja möglich ist, so folgt für $n \geq N$

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \geq 1 + N\alpha > 1 + \frac{1}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon}$$

und damit (22). □

Ende gut, alles gut! Für die Konvergenz einer Folge sind nach Definition nur die „hinteren Glieder“ verantwortlich, was am Anfang passiert ist egal. Das bedeutet zum Beispiel, dass eine beschränkte Folge auch dann konvergent ist, wenn sie erst vom 37. Glied an monoton wachsend ist. Davon machen wir gleich Gebrauch.

Wir zeigen, dass die Folge (21) konvergent ist gegen ein $a > 0$ mit

$$a^2 = b.$$

Also besitzt wirklich jede positive Zahl b eine (positive) Quadratwurzel $a = \sqrt{b}$, vergleiche Beispiel 6. Wir zeigen sogar einen allgemeineren Sachverhalt:

Satz 69 (Existenz von Wurzeln). Seien b und $x_0 > 0$ und $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

Dann konvergiert die mit x_0 beginnende rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := x_n \left(1 + \frac{1}{k} \left(\frac{b}{x_n^k} - 1 \right) \right)$$

gegen die einzige positive Lösung der Gleichung

$$x^k = b.$$

Für den Grenzwert schreiben wir $\sqrt[k]{b}$ und nennen ihn die k -te Wurzel aus a . Wir setzen $\sqrt{b} := \sqrt[2]{b}$.

Bemerkung: Für $k = 2$ erhalten wir gerade die Folge (21). Wie man auf die merkwürdige Folge für beliebiges k gekommen ist, erklären wir im Beispiel 141.

Beweis. Zur Eindeutigkeit. Beachte, dass

$$y^k - x^k = (y - x)(y^{k-1} + y^{k-2}x + \dots + yx^{k-2} + x^{k-1}).$$

Sind also $x, y > 0$ mit $x^k = y^k$, so folgt $x = y$.

Zur Existenz. Wir beweisen nun, dass die obige Folge konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$ ist und zeigen dann, dass $a^k = b$ gilt.

Zunächst ist für positives x_n jedenfalls $\frac{1}{k}(\frac{b}{x_n^k} - 1) > -\frac{1}{k} > -1$. Daher sind mit x_0 und b offensichtlich alle x_n positiv.

Weiter gilt

$$x_{n+1}^k = x_n^k \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k} \left(\frac{b}{x_n^k} - 1\right)\right)^k}_{> -1} \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} x_n^k \left(1 + \frac{b}{x_n^k} - 1\right) = b.$$

Das bedeutet, dass alle $x_{n+1}^k \geq b$, d.h.

$$x_n^k \geq b \tag{23}$$

mit möglicher Ausnahme von x_0 .

Daher ist $\frac{1}{k}(\frac{b}{x_n^k} - 1) \leq 0$, also

$$x_{n+1} \leq x_n \text{ für alle } n \geq 1.$$

Die Folge ist also jedenfalls vom zweiten Glied an monoton fallend und beschränkt (weil positiv). Nach dem Vollständigkeitsaxiom ist sie also konvergent: Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Um zu zeigen, dass

$$a^k = b,$$

benutzen wir die Rechenregeln für konvergente Folgen, die wir weiter unten zusammenstellen. Aus $x_n \rightarrow a$ folgt $x_n^k \rightarrow a^k$ und aus $x_n^k \geq b$ folgt dann $a^k \geq b > 0$. Also ist $a \neq 0$. Weil $x_n \geq 0$ für alle n ist $a = \lim x_n \geq 0$, also $a > 0$. Weil (x_{n+1}) dieselbe Folge ist wie (x_n) mit einer um eins verschobenen Numerierung, ist auch $x_{n+1} \rightarrow a$. Schließlich folgt aus der Rekursionsgleichung

$$a = a \left(1 + \frac{1}{k} \left(\frac{b}{a^k} - 1\right)\right)$$

und daraus

$$a^k = b.$$

□

Anmerkung: Irrationalität von Quadratwurzeln Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, aber keine Quadratzahl, d.h. es sei $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$. Dann ist $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, also *irrational*. Weil die Axiome der reellen Zahlen ohne das Vollständigkeitsaxiom auch für \mathbb{Q} gelten, kann man daraus allein also nicht die Konvergenz der obigen „Quadratwurzelfolge“ beweisen.

Für die Irrationalität, insbesondere von $\sqrt{2}$, gibt es einen häufig angeführten Beweis mittels Primfaktorzerlegung. Der folgende Beweis, der wohl auf Dedekind zurückgeht, kommt ohne dieses zahlentheoretische Hilfsmittel aus:

Annahme: $\sqrt{n} = \frac{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, x minimal.

Dann gibt es ganzzahliges k mit

$$k - 1 < \frac{x}{y} < k.$$

Definiere

$$x' := \left(k - \frac{x}{y}\right)x, \quad y' := \left(k - \frac{x}{y}\right)y.$$

Dann

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x}{y} = \sqrt{n}.$$

Aber

$$x' = kx - \frac{x^2}{y} = kx - \frac{ny^2}{y}$$

und $y' = ky - x$ sind beide ganzzahlig und > 0 . Schließlich ist $k - \frac{x}{y} < 1$ und deshalb $x' < x$ im Widerspruch zur Wahl von x .

Beispiel 70. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Zum Beweis wählen wir eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2|x|$ und betrachten nur Werte $n > k$. Dann ist

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1} \frac{|x|}{2} \cdots \frac{|x|}{k} \frac{|x|}{k+1} \cdots \frac{|x|}{n}.$$

Das Produkt der ersten k Faktoren hat einen festen Wert, das Produkt der letzten $n - k$ Faktoren ist $\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, und das geht für $n \rightarrow \infty$ gegen 0.

□

Beispiel 71. Wir betrachten die Folge $(x_n = (1 + \frac{1}{n})^n)_{n \geq 1}$. Für sie gilt

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} < 3. \quad (25)$$

Aus (24) ersieht man, dass die Folge monoton wachsend ist, und nach (25) ist sie beschränkt. Ihr Grenzwert ist die *Eulersche Zahl* e .

□

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz ist die Beschränktheit:

Lemma 72. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Sei $\lim x_n = a$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n \geq N} |x_n - a| < 1,$$

d.h.

$$\forall_{n \geq N} a - 1 < x_n < a + 1.$$

Dann gilt erst recht

$$\forall_{n \geq N} -|a| - 1 < x_n < |a| + 1.$$

Dann gilt zum Beispiel für alle $n \in \mathbb{N}$

$$-|x_0| - \dots - |x_N| - |a| - 1 < x_n < |x_0| + \dots + |x_N| + |a| + 1.$$

□

Die Folge $0, 1, 2, 3, \dots$ ist also divergent. Aber auch beschränkte Folgen können divergent sein:

Beispiel 73. Die Folge $(-1)^n$ ist divergent. Wäre sie nämlich gegen a konvergent, so würde insbesondere für $\epsilon = 1$ ein N existieren, so dass $|x_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Dann wäre insbesondere $|x_N - a| < 1$ und $|x_{N+1} - a| < 1$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|x_N - x_{N+1}| = |(x_N - a) - (x_{N+1} - a)| \leq |x_N - a| + |x_{N+1} - a| < 1 + 1 = 2.$$

Aber das widerspricht $x_N - x_{N+1} = \pm(1 - (-1)) = \pm 2$. Daher gibt es zu $\epsilon = 1$ kein solches N , und die Folge ist nicht konvergent.

□

Bestimmte Divergenz. Die Folgen $((-1)^n)$ und (n^2) sind beide divergent, aber auf unterschiedliche Weise: Die erste kann sich nicht entscheiden, wohin, die zweite strebt unbeirrt gegen $+\infty$. Man sagt, die Folge (x_n) ist *bestimmt divergent gegen $+\infty$* oder auch *konvergent gegen $+\infty$* , wenn es zu jedem (noch so großen) $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\epsilon < x_n \text{ für alle } n \geq \mathbb{N}.$$

Man schreibt dann auch

$$\lim x_n = +\infty \text{ oder } x_n \rightarrow +\infty.$$

Entsprechend definiert man *bestimmt divergent gegen $-\infty$* (*konvergent gegen $-\infty$*).

Wir wollen aber bei folgender Konvention bleiben:

Eine reelle Folge (x_n) heißt konvergent (ohne Angabe eines Grenzwertes), wenn sie gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Andernfalls, heißt sie divergent – auch wenn sie gegen $\pm\infty$ konvergiert.

Beispiel 74 (Ein offenes Problem). Die Collatz-Folge ist konvergent gegen 1 für jedes x_0 , für das man sie getestet hat: Sie landet irgendwann bei 1 und bleibt dann 1. Es ist bis heute unbekannt, ob sie wirklich für jedes c_0 konvergiert.

□

Für das Konvergenzverhalten einer Folge ist ihr „Anfang“ ganz ohne Bedeutung, siehe „Ende gut, alles gut“. Konvergenz spielt sich „ganz hinten“ ab. Darum können Konvergenztests mit dem Computer vielleicht Hinweise geben, sie sind aber alles andere als verlässlich.

Beispiel 75. Wir untersuchen die rekursive Folge

$$x_0 = 1, x_1 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{2k}, \quad x_{n+1} = \left(2 \sqrt[2k]{x_n} - \sqrt[2k]{x_{n-1}}\right)^{2k}$$

für $k = 6, p = 100$ mit Mathematica.

```
In[1]:= k=6; p=100;
a=1; myc=1;

Print["0: ",1]
Print["1: ",N[b=((p-1)/p)^(2 k)]]
Do[z=(2 Abs[b]^(1/(2k))- Abs[a]^(1/(2k)))^(2k);
a=b ;b=z; myc=myc+1; Print[myc,": ",N[z]},{101}]
```

Hier der Output:

0 :	1	60 :	0.0000167772	83 :	5.82622 10 ⁻¹⁰
1 :	0.886385	61 :	0.0000123816	84 :	2.81475 10 ⁻¹⁰
2 :	0.784717	62 :	9.06574 10 ⁻⁶	85 :	1.29746 10 ⁻¹⁰
3 :	0.693842	63 :	6.58295 10 ⁻⁶	86 :	5.66939 10 ⁻¹¹
4 :	0.61271	64 :	4.73838 10 ⁻⁶	87 :	2.32981 10 ⁻¹¹
5 :	0.54036	65 :	3.37922 10 ⁻⁶	88 :	8.9161 10 ⁻¹²
6 :	0.47592	66 :	2.38642 10 ⁻⁶	89 :	3.13843 10 ⁻¹²
7 :	0.418596	67 :	1.66789 10 ⁻⁶	90 :	1. 10 ⁻¹²
8 :	0.367666	68 :	1.15292 10 ⁻⁶	91 :	2.8243 10 ⁻¹³
9 :	0.322475	69 :	7.87663 10 ⁻⁷	92 :	6.87195 10 ⁻¹⁴
10 :	0.28243	70 :	5.31441 10 ⁻⁷	93 :	1.38413 10 ⁻¹⁴
11 :	0.24699	71 :	3.53815 10 ⁻⁷	94 :	2.17678 10 ⁻¹⁵
12 :	0.215671	72 :	2.32218 10 ⁻⁷	95 :	2.44141 10 ⁻¹⁶
13 :	0.188032	73 :	1.50095 10 ⁻⁷	96 :	1.67772 10 ⁻¹⁷
14 :	0.163675	74 :	9.5429 10 ⁻⁸	97 :	5.31441 10 ⁻¹⁹
15 :	0.142242	75 :	5.96046 10 ⁻⁸	98 :	4.096 10 ⁻²¹
16 :	0.12341	76 :	3.65203 10 ⁻⁸	99 :	1. 10 ⁻²⁴
17 :	0.10689	77 :	2.19146 10 ⁻⁸	100 :	0
		

Sieht konvergent aus, ist es aber nicht. Die nächsten beiden Glieder sind

$$\begin{aligned} 101 : & \quad 1. 10^{-24} \\ 102 : & \quad 4.096 10^{-21}. \end{aligned}$$

Tatsächlich kann man zeigen, dass

$$x_n := \left(\frac{p-n}{p}\right)^{2k},$$

und diese Folge ist offensichtlich divergent.

□

Trotzdem kann der Rechner nützliche Hinweise geben (z.B. auf ein bestimmtes Monotonieverhalten), denen man dann aber rigoros nachgehen muss: Der Rechner liefert Vermutungen, keine Beweise.

Schlussbemerkung: Sprache und Verständnis. Der Begriff der Konvergenz unendlicher Folgen ist nicht so einfach, und eine falsche sprachliche Formulierung erschwert sein Verständnis oder dokumentiert fehlende gedankliche Bewältigung. Hier einige (öfter anzutreffende) Beispiele falscher Behauptungen:

Die Folge (x_n) konvergiert gegen a , wenn

... sie a immer näher kommt. FALSCH: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \neq 0$.

... sie a beliebig nah kommt. FALSCH: $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n + \frac{1}{n}) \neq 1$.

... sie a beliebig nah kommt, es aber nie erreicht. Erst recht FALSCH.

Der Grenzwert der Folge $(\frac{1}{n})$ *geht* nicht gegen 0, er *ist* 0. Grenzwerte sind bereits angekommen!

5.2 Rechenregeln für konvergente Folgen

Der Nachweis der Konvergenz einer Folge ist oft mühsam. Insbesondere deshalb ist es nützlich zu sehen, wie sich Folgen verhalten, die aus „einfacheren“ konvergenten Folgen zusammengesetzt sind.

Satz 76. Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b.$$

Dann gilt:

(i) Die Folge $(x_n + y_n)$ ist konvergent und

$$\lim(x_n + y_n) = a + b.$$

(ii) Die Folge $(x_n y_n)$ ist konvergent und

$$\lim(x_n y_n) = ab.$$

Insbesondere gilt das für konstante Folgen $y_n = c \in \mathbb{R}$:

$$\lim(cx_n) = ca.$$

(iii) Ist $b \neq 0$ und $y_n \neq 0$ für alle n , so ist die Folge (x_n/y_n) konvergent und

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

(iv) Ist $\lim x_n = 0$ und (z_n) eine beschränkte Folge, so gilt

$$\lim x_n z_n = 0.$$

“Nullfolge mal beschränkte Folge ergibt eine Nullfolge.”

Beweis. Zu (i) Selbst.

Zu (ii) Zunächst ist (y_n) nach dem Lemma beschränkt. Sei etwa

$$|y_n| < M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gleichzeitig

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ und } |y_n - b| < \epsilon.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$

$$|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq |x_n - a| |y_n| + |a| |y_n - b| < \epsilon(M + |a|).$$

Zu (iii) Sei $\epsilon > 0$ und dazu $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $n \geq N$

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad |y_n - b| < \epsilon \quad \text{und} \quad |y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Dann ist

$$|y_n| = |b + y_n - b| \geq |b| - |y_n - b| \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{x_n b - y_n a}{y_n b} \right| = \frac{|(x_n - a)b + a(b - y_n)|}{|y_n b|} \\ &\leq \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|^2/2} \leq 2 \frac{|b| + |a|}{|b|^2} \epsilon. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Bei der Quotientenformel hatten wir vorausgesetzt, dass

$$y_n \neq 0 \text{ für alle } n, \quad (26)$$

weil sonst die Folge (x_n/y_n) gar nicht definiert ist. Weil aber $b = \lim y_n \neq 0$, ist $y_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n , d.h. für alle n von einem gewissen N an. Die Behauptung bleibt ohne die Voraussetzung (26) richtig, wenn man (x_n/y_n) als $(x_n/y_n)_{n \geq N}$ interpretiert.

Wir erinnern daran, dass für die Konvergenz der Anfang der Folge keine Rolle spielt.

Definition 77. Wir sagen, dass eine Eigenschaft für *fast alle* Folgenglieder gilt, wenn es nur endlich viele Ausnahmen gibt, d.h. wenn die Eigenschaft für alle n von einem gewissen N an richtig ist. Man sagt dann auch, die Eigenschaft sei richtig *für alle hinreichend großen* n .

Satz 78. Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b.$$

Es gelte für fast alle n :

$$x_n \leq y_n.$$

Dann folgt

$$a \leq b.$$

Beachten Sie: Wenn $x_n < y_n$ für alle n , so folgt nicht notwendig $a < b$. Finden Sie dafür ein Beispiel.

Beweis. Seien $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$x_n \leq y_n$$

und

$$|x_n - a| < \epsilon \text{ und } |y_n - b| < \epsilon.$$

Die beiden letzten Ungleichungen bedeuten

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon \text{ und } b - \epsilon < y_n < b + \epsilon.$$

Es folgt

$$a - \epsilon < x_n \leq y_n < b + \epsilon.$$

Also haben wir

$$a - \epsilon < b + \epsilon,$$

d.h. $a < b + 2\epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$. Daher ist $a \leq b$.

□

Ein wichtiger Begriff ist der der Teilfolge:

Definition 79. Sei (x_n) eine Folge. Eine *Teilfolge* von (x_n) ist eine Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, für die es eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen gibt, so dass

$$y_k = x_{n_k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Man sagt oft einfach: Sei $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_n) . Die Teilfolge entsteht aus der Originalfolge durch Weglassen von Gliedern, so dass aber noch eine unendliche Folge verbleibt.

Beispiel 80. Die Folge $(1/2n)$ ist eine Teilfolge der Folge $(\frac{(-1)^n}{n})_{n \geq 1}$. □

Satz 81. Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ für jede Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) .

Beweis. Selbst. □

Beispiel 82 (Fibonacci-Quotienten). Die Fibonacci-Folge ist offenbar divergent (konvergent gegen $+\infty$). Wir betrachten die Folge der Quotienten $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$$

Ist diese Folge konvergent? Ja, aber der Beweis ist knifflig; zum Beispiel ist die Folge nicht monoton. Sieht man sich die von Rechner gelieferten ersten 20 Glieder an, so kann man aber vermuten, dass

$$x_0 \leq x_2 \leq x_4 \leq \dots \leq 2 \tag{27}$$

$$x_1 \geq x_3 \geq x_5 \geq \dots \geq 1. \tag{28}$$

Das beweisen wir: Dividiert man die Rekursion $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ durch a_n , so folgt

$$x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}. \tag{29}$$

Also erfüllen die Fibonacciquotienten eine eigene Rekursionsformel. Aus dieser ergibt sich mit $x_0 = 1, x_1 = 2$ leicht

$$1 \leq x_n \leq 2 \text{ für alle } n.$$

Weiter ist

$$x_{n+2} - x_n = 1 + \frac{1}{x_{n+1}} - 1 - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} - x_{n+1}}{x_{n-1}x_{n+1}}.$$

Aus $x_2 - x_0 = 0.5 > 0$ folgt also $x_3 - x_1 < 0$ usw. und damit (27), (28). Nach dem Vollständigkeitsaxiom sind die Teilfolgen (x_{2k}) und (x_{2k+1}) konvergent gegen Grenzwerte zwischen 1 und 2. Aber aus $x_n = 1 + 1/x_{n-1}$ folgt

$$x_n = 1 + \frac{1}{1 + 1/x_{n-2}} = 1 + \frac{x_{n-2}}{1 + x_{n-2}}$$

oder

$$(x_n - 1)(x_{n-2} + 1) = x_{n-2}.$$

Ist $a = \lim x_{2k}$, so folgt wie im Beweis von Satz 69

$$(a - 1)(a + 1) = a.$$

Auflösen der quadratischen Gleichung liefert (wegen $1 \leq a \leq 2$)

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

und dasselbe gilt für $\lim x_{2k+1}$. Schließen Sie daraus, dass $\lim x_n = a$ ist.

Übrigens ist a wunderbarer Weise gerade das Verhältnis beim Goldenen Schnitt (Ganze Strecke:Große Strecke=Große Strecke:Kleine Strecke). Wer hätte den Karnickeln das zuge-
traut!

□

Satz 83 (Existenz monotoner Teilfolgen). *Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei (x_n) eine reelle Folge. Das Problem beim Beweis ist es zu entscheiden, ob man nach einer monoton wachsenden oder nach einer monoton fallenden Teilfolge suchen soll. Dazu wollen wir für den Augenblick ein x_n *dominant* nennen, wenn es mindestens so groß ist, wie alle folgenden Glieder:

$$x_n \geq x_j \quad \text{für alle } j > n.$$

1. Fall: Es gibt unendlich viele dominante x_n . Dann lassen wir alle andern weg und bekommen eine (nicht notwendig streng) monoton fallende Folge.

2. Fall: Es gibt nur endlich viele dominante x_n . Dann lassen wir zunächst den Anfang der Folge bis zum letzten dominanten weg. Die verbleibende Folge enthält dann kein dominantes Glied mehr, d.h. zu jedem Glied gibt es ein größeres nachfolgendes. Also können wir eine (streng) monoton wachsende unendliche Teilfolge auswählen. □

5.3 Noch einmal Vollständigkeit

Wie entscheidet man, ob eine gegebene Folge konvergent ist, wenn man den Grenzwert nicht kennt? Monotonie und Beschränktheit ist ein hinreichendes, aber offensichtlich kein notwendiges Kriterium. Ein solches wollen wir jetzt angeben:

Definition 84 (Cauchyfolge). Eine Folge (x_n) heißt eine *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|x_n - x_m| < \epsilon \text{ für alle } m, n \geq N.$$

Beispiel 85. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Ist nämlich (x_n) konvergent gegen a und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - a| < \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq N.$$

Dann ist aber

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \epsilon \text{ für alle } m, n \geq N.$$

□

Beispiel 86. Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Cauchyfolge, also auch nicht konvergent.

□

In den reellen Zahlen(!) sind nun umgekehrt Cauchyfolgen immer konvergent.

Satz 87. Jede Cauchyfolge in \mathbb{R} ist konvergent.

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchyfolge. Zunächst ist (x_n) beschränkt. Es gibt nämlich nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$

$$x_N - 1 < x_n < x_N + 1.$$

Also ist die Folge $(x_n)_{n > N}$ beschränkt, und die endlich vielen Glieder x_0, \dots, x_{N-1} ändern daran nichts.

Als nächstes wählen wir nach Satz 83 eine monotone Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (x_n) aus. Diese ist natürlich wieder beschränkt, also nach dem Vollständigkeitsaxiom konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. An dieser Stelle benutzen wir, dass wir es mit \mathbb{R} zu tun haben!

Schließlich zeigen wir $\lim x_n = a$. Sei also $\epsilon > 0$. Dann gibt es $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon/2 \text{ für alle } k \geq K$$

und $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - x_m| < \epsilon/2 \text{ für alle } m, n \geq N.$$

Wähle ein $k \geq K$ mit $n_k \geq N$. Dann folgt

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

Definition 88 (Häufungspunkt). Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt ein *Häufungspunkt* der reellen Folge (x_n) , wenn diese eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiel 89. Ist $\lim x_n = a$, so ist a ein Häufungspunkt, und zwar der einzige, vgl. Satz 81. Die Folge $((-1)^n)$ hat die Häufungspunkte $+1$ und -1 . Die Folge (n^2) hat keinen Häufungspunkt.

□

Satz 90 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte reelle Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sie enthält eine monotone Teilfolge. Die ist wieder beschränkt, also konvergent. □

Definition 91 (Supremum und Infimum). Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(i) $S \in \mathbb{R}$ heißt eine *obere Schranke* für A , wenn

$$a \leq S \text{ für alle } a \in A.$$

(ii) $M \in \mathbb{R}$ heißt das *Supremum von A* , wenn M eine obere Schranke von A ist, und es keine kleinere obere Schranke von A gibt. Man schreibt

$$M = \sup A.$$

(iii) Entsprechend definiert man *untere Schranke* und das *Infimum* $\inf A$ von A .

(iv) Ist $\sup A \in A$, so nennt man $\sup A$ auch das *Maximum von A* , geschrieben $\max A$.

(v) Entsprechend definiert man das *Minimum von A* .

(vi) A heißt *nach oben (unten) beschränkt*, wenn es eine obere (untere) Schranke besitzt.

Ist $A = \emptyset$, so ist jede reelle Zahl eine obere und untere Schranke für A . Das führt zu der Konvention, dass man

$$\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty$$

schreibt. Ist andererseits A nach oben bzw. unten unbeschränkt, so schreibt man

$$\sup A = +\infty$$

bzw.

$$\inf A = -\infty.$$

Beispiel 92. Für $A := [0, 1[$ gilt:

- 5 ist eine obere Schranke von A .
- $\sup A = 1$.
- $\max A$ existiert nicht!
- $\inf A = \min A = 0$.

□

Es ist nicht so klar, ob es unter allen oberen Schranken einer Menge wirklich eine *kleinste* gibt, ob also jede Menge $A \subset \mathbb{R}$ ein Supremum besitzt. Wenn man \mathbb{Q} statt \mathbb{R} nimmt, hat die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ zwar obere Schranken, unter denen gibt es in \mathbb{Q} aber keine kleinste. In \mathbb{R} ist das anders, aber man muss die Vollständigkeit bemühen. Das zeigt der folgende

Satz 93. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Dann gilt:

(i) Es gibt in A eine monoton fallende Folge (a_n) und eine monoton wachsende Folge (b_n) mit

$$\lim a_n = \inf A, \quad \lim b_n = \sup A.$$

Dabei sind die Fälle $\sup A = +\infty$ und $\inf A = -\infty$ eingeschlossen. Insbesondere existieren $\inf A$ und $\sup A$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

(ii) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt, so existiert $\sup A \in \mathbb{R}$ bzw. $\inf A \in \mathbb{R}$.

Beweis. Zu (i). 1. Fall: A nicht nach oben beschränkt. Wir definieren die Folge (b_n) rekursiv. Weil 0 keine obere Schranke von A ist, gibt es ein $b_0 \in A$ mit $b_0 \geq 0$. Sind b_0, \dots, b_n bereits definiert, so ist $n + b_n$ keine obere Schranke für A , und deshalb gibt es ein $b_{n+1} \in A$ mit

$$b_{n+1} \geq n + b_n.$$

Die so konstruierte Folge (b_n) liegt in A , ist monoton wachsend und erfüllt

$$\lim b_n = +\infty = \sup A.$$

2. Fall: A nach oben beschränkt. Wir wählen eine obere Schranke S_0 . Weil $A \neq \emptyset$, gibt es $b_0 \in A$, und wir wählen ein solches. Offenbar ist

$$b_0 \leq S_0.$$

Wir definieren nun rekursiv zwei Folgen (b_n) und (S_n) wie folgt: Wir bilden

$$x_n = \frac{b_n + S_n}{2}$$

und definieren

$$S_{n+1} := \begin{cases} x_n & \text{falls } x_n \text{ eine obere Schranke von } A \text{ ist} \\ S_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall setzen wir

$$b_{n+1} := b_n.$$

Im zweiten Fall gibt es ein $a \in A$ mit $x_n < a \leq S_n$, und wir wählen ein solches als b_{n+1} :

$$x_n < b_{n+1} \leq S_n.$$

Dann sind alle $b_n \in A$ und alle S_n obere Schranken von A . Nach Konstruktion ist (b_n) monoton wachsend und (S_n) monoton fallend. Wegen

$$b_n \leq S_0, \quad b_0 \leq S_n$$

sind die Folgen beschränkt, also konvergent gegen ein b^* bzw. S^* . Weil aber

$$|S_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|S_n - b_n| \leq \dots \leq \frac{1}{2^n}|S_0 - b_0|,$$

ist

$$b^* = S^* =: M.$$

Wir behaupten $M = \sup A$. Wäre M keine obere Schranke von A , so gäbe es ein $a \in A$ mit $a > M$. Weil aber die oberen Schranken S_n gegen M konvergieren, gäbe es dann ein $S_n < a$. Widerspruch. Also ist M eine obere Schranke.

Wäre M nicht die kleinste obere Schranke, so gäbe es eine obere Schranke $S < M$. Weil die $b_n \in A$ gegen M konvergieren, gäbe es dann ein $b_n > S$. Widerspruch. Also ist M die kleinste obere Schranke.

Die Existenz der Folge (a_n) zeigt man ebenso.

Zu (ii). Klar. □

Satz 94 (Intervalle). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht leeres Intervall, d.h. für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ folgt aus $x_1 < x_2 < x_3$ und $x_1, x_3 \in I$, dass auch $x_2 \in I$. Seien

$$a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Dann ist I eine der folgenden Mengen

$$[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[,$$

wobei die nicht definierten Fälle $[a, +\infty]$ etc. ausgenommen sind.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass a und b reelle Zahlen sind. Offenbar ist

$$I \subset [a, b].$$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$]a, b[\subset I.$$

Nach Satz 93 gibt es aber in I eine monoton fallende Folge $a_n \in I$ mit $\lim a_n = a$ und eine monoton wachsende Folge $b_n \in I$ mit $\lim b_n = b$. Ist $a < x < b$, so gibt es also ein n mit

$$a_n < x < b_n,$$

und nach Voraussetzung ist $x \in I$. Also ist $]a, b[\subset I$.

$a = \inf I = -\infty$ und $b \in \mathbb{R}$, so ist zu zeigen, dass

$$]-\infty, b[\subset I \subset]-\infty, b].$$

In diesem Fall gibt es eine Folge a_n in I mit $\lim a_n = -\infty$. Dasselbe Argument wie oben zeigt dann $]-\infty, b[\subset I$.

Entsprechend schließt man für die verbleibenden Fälle $a \in \mathbb{R}, b = +\infty$ und $a = -\infty, b = +\infty$. □

Definition 95 (Limes superior und inferior). Sei (x_n) eine reelle Folge. Wir setzen

$$s_n := \sup\{x_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Dann gibt es zwei Fälle:

- Entweder ist $s_0 = +\infty$ und dann $s_n = +\infty$ für alle n , oder

- die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in \mathbb{R} und zwar, weil sich mit wachsendem n die „Konkurrenzmenge“ $\{k \geq n\}$ verkleinert, eine monoton fallende.

Den *Limes superior* der Folge (x_k) definieren wir im letzteren Fall durch

$$\limsup x_n := \lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Im ersten Fall setzen wir

$$\limsup x_n := +\infty$$

Also existiert $\limsup x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ für jede reelle Folge (x_n) .

Entsprechend definiert man

$$\liminf x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_k \mid k \geq n\}.$$

Satz 96. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann gilt

(i) Ist $\limsup x_k \in \mathbb{R}$, so ist dies der größte Häufungspunkt der Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Analog für \liminf .

(ii) $(x_k)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn

$$\liminf x_k = a = \limsup x_k.$$

Beweis. Zu (i). Sei $b := \limsup x_k$ und sei

$$s_n := \sup\{x_k \mid k \geq n\}.$$

Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge $(x_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{k_m} = b$. Wir setze $k_0 = 0$. Sind $k_0 < \dots < k_m$ schon definiert, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$b - \frac{1}{m+1} < s_n < b + \frac{1}{m+1} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir wählen ein solches n , welches außerdem $> k_m$ ist. In $\{x_k \mid k \geq n\}$ gibt es eine Folge, die gegen s_n konvergiert. Daher gibt es einen Index $k_{m+1} \geq n > k_m$ mit

$$b - \frac{1}{m+1} < x_{k_m} < b + \frac{1}{m+1}.$$

Die so konstruierte Teilfolge $(x_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert offenbar gegen b . Deshalb ist b ein Häufungspunkt der Folge. Gäbe es einen Häufungspunkt $\tilde{b} > b$, so gäbe es eine gegen \tilde{b} konvergente Teilfolge $(x_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$. Dann ist aber

$$\frac{b + \tilde{b}}{2} < x_{k_m}$$

für alle bis auf endlich viele m . Daher gilt für alle n

$$s_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\} \geq \frac{b + \tilde{b}}{2}$$

im Widerspruch zu $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b$. Also ist b der größte Häufungspunkt von (x_k) .

Zu (ii). Es gilt

$$\inf \{x_k \mid k \geq n\} \leq x_n \leq \sup \{x_k \mid k \geq n\}.$$

Aus $\liminf x_k = a = \limsup x_k$ folgt also $\lim x_k = a$. Ist umgekehrt $\lim x_k = a$, so ist jede Teilfolge auch konvergent gegen a , d.h. a ist der einzige Häufungspunkt der Folge. Aus (i) folgt dann $\liminf x_k = a = \limsup x_k$. \square

Lemma 97. Seien (x_n) eine nicht-negative Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim x_n = a \implies \lim \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

Beweis. Aus den Anordnungsaxiomen folgt für nicht negative a, b

$$a < b \iff a^2 < b^2, \tag{30}$$

also $0 \leq a < b \implies \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

1. Fall: $a = 0$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq x_n < \epsilon^2$ für alle $n \geq N$. Dann ist $|\sqrt{x_n} - \sqrt{0}| = \sqrt{x_n} < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt die Behauptung.

2. Fall: $a > 0$. Dann gilt

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Schlussbemerkung zur Axiomatik der reellen Zahlen. Man kann zeigen, dass die reellen Zahlen durch die Axiome

$$(A1) - (A3), (M1) - (M3), (D), (O1) - (O4) \text{ und } (V)$$

eindeutig bestimmt sind. Je zwei Mengen mit diesen Strukturen sind *isomorph*: Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen ihnen, die alle Strukturen erhält. Und man kann (auf der Basis einfacherer Axiome) ein Modell für die reellen Zahlen konstruieren.

Für das Vollständigkeitsaxiom finden Sie viele alternative äquivalente Formulierungen. Statt (V) kann man auch die Sätze 67 und 87 oder den Satz 93 (vgl. Barner-Flohr) oder die Sätze 67 und 90 als Axiome wählen.

5.4 Konvergenz in \mathbb{C}

Komplexe Folgen (z_n) , also Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto z_n$ spielen eine wichtige Rolle in der Analysis. Wir behandeln hier kurz die Konvergenz komplexer Folgen. Wir erinnern an die Konjugierte

$$\bar{z} := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$$

und den Betrag

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Beachten Sie, dass wir jetzt die Existenz einer eindeutigen Quadratwurzel aus nicht-negativen reellen Zahlen zur Verfügung haben.

Satz 98 (Rechenregeln für die Konjugation). Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\ \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, \\ \overline{z_1 / z_2} &= \bar{z}_1 / \bar{z}_2, \\ \bar{\bar{z}} &= z, \\ z\bar{z} &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \\ \operatorname{Re} z &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \end{aligned}$$

Beweis. Einfach. □

Satz 99 (Rechenregeln für den Betrag). Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\bar{z}}, \\ |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \\ |z_1 / z_2| &= |z_1| / |z_2|, \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|. \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Gleichung können Sie direkt nachrechnen. Wir beweisen die Dreiecksungleichung. Wenn $z_1 + z_2 = 0$, brauchen wir nichts zu zeigen. Wir nehmen daher an, dass $z_1 + z_2 \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{Re} \frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2} = \operatorname{Re} \frac{z_1}{z_1 + z_2} + \operatorname{Re} \frac{z_2}{z_1 + z_2} \\ &\leq \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|}. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation dieser Ungleichung mit $|z_1 + z_2| > 0$ folgt die Behauptung. □

Wenn man die auf die komplexen Zahlen erweiterte Bedeutung des Absolutbetrags zugrunde legt, kann man die Konvergenz komplexer Folgen genauso wie im Reellen definieren:

Definition 100. Sei (z_n) eine komplexe Folge.

(i) (z_n) heißt *konvergent gegen* $a \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|z_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N,$$

d.h. wenn die (reelle!) Folge $(|z_n - a|)$ gegen 0 konvergiert:

$$\lim |z_n - a| = 0.$$

(ii) (z_n) heißt eine *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|z_n - z_m| < \epsilon \text{ für alle } m, n \geq N.$$

(iii) (z_n) heißt *beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|z_n| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Monotonie hingegen macht für komplexe Folgen keinen Sinn.

Satz 101. Die komplexe Folge (z_n) ist konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn

$$(\operatorname{Re} z_n) \text{ konvergent gegen } \operatorname{Re} a$$

und

$$(\operatorname{Im} z_n) \text{ konvergent gegen } \operatorname{Im} a.$$

(z_n) ist eine Cauchyfolge genau dann, wenn $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ Cauchyfolgen sind.

Damit ist die Konvergenz komplexer Folgen auf die reeller Folgen zurückgeführt.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a| &\leq |z - a| = \sqrt{(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} a)^2} \\ |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} a| &\leq |z - a| = \sqrt{(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} a)^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Aus $z_n \rightarrow a$, also $|z_n - a| \rightarrow 0$ folgt daher $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a| \rightarrow 0$, also

$$\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} a.$$

Entsprechend schließt man für den Imaginärteil.

Umgekehrt folgt mit der rechten Gleichung von (31) aus $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} a$ und $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} a$, dass

$$(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a)^2 \rightarrow 0.$$

Aus Lemma 97 folgt dann

$$|z_n - a| \rightarrow 0,$$

also $z_n \rightarrow a$. Die Aussage über Cauchyfolgen ergibt sich ähnlich aus (31). \square

Damit zeigt man zum Beispiel:

- Für komplexe Folgen bleiben die Rechenregeln des Satzes 76 richtig.
- Konvergente komplexe Folgen sind beschränkt.
- In \mathbb{C} ist jede Cauchyfolge konvergent.
- Jede beschränkte komplexe Folge besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

6 Stetigkeit

6.1 Grenzwerte von Funktionen

Definition 102 (Umgebung, offen, abgeschlossen). Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

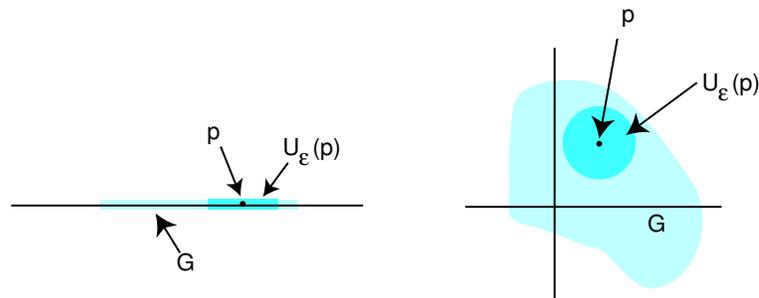
(i) Für $\epsilon > 0$ und $p \in \mathbb{K}$ sei

$$U_\epsilon(p) := \{q \in \mathbb{K} \mid |q - p| < \epsilon\}.$$

Wir nennen das die ϵ -Umgebung von p . Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist

$$U_\epsilon(p) =]p - \epsilon, p + \epsilon[$$

ein offenes, um p symmetrisches Intervall. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $U_\epsilon(p)$ die sogenannte *offene Kreisscheibe* vom Radius ϵ um p .



- (ii) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $p \in D$ eine ϵ -Umgebung von p gibt, die ganz in D liegt.
- (iii) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathbb{K} \setminus D$ offen ist.
- (iv) Ein Punkt $p \in D \subset \mathbb{K}$ heißt ein *innerer Punkt von D* , wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $U_\epsilon(p) \subset D$.
- (v) $p \in \mathbb{R}$ heißt ein *Randpunkt von $D \subset \mathbb{K}$* , wenn p weder innerer Punkt von D noch von $\mathbb{K} \setminus D$ ist.

Beispiel 103. Die offene Kreisscheibe

$$U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

um z_0 vom Radius $r > 0$ ist offen im Sinne dieser Definition.

Beweis. Sei $z_1 \in U_r(z_0)$, d.h.

$$|z_1 - z_0| < r.$$

Dann ist $\epsilon := r - |z_1 - z_0| > 0$ und für $z \in U_\epsilon(z_1)$ gilt

$$|z - z_0| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_0| < \epsilon + |z_1 - z_0| = r$$

Also ist $U_\epsilon(z_1) \subset U_r(z_0)$.

□

Beispiel 104. Ebenso zeigt man, dass offene Intervalle in \mathbb{R} auch im Sinne dieser Definition offen sind.

□

Definition 105. Sei wieder $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(i) Für $p \in \mathbb{K}$ und $\delta > 0$ sei

$$U_\delta^*(p) := U_\delta(p) \setminus \{p\}.$$

Man nennt das die *punktierte δ -Umgebung von p* .

(ii) Seien $D \subset \mathbb{K}$ und $p \in \mathbb{K}$. p heißt ein *Häufungspunkt von D* , wenn in jeder punktierten Umgebung von p Punkte von D liegen, d.h. wenn gilt:

$$\forall \delta > 0 \ U_\delta^*(p) \cap D \neq \emptyset.$$

Definition 106 (Grenzwert von Funktionen). Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $f : \mathbb{K} \supset D \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion. Seien p ein Häufungspunkt von D und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen a ist *der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow p$* , wenn folgendes gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ f(U_\delta^*(p) \cap D) \subset U_\epsilon(a). \quad (32)$$

Diese Bedingung kann man auch so schreiben:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ (0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon).$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$$

oder

$$f(x) \rightarrow a \text{ für } x \rightarrow p.$$

Bemerkungen.

1. Der Punkt p muss nicht im Definitionsbereich D von f liegen, aber weil er ein Häufungspunkt von D ist, kann x wirklich „in D gegen p gehen“.
2. Die Bedingung (32) besagt, dass man die Abweichung des Funktionswertes $f(x)$ von a kontrollieren kann, indem man die Abweichung des Arguments von p kontrolliert.

Beispiel 107. Wir betrachten für $k \geq 1$ die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$. Wir behaupten

$$\lim_{z \rightarrow 1} z^k = 1.$$

Weil $D = \mathbb{C}$ ist, ist für alle $\delta > 0$

$$U_\delta^*(1) \cap D \neq \emptyset. \quad (33)$$

Weiter gilt für $|z| < 2$

$$|z^k - 1| = |z - 1| |z^{k-1} + \dots + 1| \leq |z - 1| k 2^{k-1}.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{2^{k-1}k})$. Ist dann $|z - 1| < \delta$, so ist insbesondere $|z| < 2$. Aus der vorstehenden Abschätzung folgt deshalb für alle $z \in \mathbb{C}$:

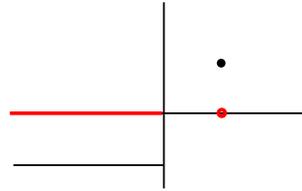
$$|z - 1| < \delta \implies |z^k - 1| < \delta k 2^{k-1} \leq \epsilon.$$

□

Beispiel 108. Betrachten Sie die beiden nachstehenden Funktionen sehr sorgfältig, um die Grenzwertdefinition genau zu verstehen:

$$f :]-\infty, 0[\cup \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

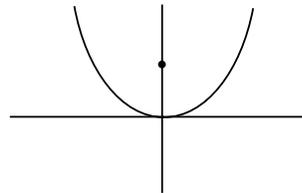
$$f(x) := -1 \text{ für } x < 0, \quad f(1) := 1.$$



Hier liegt 0 nicht im Definitionsbereich, aber $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$. Andererseits ist 1 kein Häufungspunkt des Definitionsbereichs, so dass $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nicht erklärt ist.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := x^2 \text{ für } x \neq 0, \quad f(0) = 1.$$



Hier ist $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

□

Bei Funktionen einer reellen Variablen (und nur bei diesen) kommen öfter auch einseitige Grenzwerte vor:

Definition 109 (Einseitige Grenzwerte). Sei $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien $p, a \in \mathbb{R}$ und p ein „linksseitiger Häufungspunkt“ von D , d.h. $D \cap]p - \delta, p[\neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$. Wir sagen a ist *der linksseitige Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow p$* , wenn folgendes gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$

$$p - \delta < x < p \quad \implies \quad |f(x) - a| < \epsilon.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \nearrow p} f(x) = a$$

oder

$$f(x) \rightarrow a \text{ für } x \nearrow p.$$

Auch die Notation

$$f(p-0) = a \text{ oder } f(p-) = a$$

ist gebräuchlich. Entsprechend definiert man den *rechtsseitigen Grenzwert* $\lim_{x \searrow p} f(x)$.

Beispiel 110. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) =: \frac{x}{|x|}$$

gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$$

aber $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht.

□

Lemma 111. Seien $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $p \in \mathbb{R}$ und für ein $\delta > 0$ sei

$$]p - \delta, p + \delta[\subset D \cup \{p\}.$$

Dann gilt: Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existiert genau dann, wenn in p der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert existieren und beide gleich sind. In diesem Fall ist

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \nearrow p} f(x) = \lim_{x \searrow p} f(x).$$

Beweis. Selbst □

Das nächste Lemma bietet die Möglichkeit, den Grenzwertbegriff für Funktionen auf den für Folgen zurückzuführen.

Lemma 112. Seien $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}$ und p ein Häufungspunkt von D . Dann ist $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$ genau dann, wenn gilt:

Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{p\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

Entsprechende Aussage gelten auch für komplexe Funktionen oder für einseitige Grenzwerte reeller Funktionen.

Beweis. Zu (\Rightarrow) . Es gelte $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D \setminus \{p\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$, und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta^*(p) \cap D) \subset U_\epsilon(a)$. Weil $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U_\delta^*(p)$ und daher $f(x_n) \in U_\epsilon(a)$ für alle $n \geq N$. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Zu (\Leftarrow) . Nun gelte umgekehrt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{p\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$. Annahme: Es gilt nicht $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für kein $\delta > 0$ gilt $f(U_\delta^*(p) \cap D) \subset U_\epsilon(a)$. Dann gibt es zu $\delta = \frac{1}{n}$ also ein $x_n \in U_\delta^*(p) \cap D$, für das $f(x_n) \notin U_\epsilon(a)$. Die Folge $f(x_n)$ konvergiert also nicht gegen a , obwohl wegen $|x_n - p| < \frac{1}{n}$ natürlich $\lim x_n = p$. Widerspruch! Also war die Annahme falsch und es gilt doch $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$. □

Dieses Lemma gibt die Möglichkeit, die bestimmte Divergenz (Konvergenz gegen $\pm\infty$) von Folgen auf Funktionen zu übertragen.

Definition 113 (Unendliche Grenzwerte und Grenzwerte in Unendlich). Seien $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $p, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Wir definieren:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a,$$

wenn es wenigstens eine Folge (x_n) in $D \setminus \{p\}$ gibt, für die $\lim x_n = p$ ist, und wenn für jede solche Folge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

gilt. Für reelle p und a stimmt das nach dem Lemma mit der bisherigen Definition überein.

Im Komplexen machen „ $+\infty$ “ oder „ $-\infty$ “ keinen Sinn, aber es gibt eine sinnvolle Definition für $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$ und für $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = \infty$. Welche?

Beispiel 114. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty,$$

denn es gibt Folgen (x_n) in \mathbb{R} , die gegen $+\infty$ gehen, und für jede solche Folge geht auch $y_n := x_n - 1$ gegen $+\infty$ und

$$x_n^k = (1 + y_n)^k \geq 1 + ky_n \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

□

Satz 115 (Rechenregeln für Grenzwerte). Seien $f, g : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. (Statt \mathbb{R} auch überall \mathbb{C} .) Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) + \lim_{x \rightarrow p} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \lim_{x \rightarrow p} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (cf)(x) = c \lim_{x \rightarrow p} f(x),$$

falls die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty \iff \lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Beweis. Selbst.

□

Definition 116 (Stetigkeit). Sei f eine reelle oder komplexe Funktion auf D .

f heißt *stetig in* $p \in D$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (|x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon).$$

f heißt *stetig (auf D)*, wenn es in allen $p \in D$ stetig ist.

Lemma 117. Seien f eine reelle oder komplexe Funktion auf D und $p \in D$ ein Häufungspunkt von D . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig in p .

(ii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 f(U_\delta(p) \cap D) \subset U_\epsilon(f(p))$.

(iii) Für jede Folge (x_n) in D gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p).$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Beweis. Folgt aus den äquivalenten Formulierungen für Grenzwerte von Funktionen.

□

Beispiel 118. Konstante Abbildungen sind stetig. Die identische Abbildung

$$\text{id} : D \rightarrow D, \quad x \mapsto x$$

ist stetig. □

Beispiel 119. Die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto |z|$$

ist stetig. Dasselbe gilt für die reelle Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$.

Beweis. Wir zeigen die Stetigkeit in einem beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt nach dem Korollar 9, das genauso wie im reellen Fall auch im komplexen Fall aus der Dreiecksungleichung folgt,

$$|f(z) - f(z_0)| = ||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|.$$

Ist also $\epsilon > 0$ gegeben und setzt man $\delta = \epsilon$, so folgt aus $|z - z_0| < \delta$, dass $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. □

Beispiel 120 (Eine unstetige Funktion). Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} +1 & \text{für } x \geq 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

ist in 0 nicht stetig. Für die Folge $(x_n = (-\frac{1}{2})^n)$ gilt $\lim x_n = 0$, aber $\lim f(x_n) = \lim(-1)^n$ existiert nicht und ist deshalb nicht $= f(0)$. □

Beispiel 121 (Noch eine unstetige Funktion). Für dieses Beispiel greifen wir vor auf die Sinusfunktion, die erst später „offiziell“ eingeführt wird. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

ist an der Stelle 0 unstetig. Die Folge $(x_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert nämlich gegen 0, aber $(f(x_k) = \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist divergent. Dieses Beispiel zeigt, dass Unstetigkeiten nicht unbedingt „Sprünge“ sein müssen. figur4cmunstetig endcenter

Das vorstehende Bild des Graphen wurde mit dem Plot-Befehl von Mathematica erzeugt. Das Programm wertet die Funktion an bestimmten Stellen aus, die es selbst wählt. Die Stellen liegen enger zusammen, wenn die Funktionswerte heftig schwanken, aber das Programm erwischt im allgemeinen natürlich nicht automatisch die Maximal- und Minimalstellen. Deshalb sehen die Spitzen des Graphen so „angenibbelt“ aus. □

Lemma 122. Sei $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt in $x \in D$ mit $f(x) \neq 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass

$$f(U_\delta(x) \cap D) \not\ni 0.$$

Das gilt auch für komplexe Funktionen.

Beweis. Nach Definition der Stetigkeit gibt es zu $\epsilon := |f(x)|$ ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$\forall y (y \in U_\delta(x) \cap D \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon).$$

Insbesondere also $f(y) \neq 0$. □

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich unmittelbar:

Satz 123 (Rechenregeln für stetige Funktionen). Seien $f, g : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $p \in D$. Dann sind auch $f \pm g$ und fg stetig in p . Ist $g(p) \neq 0$, so ist die auf $\{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ definierte Funktion f/g in p stetig.
Ist $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow G \subset \mathbb{R}$ stetig in p und $g : \mathbb{R} \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $f(p)$, so ist die Komposition $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in p .
Entsprechendes gilt für komplexe Funktionen.

Beispiel 124. Weil die Funktion $x \mapsto x$ stetig ist, sind auch die Potenzen $x \mapsto x^k$ stetig. Weil konstante Funktionen stetig sind, sind dann auch Produkte $x \mapsto a_k x^k$ und Summen von solchen Funktionen stetig. Kurzum: Polynome sind stetig. Rationale Funktionen sind stetig auf ihrem natürlichen Definitionsbereich. □

Lemma 125. Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $p \in D$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f|_{D \cap U_\delta(p)}$ stetig ist.
Entsprechendes gilt für komplexe Funktionen.

Beweis. Triviale Folge der Definition: Ist (x_n) eine Folge in D , die gegen p konvergiert, so liegen fast alle Folgenglieder in $U_\delta(p)$. Weil $f|_{U_\delta(p)}$ stetig ist, folgt $\lim f(x_n) = f(p)$. □

Dies Lemma wird häufig so benutzt:

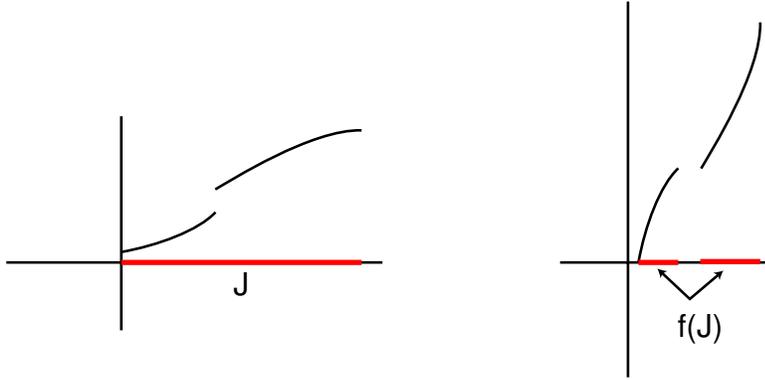
Korollar 126. Seien $\mathbb{R} \supset G = \bigcup_{i \in I} U_i$ die Vereinigung von offenen Mengen U_i und f eine Funktion auf G . Ist $f|_{U_i}$ stetig für alle $i \in I$, so ist f stetig auf G .

Beweis. Wir zeigen die Stetigkeit für $p \in G$. Nach Voraussetzung gibt es ein $i \in I$, so dass $p \in U_i$. Insbesondere gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(p) \subset U_i$. Aus dem Lemma folgt die Behauptung. □

Satz 127 (Stetigkeit von Umkehrfunktionen). Sei $f : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (fallend) auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : f(J) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist streng monoton wachsend (fallend) und stetig.



Beweis. Wie nehmen an, dass f streng monoton wachsend ist. Offenbar ist es dann injektiv und es gilt für $x_1, x_2 \in J$

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2).$$

Die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ ist also auch streng monoton steigend.

Wir zeigen die Stetigkeit von g in $y_0 = f(x_0) \in f(J)$. Sei also $\epsilon > 0$. Wir suchen ein $\delta > 0$ mit

$$g(]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\cap f(J)) \subset]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[. \quad (34)$$

Wir zeigen zunächst

$$\exists \delta_1 > 0 \ g(]y_0 - \delta_1, y_0] \cap f(J)) \subset]x_0 - \epsilon, x_0]. \quad (35)$$

1. Fall: Es gibt $x_1 \in]x_0 - \epsilon, x_0[\cap J$. In diesem Fall wählen wir ein solches x_1 und setzen

$$y_1 := f(x_1), \quad \delta_1 := y_0 - y_1.$$

Dann ist $y_1 = y_0 - \delta_1$ und für

$$y = f(x) \in]y_1, y_0] \cap f(J)$$

gilt

$$x_1 = g(y_1) < g(y) \leq g(y_0) = x_0$$

Damit ist

$$g(]y_0 - \delta_1, y_0] \cap f(J)) \subset]x_0 - \epsilon, x_0].$$

2. Fall: $]x_0 - \epsilon, x_0[\cap J = \emptyset$. Weil J ein Intervall(!) ist, ist dann $x_0 = \inf J$ der linke Eckpunkt von J , und es gilt $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in J$. Setzen wir also $\delta_1 := 1$, so ist

$$]y_0 - \delta_1, y_0] \cap f(J) = \{y_0\}$$

und daher

$$g(]y_0 - \delta_1, y_0] \cap f(J)) = \{x_0\} \subset]x_0 - \epsilon, x_0].$$

Damit ist (35) gezeigt. Ebenso zeigt man:

$$\exists \delta_2 > 0 \ g(]y_0, y_0 + \delta_2[\cap f(J)) \subset]x_0, x_0 + \epsilon[. \quad (36)$$

Aus (35) und (36) folgt (34) mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. □

Beispiel 128. Aus den Rechenregeln für Ungleichungen folgt, dass für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^k$$

streng monoton wachsend ist. Daher ist

$$[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[k]{x}$$

ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Als Konsequenz ergibt sich für positive Folgen (x_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_n} = 0,$$

vgl. Lemma 97.

□

Der folgende Satz gibt eine Charakterisierung stetiger Funktionen auf offenen Mengen, die fundamental für Verallgemeinerungen des Stetigkeitsbegriffs in der sogenannten *Topologie* ist.

Satz 129. Sei $f : \mathbb{K} \supset G \rightarrow \mathbb{K}$ definiert auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{K}$, wobei \mathbb{K} wieder für \mathbb{R} oder \mathbb{C} steht. Dann gilt:

f ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $U \subset \mathbb{K}$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen ist. Entsprechendes gilt auch für komplexe Funktionen.

Beweis. Sei zunächst f stetig. Sei $U \subset \mathbb{K}$ offen und sei $x \in f^{-1}(U)$, d.h. $f(x) =: y \in U$. Wir müssen zeigen, dass es dann ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$ ist. Weil U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(y) \subset U$. Weil f in x stetig ist, gibt es dazu ein $\delta > 0$, so dass

$$f(U_\delta(x) \cap G) \subset U_\epsilon(y) \subset U,$$

d.h.

$$U_\delta(x) \cap G \subset f^{-1}(U).$$

Weil G offen ist, kann man δ so klein wählen, dass überdies $U_\delta(x) \subset G$, also $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$.

Seien nun die Urbilder offener Menge offen. Sei $x \in G$. Wir wollen zeigen, dass f in x stetig ist. Sei dazu $\epsilon > 0$ gegeben. Dann ist $f^{-1}(U_\epsilon(f(x)))$ offen und enthält x . Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(x)))$, d.h. für alle y gilt

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

□

6.2 Drei bedeutende Sätze über stetige Funktionen

Wir beweisen in diesem Abschnitt

- den Zwischenwertsatz,
- den Satz vom Maximum und
- den Satz über gleichmäßige Stetigkeit.

Ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist eine Menge, die mit je zwei Punkten auch alle Punkte dazwischen enthält. Ist $x < z < y$, und gilt $x \in J$ und $y \in J$, so gilt auch $z \in J$. Vergleichen Sie Definition 10. Stetige Funktionen erhalten diese Eigenschaft:

Satz 130 (Zwischenwertsatz, B. Bolzano 1817). Sei $f : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J . Dann ist die Bildmenge $f(J)$ ein Intervall. D.h. sind $f(x)$ und $f(y)$ zwei Funktionswerte von f , so sind auch alle reellen Zahlen dazwischen Funktionswerte von f . Daher der Name Zwischenwertsatz.

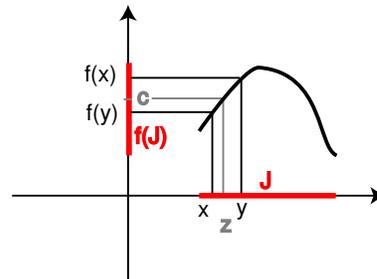
Beweis. Seien also $x, y \in J$ und

$$f(x) < c < f(y).$$

Wir müssen ein $z \in J$ finden, für das $f(z) = c$.

Wir nehmen an, dass $x < y$, den Fall $x > y$ beweist man analog.

Wir setzen $x_0 := x, y_0 := y$ und bilden rekursiv definierte Folgen $(x_n), (y_n)$ wie folgt:



Wir bilden den Mittelpunkt von x_n und y_n

$$z_n := \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Weil J ein Intervall ist(!), ist $z_n \in J$, und wir können $f(z_n)$ betrachten.

Ist $f(z_n) = c$, so setzen wir $z = z_n$ und sind fertig.

Ist $f(z_n) < c$, so setzen wir

$$x_{n+1} = z_n, \quad y_{n+1} = y_n.$$

Ist $f(z_n) > c$, so setzen wir

$$x_{n+1} = x_n, \quad y_{n+1} = z_n.$$

Wenn diese Konstruktion nicht abbricht, weil für ein $n \in \mathbb{N}$ schon $f(z_n) = c$ gilt, erhalten wir auf diese Weise zwei monotone Folgen

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq y_2 \leq y_1 \leq y_0$$

mit

$$0 \leq y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(y_n - x_n) \leq \dots \leq \frac{1}{2^{n+1}}(y_0 - x_0). \quad (37)$$

und

$$f(x_n) < c < f(y_n). \quad (38)$$

für alle n . Als monotone beschränkte Folgen sind (x_n) und (y_n) konvergent. Wegen (37) konvergieren sie gegen denselben Wert $z \in [x, y] \subset J$, und weil f stetig ist, folgt aus (38), dass $f(z) \leq c \leq f(z)$, also $f(z) = c$. \square

Korollar 131. Ist $f : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J und sind $x, y \in J$ mit

$$f(x)f(y) < 0,$$

d.h. hat f an diesen Stellen verschiedenes Vorzeichen, so gibt es zwischen x und y eine Nullstelle von f .

Beweis. Sei etwa $x < y$. Der Zwischenwertsatz angewendet auf $f|_{[x,y]}$ sagt dann, dass $f|_{[x,y]}$ ein Intervall ist. Weil es positive und negative Zahlen enthält, enthält es dann auch die 0. \square

Korollar 132 (Monotonie und Injektivität). Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ streng monoton.}$$

Beweis. " \Leftarrow ". Trivial.

" \Rightarrow ". Das beweisen wir indirekt: Wir nehmen an, dass f injektiv ist, aber weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend.

Wenn f nicht streng monoton fallend ist, gibt es $x_1, x_2 \in J$ mit

$$x_1 < x_2 \text{ und } f(x_1) \leq f(x_2).$$

Weil f injektiv ist, gilt dann auch rechts eine echte Ungleichung, also

$$x_1 < x_2 \text{ und } f(x_1) - f(x_2) < 0.$$

Wenn f nicht streng monoton wachsend ist, gibt es ebenso $y_1, y_2 \in J$ mit

$$y_1 < y_2 \text{ und } f(y_1) - f(y_2) > 0.$$

Betrachte die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := f((1-t)x_1 + ty_1) - f((1-t)x_2 + ty_2).$$

Diese Funktion ist als Komposition stetiger Funktionen stetig auf dem Intervall $[0, 1]$. Weiter ist

$$g(0) = f(x_1) - f(x_2) < 0, \quad g(1) = f(y_1) - f(y_2) > 0.$$

Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $t \in]0, 1[$ mit $g(t) = 0$, also mit

$$f((1-t)x_1 + ty_1) = f((1-t)x_2 + ty_2).$$

Aber nach den Rechenregeln für Ungleichungen gilt

$$(1-t)x_1 + ty_1 < (1-t)x_2 + ty_2.$$

Das ist ein Widerspruch zur Injektivität von f . \square

Satz 133 (vom Maximum, K. Weierstraß 1861). Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem nicht leeren kompakten (=abgeschlossenen und beschränkten) Intervall nimmt ihr Maximum und Minimum an. D.h. es gibt $x^*, y^* \in [a, b]$ mit

$$f(x^*) \leq f(x) \leq f(y^*)$$

für alle $x \in [a, b]$. Insbesondere ist die Funktion f beschränkt.

Für komplexwertige Funktionen machen die Begriffe *Maximum* und *Minimum* keinen Sinn. Allerdings läßt sich der Satz erheblich erweitern, vgl. nächstes Semester.

Beweis. Sei $M := \sup f([a, b]) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann gibt es eine Folge (y_n) in $[a, b]$ mit

$$\lim f(y_n) = M.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß können wir o.E. annehmen, dass die Folge (y_n) konvergent ist gegen ein $y^* \in [a, b]$. Weil f stetig ist, folgt

$$f(y^*) = f(\lim y_n) = \lim f(y_n) = M.$$

Insbesondere ist $M < +\infty$. □

Für das dritte wichtige Resultat über stetige Funktionen brauchen wir noch einen neuen Begriff.

Wir erinnern an die ϵ - δ -Definition der Stetigkeit: Die Funktion f war stetig auf D , wenn galt

$$\forall x \in D \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D (|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon).$$

Stetigkeit bedeutete nämlich Stetigkeit in jedem Punkt x . Die „Qualität der Stetigkeit“ kann man als „schlecht“ bezeichnen, wenn man ein relativ zum vorgegebenen $\epsilon > 0$ sehr kleines δ benötigt, und als gut, wenn man mit einem relativ großen δ auskommt. Im allgemeinen wird die Qualität vom Punkt x abhängen. Der Begriff „gleichmäßige Stetigkeit“ impliziert, dass das im speziellen Fall eben nicht so ist, sondern dass man bei gegebenem $\epsilon > 0$ für alle $x \in D$ dasselbe $\delta > 0$ nehmen kann:

Definition 134 (Gleichmäßige Stetigkeit). Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Funktion $f : \mathbb{K} \supset D \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf D , wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D (|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon).$$

Beachten Sie: f ist gleichmäßig stetig immer nur *auf einer bestimmten Menge*. „Gleichmäßig stetig in einem Punkt“ oder „an einer Stelle“ macht keinen Sinn.

Beispiel 135. Für $a > 0$ betrachten wir die Funktion

$$f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Dann ist für $x, y > a$

$$|f(y) - f(x)| = \frac{|y - x|}{xy} \leq \frac{1}{a^2} |y - x|.$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle man $\delta = a^2 \epsilon$, und aus $|y - x| < \delta$ folgt $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Man sieht hier, dass der Wert a maßgeblich für die Wahl von δ ist. Je kleiner a ist, umso kleiner muss man (relativ zu ϵ) das δ wählen. Tatsächlich ist

$$]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Beweisen Sie das!

□

Satz 136 (Gleichmäßige Stetigkeit, E. Heine 1872). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann ist f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

Beweis. Annahme: f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, zu dem kein einheitliches $\delta > 0$ existiert. Wir wählen ein solches $\epsilon > 0$. Dann sind auch die Zahlen $\frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ kein einheitliches δ , d.h. es gibt Folgen $(x_k), (y_k)$ in $[a, b]$ mit

$$|y_k - x_k| < \frac{1}{k}, \text{ aber } |f(y_k) - f(x_k)| \geq \epsilon.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert $x^* = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i}$. Weil $a \leq x_k \leq b$ für alle k , ist auch $x^* \in [a, b]$. Weil

$$|y_{k_i} - x_{k_i}| < \frac{1}{k_i} \rightarrow 0,$$

ist auch $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{k_i} = x^*$. Daher ist

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k_i}) = f(x^*) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(y_{k_i}).$$

Das widerspricht aber der Ungleichung

$$|f(y_{k_i}) - f(x_{k_i})| \geq \epsilon \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

□

Bemerkungen.

1. Der Definitionsbereich D muss bei den beiden letzten Sätzen nicht unbedingt ein Intervall und auch keine Teilmenge von \mathbb{R} sein. In den Beweisen war nur folgende Eigenschaft wichtig:

Jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in D besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in D . Solche Teilmengen D von \mathbb{R} oder \mathbb{C} nennt man *kompakt*. Die Sätze gelten also für stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich D . Beim Satz über das Maximum müssen die Funktionswerte offenbar reell sein, beim Satz über die gleichmäßige Stetigkeit können sie auch komplex sein.

2. Während die Bedeutung von Zwischenwertsatz und Satz vom Maximum ziemlich einleuchtend ist, ist die des Satz von der Gleichmäßigen Konvergenz weniger naheliegend. Er kommt erst im Satz 172 und dann wieder in der Integrationstheorie (im Beispiel 198) "zum Einsatz".

7 Differentiation

7.1 Die Ableitung

Wir kommen nun zur Differentialrechnung, die für die moderne Naturwissenschaft von fundamentaler Bedeutung ist. Warum? Unsere Modelle von der Natur sind weitgehend deterministisch: Wir sind überzeugt, dass die zukünftigen Zustände eines Systems bestimmt sind, durch die *Änderungen*, die dieses System erfährt, und dass diese Änderungen durch (äußere und innere) Einwirkungen verursacht und gesteuert werden (Kausalität). Nach dem Newtonschen Gesetz bewirkt zum Beispiel die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft eine Änderung von dessen Geschwindigkeit.

Mit *Änderung* meinen wir ein momentanes Geschehen, die Änderung in jedem Augenblick, und die *Ableitung* einer zeitabhängigen Funktion beschreibt eben gerade dies. Deshalb formulieren wir die Naturgesetze meistens als Differentialgleichungen: von Schwingungsphänomenen bis zur Reibung von Zahnrädern, von der Wärmeleitung bis zur Strömungsmechanik, von der Beschreibung elektrischer Netzwerke bis zur Steuerung chemischer Prozesse bieten Differentialgleichungen die wichtigsten Modelle, so wichtige, dass in der mathematischen Physik das Wort „Modell“ oft synonym für „Differentialgleichung“ verwendet wird. Und die Differentialrechnung legt hier die Grundlagen.

Generalvoraussetzung. In diesem Abschnitt sei $f : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall mit mehr als einem Punkt oder auf einer nichtleeren offenen Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$. Als Wertebereich der Funktion nehmen wir meist die reellen Zahlen, die folgende Definition und viele Aussagen machen aber auch Sinn und bleiben richtig, wenn die Werte von f komplex sind. Dagegen soll das Argument einstweilen reell sein, die Differentialrechnung für Funktionen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} ist überraschenderweise eine ganz andere Theorie (Komplexe Analysis).

Definition 137. $f : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in J$ *differenzierbar*, wenn

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in \mathbb{R} existiert. $f'(x_0)$ heißt dann *die Ableitung* von f in x_0 . Man nennt f differenzierbar auf J , wenn es in allen $x_0 \in J$ differenzierbar ist.

Zur Notation. Statt f' schreibt man auch $\frac{df}{dx}$. Das ist einerseits etwas inkonsequent, weil der Name der Variablen beliebig ist, so dass man nicht x auszeichnen sollte. Andererseits ist es sehr bequem, zum Beispiel Potenzfunktionen einfach als x^n zu schreiben. Dafür erhält man dann, wie Sie aus der Schule wissen und wir gleich beweisen werden,

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

Wir werden zum Beispiel

$$\sin' = \cos$$

oder

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

nebeneinander verwenden.

Wenn das Argument von f die Zeit bezeichnet, schreibt man dafür gern t statt x , und bezeichnet die Ableitung mit einem Punkt statt mit einem Strich:

$$\dot{f} := \frac{df}{dt}.$$

Wie die Stetigkeit ist auch die Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft einer Funktion. Ob f in x_0 differenzierbar ist, hängt nur von den Werten von f in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 ab. Wie für stetige Funktionen gilt daher: Ist f auf einer offenen Menge J definiert, ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen mit $J = \bigcup U_i$ und ist $f|_{U_i}$ für jedes i differenzierbar, so ist $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Vgl. Lemma 125 und das folgende Korollar.

Bemerkung. Es ist wichtig, verschiedene Umformulierungen der Differenzierbarkeits-Definition zur Verfügung zu haben.

1. Man kann $x - x_0$ als neue Variable einführen, die man zum Beispiel Δx oder h nennt, und x statt x_0 schreiben. Dann ist also f in x differenzierbar, wenn

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

in \mathbb{R} existiert.

2. Für $h \neq 0$ kann man die Funktion

$$\alpha(h) := \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \tag{39}$$

definieren, und falls f in x differenzierbar ist, findet man

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0.$$

Gibt es umgekehrt $b \in \mathbb{R}$ und eine Funktion α mit

$$f(x + h) = f(x) + bh + \alpha(h)h, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0,$$

so folgt für $h \neq 0$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} - b = \alpha(h) \rightarrow 0,$$

und f ist in x differenzierbar mit Ableitung b .

3. Verwendet man statt α die Funktion $R(x + h) = \alpha(h)h$, so findet man nach rückgängig gemachter Variablensubstitution:
 f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es $b \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $R : J \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + b(x - x_0) + R(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

In diesem Fall ist $f'(x_0) = b$.

Beispiel 138. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann ist f differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 139. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Dann ist f in 0 nicht differenzierbar, denn

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1 & \text{für } h > 0 \\ -1 & \text{für } h < 0 \end{cases} .$$

Der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ existiert nicht. Andererseits war diese Funktion auch in 0 stetig. □

Ein Beispiel für eine stetige Funktion, die *nirgends* differenzierbar ist, finden Sie in Barner-Flohr, § 8.1.

Hingegen gilt:

Satz 140. *Differenzierbare Funktionen sind stetig.*

Beweis.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

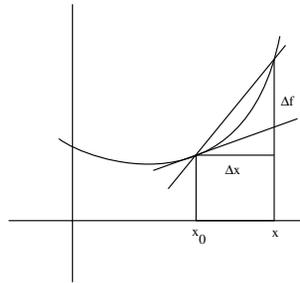
□

Geometrische Interpretation: Die Tangente.

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$. Der Grenzwert $f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen an.

Die **Gleichung der Tangente** durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist also gegeben durch

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



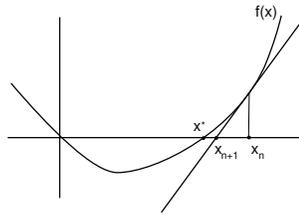
Differenzierbarkeit kann man auch auffassen als die Eigenschaft einer Funktion, eine Tangente an den Graphen zu besitzen. Vergleichen Sie insbesondere das obige (Gegen)beispiel der Funktion $|x|$.

Beispiel 141 (Newtonverfahren). Beim Newtonverfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f beginnt man mit einem Wert x_1 möglichst nah an einer vermuteten Nullstelle. Dann ermittelt man den Schnittpunkt x_2 der Tangente an den Graphen in diesem Punkt mit der x -Achse. Oft ist dies eine bessere Approximation für die Nullstelle. Iteration dieses Verfahrens liefert eine Folge, die unter gewissen, hier nicht diskutierten Voraussetzungen gegen eine Nullstelle x^* von f konvergiert. Die Formel für die Iteration erhält man durch Auflösen der Gleichung

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Es ergibt sich

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Wählt man etwa $f(x) = x^k - b$, so findet man die bekannte Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - b}{kx_n^{k-1}} = x_n \left(1 + \frac{1}{k} \left(\frac{b}{x_n^k} - 1 \right) \right),$$

vgl. Satz 69.

□

Analytische Interpretation: Lineare Approximation. Die einfachsten Funktionen (nach den Konstanten) sind sicherlich die linearen Funktionen $a + bx$ mit konstanten a, b . Die Tangente ist der Graph einer solchen Funktion und die Umformulierung 3 der Differenzierbarkeitsdefinition liefert:

Eine Funktion ist an der Stelle x differenzierbar genau dann, wenn sie sich dort durch eine lineare Funktion approximieren läßt, so dass der Fehler schneller als linear verschwindet:

$$f(x+h) = f(x) + bh + R(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

Alternativ: Eine Funktion ist an der Stelle x_0 differenzierbar genau dann, wenn sie sich dort durch eine lineare Funktion approximieren läßt, so dass der Fehler schneller als linear verschwindet:

$$f(x) = f(x_0) + b(x - x_0) + R(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Physikalische Interpretation: Die Geschwindigkeit. Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit v , so legt er in der Zeit Δt die Strecke

$$\Delta s = v \Delta t$$

zurück. Umgekehrt kann man aus der Strecken- und Zeitdifferenz die Geschwindigkeit ermitteln:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Bewegt sich der Punkt mit variabler Geschwindigkeit, und hat er zur Zeit t die Strecke $s(t)$ zurückgelegt, so kann man annehmen, dass wenigstens im *kleinen* Zeitabschnitt von t bis $t + \Delta t$ die Geschwindigkeit $v(t)$ annähernd konstant ist, also

$$v(t) \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} := \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Durch Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man die *Momentangeschwindigkeit* $v(t)$ zur Zeit t :

$$v(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Satz 142 (Rechenregeln für die Ableitung). Seien $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in J$ und sei $c \in \mathbb{R}$.

Dann sind auch die Funktionen $f + g, cf, fg : J \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar.

Hat g keine Nullstellen in J so ist auch $f/g : J \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar.

In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}(f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\ (cf)'(x) &= cf'(x), \\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

Beweis. Nicht schwer. □

Beispiel 143. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Dazu kann man die Quotientenregel benutzen:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

□

Satz 144 (Kettenregel). Seien $g : \mathbb{R} \supset I \rightarrow J$ in $x \in I$ und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ in $g(x)$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ in x differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Beweis. Wir setzen $y := g(x)$. Es sei

$$g(x + \Delta x) = g(x) + g'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$f(y + \Delta y) = f(y) + f'(y)\Delta y + \beta(\Delta y)\Delta y, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \beta(\Delta y) = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}f(g(x + \Delta x)) &= f(g(x) + \underbrace{g'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x}_{=: \Delta y}) \\ &= f(g(x)) + f'(y)\Delta y + \beta(\Delta y)\Delta y \\ &= f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)\Delta x \\ &\quad + \underbrace{[f'(y)\alpha(\Delta x) + \beta(g'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x)(g'(x) + \alpha(\Delta x))]}_{=: \gamma(\Delta x)} \Delta x.\end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma(\Delta x) = 0,$$

und daraus folgt die Behauptung. \square

Beispiel 145 (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei $f : J \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar und umkehrbar mit der differenzierbaren Umkehrfunktion $g = f^{-1} : I \rightarrow J$. Aus

$$x = f(g(x))$$

folgt dann durch Differentiation und Anwendung der Kettenregel:

$$1 = f'(g(x))g'(x),$$

also

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

\square

In diesem Beispiel folgt $f'(y) \neq 0$, weil $f'(y)g'(f(y)) = 1 \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass diese Bedingung umgekehrt auch hinreichend für die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion ist.

Satz 146 (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall J streng monoton und stetig. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(J) \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $f(J)$. Sei f differenzierbar in $x_0 \in J$ und

$$f'(x_0) \neq 0.$$

Dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (40)$$

Beweis. Wir schreiben $g := f^{-1}$. Dann gilt für $y \neq y_0 \in f(J)$

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(x_0)}{g(y) - x_0}}. \quad (41)$$

Weil f in x_0 differenzierbar ist, ist die Funktion

$$\phi(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 . Weil g nach Satz 127 in y_0 stetig und $g(y_0) = x_0$ ist, folgt

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(g(y)) = \phi(x_0) = f'(x_0). \quad (42)$$

Weil $f'(x_0) \neq 0$, folgt aus (41) und (42) die Behauptung. \square

Beispiel 147. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist differenzierbar und umkehrbar, aber $f'(0) = 0$. Die Umkehrfunktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist in 0 nicht differenzierbar. Das ist anschaulich klar, weil die Tangente an den Graphen Steigung $= \infty$ hat. Wie sieht ein exakter Beweis

dafür aus? In allen $x \neq 0$ ist die dritte Wurzel nach dem Satz aber differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$(\sqrt[3]{})'(x^3) = \frac{1}{3x^2} = \frac{x}{3x^3}$$

und daher

$$(\sqrt[3]{})'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x} \left(= \frac{1}{3}x^{2/3} \right).$$

□

Beispiel 148. Die Funktion $f : \mathbb{R} \supset J \rightarrow]0, \infty[$ sei differenzierbar mit $f' = f$. Dann ist $f' > 0$ und, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, f streng monoton wachsend. Es besitzt also eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : f(J) \rightarrow \mathbb{R}$. Für diese gilt

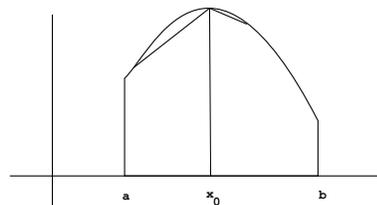
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}.$$

□

7.2 Der Mittelwertsatz

Wir kommen nun zum wichtigsten Satz der Differentialrechnung, dem Mittelwertsatz. Zur Vorbereitung stellen wir fest:

Wenn die Funktion $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt x_0 ihres Definitionsbereiches ihr Maximum annimmt, dann haben die Sekanten links davon eine Steigung ≥ 0 und die Sekanten rechts davon eine Steigung ≤ 0 .



Ist f in x_0 differenzierbar, so ist die Ableitung $f'(x_0)$ als Grenzwert der Sekantensteigungen einerseits ≥ 0 , andererseits aber ≤ 0 und deshalb $= 0$.

Satz 149 (Notwendiges Extremwertkriterium). *Nimmt die Funktion $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Maximum (oder Minimum) in einem inneren Punkt x_0 des Intervalls J an, und ist sie dort differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.*

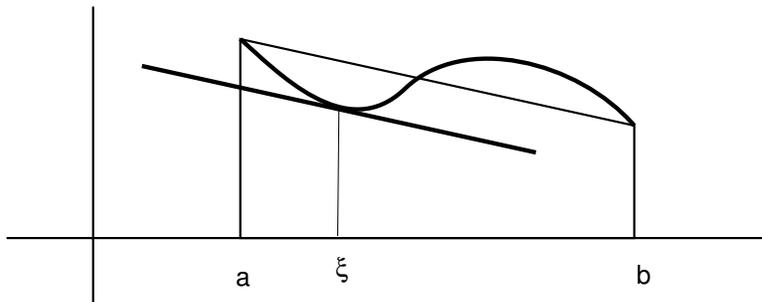
In Randpunkten muss das natürlich nicht so sein. Ist $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so sind die einzigen Stellen, die für Extremwerte von f in Frage kommen die Endpunkte a, b und die Punkte, wo die Ableitung $f'(x)$ verschwindet. Typischerweise sind das endlich viele Punkte, und man kann dann nachrechnen, wo f am größten bzw. kleinsten ist. Das ist dann wirklich das Maximum oder Minimum, weil f stetig auf einem kompakten Intervall ist.

Nun zum angekündigten

Satz 150 (Mittelwertsatz, Lagrange 1797). *Sei $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad (43)$$

Anschaulich bedeutet das, dass es irgendwo eine Tangente gibt, die parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist:



Beweis. Die Sekante ist der Graph von

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Wenn man die Parallelen zur Sekante betrachtet, erkennt man, dass ξ ein guter Kandidat ist, wenn $(\xi, f(\xi))$ am weitesten von der Sekante entfernt ist. Der Abstand eines Punktes von der Sekante (versehen mit Vorzeichen) ist aber proportional zu seiner Höhe über der Sekante. Deshalb suchen wir nach einem Extremwert von $h(x) = f(x) - s(x)$ im Inneren $]a, b[$ des Intervalls. Für die entsprechende Stelle ξ ist dann

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

und wir sind fertig.

Weil h stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist, nimmt es sein Maximum und Minimum an. Sind beide gleich, so ist h konstant und $h'(\xi) = 0$ für alle ξ .

Andernfalls wird wegen $h(a) = h(b)$ wenigstens eines der beiden in einem inneren Punkt ξ angenommen, und wir sind auch fertig. \square

Warum ist der Mittelwertsatz wichtig? Zunächst sagt der Mittelwertsatz nichts darüber aus, wo ξ eigentlich liegt. Vielleicht gibt es ja auch mehrere solche Stellen, vgl. Abbildung. Die wichtigen Anwendungen des Mittelwertsatzes „laufen andersherum“: Sie betreffen Situationen, wo man das Verhalten der Ableitung (überall!) sehr gut kennt, und daraus Schlüsse auf die Funktion zieht.

Der Mittelwertsatz ist die Brücke von Ableitungsinformationen zu Informationen über die Funktion selbst.

Satz 151 (Schränkensatz). Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar und sind $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in]a, b[$, so ist

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Beweis. Es gibt ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

und daraus folgt wegen $b - a > 0$ und $m \leq f'(\xi) \leq M$ die Behauptung. \square

Wichtig ist, dass man den Mittelwertsatz natürlich auch auf jedes Teilintervall $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ anwenden kann, wie im Beweis des folgenden Satzes:

Satz 152 (Monotoniekriterium). Sei $f : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J und differenzierbar mit $f'(x) > 0$ in allen inneren Punkten x von J . Dann ist f streng monoton steigend (wachsend):

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Hat man nur $f'(x) \geq 0$, so folgt die schwache Monotonie: $f(x_1) \leq f(x_2)$. Entsprechendes gilt für $f' < 0$ bzw. $f' \leq 0$.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in J$ mit $x_1 < x_2$. Dann ist nach dem Mittelwertsatz für ein ξ zwischen x_1 und x_2

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0,$$

also $f(x_1) < f(x_2)$. Entsprechend für die anderen Fälle. □

Eine ganz wichtige Konsequenz des Mittelwertsatzes kombiniert die Monotonieaussagen: Funktionen, die gleichzeitig monoton wachsen und fallen, sind konstant.

Satz 153 (Konstanzkriterium). *Ist $f : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J und differenzierbar mit $f' = 0$ im Inneren von J , so ist f konstant auf J .*

Beachten Sie: Aus der Definition der Ableitung folgt trivial, dass konstante Funktionen die Ableitung 0 haben. Hier wird aber die *Umkehrung* behauptet und aus dem Mittelwertsatz bewiesen. Es ist eben nicht so klar, dass alle Sekanten die Steigung null haben, wenn die *Grenzwerte* der Sekantensteigungen alle null sind. Wenn der Grenzwert einer Folge null ist, können die Folgenglieder ja durchaus positiv sein!

Haben zwei differenzierbare Funktionen auf einem Intervall dieselbe Ableitung, so unterscheiden sie sich nur um eine additive Konstante. Dies ist eine oft benutzte Umformulierung des Konstanzkriteriums.

7.3 Exponentialfunktion, Logarithmus und Potenzen

Exponentialfunktion

Viele Wachstums- und Zerfallsprozesse folgen –wenigstens über gewisse Stadien hin– dem Gesetz, dass das Wachstum, also die zeitliche Änderung $f'(t)$ proportional zur vorhandenen Menge f ist:

$$f' = af \tag{44}$$

mit einer Konstanten a , deren Vorzeichen über Wachstum bzw. Abnahme entscheidet. Dieses Gesetz findet man von der Zinseszinsrechnung über den radioaktiven Zerfall, den Wärmeausgleich zwischen Medien verschiedener Temperatur, die Kinematik von Bremsvorgängen, chemische oder elektrostatische Sättigungsvorgänge etc. bis hin zur Populationsdynamik oder Modellen für die Ausbreitung von Seuchen.

Die Gleichung (44) ist eine sogenannte *Differentialgleichung* für eine gesuchte Funktion f , die in der Theorie der Differentialgleichungen auch gern mit y bezeichnet wird. Wir wollen den Spezialfall $a = 1$ betrachten, also die Gleichung

$$y' = y.$$

Ist y eine Lösung, so auch jedes Vielfache von y . Wir fordern deshalb zusätzlich eine Normierung, nämlich $y(0) = 1$.

Satz 154 (und Definition: Exponentialfunktion). *Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$y' = y, \quad y(0) = 1. \tag{45}$$

Diese Funktion heißt die Exponentialfunktion. Sie wird mit $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder auch mit $x \mapsto e^x$ bezeichnet.

Beweis. 1. Existenz: Für $k \geq 1$ gilt $\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$. Setzt man nun $y_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, so ist also $y_n(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$ und $y'_n = y_{n-1}$. Man kann zeigen, dass

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

gilt, genauer, dass $y(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ eine differenzierbare Funktion mit den gewünschten Eigenschaften liefert. Der Beweis ist ad hoc mühsam, und wir geben ihn später in einem natürlicheren Zusammenhang, vgl. Abschnitt 10.6. Einen anderen Beweis geben wir in Beispiel 217. Es ist aber logisch kein Problem, wenn wir im weiteren Gang der Vorlesung die Existenz einfach als gegeben hinnehmen: Wir werden die Exponentialfunktion bei der Entwicklung der Differential- und Integralrechnung nur als Beispiel, nicht als konstituierendes Element benötigen und benutzen.

2. Einzigkeit: Dazu zeigen wir zunächst folgendes

Lemma 155. *Sind $y_1, y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die (45) erfüllen, so gilt*

$$y_1(x)y_2(-x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

Insbesondere hat keine der beiden Funktionen eine Nullstelle.

Das ist klar für $x = 0$. Außerdem gilt für die Funktion

$$g : x \mapsto y_1(x)y_2(-x),$$

dass

$$g'(x) = y_1'(x)y_2(-x) + y_1(x)y_2'(-x)(-1) = y_1(x)y_2(-x) - y_1(x)y_2(-x) = 0.$$

Also ist g konstant und das Lemma bewiesen.

Nun zum Beweis der Einzigkeit. Wenden wir das Lemma an auf $y_1 = y_2 = y$, so folgt $y(x) \neq 0$ für alle x und

$$y(-x) = \frac{1}{y(x)}. \quad (47)$$

Wenden wir nun das Lemma an auf zwei Lösungen y_1, y_2 , so folgt

$$y_1(x) \stackrel{(46)}{=} \frac{1}{y_2(-x)} \stackrel{(47)}{=} y_2(x).$$

Also sind je zwei Lösungen von (45) gleich. □

Wir wollen nun die wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunktion aus der definierenden Differentialgleichung herleiten.

Trivialerweise ist

$$\begin{aligned} \exp' &= \exp, \\ \exp 0 &= 1. \end{aligned}$$

dem vorstehenden Beweis folgt

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Und weil \exp differenzierbar, also stetig auf \mathbb{R} ist und keine Nullstellen hat, folgt aus $\exp 0 = 1 > 0$ und dem Zwischenwertsatz

$$\exp > 0.$$

Dann ist aber auch $\exp' = \exp > 0$, d.h.

\exp ist streng monoton wachsend.

Aus dem Schrankensatz 151 folgt für $x > 0$

$$\exp(x) - \exp(0) \geq x \inf_{\xi > 0} \exp'(\xi) = x \exp(0) = x$$

und daraus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp x} = 0.$$

Noch einmal bemühen wir den Zwischenwertsatz und erhalten

$$\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[.$$

Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist eine Bijektion.

Eine weitere sehr wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion formulieren wir als

Satz 156 (Additionstheorem der Exponentialfunktion). *Es gilt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*

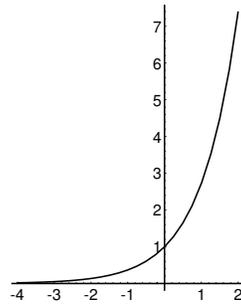
$$\exp(x_1 + x_2) = (\exp x_1)(\exp x_2).$$

Beweis. Geht nach dem nun schon langweilig werdenden Muster: Betrachte die Funktion

$$g(x) := \exp(x_1 + x) \exp(-x).$$

Rechne nach, dass $g'(x) = 0$, also $g(x) = g(0) = \exp x_1$. Mit $\exp(-x) = 1/\exp x$ folgt die Behauptung. \square

Graph. Damit haben wir wesentliche qualitative Charakteristika der Exponentialfunktion bewiesen. Wie man *quantitative* Informationen über $\exp x$ bekommt, erfahren Sie im Abschnitt über die Taylorapproximation 8.2. Mit den dort erarbeiteten Methoden kann man Funktionswerte von \exp berechnen und findet für den Graphen folgendes Bild:



Logarithmus

Definition 157 (Logarithmus). Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist eine Bijektion. Die Umkehrfunktion heißt der (*natürliche*) *Logarithmus*

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}.$$

Statt \ln finden Sie auch \log .

Die Logarithmusfunktion ist wieder streng monoton und nach Satz 146 differenzierbar. Nach Beispiel 148 gilt

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0.$$

Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion folgen weitere Eigenschaften des Logarithmus, zum Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$$

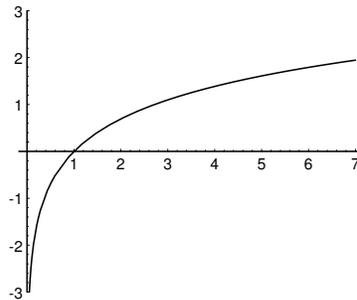
und die fundamentale Gleichung

Satz 158.

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Die letztere Gleichung (Reduktion der Multiplikation auf die Addition) hat den Logarithmen vor der Erfindung elektronischer Rechenmaschinen eine prominente Bedeutung bei allen schwierigeren praktischen Rechenaufgaben (z.B. in der Astronomie oder Navigation) verschafft.

Den Graphen der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.



Allgemeine Potenz

Definition 159 (Allgemeine Potenzen). Wir definieren a^x (“ a hoch x ”) für reelles $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ durch

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Satz 160 (Rechenregeln für die allgemeine Potenz). Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y \\ (ab)^x &= a^x b^x, \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \\ (a^x)^y &= a^{xy}, \\ a^0 &= 1. \end{aligned}$$

Beweis. Ergibt sich sofort aus den Regeln für \exp und \ln . □

Bemerkung. Aus dem Satz folgt durch vollständige Induktion für natürliches n :

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n.$$

Das heißt, die Definition von a^x stimmt für natürliches n mit der alten Definition überein.

Weiter ergibt sich aus dem obigen Satz

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a.$$

Also ist $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Definieren wir schließlich die Eulersche Zahl e durch

$$e = \exp 1$$

so folgt

$$e^x = \exp(x \ln \exp 1) = \exp x.$$

Als Komposition differenzierbarer Funktionen sind die Funktionen

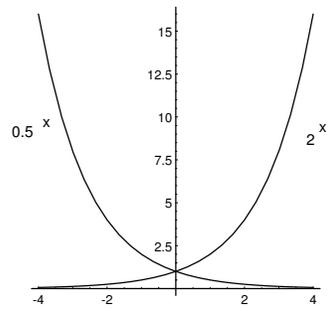
$$x \mapsto a^x$$

und

$$x \mapsto x^b$$

differenzierbare Funktionen auf ihrem Definitionsbereich. Nach der Kettenregel ist

$$(a^x)' = \ln a \exp(x \ln a) = (\ln a)a^x.$$



Die Graphen der Funktionen in diesem Abschnitt sind mit Mathematica erzeugt. Der Befehl für die vorstehende Figur lautet

```
Plot[{0.5^x,2^x}, {x,-4,4},AspectRatio->1/1]
```

7.4 Hyperbelfunktionen, Areafunktionen

Die *Hyperbelfunktionen* sind gegeben durch

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Sie heißen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus*. Für sie gilt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

denn

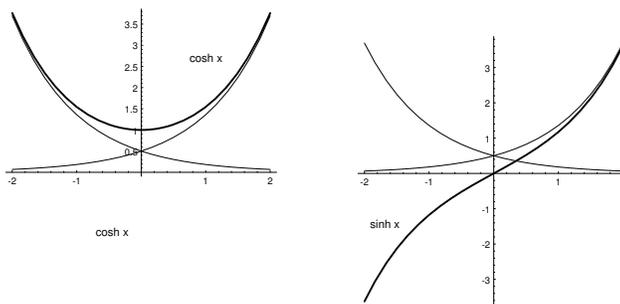
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4} ((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2) = 1.$$

Das bedeutet aber, dass der Punkt $(\cosh x, \sinh x)$ auf der Einheitshyperbel

$$\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\} \tag{48}$$

liegt, daher der Name.

Hier sind die Graphen der beiden Funktionen mit den Graphen von $\frac{1}{2}e^{\pm x}$ zum Vergleich:



Auch für die Hyperbelfunktionen gibt es eine Menge Identitäten (wie Additionstheoreme u.a.), auf die wir hier aber nicht eingehen wollen.

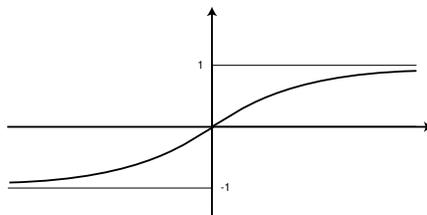
Offenbar sind diese Funktionen differenzierbar und es gilt

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh.$$

Man definiert die *hyperbolischen Cotangens- und Tangensfunktionen* durch

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Der *Tangens hyperbolicus* bildet die reelle Achse bijektiv auf das Intervall $] -1, +1[$ ab.



Für die Ableitung gilt

$$\tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2.$$

Beispiel 161. [Ein Beispiel aus der Mechanik] In diesem Beispiel greifen wir ein wenig vor: Auf höhere Ableitungen und auf die Theorie der Differentialgleichungen.

Frei hängende Seile oder Ketten (etwa Hochspannungsleitungen) haben eine ganz charakteristische Form.² Anhand der auftretenden Kräfte eines solchen statischen Systems leitet man in der Mechanik dafür die Differentialgleichung

$$y'' = c\sqrt{1 + (y')^2}$$

her. Weil $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ liefert $y(x) = \cosh x$ im Falle $c = 1$ eine Lösung, und mit etwas Probieren findet man $y(x) = \frac{1}{c} \cosh(cx)$ für den Fall von beliebigem $c > 0$. In der Theorie der Differentialgleichungen lernen Sie, dass die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zwei beliebige Parameter enthalten muss. Weil nur y' und y'' vorkommen, ist $y(x) + h$ für beliebiges h natürlich auch eine Lösung; die Form der Kette ist unabhängig davon, wie hoch man sie aufhängt. Und natürlich kann man sie nach rechts oder links verschieben, d.h. $y(x - x_0)$ ist auch eine Lösung. Die sogenannte *Kettenlinie* ist daher gegeben durch die Funktion

$$y(x) = \frac{1}{c} \cosh(c(x - x_0)) + h.$$

□

Areafunktionen. Die Funktionen \sinh und \tanh sind injektiv und besitzen daher globale Umkehrfunktionen. Diese werden *Area sinus hyperbolicus* bzw. *Area tangens hyperbolicus* genannt und so bezeichnet:

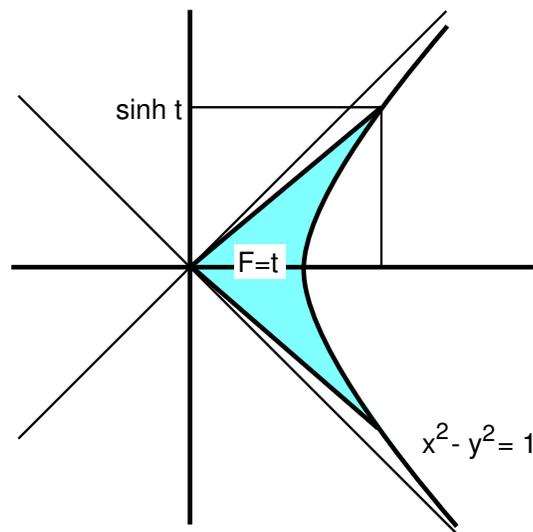
$$\sinh^{-1} = \operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tanh^{-1} = \operatorname{Artanh} :]-1, +1[\rightarrow \mathbb{R}.$$

Den Beweis des folgenden Lemmas kann der Leser leicht selbst machen:

Lemma 162. *Es gilt*

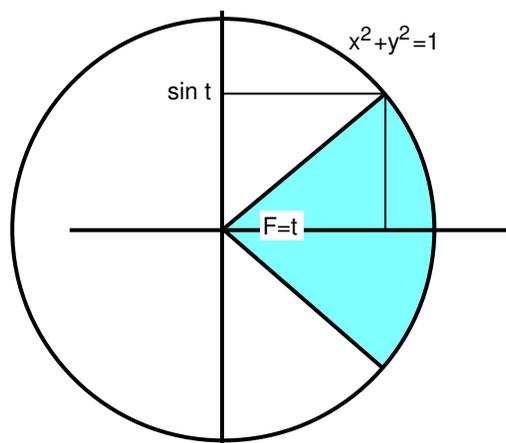
$$\operatorname{Arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{Artanh} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Der Name *Area-Funktionen* rührt daher, dass man die Werte als Flächeninhalt an der Hyperbel interpretieren kann:



²Galilei hatte behauptet, die Form einer hängenden Kette sei eine Parabel. Christian Huygens hat das im zarten Alter von 16 Jahren widerlegt, aber erst Leibniz und Johann Bernoulli fanden die richtige Differentialgleichung und deren Lösung.

Es sei angemerkt, dass man eine ganz analoge Interpretation für die inversen trigonometrischen Funktionen geben kann:



7.5 Die Regel von Bernoulli - de L'Hospital

Lemma 163 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Es gelte $g'(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in]a, b[$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Wäre $g(a) = g(b)$, so gäbe es nach dem Mittelwertsatz dazwischen eine Nullstelle von g' im Widerspruch zur Voraussetzung. Definiere

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t).$$

Dann ist $h(a) = h(b)$, also $h'(\xi) = 0$ für ein $\xi \in]a, b[$, und daraus folgt die Behauptung. \square

Satz 164 (Johann Bernoulli, G. de L'Hospital). Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$p \in J \cup \{\inf J, \sup J\},$$

und seien $f, g : J \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gelte

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0 \quad (49)$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) \in \{-\infty, \infty\}. \quad (50)$$

Weiter sei $g'(x) \neq 0$ für alle³ $x \in J \setminus \{p\}$, und es existiere

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}. \quad (51)$$

Dann existiert auch

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (52)$$

und hat den Wert A .

Falls $p \in \mathbb{R}$ und (49) gilt, kann man $f(p) := 0 =: g(p)$ setzen und erhält in p stetige Funktionen. Nach dem Lemma ist dann für ein ξ zwischen x und p

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Daraus folgt mit $x \rightarrow p$ der Satz in diesem Fall. Der folgende Beweis ist etwas komplizierter, schließt dafür aber alle Fälle ein.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $p = \inf J$. Der Fall $p = \sup J$ geht analog. Wenn aber p ein innerer Punkt von J ist, wendet man diese Fälle auf $J \cap]p, +\infty[$ und $J \cap]-\infty, p[$ an und benutzt Lemma 111 über Grenzwert und einseitige Grenzwerte.

Zwischen zwei Nullstellen von g in einem Intervall aus $J \setminus \{p\}$ läge nach dem Mittelwertsatz eine Nullstelle von g' im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es in jeder Komponente

³Weil es um den Grenzwert für $x \rightarrow p$ geht, genügt es stattdessen, wenn p kein Häufungspunkt von Nullstellen von g' ist.

von $J \setminus \{p\}$ höchstens eine Nullstelle von g in $J \setminus \{p\}$. Wir können daher nach eventueller Verkleinerung von J o.E. annehmen, dass

$$g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in J \setminus \{p\}. \quad (53)$$

Es genügt nun, folgendes zu zeigen:

$$\begin{aligned} \forall a < A \quad \exists q \in J, p < q \quad \forall x \in]p, q[\quad a \leq \frac{f(x)}{g(x)}, \\ \forall b > A \quad \exists q \in J, p < q \quad \forall x \in]p, q[\quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq b. \end{aligned}$$

(Falls z.B. $A = +\infty$, gibt es kein $b > A$ und wir brauchen nichts zu zeigen. Falls $A \in \mathbb{R}$ stellen Sie sich vor, es sei $a = A - \epsilon$ und $b = A + \epsilon$.)

Wir beweisen nur die zweite Behauptung, die erste geht genauso. Sei also $b > A$. Nach Voraussetzung gibt es $\tilde{q} \in J$, $p < \tilde{q}$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < b \quad \text{für alle } \xi \in]p, \tilde{q}[.$$

Nach dem Lemma 163 folgt daraus für alle $x, y \in]p, \tilde{q}[$, $x \neq y$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < b.$$

1. Fall: $\lim f(y) = \lim g(y) = 0$ für $y \searrow p$. Setzt man dann $q = \tilde{q}$, so gilt für alle $x \in]p, q[$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \searrow p} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \leq b.$$

Beachte, dass $g(x) \neq 0$ nach (53).

2. Fall: $\lim g(x) \in \{+\infty, -\infty\}$. Sei $p < y < \tilde{q}$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $\tilde{q} \in]p, \tilde{q}[$, so dass für alle $x \in]p, \tilde{q}[$

$$1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0.$$

Dann gilt für solche x

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \\ &< b \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Für $x \searrow p$ geht die rechte Seite gegen b . Also gibt es $q \in]p, \tilde{q}[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq b \quad \text{für alle } x \in]p, q[.$$

□

Beispiel 165. Gesucht ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$. Die Voraussetzungen sind erfüllt, insbesondere hat die Ableitung des Nenners keine Nullstellen. Der Grenzwert für den Quotienten der Ableitungen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

existiert, also gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

□

Beispiel 166. Wir wollen zeigen, dass für $a > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{k}\right)^k = \exp(a).$$

Nun ist

$$\left(1 + \frac{a}{k}\right)^k = \exp\left(k \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right)\right),$$

und weil \exp stetig ist, müssen wir nur zeigen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right) = a.$$

Dazu ersetzen wir $\frac{1}{k}$ durch die kontinuierliche Variable x und betrachten

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(1 + xa)}{x}.$$

Nach der Regel von Bernoulli-de L'Hospital ist das

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{1+xa} a}{1} = a$$

und wir sind fertig.

□

Beispiel 167. Was ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k}$?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{k} \ln k\right) = \exp\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k}\right) \stackrel{\text{Beispiel 165}}{=} \exp 0 = 1.$$

□

Beispiel 168. Für $f(x) = x^2, g(x) = 1 + x^4$ ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2} = +\infty.$$

Was halten Sie davon?

□

7.6 Die Stetigkeit der Ableitung

Es ist nicht so einfach, ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion zu finden, deren Ableitung unstetig ist. Hier ist eines, das allerdings auf die trigonometrischen Funktionen vorgeift.

Beispiel 169 (Eine Funktion mit unstetiger Ableitung). Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

ist differenzierbar. Das ist klar für $x \neq 0$. Und in 0 findet man

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos \frac{1}{h} = 0.$$

Die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist in 0 nicht stetig, vgl. Beispiel 121. □

Der Grund, warum man keine wesentlich einfacheren Beispiele findet, ist der folgende

Satz 170 (Zwischenwertsatz für die Ableitung: Satz von Dini). Sei $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall J . Dann ist $f'(J)$ ein Intervall.

Die Sprungfunktion mit $g(0) = 0$ und $g(x) := \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ ist also zum Beispiel *nicht* die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Seien $a, b \in J$ mit $f'(a) < f'(b)$, und sei

$$f'(a) < \lambda < f'(b).$$

Wir müssen zeigen, dass es ein $\xi \in J$ mit $f'(\xi) = \lambda$ gibt. Sei $I = [a, b]$, falls $a < b$ und $I = [b, a]$ andernfalls. Wir konstruieren eine stetige Funktion $g : I \rightarrow I$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $g(a) = f'(a)$ und $g(b) = f'(b)$.
- (ii) Für alle $t \in I \setminus \{a, b\}$ ist $g(t)$ ein Differenzenquotient:

$$g(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}$$

mit $\alpha(t), \beta(t) \in I$, $\alpha(t) \neq \beta(t)$.

Dann existiert nach dem *Zwischenwertsatz* ein $\tau \in I \setminus \{a, b\}$ mit

$$\lambda = g(\tau) = \frac{f(\beta(\tau)) - f(\alpha(\tau))}{\beta(\tau) - \alpha(\tau)}.$$

Und nach dem *Mittelwertsatz* existiert ein ξ zwischen $\alpha(\tau)$ und $\beta(\tau)$ mit

$$\frac{f(\beta(\tau)) - f(\alpha(\tau))}{\beta(\tau) - \alpha(\tau)} = f'(\xi).$$

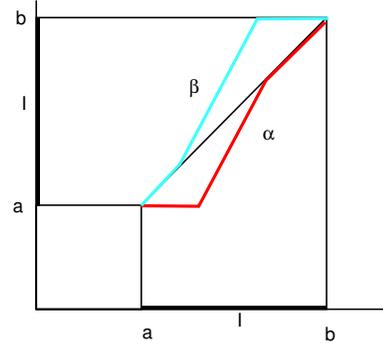
Damit ist der Satz dann bewiesen. Es bleibt die Konstruktion von g .
Wir setzen

$$g(a) := f'(a), \quad g(b) := f'(b)$$

und für $t \in I \setminus \{a, b\}$

$$g(t) := \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)},$$

wobei $\alpha, \beta : I \rightarrow I$ stetige Funktionen mit den abgebildeten Graphen sein sollen. (In der Abbildung ist $a < b$. Ist $a > b$ so muss man a und b sowie α und β vertauschen.)



Offenbar ist g dann stetig im Inneren von I . Weil aber nach Konstruktion $\alpha(t) = a, \beta(t) = t$ für t nah bei a und $\alpha(t) = t, \beta(t) = b$ für t nah bei b ist, folgt

$$\lim_{t \searrow a} g(t) = \lim_{t \searrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a).$$

Ebenso folgt $\lim_{t \nearrow b} g(t) = f'(b)$. Daher ist g auch stetig in den Endpunkten. □

Definition 171. Eine Funktion f heißt *stetig differenzierbar*, wenn sie differenzierbar und ihre Ableitung f' stetig ist.

Bemerkung. Die gelegentlich zitierte Voraussetzung

„Sei f differenzierbar und stetig!“

dokumentiert vor allem mangelnde Grundkenntnisse. Der Beweis des folgenden Satzes hingegen erfordert deren eine ganze Menge. Den Satz selbst kann man als eine Vertiefung des Konstanzkriteriums ansehen. Seine Verallgemeinerung auf höher-dimensionale Abbildungen, der sogenannte Satz von Sard, ist ein wichtiges Werkzeug in der Differentialtopologie.

Satz 172 (Mini-Sard). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei

$$S := \{x \mid f'(x) = 0\}$$

die Menge der sogenannten kritischen Punkte von f . Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ und Intervalle $J_i, i = 1, \dots, k$, der Längen $|J_i|$, so dass gilt:

$$f(S) \subset \bigcup_{i=1}^k J \text{ und } \sum_{i=1}^k |J_i| < \epsilon.$$

Man sagt: Die Menge $f(S)$ der kritischen Werte ist eine Nullmenge.

Beweis. Sei $L := b - a$ und sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 136 ist $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Also gibt es $\delta > 0$, so dass für alle x, y

$$|x - y| < \delta \implies |f'(x) - f'(y)| < \frac{\epsilon}{3L}.$$

Wähle eine Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

von $[a, b]$, so dass $x_{i+1} - x_i = \frac{L}{n} < \delta$ für alle i .

Ist $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ und $f'(x) = 0$, so gilt $|f'(y)| < \frac{\epsilon}{3L}$ für alle $y \in]x_i, x_{i+1}[$. Nach dem Schrankensatz gilt also für alle $y \in [x_i, x_{i+1}]$

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3L} |y - x| \leq \frac{\epsilon}{3L} \frac{L}{n} = \frac{\epsilon}{3n}$$

Nach dem Zwischenwertsatz ist $f([x_i, x_{i+1}])$ ein Intervall, und nach der vorstehenden Abschätzung ist seine Länge

$$|f([x_i, x_{i+1}])| \leq 2 \frac{\epsilon}{3n}.$$

Seien nun J_1, \dots, J_k diejenigen der Intervalle $f([x_i, x_{i+1}])$, in denen f' eine Nullstelle hat. Dann ist

$$f(S) \subset \bigcup_{i=1}^k J_i,$$

und weil $k \leq n$ und $|J_i| \leq \frac{2\epsilon}{3n}$, ist

$$\sum_{i=1}^k |J_i| \leq k \frac{2\epsilon}{3n} < \epsilon.$$

□

8 Höhere Ableitungen

Wenn nichts anderes gesagt ist, bezeichne J wieder ein Intervall oder eine offene Teilmenge von \mathbb{R} .

8.1 Höhere Ableitungen

Definition 173.

- (i) Die reell- oder komplexwertige Funktion f sei differenzierbar auf J . Dann ist die Ableitung f' wiederum eine Funktion auf J , die differenzierbar sein kann oder auch nicht. Ist sie differenzierbar, so bezeichnet man ihre Ableitung mit f'' und nennt sie die *2. Ableitung* von f . In diesem Fall sagt man f sei *zweimal differenzierbar*. Rekursiv definiert man auf diese Weise k -malige Differenzierbarkeit und die *k -te Ableitung* an der Stelle x

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x)$$

für $k \in \mathbb{N}, k > 0$.

- (ii) Ist f k -mal differenzierbar und $f^{(k)}$ überdies stetig, so nennt man f *k -mal stetig differenzierbar*. Die Menge der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf J bezeichnet man mit

$$C^k(J)$$

oder auch mit $C^k(J, \mathbb{R})$ bzw. $C^k(J, \mathbb{C})$.

- (iii) Die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf J bezeichnet man mit

$$C^\infty(J),$$

und nennt solche Funktionen auch C^∞ -Funktionen.

Beispiel 174. Polynome oder rationale Funktionen sind C^∞ -Funktionen.

□

Beispiel 175. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|^3 = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

ist zweimal stetig differenzierbar: $f \in C^2(\mathbb{R})$. Das ist klar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir untersuchen die Differenzierbarkeit im Punkt 0:

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h^3 - 0}{h} = 0 = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-h^3 - 0}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Also ist f in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$. Insgesamt gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist f' in 0 stetig, aber wir wollen zeigen, dass es dort sogar differenzierbar ist:

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{3h^2 - 0}{h} = 0 = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-3h^2 - 0}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h}.$$

Also ist f in 0 zweimal differenzierbar und $f''(0) = 0$. Wir finden:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{für } x \geq 0 \\ -6x & \text{für } x < 0 \end{cases} = 6|x|.$$

Insbesondere ist f'' stetig in 0. Mit $|x|$ ist auch $f''(x) = 6|x|$ in 0 nicht differenzierbar. Also ist f in 0 nicht dreimal differenzierbar.

□

Beispiel 176 (Wichtig). Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.$$

Zeigen Sie das durch vollständige Induktion über k mit der Regel von Bernoulli-L'Hospital und folgern Sie daraus

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^k} = 0. \quad (54)$$

Zeigen Sie ebenfalls durch vollständige Induktion, dass

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-\frac{1}{x}} \right) = p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \quad (x \neq 0) \quad (55)$$

mit einem Polynom p .

Aus (54) und (55) folgt, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

auf ganz \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar ist. Für $x \neq 0$ ist das klar, und es ist auch klar, dass alle Ableitungen in 0, falls sie existieren, den Wert 0 haben.

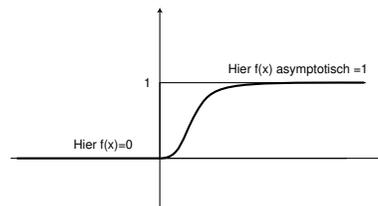
Die Existenz folgt wieder durch Induktion: Existiert $f^{(k)}$ auf ganz \mathbb{R} und ist

$$f^{(k)}(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \text{ für } x > 0,$$

so folgt

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Die Funktion f ist also auf der negativen Halbachse = 0, auf der positiven positiv und sie ist C^∞ -differenzierbar. Wegen dieser Eigenschaften spielt sie in vielen Konstruktionen eine wichtige Rolle. Die aus ihr konstruierten Buckelfunktionen oder Zerlegungen der Eins sind ebenfalls C^∞ , vgl. Abschnitt 4.3.

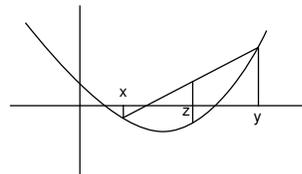


□

Definition 177. Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f *konvex*, wenn für alle $x, y, z \in J$ mit $x < z < y$ gilt

$$f(z) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (z - x). \quad (56)$$

Das bedeutet, dass die Kurve zwischen je zwei Punkten unterhalb der entsprechenden Sekanten liegt.



Satz 178 (Konvexitätskriterium). Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

(i) f konvex $\iff f'$ monoton wachsend.

(ii) Ist f sogar zweimal differenzierbar, so gilt

$$f \text{ konvex} \iff f'' \geq 0.$$

Beweis. Die zweite Behauptung folgt mit dem Monotoniesatz unmittelbar aus der ersten.

(i) \Rightarrow . Für $x < z < y$ aus J folgt aus der Konvexität

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

und daher

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Aber wegen

$$f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (z - x) = f(y) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (z - y)$$

folgt aus (56) auch

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

und damit

$$f'(y) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Daher ist $f'(x) \leq f'(y)$, also ist f' monoton wachsend.

(i) \Leftarrow . Seien $x < z < y$ aus J . Dann gibt es $\xi \in]x, z[$ und $\eta \in]z, y[$ mit

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi) \leq f'(\eta) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z},$$

also

$$(f(z) - f(x))(y - z) \leq (f(y) - f(z))(z - x).$$

Addition von $(f(z) - f(x))(z - x)$ liefert

$$(f(z) - f(x))(y - x) \leq (f(y) - f(x))(z - x),$$

und daraus folgt (56). □

Wir wollen noch eine andere Version der Konvexitätsbedingung (56) herleiten. Für reelle $x \neq y$ lassen sich die Punkte zwischen x und y schreiben in der Form $tx + (1-t)y$ mit $0 < t < 1$ oder, wenn man $p =: \frac{1}{t}$ und $q := \frac{1}{1-t}$ setzt, in der Form

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q}, \quad p, q > 1 \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die rechte Seite von (56) für die Punkte $x < \frac{x}{p} + \frac{y}{q} < y$ bzw. $y < \frac{x}{p} + \frac{y}{q} < x$ ist dann

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - x \right) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \left(\frac{y}{q} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)x \right) \\ &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \frac{y - x}{q} \\ &= f(x) \left(1 - \frac{1}{q} \right) + \frac{f(y)}{q} \\ &= \frac{f(x)}{p} + \frac{f(y)}{q}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

Satz 179. Die Funktion $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall J ist genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in J$ und alle $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$f\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{f(x)}{p} + \frac{f(y)}{q}.$$

Die in der Vorüberlegung gemachte Voraussetzung $x \neq y$ kann man dabei offenbar streichen.

Beispiel 180 (Anwendung der Konvexität: Höldersche Ungleichung). Wir wenden den letzten Satz an auf die konvexe Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Seien $a, b > 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir setzen

$$x = \ln a^p, \quad z = \ln b^q,$$

und erhalten

$$ab = \exp(\ln a + \ln b) = \exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \leq \frac{\exp(\ln a^p)}{p} + \frac{\exp(\ln b^q)}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

also

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}} \tag{57}$$

Mit $p = q = 2$ und $a = \sqrt{A}, b = \sqrt{B}$ folgt die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel:

$$\sqrt{AB} \leq \frac{A + B}{2}. \tag{58}$$

Für eine weitere Folgerung aus (57) seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum |a_k| > 0, \quad \sum |b_k| > 0. \tag{59}$$

Dann ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{|a_i|}{\left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p}} \frac{|b_i|}{\left(\sum |b_k|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|a_i|^p}{\sum |a_k|^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_i|^q}{\sum |b_k|^q}$$

Durch Summation über i erhält man

$$\frac{\sum |a_k b_k|}{(\sum |a_k|^p)^{1/p} (\sum |b_k|^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

oder

$$\boxed{\sum |a_k b_k| \leq \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum |b_k|^q\right)^{1/q}}$$

Das ist die sogenannte *Höldersche Ungleichung*. Sie gilt offenbar auch ohne die Voraussetzung (59). Der Spezialfall $p = q = 2$ liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\boxed{\left|\sum a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum a_k^2} \sqrt{\sum b_k^2}.} \tag{60}$$

□

8.2 Die Taylorapproximation

Vorbemerkung. Sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

ein Polynom vom Grad n . Weil für $0 \leq j \leq k$

$$\frac{d^j}{dx^j} (x - x_0)^k = k(k-1) \dots (k-j+1)(x - x_0)^{k-j},$$

sind diese Ableitungen an der Stelle x_0 alle $= 0$, nur die k -te ist konstant $= k!$. Die höheren Ableitungen ($j > k$) verschwinden wieder alle. Daher folgt für alle $k \in \{0, \dots, n\}$

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k.$$

Man kann die Koeffizienten von f also aus den höheren Ableitungen von f berechnen und findet

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Ist nun f eine *beliebige* genügend oft differenzierbare Funktion, so liefert die rechte Seite ein Polynom, das an der Stelle x_0 bis zur Ordnung n dieselben Ableitungen hat wie f , das sich also vermutlich in der Nähe von x_0 gut an f „anschmiegt“.

Satz 181 (Taylorapproximation). Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in J$ und $n \geq 1$. Sei $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar. Dann gilt:

(i) Für die durch

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) + R(x)$$

definierte Funktion $R : J \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Wir nennen

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

das Taylorpolynom n -ten Grades von f an der Stelle x_0 und R das zugehörige Restglied.

(ii) Ist f sogar $(n+1)$ -mal differenzierbar, so gibt es zu jedem $x \in J \setminus \{x_0\}$ ein ξ zwischen x_0 und x , so dass

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

(Lagrangesche Form des Restglieds.)

Beweis. Zu (i). Wir bezeichnen das Taylorpolynom n -ter Ordnung mit T :

$$T(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Dann gilt

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f(x) - T(x)}{(x-x_0)^n}.$$

Wir zeigen mit der Regel von Bernoulli-de L'Hospital, dass $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ und damit die Behauptung (i).

Beachte zunächst, dass auf $J \setminus \{x_0\}$ die Ableitungen von $(x-x_0)^n$ bis zur n -ten stets $\neq 0$ sind und dass nach Konstruktion

$$T(x_0) = f(x_0), T'(x_0) = f'(x_0), \dots, T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Wir finden

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} - \frac{T^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} \right) \\ &= \frac{1}{n!} \left(f^{(n)}(x_0) - T^{(n)}(x_0) \right) = 0. \end{aligned}$$

(Der letzte Limes existiert, und deshalb nach Bernoulli-L'Hospital auch der davor etc.)

Beachte: Man hätte die obige Reduktion auch fortsetzen können bis $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - T^{(n)}(x)}{n!}$. Aber wir wissen nichts über $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x)$, weil $f^{(n)}$ nicht notwendig stetig ist.

Zu (ii). Wir betrachten die Funktion

$$h(t) = \frac{f(t) - T(t)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} - R(x) \frac{(t-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Weil $T^{(n+1)} = 0$ ist, ist

$$h^{(n+1)}(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} - R(x),$$

und es genügt zu zeigen, dass das zwischen x_0 und x eine Nullstelle ξ besitzt.

Trivialerweise ist $h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0) = 0$. Außerdem ist

$$h(x) = (f(x) - T(x) - R(x)) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Daher gibt es ξ_1 zwischen x_0 und x mit $h'(\xi_1) = 0$.

Daher gibt es ξ_2 zwischen x_0 und ξ_1 mit $h''(\xi_2) = 0$.

Und so weiter ...

Schließlich gibt es $\xi = \xi_{n+1}$ zwischen x_0 und x mit $h^{(n+1)}(\xi) = 0$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Beispiel 182. Wir betrachten den Satz von Taylor für die Exponentialabbildung in $x_0 = 0$. Weil $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$, ist das n -te Taylorpolynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

und das Restglied

$$R_n(x) = \exp(x) - T_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x,$$

Weil die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, ist

$$0 < R_n(x) < \exp(x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{falls } x > 0, \quad (61)$$

und

$$0 < (-1)^{n+1} R_n(x) < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{falls } x < 0. \quad (62)$$

Nach Beispiel 70 gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Will man das Restglied quantitativ abschätzen, so braucht man in der Formel (61) Werte von $\exp(x)$ für $x > 0$, die wir aber noch nicht haben. Immerhin liefert aber die Formel (62) eine solche Abschätzung bei negativem x , insbesondere

$$0 < -R_2(-1) < \frac{1}{3!}.$$

Mit $T_2(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ folgt daraus

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} < \exp(-1) < \frac{1}{2}$$

und für die Reziproken

$$2 < e = \exp(+1) < 3.$$

Für $x > 0$ erhalten wir $\exp(x) = e^x < 3^x$ und damit die Restgliedabschätzung

$$0 < \exp(x) - T_n(x) < 3^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Weil die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ sehr schnell gegen 0 geht, ist das eine gute Methode zur Berechnung der Funktionswerte von \exp und damit auch zur Ermittlung des Graphen.

Für $x = 1$ folgt

$$0 < n!(e - T_n(1)) < \frac{3}{n+1},$$

und diese Ungleichung liefert einen ganz einfachen Beweis für die Irrationalität der Eulerzahl e . Wäre nämlich e rational, also $e = \frac{m}{n}$ mit positiven natürlichen Zahlen m, n , so wäre $n \geq 2$, weil e nicht ganzzahlig ist. Es folgte

$$0 < n!(e - T_n(1)) < \frac{3}{n+1} \leq 1.$$

Aber $n! \frac{m}{n}$ und $n! T_n(1)$ sind ganzzahlig! Das ist ein Widerspruch, und e deshalb irrational. Viel schwieriger ist der Beweis, dass e sogar transzendent, also nicht Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

□

8.3 Lokale Extrema, Diskretisierung

Wir behandeln noch zwei Beispiele für die Anwendungen der Taylorapproximation.

Definition 183 (Lokale und globale Extremwerte). Seien $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und $x_0 \in D$. Teile der folgenden Definition kennen Sie schon:

- (i) f hat in x_0 ein *Maximum*, wenn

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in D.$$

Entsprechend definiert man *Minimum*.

- (ii) f hat in x_0 ein *strenges (oder eigentliches) Maximum*, wenn

$$f(x) < f(x_0) \text{ für alle } x \in D \setminus \{x_0\}.$$

Entsprechend definiert man *strenges Minimum*.

- (iii) f hat in x_0 ein *lokales Maximum*, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f|_{D \cap U_\epsilon(x_0)}$ in x_0 ein Maximum hat.
- (iv) Analog definiert man die Begriffe *lokales Minimum*, *strenges lokales Maximum*, *strenges lokales Minimum*.
- (v) f hat in x_0 ein *lokales Extremum*, wenn es dort ein lokales Maximum oder Minimum hat.
- (vi) Im Kontrast zu lokalen Extrema bezeichnet man das Maximum bzw. Minimum von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ – wenn es denn angenommen wird – auch als das *globale* oder, etwas irreführend, als das *absolute* Maximum bzw. Minimum.

Satz 184 (Lokale Extremwerte). Seien $f : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal differenzierbare Funktion und x_0 ein innerer Punkt von J . Es gelte:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \\ f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- (i) Ist k ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.
- (ii) Ist k gerade, so hat f in x_0 ein strenges lokales Extremum, und zwar ein Maximum, falls $f^{(k)}(x_0) < 0$, und ein Minimum, falls $f^{(k)}(x_0) > 0$.

Beweis. Die Beweisidee ist einfach: In der Nähe von x_0 sieht f ungefähr so aus wie sein Taylorpolynom

$$f(x) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = f(x_0) + C(x - x_0)^k, \quad C \neq 0.$$

Bei ungeradem k wechselt das in x_0 das Vorzeichen, bei geradem k ist es eine nach oben oder unten geöffnete Parabel k -ter Ordnung mit Scheitel in $(x_0, f(x_0))$, je nach Vorzeichen von C also von der k -ten Ableitung. Das Problem ist das Wörtchen “ungefähr”. Wir müssen zeigen, dass der Restterm die vorstehende Argumentation nicht kaputt macht.

Nach Voraussetzung und dem Satz über die Taylorapproximation gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

Also können wir ein $\epsilon > 0$ so wählen, dass

$$U_\epsilon(x_0) \subset J$$

(hier wird benutzt, dass x_0 innerer Punkt von J ist) und

$$\left| \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} \right| < \left| \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \right| \text{ für alle } x \in U_\epsilon^*(x_0),$$

das heißt

$$|R(x)| < \left| \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \right| \text{ für alle } x \in U_\epsilon^*(x_0).$$

Dann ist in $U_\epsilon^*(x_0)$ das Vorzeichen von

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} \right) (x - x_0)^k$$

gleich dem von

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Wir können daher den Restterm “vergessen” und schließen, wie oben erklärt. \square

Die zweite Anwendung der Taylorapproximation behandelt das folgende

Beispiel 185 (Diskretisierung). Aus der Taylorformel folgt, wenn h „klein“ ist,

$$\begin{aligned} f(x+h) &\approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2, \\ f(x-h) &\approx f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2. \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}. \quad (63)$$

Und natürlich hat man

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ und } f'(x) \approx \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}. \quad (64)$$

Viele physikalische Gesetze sind durch Differentialgleichungen gegeben, und viele dieser Differentialgleichungen lassen sich nicht explizit lösen. Ein wichtiges Hilfsmittel zur praktischen Lösung dieses Problems ist die *Diskretisierung* der Differentialgleichung. Die gesuchte Funktion $y(x)$ wird dabei durch eine diskrete Folge von Zahlen y_k ersetzt, die die Funktionswerte an den Stellen

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 1, 2, \dots$$

approximieren sollen. Dabei ist h die sogenannte Diskretisierungskonstante, und man hofft, für sehr kleines h eine gute Approximation $y_k \approx y(x_k)$ zu bekommen.

Um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu diskretisieren, also in eine sogenannte *Differenzgleichung* für die y_k umzuschreiben, benutzt man die Approximationen (64) und (63). Konkret wird aus

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.5$$

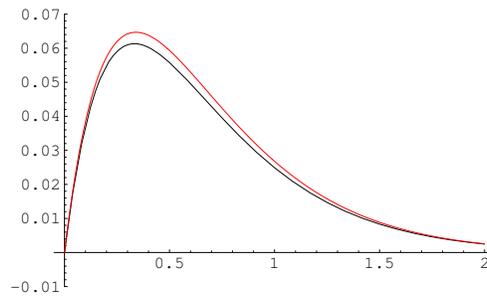
mit $x_0 = 0, x = x_k = kh$ nach Einsetzen

$$\frac{y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k}{h^2} + 6\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 9y_k = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0.5h,$$

letzteres, weil $y'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{y_1}{h} = 0.5$. Nach Auflösen

$$y_{k+1} = (y_k(2 + 6h - 9h^2) - y_{k-1}) / (1 + 6h), \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0.5h.$$

Mathematica liefert für $h = 0.01$ das folgende Bild für die Näherungslösung (rot) im Vergleich mit der – in diesem Fall leicht zu berechnenden – exakten Lösung $y(x) = 0.5x e^{-3x}$:



□

8.4 Trigonometrische Funktionen

Nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz ist Kraft=Masse \times Beschleunigung. Bei einer an einer Feder aufgehängten Masse ist die Kraft (mit einem *negativen* Faktor) proportional zur Auslenkung $y(x)$ aus der Ruhelage, und man erhält die Schwingungsgleichung

$$-ky = my''.$$

Der Schwingungsvorgang ist erfahrungsgemäß eindeutig festgelegt, wenn man zu einer Anfangszeit, etwa $t = 0$, die Anfangsauslenkung $y(0)$ und den Anfangsimpuls $my'(0)$ kennt.

Wir haben also wieder eine Situation wie bei der Exponentialfunktion: eine (physikalisch motivierte) Differentialgleichung, deren Lösungen diesmal Schwingungsvorgänge beschreiben. Wir beschränken uns auf die Normierung $k = m = 1$ und zeigen

Satz 186 (und Definition: Sinus und Cosinus). *Es gibt genau eine zweimal differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1. \quad (65)$$

Diese Funktion heißt Sinus, ihre Ableitung Cosinus.

Bezeichnungen:

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Differentialgleichung in (65) heißt auch die Schwingungsgleichung.

Beweis. 1. Existenz. Das verschieben wir wieder auf die Potenzreihen, vgl. Beispiel 284.

2. Eindeutigkeit. Dazu beweisen wir zunächst ein

Lemma 187. *Gegeben seien zwei Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$y_i'' + y_i = 0,$$

d.h. beide Funktionen erfüllen die Differentialgleichung (65), aber wir fordern die Anfangsbedingungen nur für y_1 :

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1.$$

Mit

$$y_2(0) =: a, \quad y_2'(0) =: b$$

gilt dann

$$y_2 = by_1 + ay_1' \quad (66)$$

Beweis des Lemmas. Wir definieren zwei Funktionen

$$g := y_1'y_2 - y_1y_2',$$

$$h := y_1y_2 + y_1'y_2'.$$

Wir finden mit der Differentialgleichung

$$g' = y_1''y_2 + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_1y_2'' = 0,$$

$$h' = y_1'y_2 + y_1y_2' + y_1''y_2' + y_1'y_2'' = 0.$$

Also sind g und h konstant. Auswerten an der Stelle 0 liefert, dass die Konstanten $g = a$ bzw. $h = b$ sind:

$$\begin{aligned} y_1' y_2 - y_1 y_2' &= a, \\ y_1 y_2 + y_1' y_2' &= b. \end{aligned} \tag{67}$$

Betrachten wir den Fall $y_2 = y_1$, so folgt aus der zweiten Gleichung

$$y_1(x)^2 + y_1'(x)^2 = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{68}$$

Multiplizieren wir die beiden Gleichungen von (67) mit y_1' bzw. y_1 und addieren sie, so folgt (66). \square

Die Eindeutigkeit folgt nun sofort: Erfüllt auch y_2 die Anfangsbedingungen, so ist also $a = 0, b = 1$ und $y_2 = y_1$. \square

Wie bei der Exponentialfunktion wollen wir nun die wesentlichen Eigenschaften der Lösung der Differentialgleichung, also der Sinusfunktion, und ihrer Ableitung herleiten.

Aus (68) folgt die „Kreisbeziehung“

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere liegen die Werte von Sinus und Cosinus im Intervall $[-1, +1]$.

Klar ist, dass der Sinus und damit der Cosinus beliebig oft differenzierbar sind. Man hat

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = \sin'' = -\sin.$$

Auch der Cosinus löst die Schwingungsgleichung, allerdings mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Wir wenden das Lemma noch auf zwei Funktionen y_2 an:

1. Die Funktion $y_2(x) = \sin(-x)$ löst die Schwingungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $a = 0, b = -1$. Das Lemma liefert

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Differentiation liefert daraus

$$\cos(-x) = \cos x.$$

2. Anwendung auf $y_2 := \sin(x_1 + x)$ liefert das Additionstheorem

$$\sin(x_1 + x) = \cos x_1 \sin x + \sin x_1 \cos x$$

und durch Differentiation

$$\cos(x_1 + x) = \cos x_1 \cos x - \sin x_1 \sin x.$$

Definition 188. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn

$$f(-t) = -f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Sie heißt *gerade*, wenn

$$f(-t) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Der Sinus ist also eine ungerade, der Cosinus eine gerade Funktion. Beachten Sie, dass Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im allgemeinen weder gerade noch ungerade sind.

Periodizität. Als nächstes wollen wir zeigen, dass Sinus und Cosinus 2π -periodische Funktionen sind. Um das überhaupt formulieren zu können, müssen wir zunächst die Zahl π definieren.

Satz 189 (und Definition: Die Zahl π). Die Menge

$$\{x \mid x > 0 \text{ und } \cos x = 0\}$$

ist nicht leer und besitzt ein kleinstes Element ξ . Wir definieren $\pi := 2\xi$. Also haben wir

$$\frac{\pi}{2} \text{ ist die kleinste positive Nullstelle der Funktion } \cos.$$

Beweis. Wir setzen

$$N := \{x \mid x > 0 \text{ und } \cos x = 0\}.$$

Zunächst zeigen wir, dass $N \neq \emptyset$. Wir benutzen dazu den Zwischenwertsatz für die differenzierbare und darum stetige Funktion \cos . Wir wissen schon, dass $\cos 0 > 0$. Also brauchen wir noch eine Stelle, an der der Cosinus negativ ist. Dazu benutzen wir die Taylorapproximation. Die Ableitungen des Cosinus sind

$$\cos^{(0)} = 1, \cos' = -\sin, \cos^{(2)} = -\cos, \cos^{(3)} = \sin, \cos^{(4)} = \cos.$$

Nach dem Satz von Taylor ist also

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{\cos^{(4)} \xi}{4!}x^4$$

Weil $|\cos^{(4)} \xi| = |\cos \xi| \leq 1$ für alle ξ , ist

$$\cos 3 \leq 1 - \frac{3^2}{2} + \frac{3^4}{4!} = -0.125 < 0.$$

Damit ist $N \neq \emptyset$ und $0 \leq \xi := \inf N < 3$. Nach Satz 93 gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in N mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. Weil der Cosinus stetig ist, ist $\cos \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = 0$. Und weil $\cos 0 = 1$, ist $\xi \neq 0$, also $\xi > 0$. \square

Nun zur Periodizität. Auf dem Intervall $]0, \frac{\pi}{2}[$ ist der Cosinus positiv, der Sinus also monoton wachsend und damit ebenfalls positiv. Es folgt

$$\sin \frac{\pi}{2} = +\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2}} = +1.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x, \\ \sin(x + \pi) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x, \end{aligned}$$

und schließlich

$$\sin(x + 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x.$$

Durch Differenzieren finden wir $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Wir merken noch an: Aus $\sin]0, \pi/2[> 0$ folgt wegen $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, dass $\sin]0, \pi[> 0$.

Spezielle Werte. Es gilt

$$0 = \cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - 1.$$

also

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aus den Additionstheoremen folgt

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\ &= \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3). \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = \frac{\pi}{6}$ liefert $4 \cos^2 \frac{\pi}{6} = 3$ oder

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

und daraus

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Mit $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ erhalten wir schließlich folgende spezielle Werte für die Funktionen Sinus und Cosinus:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos x$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$
$\sin x$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$

Dabei ist $..^\circ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{180} \pi$ die *Winkelgradfunktion*.

Wir stellen die gefundenen Eigenschaften von Sinus und Cosinus noch einmal zusammen.

Satz 190 (Eigenschaften von Sinus und Cosinus). Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind 2π -periodisch, und es gilt für alle $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin' x &= \cos x, & \cos' x &= -\sin x \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin(-x) &= -\sin x, & \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos x, & \cos(x + \frac{\pi}{2}) &= -\sin x \\ \sin(x_1 + x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 \\ \cos(x_1 + x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2. \end{aligned}$$

Auf dem Intervall $]0, \pi[$ ist der Sinus positiv, also $\cos|_{[0, \pi]}$ streng monoton fallend.

Berechnung von Funktionswerten, Graphen. Die Werte der Sinus- und Cosinusfunktion lassen sich mit der Taylorformel berechnen. Weil die höheren Ableitungen in 0 periodisch die Werte 0, 1, 0, -1 annehmen, findet man

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + R_{s,n}(x), \\ \cos x &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{c,n}(x), \end{aligned}$$

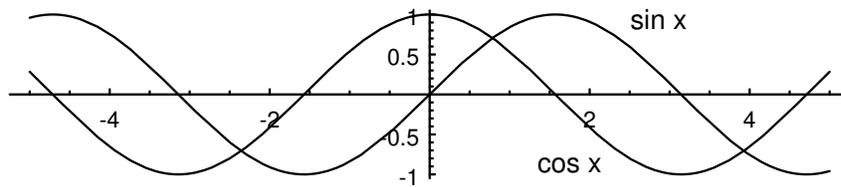
mit

$$|R_{s,n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad |R_{c,n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Natürlich könnte man auch $|R_{s,n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ und eine entsprechende Restgliedabschätzung für den Cosinus angeben. Beachten Sie aber, dass das Taylorpolynom vom Sinus bis $2n+1$ dasselbe ist wie bis $2n+2$, weil $\sin^{(2n+2)} 0 = 0$. Dann liefert aber für große n die angegebene Abschätzung bessere Werte.

Wie bei der Exponentialfunktion sieht man, dass man für festes x durch Wahl hinreichend großer n diese Fehler beliebig klein machen kann. Die Fehlerschranken lassen sich noch verbessern, und für die Berechnung für größeres $|x|$ kann man die Periodizität ausnutzen.

Man erhält folgende Graphen:



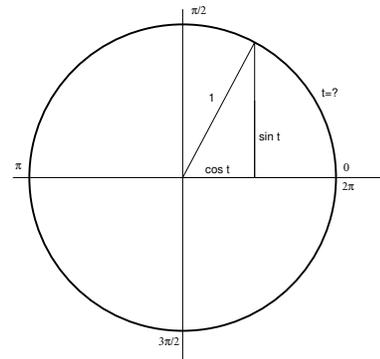
Wir bezeichnen mit

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

den sogenannten *Einheitskreis*, genauer die *Einheitskreislinie*. Nach (68) liegt jeder Punkt $(\cos t, \sin t)$ auf S^1 , und der folgende Satz wird zeigen, dass sich umgekehrt jeder Punkt von S^1 in dieser Form schreiben lässt. Dabei ist t wegen der 2π -Periodizität der Funktionen natürlich nicht eindeutig bestimmt, aber in $[0, 2\pi[$ gibt es genau ein solches t .

Deshalb heißen \cos und \sin auch *Kreisfunktionen*. Die nebenstehende Abbildung erklärt, wie sie mit den Dreiecksverhältnissen zusammenhängen:

$x = \cos t$ und $y = \sin t$ sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Kreisradius 1 als Hypotenuse. Daher kommt der Name *trigonometrische* oder *Kreis-Funktionen*.



Allerdings bleibt es einstweilen offen, ob t wirklich die Länge des Winkelsegments auf dem Kreisbogen ist. Das stimmt, aber wir können es erst im Rahmen der Integralrechnung beweisen. Da man in der „klassischen“ Trigonometrie, etwa in der nautischen Navigation, den Kreis in 360 gleiche Teile geteilt hat, erklärt sich dann auch die Herkunft der Winkelgradfunktion.

Satz 191 (Kreisparametrisierung). Die Abbildung

$$f : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

bildet das Intervall $[0, 2\pi[$ bijektiv auf S^1 ab.

Beweis. Folgern Sie aus Satz 190: Sind $s, t \in [0, 2\pi[$ mit

$$t < s \text{ und } \cos t = \cos s,$$

so folgt

$$0 < t < \pi \text{ und } s = 2\pi - t. \quad (69)$$

Injektivität. Annahme: $0 \leq t < s < 2\pi$ mit $\cos t = \cos s, \sin t = \sin s$. Dann folgt (69) und insbesondere

$$\sin t = \sin s = \sin(2\pi - t) = -\sin t.$$

Dann wäre $\sin t = 0$ im Widerspruch zu $0 < t < \pi$.

Surjektivität. Sei $(x, y) \in S^1$. Ist $x = \pm 1$, so folgt $y = 0$ und $(x, y) = (\cos 0, \sin 0)$ bzw. $(x, y) = (\cos \pi, \sin \pi)$. Ist andererseits $x \in]-1, +1[$, also

$$\cos \pi < x < \cos 0,$$

so gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $t \in]0, \pi[$ mit $\cos t = x$. Dann ist auch

$$s = 2\pi - t \in [0, 2\pi[\text{ und } \cos s = \cos t = x$$

und

$$\sin s = -\sin t.$$

Weil $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$, ist $y = \sin t$ oder $y = -\sin t = \sin s$ und

$$(x, y) = (\cos t, \sin t) \text{ oder } (x, y) = (\cos s, \sin s).$$

□

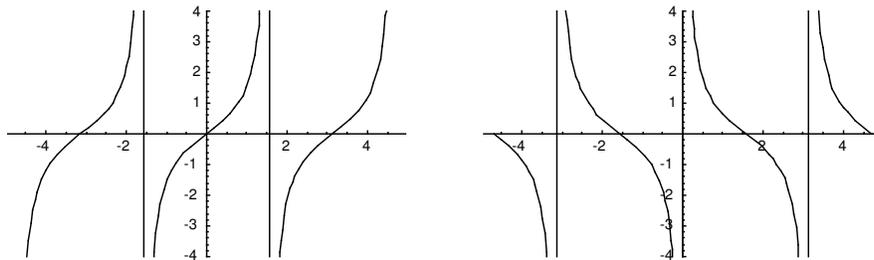
Zum Schluss definieren wir zwei weitere trigonometrische Funktionen:

Tangens und Cotangens. Wir definieren

$$\begin{aligned} \tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x}, & x &\neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \cot x &:= \frac{\cos x}{\sin x}, & x &\neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich differenzierbar und π -periodisch, weil Zähler und Nenner gerade ihr Vorzeichen wechseln, wenn man x durch $x + \pi$ ersetzt. Die Ableitung des Tangens berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} (\tan)'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$



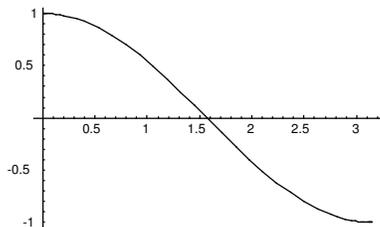
Aus den Rechenregeln für Sinus und Cosinus folgen zum Beispiel leicht die Formeln

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

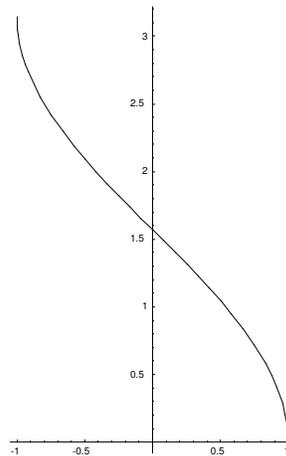
8.5 Arcus-Funktionen

Keine der Funktionen $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$ ist injektiv, sie sind vielmehr „im Gegenteil“ alle periodisch. Aber wir können sie auf Teilintervalle einschränken, wo sie injektiv sind, und dann gibt es zu den so eingeschränkten Funktionen eine Umkehrfunktion. Diese Funktionen nennt man *Arcus-Funktionen* (=Bogenfunktionen), weil sie zu einem gegebenen Wert (z.B. $y = \cos x$) die zugehörige *Bogenlänge* x liefern.

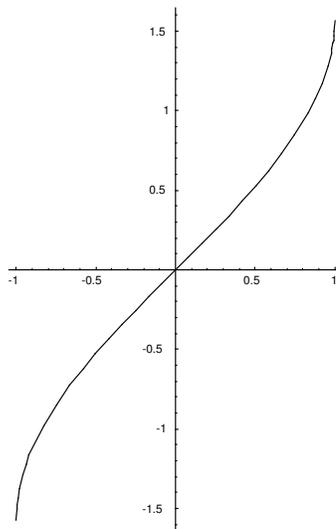
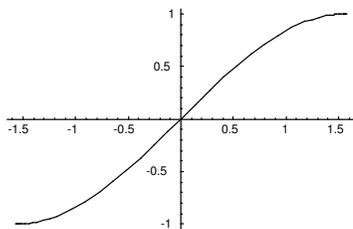
Konkreter: Auf dem Intervall $[0, \pi]$ ist der Cosinus streng monoton fallend und besitzt eine Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, *Arcus cosinus* genannt:



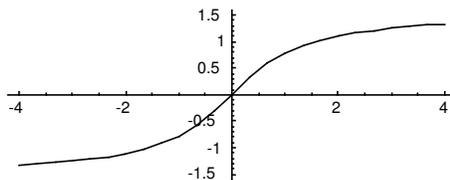
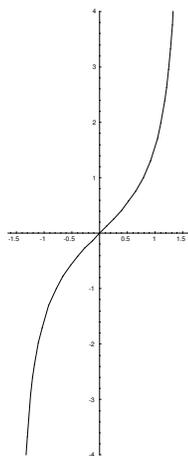
Die Auswahl des Intervalls $[0, \pi]$ ist willkürlich, man kann z.B. auch das Intervall $[\pi, 2\pi]$ oder allgemein $[k\pi, (k+1)\pi]$ nehmen und erhält Umkehrfunktionen, deren Werte jeweils in diesem Intervall liegen. Die anfangs definierte Funktion nennt man auch den *Hauptwert* des Arcuscosinus.



Entsprechend definiert man den *Hauptwert des Arcus sinus* $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$



und des *Arcus tangens* $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$.



Nach dem Satz 146 sind die Arcusfunktionen im Inneren ihres Definitionsbereiches differenzierbar und man erhält (nachrechnen)

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

8.6 Die Eulersche Formel

Seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$y' = ay, \quad y(0) = 1.$$

Definieren wir $\tilde{y}(x) := y(x/a)$, so folgt

$$\tilde{y}' = \tilde{y}, \quad \tilde{y}(0) = 1.$$

Nach Satz 154 ist also $\tilde{y} = \exp$ und damit

$$y(x) = e^{ax}.$$

Wir betrachten nun *komplexwertige* Funktionen und beweisen:

Satz 192 (und Definition). *Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$y' = iy, \quad y(0) = 1. \tag{70}$$

Diese Funktion bezeichnen wir mit $y : x \mapsto \exp(ix) = e^{ix}$.

Beachten Sie, dass $e^x = \exp x$ bisher nur für reelles Argument definiert war.

Beweis. 1. Eindeutigkeit. Wir nehmen an, dass y die Bedingungen des Satzes erfüllt. Wir zerlegen $y(x) \in \mathbb{C}$ in Real- und Imaginärteil:

$$y(x) = u(x) + iv(x).$$

Dann sind $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

Aus (70) folgt mit $y' = u' + iv'$ und $iy = -v + iu$, dass

$$u' = -v, \quad v' = u.$$

Diese sogenannten *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* werden Ihnen in der Funktionentheorie wieder begegnen. Aus ihnen sieht man, dass u und v sogar beliebig oft differenzierbar sind, und dass

$$v'' + v = u' - u' = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = u(0) = 1.$$

Aus Satz 186 folgt $v = \sin$ und $u = v' = \cos$. Wir haben also gefunden, dass $y = \cos + i \sin$ und damit eindeutig bestimmt ist.

2. Existenz. Nach dem ersten Teil des Beweises ist die einzige Chance, (70) zu erfüllen, die Funktion mit

$$y := \cos + i \sin.$$

Für die gilt aber $y(0) = 1$ und

$$y' = -\sin + i \cos = i(\cos + i \sin) = iy.$$

Also leistet sie wirklich das Gewünschte. □

Die Bezeichnung $\exp(ix)$ oder e^{ix} scheint in Anlehnung an den reellen Fall sehr plausibel. Die resultierende Formel, die sogenannte *Eulerformel*

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \quad (71)$$

kommt dann allerdings überraschend! Zum Beispiel liefert sie für $x = \pi$ die Beziehung

$$\boxed{e^{i\pi} = -1.}$$

Immerhin wird die Notation mit der Exponentialfunktion auch durch andere Eigenschaften dieser Funktion gestützt: Aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus finden wir

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = e^{ix} e^{iy} \end{aligned}$$

Die Funktion e^{ix} bietet die Möglichkeit, Sinus und Cosinus gleichzeitig zu behandeln, und zwar auf eine sehr einfache Weise. Zum Beispiel kann man sich $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$ leicht merken, und die Additionstheorem für Sinus und Cosinus durch Umkehrung der vorstehenden Rechnung daraus ableiten.

Allgemeiner definiert man die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

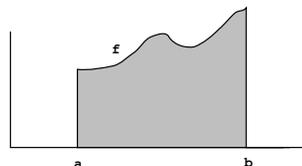
$$\exp(x + iy) := e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Den tieferen Zusammenhang zwischen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen werden wir später mittels der Reihendarstellungen aufklären, vgl. Abschnitt 10.9.

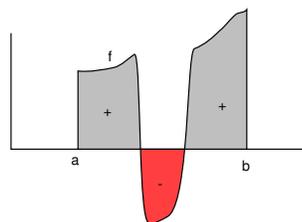
9 Integration

9.1 Das Regelintegral

Das Integral hat mit der Berechnung vom Flächeninhalt zu tun. Wir betrachten eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall. Wir fragen, wie groß der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion ist:



Wenn die Funktion auch negative Werte annimmt, wollen wir Flächenbereiche unterhalb der Abszisse negativ rechnen:



Dabei muss f nicht unbedingt stetig sein.

Für den Fall einer sogenannten Treppenfunktion wie auf der Abbildung unten ist es ganz klar, wie groß der Flächeninhalt ist: Er ist einfach die Summe von positiv bzw. negativ gezählten Rechteckflächen.

Definition 193. Eine Funktion $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung

$$\mathcal{Z} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

gibt, so dass

$$\phi|_{]x_{i-1}, x_i[} \text{ konstant für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Offenbar sind Treppenfunktionen beschränkt.

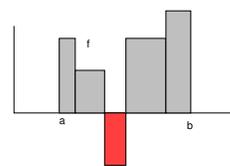
Es ist klar, dass eine solche Zerlegung \mathcal{Z} nicht eindeutig ist, man kann zusätzliche Punkte einführen. Wir wollen für den Augenblick jede solche Zerlegung eine Treppenzерlegung von ϕ nennen.

Ist $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$ ein beliebiger Zwischenpunkt, so ist die i -te Rechteckfläche

$$\phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

und der gesamte Flächeninhalt ist

$$F = \sum_{i=1}^n \phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$



Die Differenz $x_i - x_{i-1}$ bezeichnet man gern auch mit Δx_i . Den Wert F nennen wir *das (bestimmte) Integral* der Treppenfunktion ϕ über dem Intervall $[a, b]$:

$$\int_a^b \phi = \int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n \phi(\xi_i) \Delta x_i.$$

Bemerkungen.

1. In der Definition des Integrals kommen nur die Funktionswerte $\phi(\xi_i)$ an Stellen

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

zwischen den Teilpunkten x_i vor; die Werte an den endlich vielen (potentiellen) Sprungstellen x_i selbst sind völlig ohne Bedeutung. Offensichtlich ist es egal, wie man die $\xi \in]x_{i-1}, x_i[$ wählt.

2. In die Definition geht nicht nur die Funktion ϕ , sondern auch eine Treppenerlegung von ϕ ein. Wir müssen zeigen, dass die Definition unabhängig von der gewählten Treppenerlegung ist. Das ist anschaulich ziemlich klar, ein exakter Beweis ist aber lästig, und wir beschränken uns auf eine Skizze:
 - (a) Das Integral ändert sich nicht, wenn man der Zerlegung einen weiteren Punkt hinzufügt.
 - (b) Das Integral ändert sich nicht, wenn man der Zerlegung endlich viele weitere Punkte hinzufügt.
 - (c) Hat man *zwei* Treppenerlegungen derselben Funktion, so gibt es eine gemeinsame Verfeinerung, d.h. Zerlegung, die aus jeder der beiden durch Hinzufügung von endlich vielen Punkten hervorgeht.

Daraus ergibt sich dann die Unabhängigkeit von der Zerlegung.

Die Argumentation beim Unabhängigkeitsnachweis braucht man auch beim Beweis für das folgende

Lemma 194 (Rechenregeln). *Die Menge $\mathcal{T}([a, b])$ der Treppenfunktionen auf $[a, b]$ ist bezüglich wertweiser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum und*

$$\int_a^b : \mathcal{T}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist linear. D.h. Summen und skalare Vielfache von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sind wieder Treppenfunktionen, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b (\phi + \psi) &= \int_a^b \phi + \int_a^b \psi, \\ \int_a^b (c\phi) &= c \int_a^b \phi \quad \text{für } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Weiter gilt für $\phi, \psi \in \mathcal{T}([a, b])$

$$\phi \leq \psi \implies \int_a^b \phi \leq \int_a^b \psi.$$

Wegen $-\phi \leq \phi \leq |\phi|$ folgt daraus

$$\left| \int_a^b \phi \right| \leq \int_a^b |\phi|.$$

Schließlich gilt für $a < b < c$

$$\int_a^c \phi = \int_a^b \phi + \int_b^c \phi.$$

Wie bestimmt man nun den Flächeninhalt bei „beliebigen“ Funktionen? Wir betrachten nur solche, die sich durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximieren lassen. (Den dabei auftretenden Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* von Funktionenfolgen werden wir im nächsten Semester ausführlicher untersuchen, hier können wir auf eine systematische Behandlung verzichten.)

Definition 195 (Regelfunktion). (i) Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall heißt eine *Regelfunktion*, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die nirgends mehr als ϵ von f abweicht, für die also

$$|f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon \text{ für alle } x \in [a, b]$$

oder, anders gesagt,

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon.$$

Insbesondere sind Regelfunktionen wie Treppenfunktionen beschränkt.

(ii) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann gibt es eine Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - \phi_k(x)| = 0.$$

Die Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert also gleichmäßig gegen f . Jede solche Folge nennen wir eine *approximierende Folge* von Treppenfunktionen für f .

Wir wollen nun das Integral von Regelfunktionen definieren als Grenzwert der Integrale einer approximierenden Folge von Treppenfunktionen. Dazu beweisen wir:

Lemma 196 (und Definition). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und (ϕ_k) eine approximierende Folge von Treppenfunktionen dazu. Dann ist die Integralfolge

$$\left(\int_a^b \phi_k(x) dx \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

konvergent, und der Grenzwert ist unabhängig von der gewählten approximierenden Folge. Wir bezeichnen ihn mit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$$

und nennen ihn das (Regel-)Integral von f über $[a, b]$.

Beweis. Sei

$$\epsilon_k := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - \phi_k(x)|.$$

Dann gilt für alle $x \in [a, b]$

$$|\phi_k(x) - \phi_l(x)| \leq |\phi_k(x) - f(x)| + |f(x) - \phi_l(x)| \leq \epsilon_k + \epsilon_l$$

und daher

$$\left| \int_a^b \phi_k - \int_a^b \phi_l \right| = \left| \int_a^b (\phi_k - \phi_l) \right| \leq \int_a^b |\phi_k - \phi_l| \leq (\epsilon_k + \epsilon_l)(b - a).$$

Nach Voraussetzung ist aber $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$. Daher gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l \geq n$

$$\left| \int_a^b \phi_k - \int_a^b \phi_l \right| \leq (\epsilon_k + \epsilon_l)(b - a) \leq \epsilon.$$

Die Integralfolge ist also eine Cauchyfolge und daher konvergent.

Hat man zwei approximierende Folgen (ϕ_k) und $(\psi)_k$, so ist auch die Folge (ρ_k) mit

$$\rho_{2k} := \phi_k, \quad \rho_{2k+1} := \psi_k$$

eine approximierende Folge von Treppenfunktionen. Weil nach dem bereits Bewiesenen $(\int_a^b \rho_k)$ konvergent ist, konvergieren auch die Teilfolgen $(\int_a^b \phi_k)$ und $(\int_a^b \psi_k)$ gegen denselben Grenzwert. Das beweist die Unabhängigkeit. \square

Das Integral, das wir hier eingeführt haben, das sogenannte *Regelintegral*, ist einfacher (und etwas spezieller) als das gebräuchlichere *Riemannsches Integral*. Es genügt aber für alle praktischen Belange. Und für die wichtigen theoretischen Belange braucht man das kompliziertere Lebesgueintegral. Alle diese Integralbegriffe unterscheiden sich nur durch die Klasse der bei ihnen integrierbaren Funktionen, und auf dem Durchschnitt dieser Klassen stimmen die Integrale überein.

Die Definition des Integrals durch die Approximation mit stückweise konstanten Funktionen ist nicht nur eine mathematische Methode, sie entspricht vielmehr genau der Vorstellung, die man bei der Modellbildung in vielen Anwendungen hat. Oft ist das Problem dabei genuin eindimensional und die geometrische Interpretation des Integral als Fläche ganz abwegig.

Beispiel 197 (Von der Summe zum Integral). Bewegt sich ein Punkt entlang einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit v , so legt er zwischen den Zeitpunkten t_a und t_e die Strecke

$$s = v \cdot (t_e - t_a)$$

zurück. Ist die Geschwindigkeit $v = v(t)$ variabel, so ist die zurückgelegte Strecke annähernd

$$s \approx \sum_{i=1}^n v(t_i) \cdot \Delta t.$$

Dabei ist

$$t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_e, \quad t_i - t_{i-1} = \frac{t_e - t_a}{n} = \Delta t.$$

Den exakten Wert erhält man, indem man mit immer größerem n zum Integral übergeht:

$$s = \int_{t_a}^{t_e} v(t) dt.$$

Dabei haben wir allerdings vorausgesetzt, dass v eine Regelfunktion ist, die durch die Treppenfunktionen mit den Werten $v(t_i)$ für $n \rightarrow \infty$ approximiert werden. Das untersuchen wir später genauer. \square

Beispiel 198. Wir berechnen für $a < b$

$$\int_a^b \exp.$$

Für $j, k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ und $0 \leq j \leq k$ definieren wir

$$x_{kj} := a + \frac{j}{k}(b - a)$$

und

$$\phi_k(x) := \begin{cases} \exp(x_{kj}) & \text{für } x_{kj} \leq x < x_{k,j+1}, j < k, \\ \exp(b) & \text{für } x = b, \end{cases}$$

Weil die stetige Funktion \exp auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt

$$|x - y| \leq \frac{b-a}{k} \implies |\exp(x) - \exp(y)| < \epsilon.$$

Also gilt dann für alle $l \geq k$

$$|\exp - \phi_l| < \epsilon.$$

Die ϕ_k bilden also eine Folge von Treppenfunktionen, die \exp auf $[a, b]$ approximiert. Daher ist

$$\int_a^b \exp(x) dx = \lim \int_a^b \phi_k(x) dx.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_k(x) dx &= \sum_{j=0}^{k-1} \exp(x_{kj}) \frac{b-a}{k} = \frac{b-a}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \exp\left(a + \frac{j}{k}(b-a)\right) \\ &= \frac{b-a}{k} \exp(a) \sum_{j=0}^{k-1} \left(\exp\left(\frac{b-a}{k}\right)\right)^j = \frac{b-a}{k} \exp(a) \frac{1 - \left(\exp\left(\frac{b-a}{k}\right)\right)^k}{1 - \exp\left(\frac{b-a}{k}\right)} \\ &= \exp(a) \frac{\frac{b-a}{k}}{\exp\left(\frac{b-a}{k}\right) - 1} (\exp(b-a) - 1) \\ &\rightarrow \exp(a)(\exp(b-a) - 1) = \exp(b) - \exp(a). \end{aligned}$$

□

Die Definition des Regelintegrals führt zu der Frage, wie man denn eine Folge von approximierenden Treppenfunktionen bekommt. Im vorstehenden Beispiel wurde eine solche auf einfache Weise konstruiert. Die dabei benutzte Idee lässt sich verallgemeinern, wie wir jetzt ausführen.

Definition 199 (Riemannsche Summen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Unter einer Zerlegung \mathcal{Z} von $[a, b]$ versteht man üblicherweise wie oben eine endliche Menge $\{x_0, \dots, x_n\}$ mit

$$a = x_0 < \dots < x_n = b. \tag{72}$$

Wir wollen für den Moment darunter aber eine endliche Menge $\{x_0, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ verstehen, die außer den x_i mit der Eigenschaft (72) noch Zwischenpunkte ξ_i mit

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

enthält. Dann nennen wir

$$\delta(\mathcal{Z}) := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_i - x_{i-1})$$

die *Maschenweite* der Zerlegung und

$$S(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

die *Riemannsche Summe* von f zur Zerlegung \mathcal{Z} . Sie ist offenbar das Integral einer Treppenfunktion.

Wir geben nun ein Verfahren zur Berechnung von Regelintegralen an:

Satz 200 (Regelfunktionen und Riemannsche Summen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist

$$\mathcal{Z} = \{x_0, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n\}$$

eine Zerlegung mit Maschenweite $\delta(\mathcal{Z}) < \delta$, so ist

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S(f, \mathcal{Z}) \right| < \epsilon.$$

Die Riemannschen Summen einer Zerlegungsfolge mit gegen 0 konvergierender Maschenweite konvergieren also gegen das Regelintegral.

Bemerkung. Ist f stetig, so approximieren die mittels der Zerlegung konstruierten Treppenfunktionen

$$\phi_{\mathcal{Z}}(x) := \begin{cases} f(\xi_i) & \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i[, \\ f(b) & \text{für } x = b \end{cases}$$

f gleichmäßig, wenn $\delta(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$. Für eine allgemeine Regelfunktion f muss das nicht so sein, wie man an der Funktion mit $f(x) := 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$ sieht, wenn man immer $\xi_n = b = 1$ wählt. Trotzdem konvergieren die Riemannschen Summen gegen das Regelintegral.

Beweis von Satz 200. Sei $\tilde{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit Zerlegung

$$a = \tilde{x}_0 < \dots < \tilde{x}_m = b,$$

so dass

$$|f(x) - \tilde{\phi}(x)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)} \text{ für alle } x \in [a, b] \quad (73)$$

und sei $\tilde{\phi}|_{[x_{i-1}, x_i[} = c_i$.

Sei nun \mathcal{Z} eine Zerlegung wie im Satz mit Maschenweite $< \delta$, wobei wir über δ noch verfügen werden. Wir setzen

$$\phi(x) := f(\xi_i) \text{ für } x_{i-1} \leq x < x_i, \quad \phi(b) = f(b)$$

und

$$\hat{\phi}(x) := \tilde{\phi}(\xi_i) \text{ für } x_{i-1} \leq x < x_i, \quad \hat{\phi}(b) = f(b).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - S(f, \mathcal{Z}) \right| &= \left| \int_a^b f - \int_a^b \phi \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f - \int_a^b \tilde{\phi} \right| + \left| \int_a^b \tilde{\phi} - \int_a^b \hat{\phi} \right| + \left| \int_a^b \hat{\phi} - \int_a^b \phi \right| \\ &\stackrel{(73)}{\leq} \frac{\epsilon}{3} + \left| \int_a^b \tilde{\phi} - \int_a^b \hat{\phi} \right| + \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned} \quad (74)$$

Zur Abschätzung des verbleibenden Terms $\left| \int_a^b (\tilde{\phi} - \hat{\phi}) \right|$ nehmen wir an, dass

$$\delta < \max_i (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1}). \quad (75)$$

Dann gibt es zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $j \in \{0, \dots, m\}$, so dass

$$[x_{i-1}, x_i] \subset]\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j[\quad (76)$$

oder

$$[x_{i-1}, x_i] \subset]\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j] \cup]\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}[. \quad (77)$$

wobei wir $]\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0] := \emptyset =:]\tilde{x}_m, \tilde{x}_{m+1}[$ setzen.

Im Fall (76) gilt für alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\hat{\phi}(x) = \tilde{\phi}(\xi_i) = c_j = \tilde{\phi}(x)$$

und

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\tilde{\phi} - \hat{\phi}) = 0. \quad (78)$$

Im Fall (77) gilt (mit $c_0 := c_1, c_{m+1} := c_m$) für $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\tilde{\phi}(x) \in \{c_j, \tilde{\phi}(x_j), c_{j+1}\}$$

und ebenso

$$\hat{\phi}(x) = \tilde{\phi}(\xi_i) \in \{c_j, \tilde{\phi}(x_j), c_{j+1}\}.$$

Also ist dann

$$|\tilde{\phi}(x) - \hat{\phi}(x)| \leq 2(|\tilde{\phi}(x_j)| + |c_j| + |c_{j+1}|) =: \sigma_j.$$

Wir erhalten $|\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\tilde{\phi} - \hat{\phi})| \leq \sigma_j \delta$ und mit (78) folgt

$$\left| \int_a^b (\tilde{\phi} - \hat{\phi}) \right| \leq \left(\sum_{j=0}^m \sigma_j \right) \delta. \quad (79)$$

Wählen wir nun $\delta > 0$ so klein, dass (75) gilt und die rechte Seite von (79) kleiner als $\frac{\epsilon}{3}$ wird, so folgt aus (74) die Behauptung. \square

Lemma 201 (Rechenregeln). Die Menge $\mathcal{R}([a, b])$ der Regelfunktionen auf $[a, b]$ ist bezüglich wertweiser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum und

$$\int_a^b : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist linear. D.h. Summen und skalare Vielfache von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sind wieder Treppenfunktionen, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= \int_a^b f + \int_a^b g, \\ \int_a^b (cf) &= c \int_a^b f \quad \text{für } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Weiter gilt für $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$

$$f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g. \quad (\text{Monotonie})$$

Ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$, so auch $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ und

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Schließlich gilt für $a < b < c$

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \quad (\text{Intervall-Additivität})$$

Beweis. Wir zeigen nur die Monotonie des Integrals. Die anderen Eigenschaften folgen fast trivial aus den entsprechenden Aussagen im Lemma 194.

Seien (ϕ_k) und (ψ_k) Folgen von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit

$$|f - \phi_k| < \frac{1}{k}, \quad |g - \psi_k| < \frac{1}{k}.$$

Dann folgt

$$\phi_k < f + \frac{1}{k} \leq g + \frac{1}{k} < \psi_k + \frac{2}{k},$$

und mit der Linearität und Monotonie für Treppenfunktionen

$$\int_a^b \phi_k \leq \int_a^b \psi_k + \int_a^b \frac{2}{k} = \int_a^b \psi_k + \frac{2(b-a)}{k}.$$

Für $k \rightarrow \infty$ konvergieren die linke Seite gegen $\int_a^b f$, die rechte gegen $\int_a^b g$. □

Eine einfache Folgerung ist das

Korollar 202 (Integralschranken). *Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und*

$$m \leq f(x) \leq M$$

für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Beweis. Man betrachtet die Treppenfunktion mit $g(x) := m$ für alle x und erhält aus $g \leq f$ die linke Ungleichung:

$$m(b-a) = \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Die andere folgt ebenso. □

Korollar 203 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis. Ist $m := \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ und $M := \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, so gilt nach dem vorstehenden Korollar

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz 130 gibt es daher ein ξ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

□

9.2 Regelfunktionen

In diesem Abschnitt sehen wir uns genauer an, welche Funktionen Regelfunktionen sind, und welche nicht. Zunächst halten wir noch einmal fest, dass nach unserer Definition Regelfunktionen

- stets *beschränkt* und
- stets auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definiert

sind.

Definition 204. Für eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ nennt man die Funktion

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* von M .

Beispiel 205. Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}|_{[0,1]}}$ ist keine Regelfunktion, weil jede Treppenfunktion von ihr irgendwo einen Abstand $\geq \frac{1}{2}$ hat. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass man das Integral von Treppenfunktionen nicht einfach auf Grenzwerte von Treppenfunktionen erweitern kann. Die *gleichmäßige* Approximation, die Forderung also, dass es bei beliebig vorgegebenem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion ϕ gibt, die *nirgends* mehr als ϵ von f abweicht, ist sehr wesentlich.

Beispiel 206.

Sei $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert wie folgt:

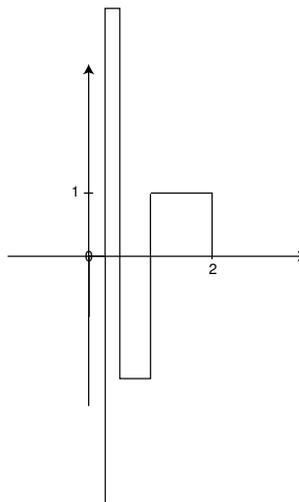
$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ (-2)^j & \text{für } \frac{1}{2^j} < x \leq \frac{1}{2^{j-1}}, \end{cases}$$

also

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} (-2)^j \chi_{\left] \frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}} \right]}.$$

Beachten Sie, dass f nicht beschränkt, also keine Regelfunktion ist. Sei

$$\phi_k = \sum_{j=0}^k (-2)^j \chi_{\left] \frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}} \right]}.$$



Dann gilt

$$\int_0^2 \phi_k(x) dx = \sum_{j=0}^k (-2)^j \left(\frac{1}{2^{j-1}} - \frac{1}{2^j} \right) = \sum_{j=0}^k (-1)^j = \frac{(-1)^k + 1}{2}.$$

Deshalb existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^2 \phi_k(x) dx$ nicht. Beschränkt man sich hingegen auf die Teilfolgen mit geradem oder ungeradem Index, so existieren die Grenzwerte und sind 1 bzw. 0.

Das ist keine gute Basis für die Definition eines Integrals $\int_a^b f(x) dx$. □

Satz 207 (Charakterisierung von Regelfunktionen). Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn gilt:

- (i) Für alle $x \in [a, b[$ existiert $\lim_{t \searrow x} f(t) \in \mathbb{R}$ und
- (ii) für alle $x \in]a, b]$ existiert $\lim_{t \nearrow x} f(t) \in \mathbb{R}$.

Grob gesprochen sind Regelfunktionen also gerade die Funktionen, die an jeder Stelle einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Limes besitzen.

Beweis. Zu („ \implies “). Wir zeigen nur (i), der Beweis für (ii) geht genauso. Seien $x \in [a, b[$ und (t_n) und (s_n) Folgen in $]x, b[$ mit

$$\lim t_n = x = \lim s_n.$$

Es genügt zu zeigen, dass dann $(f(t_n))$ und $(f(s_n))$ gegen denselben Grenzwert konvergieren. Nach Lemma 112 existiert dann $\lim_{t \searrow x} f(t)$.

Sei also $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine Treppenfunktion ϕ mit Treppenerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b,$$

so dass

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon \text{ für alle } x.$$

Sei nun

$$x_{i-1} \leq x < x_i$$

und sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n > N$

$$x < t_n < x_i \text{ und } x < s_n < x_i.$$

Dann gilt für $m, n \geq N$, dass $t_m, s_n \in]x_{i-1}, x_i[$, also $\phi(t_m) = \phi(s_n)$ und

$$|f(t_m) - f(s_n)| \leq |f(t_m) - \phi(t_m)| + |f(s_n) - \underbrace{\phi(t_m)}_{=\phi(s_n)}| < 2\epsilon.$$

Wählt man zunächst $(t_n) = (s_n)$, so folgt, dass $(f(t_n))$ eine Cauchyfolge, also konvergent ist. Dasselbe gilt dann für $(f(s_n))$, und die Grenzwerte unterscheiden sich um weniger als ein beliebiges $\epsilon > 0$, sind also gleich.

Zu („ \impliedby “). Wir beweisen das indirekt. Sei $\epsilon > 0$. Wir nehmen an, dass es keine Treppenfunktion ϕ gibt, für die

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Wir wollen das zum Widerspruch führen. Wir halbieren das Intervall $[a, b]$ und finden, dass es auf (mindestens) einer der beiden Hälften, wir nennen sie $[a_1, b_1]$, keine Treppenfunktion ϕ gibt, für die

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in [a_1, b_1].$$

Durch Fortsetzen dieses Verfahrens erhalten wir eine Intervallfolge

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots,$$

so dass für keine Treppenfunktion ϕ und kein n

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in [a_n, b_n].$$

Weil $a_m \in [a_n, b_n]$ für $m > n$, ist $|a_n - a_m| \leq \frac{b-a}{2^n}$ und (a_n) deshalb eine Cauchyfolge. Diese ist konvergent gegen ein $x \in [a, b]$. Offenbar gilt auch $b_n \rightarrow x$. Wir wollen annehmen, dass

$$x \in]a, b[.$$

Die Fälle $x = a$ oder $x = b$ gehen analog.

Wir setzen

$$f_-(x) := \lim_{t \nearrow x} f(t), \quad f_+(x) := \lim_{t \searrow x} f(t).$$

Dann gibt es $\delta > 0$, so dass

$$]x - \delta, x + \delta[\subset [a, b],$$

und

$$\begin{aligned} |f(t) - f_-(x)| &< \epsilon \text{ für alle } t \in]x - \delta, x[, \\ |f(t) - f_+(x)| &< \epsilon \text{ für alle } t \in]x, x + \delta[. \end{aligned}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$[a_n, b_n] \subset]x - \delta, x + \delta[.$$

Definiere eine Treppenfunktion $\phi : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi(t) := \begin{cases} f_-(x) & \text{falls } t \in [a_n, b_n] \cap]-\infty, x[, \\ f(x) & \text{falls } t = x \in [a_n, b_n], \\ f_+(x) & \text{falls } t \in [a_n, b_n] \cap]x, +\infty[. \end{cases}$$

Dann gilt auf $[a_n, b_n]$

$$|f(t) - \phi(t)| < \epsilon.$$

Widerspruch! □

Beispiel 208. Stetige Funktionen sind Regelfunktionen. □

Beispiel 209. Monotone Funktionen sind Regelfunktionen. Sei nämlich $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, etwa monoton wachsend, und sei $x \in]a, b[$. Dann ist die für hinreichend große k definierte Folge $(g(x - \frac{1}{k}))_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und durch $g(a)$ bzw. $g(b)$ beschränkt. Sie ist also konvergent gegen einen Wert L . Seien $\epsilon > 0$ und (t_n) eine Folge in $[a, x[$ mit $t_n \nearrow x$. Dann gibt es ein k mit

$$L - \epsilon < g(x - \frac{1}{k}) \leq L$$

und dazu ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x - \frac{1}{k} < t_n < x$ für alle $n \geq N$.

Für alle $n \geq N$ ist dann

$$L - \epsilon < g(x - \frac{1}{k}) \leq g(t_n).$$

Andererseits gibt es zu jedem n ein $m \in \mathbb{N}$ mit $t_n < x - \frac{1}{m}$, also

$$g(t_n) \leq g(x - \frac{1}{m}) \leq L.$$

Das zeigt $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n) = L$. Daraus folgt $\lim_{t \nearrow x} g(t) = L$.

Ebenso zeigt man für $x \in [a, b[$ die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes. Aus Satz 207 folgt dann, dass g eine Regelfunktion ist. □

Definition 210 (Stückweise Stetigkeit und Monotonie). Wir nennen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *stückweise stetig* bzw. *stückweise monoton*, wenn gilt: Es gibt eine Zerlegung

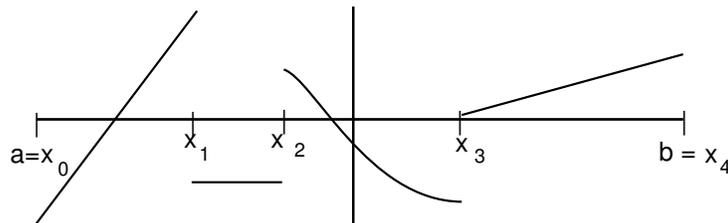
$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b,$$

und stetige bzw. monotone Funktionen

$$f_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$f|_{]x_{i-1}, x_i[} = f_i|_{]x_{i-1}, x_i[},$$



Bemerkung. Die Definition ist subtil: Wenn man verlangt, dass $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ für alle i stetig ist, dann ist f auf ganz $[a, b]$ stetig. Verlangt man nur, dass $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ für alle i stetig ist, so treten auch unbeschränkte Funktionen wie $\tan : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (mit beliebigem Wert in $\pi/2$) auf. Beides ist nicht in unserem Sinne.

Satz 211 (Bequemes Integrierbarkeitskriterium). *Stückweise stetige und stückweise monotone beschränkte Funktionen sind Regelfunktionen.*

Beweis. Das folgt aus den Beispielen 208 und 209, denn unmittelbar aus der Definition der Regelfunktion ergibt sich:

- Ist $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ für jedes der endlich vielen Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ eine Regelfunktion, so ist f eine Regelfunktion.
- Sind $f, f_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf dem offenen Intervall $]x_{i-1}, x_i[$ übereinstimmen, und ist $f_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, so ist auch die Funktion $f : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion.

□

Die meisten beschränkten Funktionen, die man über ein kompaktes Intervall integrieren „möchte“, fallen unter diesen Satz.

9.3 Numerische Integration

Wir werfen in diesem Abschnitt einen kurzen Blick auf numerische Integrationsverfahren. Im Prinzip ist die Approximation durch Treppenfunktionen ein brauchbares numerisches Verfahren, das im Grenzwert ja sogar gegen den genauen Wert konvergiert. Aber dafür muss man natürlich (unendlich) viele Treppenfunktionen berechnen und summieren. Für die schnelle näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale verwendet man die Approximation durch andere, „genauere“ Funktionen, die sich aber auch noch gut beherrschen lassen:

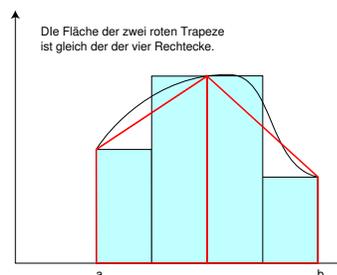
Trapezregel. Eine erste Näherung für $\int_a^b f(x)dx$ ist

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a).$$

Der Ausdruck rechts ist gerade der Flächeninhalt des Trapezes, welches entsteht, wenn wir den Graphen der Funktion durch die Sekante zwischen den Endpunkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ersetzen.

Diese Regel kann man auch mehrfach anwenden, indem man $[a, b]$ in n gleiche Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ unterteilt, für jedes Teilintervall die Trapezregel anwendet und summiert. Man erhält

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) \right).$$



Simpsonregel. Statt den Graphen von $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch eine Gerade, nämlich die Sekante zu ersetzen, kann man ihn auch ersetzen durch einen Parabelbogen durch die Graphenpunkte zu a , $\frac{a+b}{2}$ und b . Die entstehende Fläche, die die gesuchte vermutlich besser approximiert als das Trapez, lässt sich explizit berechnen. Wie, geht aus dem nächsten Abschnitt hervor. Es folgt

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right).$$

Auch diese Regel kann man mehrfach anwenden. Man unterteilt $[a, b]$ in eine gerade Anzahl $2n$ von Teilintervallen gleicher Länge $h = \frac{b-a}{2n}$ und wendet auf jedes ungerade Teilintervall und das folgende gerade die Simpsonregel an. Man erhält

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^n f(a + (2i-1)h) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + 2ih) \right).$$

Für subtilere Verfahren der numerischen Integration, z.B. für das **Romberg-Verfahren**, schauen Sie in bessere Formelsammlungen.

Mathematische Software wie Mathematica, Maple oder Derive haben Programme zur symbolischen Integration wie zur numerischen Integration. Die letzteren beruhen auf solchen Verfahren. Mathematica liefert zum Beispiel

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.47725.$$

9.4 Das unbestimmte Integral

Wir kommen nun zum Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation, der für die explizite Berechnung von vielen Integralen überaus nützlich ist.

Wir betrachten dazu eine Regelfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und für eine variable obere Grenze $x \in [a, b]$ das Integral

$$F(x) := \int_a^x f = \int_a^b f(t)dt. \quad (80)$$

In Abhängigkeit von x definiert das also eine neue Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die man auch *das unbestimmte Integral* oder die *Integralfunktion* von f nennt. Wir versuchen F zu differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Bemerkung. Diese Rechnung gilt zunächst nur, wenn $h > 0$. Offenbar ist es hilfreich, auch Integrale $\int_a^b f(x)dx$ zuzulassen, bei denen nicht $a < b$ ist.

Definition 212. Seien $b < a$ und $f : [b, a] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Mit dieser Definition bleibt die vorstehende Rechnung auch mit $h < 0$ richtig. Sie bleibt auch richtig, wenn $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall oder einer offenen Teilmenge von \mathbb{R} definiert ist und $a, x, x+h \in I$ beliebig sind.

Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir im weiteren aber an, dass $h > 0$ ist.

Wenn wir voraussetzen, dass f stetig ist, so gibt es nach dem Mittelwertsatz für Integrale Korollar 203 ein $\xi \in]x, x+h[$ mit

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi).$$

Über ξ wissen wir zwar nichts Genaueres, aber für $h \rightarrow 0$ geht es jedenfalls gegen x . Daher ist für stetiges f das unbestimmte Integral F differenzierbar und hat f als Ableitung:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Definition 213 (Stammfunktion). Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-triviales Intervall oder eine offene Teilmenge und $f, F : J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann heißt F eine *Stammfunktion* von f , wenn $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

Jede stetige Funktion $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall hat also eine Stammfunktion, nämlich

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Das bedeutet aber nicht, dass Sie immer eine Stammfunktion „explizit“ hinschreiben können. Und es gibt Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen:

Beispiel 214. Die sogenannte Heaviside-Funktion $f = Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Y(x) := 0$ für $x < 0$ und $Y(x) := 1$ für $x \geq 0$ hat keine Stammfunktion. Sonst müsste sie nach dem Satz 170 von Dini nämlich den Zwischenwertsatz erfüllen, was sie offenbar nicht tut.

□

Den folgenden Satz haben wir damit im wesentlichen schon bewiesen:

Satz 215 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J und sei $a \in J$. Dann gilt

(i) Die Funktion $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist eine Stammfunktion von f . D.h. F ist differenzierbar und

$$F'(x) = f(x).$$

Insbesondere besitzt jede stetige Funktion auf einem Intervall eine Stammfunktion.

(ii) Die Funktion $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stammfunktion von f , wenn

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt + \text{const.} = \int_a^x f(t) dt + G(a).$$

Insbesondere ist dann also für $a, b \in J$

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) =: G(x)|_a^b.$$

(Beachten Sie, dass das auch für $b \leq a$ gilt.)

Beweis. Zu (i). Bereits bewiesen.

Zu (ii). Ist G eine Stammfunktion, so ist

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0,$$

also nach dem Konstanzkriterium $G = F + \text{const.}$

Umgekehrt ist $F + c$ für jede Konstante c natürlich eine Stammfunktion. □

Der Satz hat phantastische Konsequenzen: Nehmen Sie an, Sie sollen $\int_0^\pi \sin x dx$ berechnen. Dann müssen Sie den Sinus immer feiner durch Treppenfunktionen approximieren, die Integrale der Treppenfunktionen ausrechnen und für diese den Grenzwert bei „beliebig guter Approximation“ berechnen.

Oder Sie erinnern sich daran, dass $\cos' x = -\sin x$, also $G(x) = -\cos x$ eine Stammfunktion von $f(x) = \sin x$ ist. Daher ist nach dem Hauptsatz

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Keine Unterteilungen, keine Riemannsche Summen, keine Grenzwerte! Und es funktioniert für alle stetigen Funktionen, für die wir Stammfunktionen kennen!

Bemerkung zur Notation. Aus den nun ersichtlichen Gründen schreibt man oft

$$G(x) = \int f(x)dx + const.,$$

wenn G eine Stammfunktion von f ist. Es ist hilfreich, dabei immer eine Integrationskonstante zu notieren. Sonst erhält man z.B. $-\cos x = \int \sin x dx = 23 - \cos x$, weil $G(x) = -\cos x$ aber genauso gut auch $H(x) = 23 - \cos x$ Stammfunktionen von $\sin x$ sind.

Beispiele.

$$\int_a^b e^x dx = e^x|_a^b = e^b - e^a, \quad \int_1^5 \frac{dx}{x} = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5,$$

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x|_a^b = \cos a - \cos b, \quad \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan b - \arctan 0 = \arctan b,$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + const. \text{ für } \alpha \neq -1, \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x|_a^b,$$

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)dx = a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + const.$$

Mathematische Software mit der Fähigkeit zum symbolischen Rechnen bietet auch die Möglichkeit, unbestimmte Integrale zu berechnen. Hier ein paar Zeilen Mathematica

```
In[1]:=∫ x2 sin2 x dx
Out[1]= $\frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}x \cos(2x) - \frac{1}{8}(x^2 - 1) \sin(2x)$ 

In[2]:=∫ sin(x2) dx
Out[2]= $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{FresnelS}(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x)$ 
```

Während das erste Ergebnis sofort verständlich ist, bedarf das zweite einer Erklärung: Die Funktion $\sin(x^2)$ besitzt keine Stammfunktion, die sich mit „elementaren“ Funktionen ausdrücken läßt. Das Ergebnis ist vielmehr ein sogenanntes *Fresnelintegral*, eine Funktion, die *definiert* ist durch die Gleichung

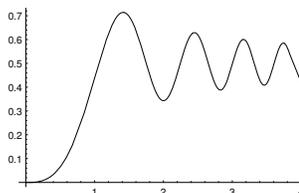
$$\text{FresnelS}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

Das zweite Ergebnis ist also mehr oder weniger nur eine Umformung mittels der Substitutionsregel, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen.

Das Fresnelintegral spielt eine Rolle in der geometrischen Optik. Die Werte bekommt man wie die Werte des Sinus (für die man eigentlich auch den Grenzwert einer Potenzreihe berechnen muss) zum Beispiel vom Rechner geliefert:

```
N[FresnelS[1.5],7]
0.697505

Plot[FresnelS[x],{x,0,4}]
```



Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Sinusfunktion und dem Fresnelintegral ist, dass viele Eigenschaften des Sinus einfacher zu beschreiben sind, zum Beispiel die Lage der lokalen

Maxima. Auch hat man eine Fülle von Identitäten, die den Sinus mit anderen Funktionen verbinden.

Beispiel 216. Die Funktion $\frac{1}{x}$ besitzt auf $]0, +\infty[$ die Stammfunktion $\ln x$. Und auf dem Intervall $] -\infty, 0[$ ist offenbar $\ln(-x)$ eine Stammfunktion, denn die Ableitung ist nach der Kettenregel $\frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$. Also ist $\ln|x|$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

□

Beispiel 217 (Ein Existenzbeweis für die Exponentialfunktion). Die Funktion $\frac{1}{x}$ besitzt auf $]0, +\infty[$ die Stammfunktion

$$x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Wir definieren

$$\lambda(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Weil λ differenzierbar, insbesondere also stetig ist, ist $\lambda(]0, +\infty[)$ ein Intervall. Aus

$$\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{2^{k+1}}(2^{k+1} - 2^k) = \frac{1}{2},$$

folgt

$$\lambda(2^{k+1}) = \lambda(2^k) + \frac{1}{2}$$

und daraus $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = +\infty$. Ebenso schließt man aus

$$\int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \frac{dt}{t} \geq 2^k \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} \right) = \frac{1}{2},$$

dass $\lim_{x \searrow 0} \lambda(x) = -\infty$ und damit $\lambda(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktion $f := \lambda^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda'(f(x))} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = f(x).$$

Schließlich ist $\lambda(1) = 0$ und deshalb $f(0) = 1$. Also erfüllt die Umkehrfunktion f von λ die definierenden Gleichungen für \exp , vgl. Satz 154.

□

Bemerkungen. 1. Die Untersuchungen in diesem Abschnitt betreffen die Integration *stetiger* Funktionen. Auch unstetige Funktionen *können* Stammfunktionen besitzen, aber es ist nicht klar, dass man die dann zur Berechnung des Integrals benutzen kann!

2. Wie beim Beispiel des Fresnelintegrals angedeutet, lassen sich die Stammfunktionen auch relativ einfacher Funktionen (zum Beispiel e^{-x^2} , $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$, $\frac{\sin x}{x}$ und andere) nicht mit den aus der Schule bekannten *elementaren Funktionen* ausdrücken. Eine präzise Formulierung dieses Sachverhaltes und ein Beweis dafür stammen von Joseph Liouville 1834/35. Wir sollten dieses Ergebnis positiv sehen: Die Integralrechnung liefert uns Wege zur Gewinnung völlig neuer Funktionen.

9.5 Integrationsregeln

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermöglicht die Berechnung von Integralen **stetiger** Funktionen mittels Stammfunktionen auf sehr elegante Weise, *wenn* man eine Stammfunktion kennt. Und weil wir früher eine Menge Funktionen differenziert haben, kennen wir für eine Menge von Funktionen auch die Stammfunktionen. Aber leider für viele Funktionen auch nicht: Was ist $\int e^{x^2} dx$ oder $\int \sqrt{1-x^2} dx$?

Wir wollen im folgenden einige Regeln kennen lernen, die uns helfen können, Integrale komplizierterer Funktionen auf einfachere zurückzuführen. So wie einem die Rechenregeln der Differentialrechnung, insbesondere die Produktregel und die Kettenregel geholfen haben, kompliziertere Funktionen zu differenzieren, ohne jedesmal wieder Grenzwerte von Differenzenquotienten auszurechnen.

Allerdings ist die Situation bei der Integration nicht so angenehm, wie bei der Differentiation, weil es eben für die Integration von Produkten und geschachtelten Funktionen keine oder keine einfachen Formeln gibt. Wenn man eine Stammfunktion von e^x und eine von x^2 kennt, kann man leider keine von e^{x^2} hinschreiben, vgl. die Bemerkung am Ende des letzten Abschnitts..

Die hier zu besprechenden Integrationsregeln kommen von der Kettenregel und Produktregel der Differentialrechnung, sie sind aber keine „Integral-Ketten-“ oder „-Produktregel“.

Substitutionsregel. Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar. Die Funktion F sei eine Stammfunktion von f . Dann gilt nach der Kettenregel

$$f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = F'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)).$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt deshalb

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

Andrerseits ist wieder nach dem Hauptsatz $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$. Zusammengefaßt ergibt sich:

Satz 218 (Substitutionsregel). Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx. \quad (81)$$

Die Anwendung geschieht oft so: Gesucht ist das Integral $\int_a^b f(x)dx$, wobei einem für f keine Stammfunktion einfällt. Dann versucht man, eine Funktion $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ mit $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$ (oder $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$) zu finden, so dass man für die (oft nur scheinbar schwierige) Funktion $f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$ eine Stammfunktion raten kann.

Beispiel 219. Gesucht ist $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Wir wählen $\varphi = \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (0 + \pi) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ wirklich $\sqrt{1-\sin^2 t} = +\cos t$, weil der Cosinus dort nicht-negativ ist.

Geometrisch haben wir die halbe Fläche des Einheitskreises berechnet.

Für $r > 0$ erhält man mit $\varphi(t) = r \sin t$ ebenso

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi r^2$$

und findet πr^2 für die Kreisfläche. □

Man setzt also für x eine Funktion $\varphi(t)$ ein. Daher der Name „Substitutionsregel“. Dabei muss man die Grenzen des Integrals natürlich auf t umrechnen. Die Kunst ist es, „die richtige“ Funktion φ zu finden. Aber natürlich gibt es nicht immer eine solche Funktion, die einem wirklich weiterhilft.

Wenn man voraussetzt, dass $\phi(\alpha) = a$ und $\phi(\beta) = b$ ist, und wenn man $\varphi(t) = x(t)$ und $\dot{\varphi} = \frac{dx}{dt}$ schreibt, sieht die Substitutionsregel so aus:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt.$$

Abgesehen von den Grenzen sieht das so aus, als hätte man einfach mit $\frac{dt}{dx}$ „erweitert“, und so kann man sich die Regel auch merken. Es steckt eben die Kettenregel dahinter, die man ja auch vereinfacht schreiben kann als $\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt}$.

Häufig sieht die Anwendung der Substitutionsregel in der Praxis etwas anders aus. Wir erläutern das im nächsten Beispiel:

Beispiel 220. Gesucht ist $\int_0^1 \frac{dx}{(5x+2)^3}$. Wir versuchen, den komplizierten Term $(5x+2)^3$ im Nenner durch t^3 zu ersetzen, wobei t dann natürlich von $5 \cdot 0 + 2 = 2$ bis $5 + 2 = 7$ läuft:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(5x+2)^3} = \int_{t=2}^7 \frac{dx}{t^3}.$$

Der Ausdruck rechts ist etwas konfus, weil er x und t enthält. Die Integralgrenzen beziehen sich auf t , darum haben wir das an der unteren Grenze vermerkt.

Durch Differenzieren von $t = 5x + 2$ erhält man

$$\frac{dt}{dx} = 5, \text{ also } dx = \frac{dt}{5}, \tag{82}$$

und daher

$$\int_0^1 \frac{dx}{(5x+2)^3} = \int_2^7 \frac{1}{t^3} \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int_2^7 \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{5} \left. \frac{-1}{2t^2} \right|_2^7 = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right). \tag{83}$$

Warum darf man so rechnen? Insbesondere die Gleichung (82) scheint fragwürdig. Aber mit der richtigen Interpretation ist die Sache vollkommen in Ordnung: Die Substitution

$$t = 5x + 3$$

bedeutet, dass wir nicht φ , sondern erst einmal φ^{-1} definieren

$$t = \varphi^{-1}(x) = 5x + 3.$$

Wichtig ist, dass dies eine *invertierbare* Funktion ist, so dass es φ wirklich gibt. Nach der Substitutionsregel muss man dann noch dx ersetzen durch $\frac{d\varphi}{dt} dt$. Aber nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist

$$\dot{\varphi}' = \frac{1}{(\varphi^{-1})'}$$

an den entsprechenden Stellen. Wenn wir also $\dot{\varphi} = \frac{dx}{dt}$ und $(\varphi^{-1})' = \frac{dt}{dx}$ schreiben, erhalten wir (82), (83). □

Wenn man in einem Integranden einen x -Term, den man loswerden will, durch t ersetzt verbleibt dx , das man wie oben ersetzt: Dazu benutzt man die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion, braucht also nur $\frac{dt}{dx}$. Aber oft verbleiben noch weitere x -Terme. Um auch diese durch t auszudrücken, muss man im allgemeinen $\psi(x) = t$ *doch* noch explizit nach x auflösen. Manchmal aber hat man Glück, und x kürzt sich „von selbst“ heraus.

Beispiel 221.

$$\int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx \stackrel{[t=\cos x]}{=} \int_{t=1}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sin x}{t} dx$$

Beachten Sie die Grenzen. Nun ist

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x,$$

und daher

$$\int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_{t=1}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sin x}{t} \frac{-1}{\sin x} dt = - \int_{t=1}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t} dt = + \ln t \Big|_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{\ln 2}{2}. \quad \square$$

Man kann aber auch Pech haben:

Beispiel 222.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \stackrel{[x^2=t]}{=} \int_0^1 e^t \frac{1}{2x} dt = \int_0^1 e^t \frac{1}{2\sqrt{t}} dt.$$

Damit hat man leider nichts gewonnen, und in der Tat ist dieses Integral mit elementaren Funktionen nicht zu lösen. □

Beispiel 223. Wir berechnen $\int_0^\pi \sin x dx = 2$ nicht direkt, sondern mit der Substitution $\sin x = t$, also $\frac{dt}{dx} = \cos x = \sqrt{1-t^2}$:

$$\int_0^\pi \sin x dx \stackrel{[\sin x=t]}{=} \int_0^0 t \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0,$$

weil die obere und untere Integrationsgrenze gleich sind. Wo steckt der Fehler? □

Man kann die Substitutionsregel auch zur Berechnung unbestimmter Integrale (= Stammfunktionen) benutzen. Sucht man eine Stammfunktion für $f(x)$ und findet eine, nämlich $G(t)$, für $f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$, und ist $G(t) = F(\varphi(t))$, so ist F eine Stammfunktion von f . Man kann also substituieren, das unbestimmte Integral berechnen und muss dann anschließend die Transformation $x \rightarrow t$ wieder rückgängig machen, d.h. t wieder durch x ausdrücken. (Dabei sollte φ eine eindeutige Funktion sein.)

Beispiel 224. Zur Berechnung von $\int \sqrt{1-x^2} dx$ substituieren wir $x = \sin t$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{1}{2}(\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) + \text{const.} \\ &= \frac{1}{2}(\sin t \cos t + t) + \text{const.} = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + \text{const.} \end{aligned}$$

Die Rechnung scheint ein wenig „großzügig“. Ist wirklich $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$? Oder ist es $= -\cos t$? Wenn wir davon ausgehen, dass $-1 \leq x \leq 1$, weil sonst der Integrand nicht reell ist, können wir für den Sinus das Definitionsintervall $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ nehmen. Dort ist der Cosinus dann positiv und der Arcussinus ist auch definiert. Zur Probe (und zur Übung) kann man natürlich die rechte Seite differenzieren.

□

Partielle Integration. Seien $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Aus der Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt dann

$$(uv)|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Das schreiben wir in der Form

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x) dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.}$$

und nennen es die Regel der **partiellen Integration** (= Integration nach Teilen). Natürlich hat man wieder eine entsprechende Formel für die unbestimmten Integrale

$$\boxed{\int u'(x)v(x) dx = uv - \int u(x)v'(x) dx + \text{const.}}$$

Beispiel 225. Wir wollen $\int_a^b x e^x dx$ berechnen. Wir versuchen den Ansatz

$$u' = x, v = e^x.$$

Dann ist $u = \frac{1}{2}x^2, v' = e^x$ und die partielle Integration liefert

$$\int_a^b x e^x dx = \left(\frac{1}{2} x^2 e^x \right)|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2} x^2 e^x dx.$$

Das hat nichts gebracht! Wir versuchen nun

$$u' = e^x, v = x.$$

Dann bekommen wir $u = e^x, v' = 1$ und

$$\int_a^b x e^x dx = (x e^x)|_a^b - \int_a^b e^x = ((x-1)e^x)|_a^b$$

□

Beispiel 226. Mit einem hübschen Trick kann man das Integral von $\ln x$ berechnen: Wir setzen $u' = 1, v = \ln x$ und erhalten mit $u = x, v' = \frac{1}{x}$:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x(\ln x - 1) + \text{const.}$$

□

9.6 Ergänzungen zur Integration

Die geschickte Anwendung der Integrationsregeln zum „Knacken“ von Integralen ist eine Kunst, es gibt dafür keine Rezepte. Mittlerweile sind aber die Computerprogramme kaum noch zu schlagen, siehe nachstehendes Beispiel. Wenn man erfolglos ist, kann das verschiedene Gründe haben: Möglicherweise findet man nicht den richtigen Trick, möglicherweise ist aber das Integral auch nicht durch eine elementare Funktion lösbar, sondern definiert eine neue Funktion, wie wir es oben beim Fresnelintegral gesehen haben. Andere Beispiele sind die elliptischen Integrale. Auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ hat man

$$\int \sqrt{1 - \sin^2 x} dx = \int \cos x dx = \sin x + \text{const.}$$

Das ist einfach. Aber für $k^2 \neq 1$ liefert

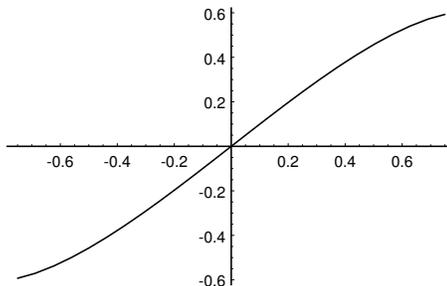
$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$$

ein sogenanntes elliptische Integral, das eben nicht durch die elementaren Funktionen zu beschreiben ist.

Beispiel 227 (Integrale mit dem Rechner). Hier sind die meisten der obigen Beispiele noch einmal vom symbolischen Integrationsprogramm gelöst:

In[1] := Integrate[$\frac{\text{Tan}[x]}{(1 + \text{Cos}[x]^2)}, x]$	In[7] := Integrate[$\sqrt{1 - x^2}, x]$
Out[2] = $-\text{Log}[\text{Cos}[x]] + \frac{1}{2}\text{Log}[3 + \text{Cos}[2x]]$	Out[8] = $\frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \frac{\text{ArcSin}[x]}{2}$
In[3] := Integrate[$\frac{1}{(5x - 2)^3}, x]$	In[9] = Integrate[$x\text{Exp}[x], x]$
Out[4] = $-\frac{1}{(10(-2 + 5x)^2)}$	Out[10] = $E^x(-1 + x)$
In[5] := Integrate[$\text{Cos}[x]^2, x, 0, \pi/2]$	In[11] = Integrate[$\text{Log}[x], x]$
Out[6] = $\frac{\pi}{4}$	Out[12] = $-x + x\text{Log}[x]$

In[13] = Integrate[$\sqrt{1 - k^2\text{Sin}[x]^2}, x]$
 Out[14] = $E(x|k^2)$
 In[15] := Plot[EllipticE[x, 2], {x, $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ }];



□

9.6.1 Elliptische Integrale

Wir gehen in diesem Abschnitt kurz auf die schon angesprochenen elliptischen Integrale ein.

Beispiel 228 (Elliptisches Integral und Ellipse). Die Abbildung

$$(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

beschreibt eine Kurve in der Ebene. Zum Beispiel liefert $x(t) = a \sin t, y(t) = b \cos t$ mit $a > b > 0$ eine Ellipse mit den Halbachsen a und b . Die Länge der Kurve ist approximativ

$$\begin{aligned} & \sum \left| \begin{pmatrix} x(t_{i+1}) \\ y(t_{i+1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{pmatrix} \right| = \sum \left| \begin{pmatrix} x(t_i + \Delta t_i) \\ y(t_i + \Delta t_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{pmatrix} \right| \\ &= \sum \sqrt{(x(t_i + \Delta t_i) - x(t_i))^2 + (y(t_i + \Delta t_i) - y(t_i))^2} \\ &= \sum \sqrt{\frac{(x(t_i + \Delta t_i) - x(t_i))^2}{(\Delta t_i)^2} + \frac{(y(t_i + \Delta t_i) - y(t_i))^2}{(\Delta t_i)^2}} \Delta t_i \\ &\rightarrow \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt, \end{aligned}$$

wenn man voraussetzt, dass x und y stetig differenzierbar sind. Unter dieser Voraussetzung ist also

$$L := \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

eine vernünftige *Definition* für die Länge der Kurve. Für die Ellipse ergibt sich ein Integral von der im obigen Beispiel aufgetretenen Form:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt.$$

□

Definition 229. Für $0 \leq k \leq 1$ definieren wir

- das vollständige elliptische Integral 1. Art als

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

- das vollständige elliptische Integral 2. Art als

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

Für reelles ϕ definieren wir weiter

- das unvollständige elliptische Integral 1. Art als

$$F(k; \phi) := \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

- das unvollständige elliptische Integral 2. Art als

$$E(k; \phi) := \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

Der Umfang der Ellipse mit Halbachsen $a > b > 0$ ist also gegeben durch

$$L = 4aE(k), \quad k := \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}.$$

k heißt die *Exzentrizität* der Ellipse.

Das elliptische Integral $K(k)$ ist schwieriger geometrisch zu interpretieren, physikalisch ist

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

die Schwingungsdauer eines Pendels mit Amplitude α .

$K(k)$ ist sehr gut numerisch zu berechnen und hilfreich bei der numerischen Berechnung von $E(k)$. Darauf gehen wir jetzt noch ein, weil die Rechnung noch mehrmals die Substitutionsregel demonstriert und das Ergebnis so überraschend und hübsch ist.

Für $a, b > 0$ definieren wir

$$F(a, b) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}.$$

Mit der Substitution $t = \frac{\pi}{2} - \tau$ zeigt man

$$F(a, b) = F(b, a) \tag{84}$$

und mit der Substitution $t = \pi - \tau$, dass

$$F(a, b) := \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}},$$

also

$$F(a, b) := \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}. \tag{85}$$

Weiter folgt sofort

$$K(k) = F(1, \sqrt{1 - k^2}), \tag{86}$$

so dass ein Berechnungsverfahren für F auch eines für K liefert.

Wir möchten in der Formel für F die Substitution

$$\tan t = \sqrt{\frac{a}{b}} \tan u$$

machen. Auf $[0, \frac{\pi}{2}[$ ist der Tangens streng monoton, also injektiv, und wenn wir uns an $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ erinnern, finden wir

$$\frac{1}{\cos^2 t} \frac{dt}{du} = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1}{\cos^2 u} \quad \text{oder} \quad dt = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{\cos^2 t}{\cos^2 u} du.$$

Weil der Tangens in $\frac{\pi}{2}$ nicht definiert ist, wählen wir $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ und definieren $\psi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ durch

$$\tan \phi = \sqrt{\frac{a}{b}} \tan \psi.$$

Dann liefert die Substitutionsregel:

$$\begin{aligned}
\int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} &= \int_0^\phi \frac{dt}{a \cos t \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2 t}} \\
&= \int_0^\psi \frac{\cos^2 t \, du}{\sqrt{ab} \cos t \cos^2 u \sqrt{1 + \frac{b}{a} \tan^2 u}} \\
&= \int_0^\psi \frac{\cos t \, du}{\sqrt{ab} \cos^2 u \sqrt{1 + \frac{b}{a} \tan^2 u}} \\
&= \int_0^\psi \frac{du}{\sqrt{ab} \cos^2 u \sqrt{1 + \frac{b}{a} \tan^2 u} \sqrt{1 + \frac{a}{b} \tan^2 u}} \\
&= \int_0^\psi \frac{du}{\sqrt{a \cos^2 u + b \sin^2 u} \sqrt{b \cos^2 u + a \sin^2 u}}.
\end{aligned}$$

Nun sind die Tangens-Terme wieder verschwunden, und wir können den Limes für $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ bilden. Weil das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion differenzierbar, insbesondere also stetig ist, und weil

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi/2} \psi = \lim_{\phi \rightarrow \pi/2} \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \tan \phi\right) = \frac{\pi}{2}$$

ist, folgt

$$\begin{aligned}
F(a, b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{(b \cos^2 u + a \sin^2 u)(a \cos^2 u + b \sin^2 u)}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{ab(\cos^4 u + \sin^4 u) + (a^2 + b^2) \cos^2 u \sin^2 u}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{ab(\cos^2 u - \sin^2 u)^2 + (a + b)^2 \cos^2 u \sin^2 u}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{ab \cos^2 2u + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 2u}} \stackrel{2u=t}{=} \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{ab \cos^2 t + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 t}} \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{\sqrt{ab}^2 \cos^2 t + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 t}} \stackrel{(85)}{=} F\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) \stackrel{(84)}{=} F\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).
\end{aligned}$$

Also haben wir

Lemma 230.

$$F(a, b) = F\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

$F(a, b)$ ändert sich nicht, wenn man a und b durch das arithmetische bzw. geometrische Mittel von a und b ersetzt.

Nun gilt, vgl. (58),

$$b < \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} < a.$$

Definieren wir also rekursive Folgen $a_0 := a, b_0 := b$

$$b_{k+1} := \sqrt{a_k b_k}, \quad a_{k+1} := \frac{a_k + b_k}{2},$$

so ist

$$b \leq b_k \leq b_{k+1} \leq a_{k+1} \leq a_k \leq a$$

und

$$0 \leq a_{k+1} - b_{k+1} \leq a_{k+1} - b_k = \frac{a_k - b_k}{2}.$$

Also existieren $A := \lim a_k$ und $B := \lim b_k$ und es gilt

$$\sqrt{AB} = \frac{A+B}{2}.$$

Daraus folgt unmittelbar $A = B$. Diesen Wert nennt man das *arithmetisch-geometrische Mittel* $AGM(a, b)$ von a und b .

Schließlich gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(a_k, b_k) \stackrel{(*)}{=} F(A, B) = F(A, A) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{A^2 \cos^2 t + A^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{A} = \frac{\pi}{2A}$$

Den Beweis für die Limes-Aussage (*) (d.h. den Beweis für die Stetigkeit von F) unterschlagen wir; er ist nicht schwer, wenn man Methoden der Analysis II zur Verfügung hat. Also finden wir

$$F(a, b) = \frac{\pi}{2AGM(a, b)}.$$

Die AGM-Folgen konvergieren außerordentlich schnell und liefern wegen der Monotonie auch Fehlerschranken. Für $a = 6$ und $b = 2$ erhält man

k	b_k	a_k
0	2	6
1	3.4641016151	4.0
2	3.7224194364	3.7320508076
3	3.7272320109	3.7272351220
4	3.7272335665	3.7272335665

Aus $F(1, \sqrt{1-k^2}) = K(k)$ ergibt sich

$$K(k) = \frac{\pi}{2AGM(1, \sqrt{1-k^2})}.$$

Das vollständige elliptische Integral 2. Art erhält man mit der Formel

$$E(k) = \frac{K(k)}{2} \left(2 - k^2 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^j (b_k^2 - a_k^2) \right),$$

wobei $a_0 = 1$ und $b_0 = \sqrt{1-k^2}$.

Zu dieser Formel und einer Fülle weiterer Informationen zu den elliptischen Integralen vgl. *Spanier/Oldham: An Atlas of Functions*.

9.6.2 Integration komplexwertiger Funktionen

Für komplexwertige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ einer reellen Variablen definiert man das Integral durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil: Ist $f = u + iv$ mit $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so sei

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass u und v Regelfunktionen sind, und dann nennen wir f eine (komplexwertige) Regelfunktion.

Substitutionsregel und partielle Integration, die elementaren Integrationsregeln, die keine Monotonie-Aussagen benutzen, der Begriff der Stammfunktion sowie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung übertragen sich “wörtlich” auf diese Situation.

Die Integralabschätzung in Korollar 202 und der daraus folgende Mittelwertsatz der Integralrechnung gelten nicht für komplexwertiges f . Dagegen bleibt die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

richtig, folgt aber nicht mehr einfach aus der Monotonie $f \leq |f|$. Beweisen kann man sie mit einem hübschen Trick:

Falls $I := \int_a^b f(x) dx = 0$, ist die Behauptung klar. Wir nehmen daher an, dass $I \neq 0$. Dann gilt

$$1 = \operatorname{Re} \frac{\int_a^b f(x) dx}{I} = \operatorname{Re} \int_a^b \frac{f(x)}{I} dx = \int_a^b \operatorname{Re} \frac{f(x)}{I} dx \leq \int_a^b \left| \frac{f(x)}{I} \right| dx = \frac{1}{|I|} \int_a^b |f(x)| dx.$$

Durch Multiplikation mit $|I|$ folgt die Behauptung. Die Ungleichung im Beweis benutzt die Monotonie des Integrals für *reellwertige* Funktionen.

Beispiel 231. Wir berechnen

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-i)^2} = \frac{-1}{x-i} \Big|_0^1 = \frac{-1}{1-i} - \frac{-1}{0-i} = -\frac{1}{1+i} = -\frac{1}{2}(1-i).$$

Dabei haben wir benutzt, dass auch für komplexes a und für $k \in \mathbb{Z}$ die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dx} (x+a)^k = k(x+a)^{k-1}$$

gilt. Beweisen Sie das!

□

Vorsicht bei der Integration von $1/(x-z)$ mit komplexem $z = \alpha + i\beta$ mit $\beta \neq 0$. Die Funktion $\ln|x-z|$ ist *keine* Stammfunktion. Ihre Ableitung ist, wie sie selbst, nämlich reellwertig, also sicher nicht gleich $1/(x-z)$. Wir untersuchen das genauer:

Beispiel 232. Sei $z = \alpha + i\beta$ mit reellen α, β und $\beta \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x-z} &= \int \frac{dx}{(x-\alpha) - i\beta} = \int \frac{x-\alpha + i\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx + i \int \frac{1/\beta}{(\frac{x-\alpha}{\beta})^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln((x-\alpha)^2 + \beta^2) + i \arctan \frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.} \\ &= \ln|x-z| + i \arctan \frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.} \end{aligned}$$

□

Beispiel 233. Es gilt nach der Regel über die partielle Integration

$$\int x e^{i\omega x} = x \frac{1}{i\omega} e^{i\omega x} - \int \frac{1}{i\omega} e^{i\omega x} = -x \frac{i}{\omega} e^{i\omega x} + \frac{1}{\omega^2} e^{i\omega x} + \text{const.}$$

Nun benutzen wir die Eulersche Formel $e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x$ zur Zerlegung in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \int x \cos \omega x dx + i \int x \sin \omega x dx &= -x \frac{i}{\omega} (\cos \omega x + i \sin \omega x) + \frac{1}{\omega^2} (\cos \omega x + i \sin \omega x) + \text{const.} \\ &= +\frac{x}{\omega} \sin \omega x + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega x + i \left(-\frac{x}{\omega} \cos \omega x + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega x \right) + \text{const.} \end{aligned}$$

Beide Ansätze zusammen liefern

$$\begin{aligned} \int x \cos \omega x dx &= \frac{1}{\omega} \left(x \sin \omega x + \frac{1}{\omega} \cos \omega x \right) + \text{const.} \\ \int x \sin \omega x dx &= \frac{1}{\omega} \left(-x \cos \omega x + \frac{1}{\omega} \sin \omega x \right) + \text{const.} \end{aligned}$$

□

Beispiel 234. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Weil die komplexe Exponentialfunktion die Periode $2\pi i$ hat, ist $e^{i(m+n)x}|_0^{2\pi} = 0$. Daher gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } m - n = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (87)$$

Definiert man für Regelfunktionen $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \bar{g}(x) dx,$$

so sind die Funktionen e^{inx} bezüglich dieses *Skalarprodukts* also *orthonormal*.

Benutzt man die Eulerschen Formeln, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx &= \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nxdx + \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nxdx \\ &+ i \left(\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nxdx - \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nxdx \right). \end{aligned}$$

Mittels (87) folgen daraus sehr leicht die sogenannten Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen, die in der Theorie der Fourieranalyse wichtig sind:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nxdx &= 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, \\ \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nxdx &= \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nxdx = 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx &= \int_0^{2\pi} \sin^2 mx dx = \pi \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

□

9.6.3 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen lassen elementar integrieren, wenn im Integrationsintervall keine Nullstellen des Nenners liegen⁴.

Zunächst kann man jede solche Funktion schreiben als ein Polynom (das kann jeder elementar integrieren) plus eine rationale Funktion mit Zählergrad < Nennergrad, und die kann man erst einmal in Partialbrüche zerlegen. Also muss man nur noch überlegen, wie man die "Partialbruchteile" integriert. Dafür kennen wir aber Stammfunktionen:

- Für $k > 1$ und $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\int \frac{dx}{(x-z)^k} = \frac{1}{(1-k)(x-z)^{k-1}} + \text{const.}$$

- Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + \text{const.}$$

- Für $z = \alpha + i\beta$ mit $\beta \neq 0$ ist

$$\int \frac{dx}{x-z} = \ln|x-z| + i \arctan \frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.} \quad (88)$$

vergleiche Beispiel 232.

Wenn die rationale Funktion reell ist, führt die Methode der Partialbruchzerlegung möglicherweise durchs Komplexe, aber natürlich ist das Endergebnis wieder reell. Dafür ein

Beispiel 235. Sei

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit reellen p und q und mit $\text{Grad } p < \text{Grad } q = 2$. Der Nenner habe eine nicht-reelle Nullstelle $z = \alpha + i\beta$. Dann ist also auch $\bar{z} = \alpha - i\beta$ eine Nullstelle, und o.E. $q(x) = (x-z)(x-\bar{z})$. Wir erhalten für die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{A}{x-z} + \frac{B}{x-\bar{z}}.$$

Die Zuhaltmethode liefert

$$A = p(\bar{z}) \underset{p \text{ reell!}}{=} \overline{p(z)} = \bar{B}.$$

Wir benutzen nun (88), und beachten, dass $\ln|x-z| = \ln|x-\bar{z}|$ und \arctan eine ungerade Funktion ist. Wir finden

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= (A + \bar{A}) \ln|x-z| + i(A - \bar{A}) \arctan \frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.} \\ &= 2 \operatorname{Re}(A) \ln|x-z| - 2 \operatorname{Im}(A) \arctan \frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.} \end{aligned}$$

□

Nicht immer ist es günstig, die Partialbruchzerlegung vollständig durchzuführen, wie das folgende Beispiel zeigt:

⁴Das wollen wir im folgenden immer voraussetzen: Die angegebenen Stammfunktionen sind nur auf dem Komplement der Nullstellen des Nenners definiert.

Beispiel 236. Es gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax + B}{(x-2)^2 + 5} dx &= \int \frac{A(x-2)}{(x-2)^2 + 5} dx + \int \frac{B+2A}{(x-2)^2 + 5} dx \\ &= \frac{A}{2} \ln |(x-2)^2 + 5| + \frac{B+2A}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{A}{2} \ln |(x-2)^2 + 5| + \frac{B+2A}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x-2}{\sqrt{5}} + \text{const.}\end{aligned}$$

□

Beispiel 237. Gesucht $\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2}$. Die Partialbruchzerlegung ist von der Form

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Die Zuhaltmethode liefert

$$A = 1, \quad C = 2.$$

Mit $x = 0$ folgt dann

$$0 = \frac{1}{-1} + \frac{B}{-2} + \frac{2}{2^2},$$

also

$$B = -1.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2} &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx \\ &= \ln |x-1| - \ln |x-2| - \frac{2}{x-2} = \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{2}{x-2} + \text{const.}\end{aligned}$$

□

9.7 Uneigentliche Integrale

Wir haben die Integration bisher nur über kompakte Intervalle $[a, b]$ definiert. Auch haben integrierbare Funktionen nach unserer Definition die Eigenschaft, sich durch Treppenfunktionen, d.h. durch Funktionen mit nur endlich vielen Werten, approximieren zu lassen. Sie sind deshalb notwendigerweise selbst immer beschränkt. In diesem Abschnitt wollen wir Integrale für den Fall definieren, dass der Integrationsbereich oder die Funktion unbeschränkt ist.

Definition 238. Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedes Intervall $[a, b]$ integrierbar ist. Dann definieren wir das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

Beispiel 239.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

□

Beispiel 240.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b,$$

und das existiert nicht.

□

Beispiel 241. Für $\alpha \neq 1$ ist

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^b = \frac{-1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \rightarrow \infty} b^{-\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1, \\ \text{nicht existent} & \text{für } \alpha < 1. \end{cases}$$

□

Offenbar ist es nützlich, ein Kriterium für die Existenz von $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ zu haben. Das folgende Kriterium ist eine Variante des Cauchy-Kriteriums für Folgen.

Lemma 242. Für eine Funktion $F : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ genau dann, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $b^* > a$, so dass

$$|F(x) - F(y)| < \epsilon \text{ für alle } x, y \geq b^*.$$

Beweis. Zeigen Sie selbst, dass die Bedingung notwendig ist.

Sie ist auch hinreichend: Seien $\epsilon > 0$ und b^* dazu wie im Kriterium gewählt. Ist (b_n) eine Folge in $[a, \infty[$ mit $\lim b_n = \infty$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \geq b^*$ für alle $n \geq N$. Dann ist für $m, n \geq N$ aber $|F(b_m) - F(b_n)| < \epsilon$, d.h. $(F(x_n))$ ist eine Cauchyfolge und damit konvergent gegen einen Wert A . Ist (c_m) eine weitere gegen ∞ konvergente Folge, so gibt es ein M mit $c_m > b^*$ für alle $m \geq M$ und damit

$$|F(c_m) - A| \leq |F(c_m) - F(b^*)| + |F(b^*) - A| < 2\epsilon.$$

Also konvergiert auch $F(c_m)$ gegen A . Daraus folgt die Existenz von $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$.

□

Beispiel 243. Weil e^{-x^2} keine elementare Stammfunktion besitzt, kann man die Existenz von

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \quad (89)$$

nicht wie bei den vorstehenden Beispielen nachweisen. Aber für $F(b) := \int_0^b e^{-x^2} dx$ und $1 < a < b$ gilt

$$|F(b) - F(a)| = \int_a^b e^{-x^2} dx \leq \int_a^b e^{-x} dx = e^{-a} - e^{-b} \leq e^{-a}.$$

Wegen $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} = 0$ folgt daraus mit dem Lemma die Existenz des uneigentlichen Integrals. Seinen Wert können wir mit unseren bisherigen Methoden nicht berechnen. Der Computer liefert $\sqrt{\pi}/2$, und das werden wir in der Analysis II bestätigen.

□

Beispiel 244 (Elektronenkonzentration und Fermi-Integral). Bei der Berechnung der Elektronenkonzentration in einem Leitungsband tritt das Integral

$$\int_{W_L}^\infty \frac{\sqrt{W - W_L}}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}} dW$$

auf. Dabei sind die Energieniveaus W_L und W_F ebenso konstant, wie k (=Boltzmannkonstante) und T (=Temperatur). Das uneigentliche Integral existiert. Es ist nämlich für $b > W_L$

$$\int_{W_L}^b \frac{\sqrt{W - W_L}}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}} dW = \sqrt{kT} \int_{W_L}^b \frac{\sqrt{\frac{W - W_L}{kT}}}{1 + e^{\frac{W - W_L}{kT} + \frac{W_L - W_F}{kT}}} dW$$

Wir substituieren $\eta = \frac{W - W_L}{kT}$ und setzen zur Abkürzung $s = \frac{W_L - W_F}{kT}$. Wir erhalten

$$\int_{W_L}^b \frac{\sqrt{W - W_L}}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}} dW = \sqrt{kT} \int_0^{\frac{b - W_L}{kT}} \frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} kT d\eta = (kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{b - W_L}{kT}} \frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} d\eta.$$

Beachten Sie, dass nach der Substitution statt der vier Parameter k, T, W_L, W_F nur noch einer, nämlich s , wesentlich im Integral auftritt. Wir müssen zeigen, dass

$$F_{\frac{1}{2}}(s) := \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} d\eta$$

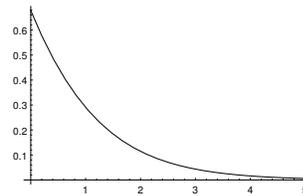
existiert. Für $\eta > 1$ ist aber

$$\frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} \leq e^{-s} \eta e^{-\eta}.$$

Deshalb ist für $1 < a < b$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{\eta}}{1 + e^{\eta + s}} d\eta \leq \int_a^b \eta e^{-\eta} e^{-s} d\eta = -e^{-s} (1 + \eta) e^{-\eta} \Big|_a^b \leq e^{-s} (1 + a) e^{-a} \rightarrow 0 \text{ für } a \rightarrow \infty.$$

Aus dem Lemma 242 folgt die Existenz des Integrals. Die Funktion $F_{\frac{1}{2}}$ heißt *Fermiintegral*. Mathematica liefert nach numerischer Integration den nebenstehenden Plot des Graphen.



□

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ definiert man analog zum obigen, und man setzt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx,$$

falls die beiden rechten Integrale existieren. Das ist eine stärkere Forderung als die Bedingung, dass $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x)dx$ existiert, wie man z.B. an $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ sieht.

Wir kommen nun zur **Integration unbeschränkter Funktionen**.

Definition 245. Sei $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $c \in]a, b]$ das Integral $\int_c^b f(x)dx$ existiert. Dann definieren wir das uneigentliche Integral

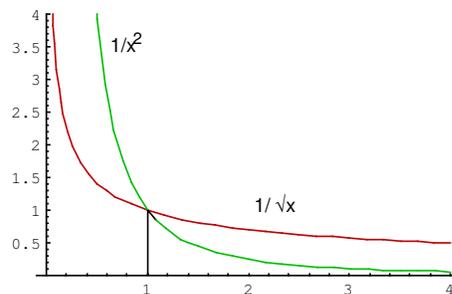
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)dx$$

falls der Grenzwert existiert. Weil $\lim_{c \rightarrow 0} \ln c = -\infty$, existiert zum Beispiel $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ nicht, vgl. die Rechnung im analogen Beispiel oben.

Beispiel 246. Sei $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a \searrow 0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_a^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \lim_{a \searrow 0} a^{-1+\alpha} = \begin{cases} \text{nicht existent,} & \text{falls } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}$$

Für die Integrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ und $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ ist also $\alpha = 1$ der kritische Parameterwert: für $\alpha = 1$ existieren die uneigentlichen Integrale beide nicht. Ist die Funktion aber $< \frac{1}{x}$, so existieren sie. Das ist in $]0, 1]$ für $\alpha < 1$ und in $[1, \infty[$ für $\alpha > 1$ der Fall.



□

10 Unendliche Reihen

10.1 Konvergenz von Reihen, geometrische Reihe

Definition 247. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine (reelle oder komplexe) Folge.

(i) Durch

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

definieren wir eine neue Folge (s_n) , die wir mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnen. Folgen dieser Form heißen *unendliche Reihen*.

(ii) Man nennt s_n auch die *n-te Partialsumme* der unendlichen Reihe.

(iii) Die unendliche Reihe heißt *konvergent gegen a*, wenn die Folge (s_n) konvergent gegen a ist. In diesem Fall schreiben wir auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ statt a und nennen diesen Grenzwert *die Summe* der unendlichen Reihe.

Bemerkungen.

1. Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hat also zwei Bedeutungen: Es bezeichnet eine Folge (die *Partialsummenfolge*) und ggf. deren Grenzwert.

2. Man schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \dots$$

3. Statt \mathbb{N} betrachtet man auch andere Summationsbereiche. $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ ist die Folge

$$\left(\sum_{k=m}^n a_k \right)_{n \geq m}$$

4. Ist der Summationsbereich klar oder irrelevant, so schreibt man auch einfach

$$\sum a_k$$

ohne Angabe der Summationsgrenzen.

Beispiel 248 (Die geometrische Reihe). Sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $a_k = x^k$. Die zugehörige Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

heißt die **geometrische Reihe**. Sie ist die wichtigste Reihe überhaupt. Die Partialsummen sind gegeben durch

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1, & \text{falls } x = 1, \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x = 1$ ist das klar. Für $x \neq 1$ kann man es durch vollständige Induktion beweisen. Oder man bemerkt, dass

$$(1-x)s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n - (x + x^2 + \dots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

Die unendliche Reihe ist für $x = 1$ also bestimmt divergent (konvergent gegen $+\infty$), für $x = -1$ ist sie divergent.

Für $|x| > 1$ ist (x^{n+1}) und daher auch die Partialsummenfolge $s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ divergent.

Die geometrische Reihe ist also für alle x mit $|x| \geq 1$ divergent.

Andrerseits ist $\lim x^n = 0$ für $|x| < 1$, und deshalb erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1.$$

□

Beispiel 249. Die Dezimaldarstellung $x = n_m \dots n_0, n_{-1} n_{-2} n_{-3} \dots$ mit den Ziffern $n_k \in \{0, \dots, 9\}$ ist definiert als

$$\sum_{k=-m}^{\infty} n_k 10^{-k} = n_m 10^m + \dots + n_0 10^0 + n_{-1} 10^{-1} + \dots$$

Später werden wir leicht einsehen, dass diese Reihe für jede Ziffernfolgen (n_k) konvergent ist, also eine reelle Zahl darstellt. Direkt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich aber jetzt schon

$$0,999\dots = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

□

Eine wichtige Anwendung konvergenter Reihen ist die Approximation des Grenzwertes durch einen einfacher überschaubaren Teil der Reihe, wie Sie es von der Taylorapproximation schon kennen.

Beispiel 250 (Dopplereffekt). Eine ruhende Quelle sendet Wellen mit der Frequenz ν und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c aus. Die Wellenlänge ist dann $\lambda = c/\nu$.

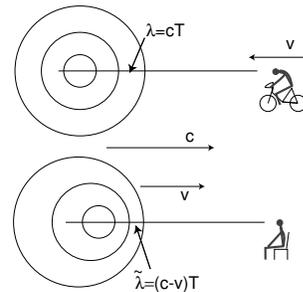
Bewegt sich der Empfänger mit der Geschwindigkeit $v \ll c$ auf die ruhende Quelle zu, so erhöht sich die empfangene Frequenz auf

$$\hat{\nu} = \frac{c+v}{\lambda} = \nu \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Bewegt sich andererseits die Quelle mit der Geschwindigkeit v auf den Empfänger zu, so verkürzt sich die Wellenlänge auf $\tilde{\lambda} = (c-v)/\nu = c/\tilde{\nu}$, die empfangene Frequenz ist

$$\tilde{\nu} = \nu \frac{1}{1-v/c} = \nu \left(1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots\right) \approx \nu \left(1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right).$$

In diesem Fall ist die Frequenz also höher als bei bewegtem Empfänger.



□

Satz 251 (Rechenregeln für konvergente unendliche Reihen). Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$ konvergente unendliche Reihen, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ gegen $A+B$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Ist weiter $c \in \mathbb{R}$ so folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (ca_k) = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Regeln für konvergente Folgen, weil unendliche Reihen ja Folgen sind. \square

Mit Produkten unendlicher Reihen ist es komplizierter. Man muss jedes Glied der einen Reihe mit jedem Glied der anderen Reihe malnehmen, was bei unendlich vielen Gliedern Probleme macht. Eine einleuchtende Anordnung der Produkte gibt die sogenannte Produktformel von Cauchy:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \text{ wobei } c_k := a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0. \quad (90)$$

Diese Formel gilt allerdings nur unter zusätzlichen Voraussetzungen, wir kommen darauf zurück.

Bemerkung: Der Reihenrest. Als m -ten Reihenrest der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnen wir die Reihe $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$. Die Partialsummen dieser Reihe sind

$$r_{m,n} := \sum_{k=m+1}^n a_k = s_n - s_m.$$

Also ist die Reihe genau dann konvergent gegen s , wenn alle Reihenreste konvergent sind, $r_m := \lim_{n \rightarrow \infty} r_{m,n} = s - s_m$, und die r_m gegen 0 konvergieren.

10.2 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen I

Wie prüft man, ob eine Reihe konvergiert? Notwendig und hinreichend ist, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge ist. Weil

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^n a_k \quad 0 < m \leq n$$

bedeutet das:

Satz 252 (Cauchy-Kriterium). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$N \leq m \leq n \quad \implies \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon.$$

Wählt man $m = n$ so ergibt sich als einfaches *notwendiges* Kriterium:

Satz 253 (Notwendiges Kriterium). Die Glieder einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge

$$\sum a_k \text{ konvergent} \implies \lim a_k = 0.$$

Aber eine Reihe, deren Glieder gegen 0 gehen, muss nicht konvergent sein.

Zitat: Vom Nutzen, den die Mathematik einem Bel Esprit bringen kann: Größte und Kleinste. Dieses Capitel in der Rechnung des Unendlichen ist überhaupt sehr lehrreich für viele Leute, die es verstehen könnten, aber nicht verstehen. Denn ich wüsste nicht, ob es einen Stand in der Welt geben kann, worin es unnütz sey zu wissen, dass bey immer zunehmenden Bemühungen zu einem Endzweck zu gelangen, der Endzweck zuweilen gänzlich verfehlt wird. (G. Chr. Lichtenberg)

Ein Beispiel ist das sehr berühmte „Gegenstück“ zur geometrischen Reihe:

Beispiel 254 (Die harmonische Reihe). Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist divergent. Das kann man so einsehen: Für $n \geq 2^k$ ist

$$s_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{> \frac{1}{2}} > 1 + \frac{k}{2}.$$

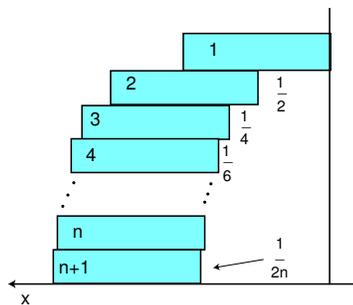
Daraus folgt $s_n \rightarrow \infty$, die Reihe ist divergent. □

Die Divergenz der harmonischen Reihe hat folgende „praktische Anwendung“:

Wir bauen einen Turm aus Ziegelsteinen der Länge 1 „von oben nach unten“, indem wir den bereits gebauten Turm so auf den nächsten Stein setzen, dass sein Schwerpunkt gerade über der Kante des neuen untersten Steins liegt, der Turm also gerade eben nicht umkippt. Ist S_{n-1} die x -Koordinate des Schwerpunktes der ersten $n-1$ Steine, so liegt der Schwerpunkt des n -ten Steins also bei $S_{n-1} + \frac{1}{2}$, und der Schwerpunkt des erweiterten Turms bei

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}((n-1)S_{n-1} + (S_{n-1} + \frac{1}{2})) \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe kann man also den Überhang beliebig groß machen. Zum Beispiel ist $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} = 1.04$, mit fünf Steinen kann man einen Überhang von mehr als einem Stein und mit 32 Steinen einen von mehr als zwei Steinen realisieren.



Wir wollen nun **hinreichende Kriterien** für die Konvergenz einer unendlichen Reihe geben.

Zunächst vergleichen wir zwei reelle Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$. Von der zweiten Reihe sei schon bekannt, dass sie konvergiert, und wir wollen annehmen, dass

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \text{für alle } k \tag{91}$$

gilt. Weil die Summanden ≥ 0 sind, sind die Folgen der Partialsummen monoton wachsend und

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k =: M.$$

Die Partialsummenfolge der Reihe $\sum a_k$ ist also monoton und beschränkt, und daher nach dem Vollständigkeitsaxiom konvergent.

Wir wollen dieses Kriterium noch verallgemeinern: Hat man statt (91) die allgemeinere Bedingung

$$|a_k| \leq b_k \quad \text{für alle } k,$$

so ergibt sich die Konvergenz der Reihe $\sum |a_k|$.

Definition 255 (Absolute Konvergenz). Eine (reelle oder komplexe) Reihe $\sum a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert.

Zunächst scheint das unmotiviert. Wir interessieren uns doch für die Reihe $\sum a_k$ und nicht für die Reihe $\sum |a_k|$. Aber es gilt der

Satz 256. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

1. *Beweis (für reelle oder komplexe Reihen).* Wir zeigen die Konvergenz von $\sum a_k$ mit dem Cauchy-Kriterium Satz 252. Sei also $\epsilon > 0$. Weil $\sum |a_k|$ konvergent ist, gibt es nach diesem Kriterium ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$N \leq m \leq n \quad \implies \quad \left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| < \epsilon.$$

Dann gilt nach der Dreiecksungleichung aber

$$N \leq m \leq n \implies \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \epsilon,$$

und damit wiederum nach dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz von $\sum a_k$. \square

2. *Beweis (nur für reelle Reihen)*. Sei wieder $\sum |a_k|$ konvergent. Dann ist nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch $\sum 2|a_k|$ konvergent. Weil

$$0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|,$$

ist deshalb nach dem obigen Argument auch die Reihe $\sum (a_k + |a_k|)$ konvergent. Dann ist wieder nach den Rechenregeln für konvergente Reihen auch

$$\sum a_k = \sum (a_k + |a_k|) - \sum |a_k|$$

konvergent. \square

Bemerkung. Reihen, die zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent sind, nennt man *bedingt konvergent*. Wir werden später sehen, dass absolut konvergente Reihen angenehmere Eigenschaften haben, als bedingt konvergente. Daher ist es sinnvoll bei den Konvergenzkriterien, die absolute Konvergenz liefern, dies auch zu vermerken.

Wir erinnern an folgenden Sprachgebrauch:

Eine Eigenschaft der Glieder einer Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt *für fast alle k* , wenn sie *für alle bis auf endlich viele Ausnahmen* gilt, d.h. wenn es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Eigenschaft auf alle x_k mit $k \geq K$ zutrifft.

Satz 257 (Vergleichskriterium=Majorantenkriterium). Gegeben seien eine reelle oder komplexe Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und eine konvergente reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Es gelte

$$|a_k| \leq b_k \text{ für fast alle } k.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, also konvergent.

Beweis. Sei $|a_k| \leq b_k$ für alle $k > n$. Die Partialsummenfolge der Reihe $\sum |a_k|$ ist monoton wachsend und beschränkt durch

$$|a_0| + \dots + |a_n| + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

also konvergent. \square

Beispiel 258. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ist konvergent nach dem Vergleichskriterium. Es ist nämlich für $k > 1$

$$\left| \frac{1}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} =: b_k.$$

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} b_k$ kann man aber leicht einsehen, weil man ihre Partialsummen explizit bestimmen kann:

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1.$$

Das konvergiert gegen 1, also ist die Reihe $\sum b_k$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium ist daher auch $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergent. Schwieriger ist, den Grenzwert der Reihe zu bestimmen. Er ist $\sum \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$. □

Der Nachteil beim Vergleichskriterium ist, dass man schon eine konvergente Majorante $\sum b_k$ haben muss. Die folgenden Kriterien benutzen (oberflächlich betrachtet) nur die zu untersuchende Reihe und sind deshalb meistens die erste Wahl, wenn man eine Reihe auf Konvergenz untersuchen will.

Satz 259 (Wurzelkriterium). Gegeben sei die (komplexe oder reelle) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Dann gilt:

(i) Gibt es ein $q < 1$, so dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(ii) Ist für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. Zu (i). Man hat $|a_k| \leq q^k$ für fast alle Folgenglieder. Vergleich mit der konvergenten Reihe $\sum q^k$ liefert die Behauptung. (Hier braucht man $q < 1$!)

Zu (ii). Hier ist $|a_k| \geq 1$ für unendlich viele k . Also konvergieren die Glieder nicht gegen Null, und die Reihe ist divergent. □

Bemerkungen.

1. Für die Anwendung des Wurzel- und des folgenden Quotientenkriteriums ist es hilfreich, sich folgendes klar zu machen:

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim x_n < 1 &\implies \limsup x_n < 1 \\ \limsup x_n < 1 &\iff \exists q < 1 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N x_n \leq q, \\ \lim x_n > 1 &\implies \limsup x_n > 1 \\ \limsup x_n > 1 &\iff \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N x_n > 1. \end{aligned}$$

Das Wurzelkriterium liefert also zum Beispiel Konvergenz, wenn

$$\lim \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \quad \text{oder} \quad \limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

und Divergenz, wenn

$$\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$

2. Das $q < 1$ im Wurzelkriterium beschränkt die $\sqrt[k]{|a_k|}$ weg von Eins. Es reicht nicht, wenn $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ für alle k .

Beispiel 260. Für $n_k \in \{0, \dots, 9\}$ ist die Dezimaldarstellung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{10^k}$$

nach dem Wurzelkriterium eine konvergente Reihe. Es ist nämlich für $k \geq 2$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{n_k}{10^k}} = \frac{\sqrt[k]{n_k}}{10} \leq \frac{\sqrt[k]{9}}{10} \leq \frac{3}{10} < 1.$$

□

Beispiel 261. Sei $0 < x < 1$ und sei

$$a_k := \begin{cases} x^{k-1} & \text{für ungerades } k, \\ x^{k+1} & \text{für gerades } k. \end{cases}$$

Dann ist

$$\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} x^{\frac{1}{k}} & \text{für ungerades } k, \\ x^{\frac{k}{k}} & \text{für gerades } k. \end{cases}$$

Weil (vgl. Übungen)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x} = 1,$$

folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = x < 1.$$

Also ist die Reihe $\sum a_k$ nach dem Wurzelkriterium konvergent.

□

Satz 262 (Quotientenkriterium). Gegeben sei die (komplexe oder reelle) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Für fast alle k sei $a_k \neq 0$. Dann gilt:

(i) Gibt es ein $q < 1$, so dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(ii) Ist für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. Zu (i). Sei

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \text{ für alle } k \geq K.$$

Daraus folgt für $k \geq K$:

$$|a_k| \leq q|a_{k-1}| \leq q^2|a_{k-2}| \leq \dots \leq q^{k-K}|a_K| = \frac{|a_K|}{q^K} q^k =: b_k.$$

Weil $|q| < 1$ (HIER wird das benutzt!) ist die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \frac{|a_K|}{q^K} \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konvergent. Aus dem Vergleichssatz folgt die absolute Konvergenz von $\sum a_k$.

Bemerkung. Stattdessen kann man auch so schließen:

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \underbrace{\sqrt[k]{\frac{|a_K|}{q^K}}}_{\rightarrow 1} \rightarrow q < 1 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Also ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergent.

Zu (ii). Aus

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \text{ für alle } k \geq K$$

folgt $|a_{k+1}| \geq |a_k| \geq |a_K| > 0$ für $k \geq K$. Darum konvergieren die a_k sicher nicht gegen null, die Reihe ist divergent. \square

Bemerkungen.

1. Wie im Beweis deutlich wird, ist das Wurzelkriterium für Konvergenz stärker als das Quotientenkriterium. Letzteres ist in der Regel angenehmer anzuwenden. Aber wenn es keine Auskunft gibt, macht es Sinn, auch das Wurzelkriterium zu versuchen. Vgl. auch das Beispiel 265.
2. Die Bemerkungen über die Anwendungen des Wurzelkriteriums gelten analog für das Quotientenkriterium.

Beispiel 263. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

ist konvergent nach dem Quotientenkriterium: Es ist nämlich

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{1/(k+1)!}{1/k!} \right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0 < 1.$$

\square

Beispiel 264. Für die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ist der Limes des Quotienten aufeinander folgender Glieder beide Male = 1. Das Quotientenkriterium macht in diesen Fällen keine Aussage. Aber wie wir gesehen haben, ist die erste Reihe divergent, die zweite nach dem Vergleichskriterium konvergent.

\square

Beispiel 265. Für die Reihe aus Beispiel 261 finden wir

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} x^3 < 1 & \text{für ungerades } k, \\ x^{-1} > 1 & \text{für gerades } k. \end{cases}$$

Daher hilft das Quotientenkriterium nicht weiter, aber das Wurzelkriterium liefert Konvergenz.

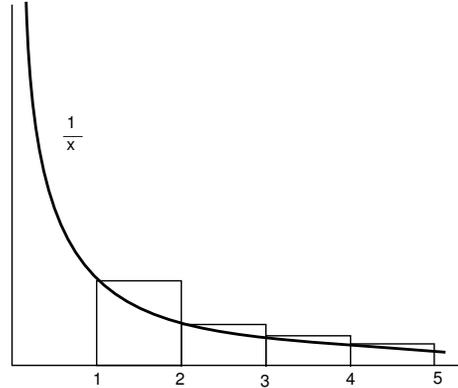
□

Wenn Sie die nebenstehende Figur studieren, liefert die „Divergenz“ des Integrals aus Beispiel 240 Ihnen einen neuen Beweis für die Divergenz der harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Vergleiche Beispiel 254.

Diese Überlegung kann man ausbauen zu einem Satz, der eine Beziehung zwischen uneigentlichen Integralen und unendlichen Reihen herstellt:



Satz 266 (Reihen-Integral-Kriterium). Sei $f: [m, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [m, \infty[$, die über jedes Intervall $[m, b]$ integrierbar ist. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_m^{\infty} f(x) dx$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{i=m}^{\infty} f(i)$ konvergiert.

Beweis. Aus $f(i) \geq f(x) \geq f(i+1)$ für $i \leq x \leq i+1$ folgt $f(i) \geq \int_i^{i+1} f(x) dx \geq f(i+1)$. Durch Summation folgt

$$\sum_{i=m+1}^{n+1} f(i) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{i=m}^n f(i).$$

Man beachte, dass das Integral wegen der Monotonie von f existiert.

Weil $f \geq 0$, sind die Partialsummen $s_n = \sum_{k=m}^n f(k)$ und die Funktion $b \mapsto \int_m^b f(x) dx$ monoton wachsend. Existiert das Integral, so folgt

$$s_{n+1} - f(m) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \int_m^{\infty} f(x) dx.$$

Also ist die Folge $(s_n)_{n \geq m}$ auch beschränkt und daher konvergent.

Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so folgt für $m \leq b \leq n$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\int_m^b f(x) dx \leq \int_m^n f(x) dx \leq s_n \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k).$$

Daher ist $J := \sup \int_m^b f(x) dx < \infty$. Ist $\epsilon > 0$, so gibt es ein $B \geq m$ mit

$$J - \epsilon < \int_m^B f(x) dx \leq J.$$

Wegen der Monotonie des Integrals gilt die entsprechende Ungleichung dann auch für alle $b \geq B$. Daher existiert $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_m^b f(x) dx$. \square

Beispiel 267. Sei $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1, \\ \text{nicht existent,} & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Aus Beispiel 240 wissen wir, dass das uneigentliche Integral für $\alpha = 1$ ebenfalls nicht existiert. Durch Anwendung des Satzes 266 auf $f(x) = 1/x^\alpha$ erhält man:

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty 1/n^\alpha$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.

\square

10.3 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen II

Die sogenannte **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

ist konvergent, aber das können wir gewiß nicht mit den bisherigen Verfahren beweisen, denn die Reihe ist nicht absolut konvergent, weil eben die harmonische Reihe divergiert.

Die Tatsache der Konvergenz kann man dennoch relativ leicht einsehen.

- Durch das wechselnde Vorzeichen wird abwechselnd die Partialsumme erhöht oder erniedrigt.
- Weil $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ werden die absoluten Differenzen monoton immer kleiner. Die geraden Partialsummen:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_2 &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ s_4 &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\ &\dots \end{aligned}$$

sind daher eine monoton fallende, die ungeraden

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\ s_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ s_5 &= 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \\ &\dots \end{aligned}$$

eine monoton wachsende Folge. Natürlich sind sie beschränkt:

$$s_1 \leq s_{2k-1} \leq s_{2k} \leq s_0.$$

Also sind die Folgen (s_{2k}) und (s_{2k+1}) konvergent.

- Weil $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, geht die Differenz zweier aufeinander folgender Partialsummen gegen Null: „Obere“ und „untere“ Partialsummenfolgen konvergieren daher gegen denselben Wert und deshalb konvergiert auch (s_n) gegen diesen Wert, vgl. den Beweis von Satz 93.

Der Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe ist $\ln 2$, wie wir später zeigen werden.

Diese vorstehende Argumentation läßt sich unmittelbar zu einem Beweis für folgendes Konvergenzkriterium erweitern.

Satz 268 (Leibniz-Kriterium). Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ gelte

(i) Die Folge (a_k) ist monoton fallend:

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0,$$

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Dann ist die Reihe konvergent. Ihre Summe liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist

$$s_{2m-1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq s_{2m}$$

und

$$s_{2m+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq s_{2m}.$$

Beispiel 269. Wir setzen für $k \geq 1$

$$a_k := \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^k \frac{1}{k}.$$

Dann sind die $a_k \geq 0$ und konvergieren gegen 0, aber die Folge ist nicht monoton. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

ist nicht konvergent, denn sonst wäre auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k a_k - (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (-1)^k \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

konvergent. Ist sie aber nicht. □

An der alternierenden harmonischen Reihe kann man noch ein wichtiges Phänomen deutlich machen: Bei unendlichen Reihen ist die Reihenfolge der Glieder im allgemeinen nicht mehr gleichgültig, es gilt **kein „Kommutativgesetz“**. Das liegt daran, dass eine Umordnung von (unendlich vielen) Gliedern die Partialsummenfolge völlig verändert. Bei der alternierenden harmonischen Reihe sind nämlich die Reihen der positiven bzw. negativen Glieder

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$$

beide divergent. (Die zweite ist einfach die halbe harmonischen Reihe und deshalb divergent; die Glieder und darum die Partialsummen der ersten Reihe sind aber offensichtlich größer als die der zweiten, weshalb auch die erste Reihe divergent ist.) Darum kann man von der alternierenden Reihe zunächst so viele positive Glieder (der Reihe nach) addieren, bis man z.B. über 27 ist. Dann addiert man das erste negative Glieder und ist wieder unter 27. Dann addiert man weiter positive Glieder, bis man wieder über 27 ist und dann das zweite

negative Glied. Auf diese Weise erwischt man schließlich alle Glieder der Reihe und hat sie so umgeordnet, dass die neue Reihe nun gegen 27 konvergiert. Es ist offensichtlich, dass man auf diese Weise statt 27 auch jeden anderen Grenzwert einschließlich bestimmter Divergenz gegen $+\infty$ oder $-\infty$ durch geeignete Umordnung erzielen kann.

Diese Zauberei funktionierte, weil man Glieder verschiedenen Vorzeichens hat, die für sich genommen divergente Reihen bilden. Wenn nicht nur die Reihe $\sum a_k$, sondern auch die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert, kann das wohl nicht mehr passieren. Das ist unser nächstes Thema.

10.4 Die Segnungen absoluter Konvergenz

Absolut konvergente Reihen haben Eigenschaften, die bei bedingt konvergenten (eventuell) fehlen, und die sie den endlichen Summen näherbringen: Man kann sie beliebig umordnen ohne das Konvergenzverhalten zu verändern, und man kann sie auf die naheliegende Weise miteinander multiplizieren. Das wollen wir in diesem Abschnitt zeigen.

Definition 270. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ heißt *eine Umordnung* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wenn es eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$ gibt, so dass für alle k gilt $a'_k = a_{\sigma(k)}$.

Satz 271 (Umordnungssatz). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ ebenfalls absolut konvergent und beide Reihen haben dieselbe Summe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k.$$

Beweis. 1. Es genügt zu zeigen, dass die umgeordnete Reihe ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert wie das Original ist. Wendet man den Satz dann auf $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ an, so folgt auch die absolute Konvergenz.

2. Wir bezeichnen die Partialsummen mit s_n bzw. s'_n und setzen $S := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Es genügt zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |s_n - s'_n| < \epsilon. \quad (92)$$

Ohne Einschränkung ist nämlich für $n \geq N$ auch $|s_n - S| < \epsilon$ und daher

$$|s'_n - S| \leq |s'_n - s_n| + |s_n - S| < 2\epsilon.$$

Also konvergiert $\sum a'_k$ gegen S .

3. Zum Beweis von (92). Sei $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$ eine bijektive Abbildung, $a'_k := a_{\sigma(k)}$ und sei $\epsilon > 0$.

Wir betrachten ein $N_1 \in \mathbb{N}$ und dazu ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\} \supset \{0, \dots, N_1\}.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$

$$s'_n - s_n = \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{N_1} a_k - \sum_{k=N_1+1}^n a_k = \sum_{\substack{k=0 \\ \sigma(k) > N_1}}^n a_{\sigma(k)} - \sum_{k=N_1+1}^n a_k.$$

Es folgt

$$|s'_n - s_n| \leq \sum_{\substack{k=0 \\ \sigma(k) > N_1}}^n |a_{\sigma(k)}| + \sum_{k=N_1+1}^n |a_k| \leq 2 \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k|.$$

Weil $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist, können wir ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (93)$$

Zu diesem N_1 wählen wir N wie oben und erhalten (92). □

Wir zeigen die Umkehrung des Umordnungssatzes:

Satz 272. *Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so lässt sie sich so umordnen, dass sie konvergent gegen einen beliebig vorgegebenen Wert aus $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ist.*

Beweis. Seien $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Folgen der positiven bzw. der Absolutbeträge der negativen Reihenglieder in ihrer natürlichen Reihenfolge. Beide sind unendlich, sonst wäre die Reihe absolut konvergent, und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = 0.$$

Wenn wir zeigen können, dass $\sum_{k=0}^{\infty} P_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k$ beide divergent sind, folgt die Behauptung mit demselben Trick, mit dem wir im vorangegangenen Abschnitt die alternierende harmonische Reihe umgeordnet hatten.

Wir setzen

$$p_k := \frac{|a_k| + a_k}{2}, \quad q_k := \frac{|a_k| - a_k}{2}.$$

Also ist $p_k = a_k$, falls $a_k > 0$ und $p_k = 0$, wenn $a_k < 0$. Daher habe die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ und $\sum_k P_k$ bis auf Wiederholungen dieselbe Partialsummenfolge. Gleiches gilt für $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$ und $\sum_k Q_k$. Also müssen wir zeigen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$ beide divergent sind. Wäre eine konvergent, so wegen

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (p_k - q_k) = \sum_{k=0}^n p_k - \sum_{k=0}^n q_k$$

auch die andere. Dann wäre aber auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} (p_k + q_k) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergent im Widerspruch zur Voraussetzung. Also sind beide divergent. \square

Satz 273 (Cauchyprodukt). *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ konvergente Reihen und eine der beiden absolut konvergent. Setze*

$$c_m := \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ konvergent, und für die Summen gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m. \quad (94)$$

Bemerkung. Wir zeigen später, dass (94) auch gilt, wenn alle drei Reihen konvergent sind, vgl. Korollar 288.

Beweis. Wir bezeichnen die Summen der beiden gegebenen Reihen mit A bzw. B und setzen

$$A_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n := \sum_{l=0}^n b_l, \quad C_n := \sum_{m=0}^n c_m.$$

Wir nehmen an, dass $\sum a_n$ absolut konvergiert und setzen

$$\beta_n := B_n - B.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \dots + a_n (B + \beta_0) \\ &= A_n B + \underbrace{a_0 \beta_n + \dots + a_n \beta_0}_{\gamma_n}. \end{aligned}$$

Wir zeigen $\gamma_n \rightarrow 0$. Dann ist $\lim C_n = \lim A_n B = AB$. Sei

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Sei $\epsilon > 0$. Weil $\beta_k \rightarrow 0$, können wir $N_1 \in \mathbb{N}$ wählen mit

$$|\beta_k| < \frac{\epsilon}{2\alpha + 1} \quad \text{für alle } k \geq N_1.$$

Für diese $n \geq N_1$ ist dann

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \dots + \beta_{N_1} a_{n-N_1}| + |\beta_{N_1+1} a_{n-N_1-1}| + \dots + |\beta_n a_0| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \dots + \beta_{N_1} a_{n-N_1}| + \frac{\epsilon}{2\alpha + 1} \sum_{k=0}^{n-N_1-1} |a_k| \\ &< |\beta_0 a_n| + \dots + |\beta_{N_1} a_{n-N_1}| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Weil $a_k \rightarrow 0$, können wir ein N_2 so wählen, dass für alle $k \geq N := N_1 + N_2$

$$|a_k| < \frac{\epsilon}{2(|\beta_0| + \dots + |\beta_{N_1}|) + 1}.$$

Dann ist für alle $n \geq N$

$$|\gamma_n| < \epsilon.$$

□

Beispiel 274. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ ist nach dem Leibnizkriterium konvergent. Das Cauchyprodukt dieser Reihe mit sich selbst hat die Glieder c_m mit

$$|c_m| = \left| \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (-1)^{m-k}}{\sqrt{k+1} \sqrt{m-k+1}} \right| = \sum_{k=0}^m \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{m-k+1}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{m+1} \sqrt{m+1}} = 1.$$

Also ist $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ nicht konvergent.

□

Wie Sie sich an der Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$ klarmachen können, gilt für unendliche Reihen auch kein "verallgemeinertes Assoziativgesetz": Durch Setzen von geeigneten Klammern wird die vorstehende Reihe konvergent, weil man nur noch eine Teilfolge der Partialsummenfolge betrachtet. Man kann zeigen, aber wir verzichten darauf, dass man absolut konvergente Reihen auch beliebig klammern darf, ohne die Konvergenz und den Limes zu ändern.

10.5 Potenzreihen

Die wichtigsten Funktionen erhält man durch eine Verallgemeinerung der Polynome auf unendliche Summen:

Definition 275. Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Wir wollen diese Reihen gleich im Komplexen betrachten und nehmen deshalb an, dass die Koeffizienten a_k und der Entwicklungspunkt z_0 komplexe Zahlen sind. Weiter ist z eine komplexe Variable.

Auf der Menge $D \subset \mathbb{C}$ aller z , für die die Reihe konvergiert, liefert $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ also eine Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}.$$

Wir untersuchen nun die Frage, für welche Werte von z die Reihe konvergiert. Es ist einleuchtend, dass sie konvergiert, wenn $|z - z_0|$ „klein“ ist, und divergiert, wenn diese Zahl „groß“ ist. Dabei hängt die Bedeutung von „klein“ und „groß“ vermutlich von den a_k ab.

Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe konvergent, wenn

$$|z - z_0| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup \sqrt[k]{|a_k| |z - z_0|^k} < 1,$$

und divergent, wenn

$$|z - z_0| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup \sqrt[k]{|a_k| |z - z_0|^k} > 1.$$

Definition 276 (Konvergenzradius). Zur Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ heißt

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$$

der *Konvergenzradius*. Er ist $+\infty$, wenn der Limes superior = 0 ist und 0, wenn der Limes superior = $+\infty$ ist.

Damit ergibt sich der

Satz 277 (Konvergenz von Potenzreihen). Sei $R \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} |z - z_0| < R &\implies \text{die Reihe } \sum a_k (z - z_0)^k \text{ ist absolut konvergent,} \\ |z - z_0| > R &\implies \text{die Reihe } \sum a_k (z - z_0)^k \text{ ist divergent.} \end{aligned}$$

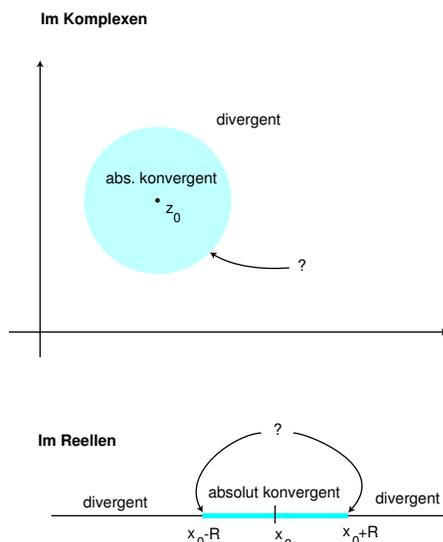
Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ ist ein „offener“ Kreis vom Radius R um den Mittelpunkt z_0 , der sogenannte Konvergenzkreis der Reihe.

Bemerkungen.

1. Ein *offener* Kreis ist eine Kreisfläche ohne die begrenzende Kreislinie. Will man die letztere dazurechnen, so spricht man von einem *abgeschlossenen* Kreis.
2. Über die Konvergenz für z -Werte auf dem Rand des Konvergenzkreises ($|z - z_0| = R$) gibt der Satz keine Auskunft.
3. Ist die Reihe reell, also alle a_k sowie z und z_0 reell, so ist der „Konvergenzkreis“ ein symmetrisches Intervall

$$z_0 - R < z < z_0 + R$$

um z_0 .



4. Für $R = \infty$ konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ bzw. $z \in \mathbb{R}$.
5. Ein Wort zur Sprache: Sagen Sie nicht, die Reihe sei *innerhalb des Konvergenzradius konvergent*. Der Konvergenzradius ist eine Zahl, z.B. 7. Was soll es bedeuten, dass die Reihe innerhalb von 7 konvergiert?

Beispiel 278. Die geometrische Reihe $\sum z^k$ ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{1}} = 1.$$

Es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1.$$

□

Beispiel 279. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$ hat ebenfalls Konvergenzradius 1, wie man bequem mit dem Quotientenkriterium sieht. Noch einfacher: Wie wir wissen, ist sie

- für $z = 1$ divergent (harmonische Reihe),
- für $z = -1$ konvergent (alternierende harmonische Reihe).

Also muss der Konvergenzradius 1 sein.

□

Beispiel 280. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} z^{2k} \tag{95}$$

ist komplizierter: Der Konvergenzradius *nicht* etwa gegeben durch

$$1/R = \limsup \sqrt[k]{\frac{5^k}{k+1}}.$$

Es ist nämlich

$$a_k = \begin{cases} \frac{5^{k/2}}{\frac{k}{2}+1}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Weil die geraden Terme positiv sind, ist also

$$1/R = \limsup \sqrt[2k]{\frac{5^k}{k+1}} = \frac{\sqrt{5}}{\lim \sqrt[2k]{k+1}} = \sqrt{5}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\lim \sqrt[2k]{k+1} = 1$. Warum gilt das?

Eine andere Möglichkeit, den Konvergenzradius dieser Reihe zu bestimmen, ist die direkte Anwendung des Quotientenkriteriums:

$$\left| \frac{\frac{5^{k+1} z^{2k+2}}{k+2}}{\frac{5^k z^{2k}}{k+1}} \right| = 5|z|^2 \frac{k+1}{k+2} \rightarrow 5|z|^2.$$

Also konvergiert die Reihe für alle z mit $|z|^2 < \frac{1}{5}$; sie divergiert für alle mit $|z|^2 > \frac{1}{5}$. Der Konvergenzradius ist also $\sqrt{\frac{1}{5}}$.

□

Beispiel 281. Auch für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

findet man den Konvergenzbereich am einfachsten mit dem Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{k!z}{(k+1)!} \right| = \left| \frac{z}{k+1} \right| \rightarrow 0.$$

Also ist die Reihe für alle z absolut konvergent.

□

Für Partialsummen von Reihen gilt natürlich die Dreiecksungleichung. Deshalb gilt für absolut konvergente Reihen

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Insbesondere gilt deshalb für z im Inneren des Konvergenzkreises einer Potenzreihe

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z - z_0|^k.$$

Davon werden wir im folgenden wiederholt Gebrauch machen.

10.6 Differentiation von Potenzreihen

Wir betrachten im folgenden wieder reelle Potenzreihen, weil wir Funktionen mit komplexem Argument noch nicht differenzieren können.

Satz 282 (Differentiation von Potenzreihen). Die Funktion f sei durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R gegeben:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < R.$$

Dann gilt

(i) f ist auf $\{x \mid |x - x_0| < R\}$ differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k. \quad (96)$$

(ii) Die Potenzreihe (96) hat ebenfalls den Konvergenzradius R .

Kurz: Potenzreihen darf man gliedweise differenzieren. Der Konvergenzradius ändert sich dabei nicht.

Beweis. Zu (ii). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe

$$(x - x_0) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^k$$

konvergiert. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ ist der Konvergenzradius der letzteren Reihe

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[k]{k|a_k|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}} = R.$$

Zu (i). Sei nun $|p - x_0| < R$. Wir wollen zeigen:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x aus dem Konvergenzintervall mit $0 < |x - p| < \delta$

$$\left| \underbrace{\frac{f(x) - f(p)}{x - p} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (p - x_0)^{k-1}}_{=:(*)} \right| < \epsilon. \quad (97)$$

Das beweist dann die Differenzierbarkeit in p .

Zunächst ist nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (p - x_0)^{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \frac{(x - x_0)^k - (p - x_0)^k}{x - p} - k a_k (p - x_0)^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k a_k (\xi_k - x_0)^{k-1} - k a_k (p - x_0)^{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k ((\xi_k - x_0)^{k-1} - (p - x_0)^{k-1}) \end{aligned}$$

für ξ_k zwischen x und p .

Sei also $\epsilon > 0$. Wir wählen ein r mit $|p - x_0| < r < R$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1}$ konvergent, und daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dann ist für x mit $|x - x_0| < r$

$$\begin{aligned} (*) &\leq \sum_{k=0}^N k|a_k| |(\xi_k - x_0)^{k-1} - (p - x_0)^{k-1}| \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k| \underbrace{|\xi_k - x_0|}_{< r}^{k-1} + \sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k| \underbrace{|p - x_0|}_{< r}^{k-1} \\ &\leq \sum_{k=0}^N ka_k |(\xi_k - x_0)^{k-1} - (p - x_0)^{k-1}| + \frac{2}{3}\epsilon \end{aligned}$$

In der ersten Summe stehen nur endlich viele Terme. Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass $]p - \delta, p + \delta[\subset]x_0 - r, x_0 + r[$ und für alle $x \in]p - \delta, p + \delta[$ (also $\xi_k \in]p - \delta, p + \delta[$) gilt

$$\sum_{k=0}^N ka_k |(\xi_k - x_0)^{k-1} - (p - x_0)^{k-1}| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Daraus folgt (97). □

Wir kommen nun dazu, die noch ausstehenden Existenzbeweise für \exp und \sin zu führen, vgl Satz 154 und Satz 186.

Beispiel 283 (Exponentialreihe). Wir haben im Abschnitt über die Exponentialfunktion gesehen: Wenn es eine Lösung $y = \exp$ des Anfangswertproblems

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

gibt, muss nach dem Satz von Taylor gelten

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Das ist aber einer Potenzreihe mit $R = \infty$. Die Reihe definiert also eine differenzierbare Funktion auf \mathbb{R} , für deren Ableitung gilt:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Damit ist die Existenz der Exponentialfunktion bewiesen. □

Beispiel 284. Ebenso zeigt man, dass die Potenzreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

auf ganz \mathbb{R} eine zweimal differenzierbar Funktion y mit

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

definiert. Das liefert den Existenzbeweis für die Sinusfunktion. Man findet für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

□

Bemerkung. Viele Funktionen sind durch Potenzreihen, aber auch durch andere unendliche Reihen von Funktionen gegeben, zum Beispiel periodische Funktionen durch die sogenannten *Fourierreihen*. Eine naheliegende Frage ist dann diese:

Gegeben Funktionen $f_k : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall J , so dass

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

für alle $x \in J$ definiert (die Reihe also konvergent) ist. Unter welchen Voraussetzungen übertragen sich Eigenschaften wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit der f_k dann auf die Funktion f ?

Dieses Thema gehört zum üblichen Standardrepertoire der Analysis I, aber wir vertagen es aus Zeitgründen in die Analysis II, wo man es in einem allgemeineren Rahmen behandeln kann.

10.7 Abelscher Grenzwertsatz

Reelle Potenzreihen definieren im inneren ihres Konvergenzintervalles differenzierbare und deshalb stetige Funktionen. Gelegentlich liegt auch in einem oder beiden Randpunkten des Konvergenzintervalls noch Konvergenz vor. Wie steht es dort dann mit der Stetigkeit? Weil die Randpunkte offenbar besonders ausgezeichnet sind, ist diese Frage von einigem Interesse, vergleichen Sie die Beispiele unten.

Satz 285 (Abelscher Grenzwertsatz). Die reelle Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ sei auf dem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ konvergent. Dann ist die durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

definierte Funktion stetig auf J .

Bemerkungen. 1. Sei R der Konvergenzradius der Reihe. Auf $\{x \mid |x-x_0| < R\}$ ist f dann sogar differenzierbar, also erst recht stetig. Der Satz ist also nur interessant für die Randpunkte (=Grenzwerte) des offenen Konvergenzintervalls.

2. Auch komplexe Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzkreises "komplex differenzierbar" (was auch immer das bedeuten mag) und deshalb stetig. Der Abelsche Grenzwertsatz läßt sich aber *nicht* auf den komplexen Fall verallgemeinern, vgl. Beispiel 302.

Beweis. Wir beschränken uns beim Beweis auf den Fall $x_0 = 0, R = 1$ und nehmen an, dass die Reihe auch noch für $x = 1$ konvergiert. Der allgemeine Fall folgt daraus leicht: Betrachte die Reihe $\sum a_k(\pm R)^k x^k$.

Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad s := f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Dann ist $s_{-1} = 0$. Wir beschränken uns auf $0 < x < 1$ und erhalten:

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n (s_k - s_{k-1}) x^k = (1-x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k \right) + s_n x^n.$$

Die Folge (s_n) ist konvergent, also beschränkt, und aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ folgt deshalb $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n x^n = 0$. Damit ergibt sich

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k, \quad |x| < 1.$$

Andrerseits folgt aus $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, dass

$$s = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s x^k.$$

Sei $\epsilon > 0$. Wir wollen zeigen, dass es dazu ein $\delta \in]0, 1[$ gibt, so dass

$$1 - \delta < x < 1 \quad \implies \quad |f(x) - s| < \epsilon. \quad (98)$$

Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$, über das wir später verfügen wollen, und erhalten für $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - s| &= \left| (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s)x^k \right| \leq (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} |s_k - s|x^k \\ &\leq (1-x) \sum_{k=0}^N |s_k - s|x^k + (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} |s_k - s|x^k. \end{aligned}$$

Durch Wahl von N können wir erreichen, dass in der zweiten Summe alle $|s_k - s| < \epsilon/2$, so dass der ganze zweite Summand $< (1-x) \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{1-x} = \frac{\epsilon}{2}$ ist.

Der erste Summand geht für $x \nearrow 1$ gegen 0, es gibt also ein δ mit (98). \square

Die beiden folgenden Beispiele liefern insbesondere interessante Reihen-Grenzwerte.

Beispiel 286 (Logarithmische Reihe). Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} \tag{99}$$

hat den Konvergenzradius 1 (Beweis?) und definiert deshalb eine differenzierbare Funktion $f :]-1, +1[\rightarrow \mathbb{R}$. Für ihre Ableitung gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = -\frac{d}{dx} \ln(1-x) = \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1-x}.$$

Also ist nach dem Konstanzkriterium

$$\ln \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = c.$$

Einsetzen von $x = 0$ zeigt, dass die Konstante $c = 0$ ist. Man erhält die sogenannte Logarithmusreihe

$$\boxed{\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad |x| < 1.}$$

Die Potenzreihe rechts ist auch für $x = -1$ noch konvergent. Nach dem Satz von Abel 285 ist der Grenzwert $= \lim_{x \searrow -1} \ln \frac{1}{1-x} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$. Wir benutzen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \pm = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

und erhalten den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe:

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots}$$

\square

Beispiel 287 (Leibnizreihe). Für $|x| < 1$ liefert die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k.$$

Damit erhält man wie oben aus

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

die arctan-Reihe

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1,$$

und für $x = 1$ aus dem Abelschen Grenzwertsatz 285 die Leibnizsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots$$

□

Korollar 288 (Cauchyprodukt). *Gegeben seien die drei konvergenten reellen Reihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

mit

$$c_m := \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}.$$

Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Bemerkung: Vergleichen Sie das mit Satz 273.

Beweis. Die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

haben offenbar Konvergenzradien ≥ 1 . Für $|x| < 1$ sind sie absolut konvergent, und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist das Cauchyprodukt der beiden anderen! Deshalb gilt nach Satz 273 für $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Nach dem Satz von Abel sind die durch die Reihen definierten Funktionen in $x = 1$ linksseitig stetig, und daraus folgt die Behauptung. □

10.8 Die Taylorreihe

Ist $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, also eine sogenannte C^∞ -Funktion, so bildet die Folge der Taylorpolynome $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von f in $x_0 \in J$ eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

die sogenannte *Taylorreihe von f in x_0* . Es ist aber nicht klar, ob diese Reihe für $x \neq x_0$ überhaupt konvergiert oder sogar gegen $f(x)$ konvergiert. Anders gesagt: Es ist unklar ob die Restglieder

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

für $n \rightarrow \infty$ (nicht für $x \rightarrow x_0$) konvergieren oder sogar gegen 0 konvergieren. *Wenn* das so ist, erhält man also eine Darstellung von f als eine Potenzreihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Für viele Funktionen ist das wenigstens lokal der Fall, und solche Funktionen nennt man auch *reell-analytisch*.

Beispiel 289. Konvergente Potenzreihen sind gleichzeitig die Taylorreihe der durch sie dargestellten Funktionen im Entwicklungspunkt. Das ist klar, weil man Potenzreihen wie Polynome gliedweise differenzieren darf. Also folgt wie für Polynome $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Damit sind die Reihen für \sin , \cos oder \exp die Taylorreihen dieser Funktionen in 0.

□

Aber im allgemeinen ist die Situation komplizierter.

Beispiel 290. Das Beispiel 287 zeigt

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1,$$

aber für $|x| > 1$ ist zwar der \arctan wunderbar definiert, die Potenzreihe hingegen divergent.

□

Beispiel 291. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist auf \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar und alle Ableitungen in 0 sind 0. Das folgt mit der Kettenregel aus Beispiel 176. Also ist die Taylorreihe $=0$ und damit konvergent. Aber sie konvergiert nur für $x = 0$ gegen $f(x)$.

□

Ein Satz von Emil Borel besagt, dass es zu jeder Potenzreihe $\sum a_k x^k$ (auch solchen mit Konvergenzradius $R = 0$) eine C^∞ -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, deren Taylorreihe im Entwicklungspunkt 0 gerade die vorgegebene Reihe ist.

Satz 292 (E. Borel). *Jede Folge reeller Zahlen ist die Folge der Taylorkoeffizienten einer geeigneten C^∞ -Funktion im Entwicklungspunkt 0.*

Vorweg formulieren wir die durch vollständige Induktion leicht zu beweisende
Höhere Produktregel. Für $n > 0$ und n -mal differenzierbare Funktionen gilt

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Beweis zum Satz von Borel. Wir wollen nun zu einer gegebenen Folge reeller Zahlen (a_n) eine C^∞ -Funktion f auf \mathbb{R} konstruieren, für die

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$$

gilt. Als Ansatz wählen wir eine Modifikation der Taylorreihe:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi(q_n x) x^n. \quad (100)$$

Dabei sei ϕ eine $C^\infty(\mathbb{R})$ -Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \phi &\geq 0, \\ \phi(x) &= 1 \quad \text{für } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \phi(x) &= 0 \iff x \leq -1 \text{ oder } 1 \leq x. \end{aligned}$$

Eine solche Funktion konstruiert man wie im Abschnitt 4.3 unter Benutzung der C^∞ -Funktion aus 176.

Weiter sei (q_n) eine Folge reeller Zahlen > 1 , über deren Wahl wir später verfügen wollen. Zunächst gilt für $r < n$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^r}{dx^r} a_n \phi(q_n x) x^n \right| &\leq \left| a_n \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \phi^{(r-k)}(q_n x) q_n^{r-k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \right| \\ &\leq n! |a_n| \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \left| \phi^{(r-k)}(q_n x) \right| \frac{|q_n x|^{n-k}}{q_n^{n-r}} \frac{1}{(n-k)!} \\ &\leq \frac{n! |a_n|}{q_n} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \left| \phi^{(r-k)}(q_n x) \right| |q_n x|^{n-k}. \end{aligned}$$

Für $|q_n x| \geq 1$ ist $\phi^{(r-k)}(q_n x) = 0$, und damit verschwindet auch die Summe rechts. Andernfalls, d.h. für $|q_n x| < 1$, ist mit

$$A_n := \max\{|\phi^{(k)}(x)|; x \in \mathbb{R}, k \leq n\}$$

$$\left| \frac{d^r}{dx^r} a_n \phi(q_n x) x^n \right| \leq \frac{n! |a_n|}{q_n} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \left| \phi^{(r-k)}(q_n x) \right| \leq \frac{n! |a_n|}{q_n} 2^n A_n.$$

Bei vorgegebener Folge (a_n) wählen wir nun

$$q_n := 1 + n^2 2^n n! |a_n| A_n.$$

Dann folgt für alle $n > r$

$$\left| \frac{d^r}{dx^r} a_n \phi(q_n x) x^n \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Das liefert für jedes $r \in \mathbb{N}$ eine konstante konvergente Majoranten (ab Glied $r + 1$) für

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^r}{dx^r} (a_n \phi(q_n x) x^n).$$

Aus dem Satz 305 folgt durch vollständige Induktion, dass (100) beliebig oft (gliedweise) differenzierbar ist. Weil $\phi(q_n x) = 1$ auf einer kleinen Umgebung von 0, ergibt sich weiter

$$\frac{d^r a_n \phi(q_n x) x^n}{dx^r}(0) = \begin{cases} n! a_n & \text{für } r = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher ist

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n.$$

□

Beispiel 293 (Bernoullizahlen). Mit der Regel von Bernoulli-de L'Hospital zeigt man leicht, dass

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

eine auf ganz \mathbb{R} stetige Funktion darstellt. In Wahrheit ist diese Funktion sogar beliebig oft differenzierbar und wird für $|x| < 2\pi$ durch ihre Taylorreihe dargestellt.⁵ Die Ableitungen

$$f^{(k)}(0) =: B_k$$

heißen die *Bernoullizahlen*.

Schreibt man $x = (e^x - 1)f(x)$, so folgt aus dem Cauchyproduktsatz

$$x = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} x^l \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k}{k!(m-k)!} \right) x^m.$$

Aus der Eindeutigkeit der Taylorkoeffizienten folgt

$$0 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} B_k \text{ für } m \geq 2,$$

und das liefert eine Rekursionsformel zur Berechnung der B_k aus $B_0 = f(0) = 1$.

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, \dots, B_{12} = -\frac{691}{2730}, \dots$$

„Heute treten die Bernoulli-Zahlen an vielen Stellen in der Zahlentheorie, aber auch in anderen Gebieten, zum Beispiel der algebraischen Topologie, in Erscheinung, und man hat den Eindruck, dass sie mit ganz besonders tiefliegenden und zentralen Fragestellungen zusammenhängen“ (W. Scharlau/ H. Opolka: Von Fermat bis Minkowski, Springer 1980). In dem angegebenen Buch finden Sie sehr gut verständlich auch Herleitungen für eher „einfache“ Eigenschaften der Bernoullizahlen:

$$\sum_{k=0}^{N-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} B_j N^{n+1-j}, \quad (\text{J. Bernoulli 1713})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}| \quad (\text{Euler 1736}).$$

□

⁵Das ist mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln vermutlich nur sehr mühsam zu beweisen, in der komplexen Funktionentheorie ergeben sich diese Behauptungen aber ohne jede Rechnung ganz von selbst.

10.9 Die komplexe Exponentialfunktion

Vergleichen Sie hierzu den Abschnitt 8.6.

Die komplexe Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist offenbar (?) für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent und definiert deshalb eine Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

deren Einschränkung auf die reelle Achse \mathbb{R} die “alte” Exponentialfunktion ist, vgl. Beispiel 283.

Für rein-imaginäres iy erhält man

$$\exp(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(iy)^{2m}}{(2m)!} + \frac{(iy)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right).$$

Machen Sie sich anhand der Partialsummen klar, warum die letzte Gleichung gilt, sie ist nicht ganz trivial! Weil auch die Reihen nur über die geraden bzw. nur über die ungeraden k -Werte konvergent sind, ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \exp(iy) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

Für $y = \pi$ liefert das insbesondere die berühmte Eulersche Identität $e^{i\pi} = -1$.

Mit dem Satz über das Cauchyprodukt ergibt sich für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{z^k}{k!} \frac{w^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} z^k w^{m-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z+w)^m}{m!} = \exp(z+w). \end{aligned}$$

Das ist also ein neuer Beweis für das Additionstheorem der Exponentialfunktion, und einer im Komplexen dazu. Insbesondere hat man also für reelle x, y

$$\exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y).$$

11 Ein Ausblick auf die Fourierreihen

Für eine moderne Theorie der Fourierreihen braucht man eine solide (Lebesguesche) Integrationstheorie. Die kommt in diesem Analysiszyklus aber erst im dritten Semester. Andererseits ist die Fouriertheorie so wichtig in vielen Anwendungen und bietet so hübsche Aspekte, dass ich Ihnen davon gern noch etwas zeigen möchte. Die schwierigen Beweise lasse ich für die Analysis III, und auch sonst bin ich etwas großzügig: Zum Beispiel werden gegen Ende des Abschnittes Fourierreihen gliedweise differenziert, was gerade bei Fourierreihen im allgemeinen nicht erlaubt ist ...

Die Taylorapproximation liefert zu einer gegebenen Funktion f lokal ein approximierendes Polynom, sagen wir $T_{f,n}$. Wie wählt man dieses Polynom? Die Formel für die Taylorkoeffizienten $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ war gerade so gemacht, dass $T_{f,n} = f$, falls f selbst schon ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

Wenn man periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ untersuchen will, kann man versuchen, diese durch einfache periodische Funktionen wie Sinus und Cosinus zu approximieren. Genauer wollen wir eine Funktion f mit der Periode $T > 0$, also mit

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

approximieren durch eine Linearkombination der (ebenfalls T -periodischen!) Funktionen $\cos(k\frac{2\pi}{T}t)$ und $\sin(k\frac{2\pi}{T}t)$. Der Quotient $\omega = \frac{2\pi}{T}$ heißt die zu T gehörige *Kreisfrequenz*. Wir nennen eine Funktion der Form

$$F(t) := \sum_{k=0}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (101)$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ein *trigonometrisches Polynom vom Grad n* .

Gibt es (wie bei der Taylorapproximation) ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten a_k, b_k , so dass $F(t)$ sich reproduziert, wenn es bereits ein trigonometrisches Polynom ist?

Dazu erinnern wir an die früher hergeleiteten sogenannten Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mt \sin ntdt &= 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, \\ \int_0^{2\pi} \cos mt \cos ntdt &= \int_0^{2\pi} \sin mt \sin ntdt = 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 mtdt &= \int_0^{2\pi} \sin^2 mtdt = \pi \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitutionsregel ergibt sich daraus für $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos m\omega t \sin n\omega t dt &= 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, \\ \int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t dt &= \int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t dt = 0 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, \\ \int_0^T \cos^2 m\omega t dt &= \int_0^T \sin^2 m\omega t dt = T/2 \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren nun (101) mit $\sin(l\omega t)$, wobei $l \in \mathbb{N}$, und integrieren über $[0, T]$. Nach den Orthogonalitätsrelationen fallen in der Summe fast alle Terme weg, und es bleibt

$$\int_0^T F(t) \sin(l\omega t) dt = \frac{T}{2} b_l$$

für $l > 0$, also

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Ebenso finden wir

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (102)$$

Der Koeffizient b_0 interessiert nicht, weil $\sin(0\omega t) = 0$.

Der Koeffizient a_0 ist hat wegen $\int_0^T \cos^2(0\omega t) dt = T$ eine Sonderrolle. Damit (102) auch für $k = 0$ gilt, ändert man die Notation ab und schreibt trigonometrische Polynome als

$$F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (103)$$

Ist nun $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, so nennen wir

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt$$

die *Fourierkoeffizienten* und

$$F_{f,n}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (104)$$

das *n-Fourierpolynom* von f .

Damit haben wir ein Verfahren gefunden, welches

1. Jeder Regelfunktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von trigonometrischen Polynomen $(F_{f,n})_{n \in \mathbb{N}}$ zuordnet, so dass

2.

$$F_{f,n} = f,$$

falls f ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

3. Diese Folge bezeichnet man als die *Fourierreihe*

$$F_f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (105)$$

von f .

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion, die auf $[0, T]$ eine Regelfunktion ist, so definiert man die Fourierreihe von f als die Fourierreihe von $f|_{[0,T]}$.

Bevor wir Beispiele rechnen, stellen wir fest:

- Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion und $f|_{[0,T]}$ eine Regelfunktion, so ist $f|_{[a,a+T]}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, und es gilt

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

- Eine Regelfunktion $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(-t) = f(t)$ für alle t heißt *gerade*. Für solche gilt

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$$

- Eine Regelfunktion $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(-t) = -f(t)$ für alle t heißt *ungerade*. Für solche gilt

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0.$$

- Für gerade Funktionen verschwinden die Fourierkoeffizienten b_k und es gilt

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt.$$

- Für ungerade Funktionen verschwinden die Fourierkoeffizienten a_k und es gilt

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

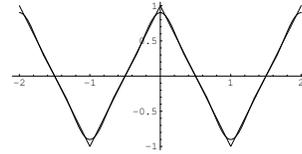
Beispiel 294. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2-periodische Funktion mit $f(t) = 1 - 2|t|$ für $t \in [-1, 1]$. Dann ist f gerade, und die Fourierkoeffizienten sind $b_k = 0$ und

$$a_k = \frac{4}{2} \int_0^1 (1 - 2t) \cos(k\pi t) dt = \frac{4 - 4 \cos(k\pi)}{k^2 \pi^2} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{8}{k^2 \pi^2} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daraus folgt

$$F_{f,2n+1}(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(2m+1)^2} \cos((2m+1)\pi t)$$

Die nebenstehende Figur zeigt f und $F_{f,3}$, also den Fall $n = 1$.

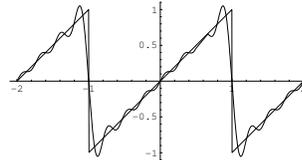


□

Beispiel 295. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2-periodische Funktion mit $f(t) = t$ für $t \in [-1, 1]$. Dann ist f ungerade, und ähnlich wie im vorangehenden Beispiel findet man

$$F_{f,n+1}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\sin((k+1)\pi t)}{k+1}$$

Die Figur zeigt f und $F_{f,8}$.



□

Wann konvergiert die Fourierreihe $F_f(t)$ gegen die Funktion $f(t)$?

In der Analysis 3 werden wir beweisen:

Satz 296. Die Funktion f sei T -periodisch und auf $[0, T]$ stückweise monoton. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $f(t+)$ bzw. $f(t-)$ der rechts- bzw. linksseitige Grenzwert von f an der Stelle t . Dann gilt

$$F_f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

In den Punkten t , in denen f stetig ist, konvergiert die Fourierreihe also gegen $f(t)$, an Sprungstellen gegen das arithmetische Mittel von rechtsseitigem und linksseitigem Limes.

Vorsicht: Die Fourierreihe einer stetigen Funktion f muss nicht gegen $f(t)$ konvergieren. Die stückweise Monotonie ist eine zusätzliche Voraussetzung.

Aus Beispiel 294 folgt mit dem Satz für alle $t \in [-1, +1]$

$$1 - 2|t| = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos((2m+1)\pi t)$$

Insbesondere ergibt sich für $t = 0$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2},$$

folgt

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wenn auch die Fourierreihen wie für periodische Funktionen gemacht erscheinen, braucht man für die Definition nur eine Regelfunktion auf $[0, T]$ und kann diese dann unter der sehr schwachen stückweisen Monotonievoraussetzung durch eine Fourierreihe darstellen. Das liefert eine "analytische" Darstellung auch für ganz "willkürliche" Funktionen. Dieses Erkenntnis hat die Mathematiker zu Fouriers Zeiten sehr fasziniert und wesentlich zur Entstehung des modernen Funktionsbegriffes beigetragen.

Tatsächlich kann man verschiedene Fourier-Darstellungen für $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ finden: Man kann f nämlich durch $f(t) = f(-t)$ oder $f(t) = -f(-t)$ auf $[-T, +T]$ erweitern und dann die Fourierreihe (einer $2T$ -periodischen geraden oder ungeraden Funktion) bilden: Man erhält Darstellungen nur mit cos-Termen oder nur mit sin-Termen. Das spielt eine Rolle in einer wichtigen Anwendung der Fourierreihen, nämlich auf sogenannte Anfangswertprobleme für partielle Differentialgleichungen.

Wir geben ein einfaches

Beispiel 297. Wir betrachten eine schwingende Saite der Länge 1. Die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t sei $u(x, t)$.

Mögliche Lösungen der Schwingungsgleichungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sind Funktionen

$$u(x, t) = \sum_k (\alpha_k \cos(k\pi t) + \beta_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x).$$

Beachten Sie, dass $u(0, t) = u(1, t) = 0$ zu jeder Zeit t .

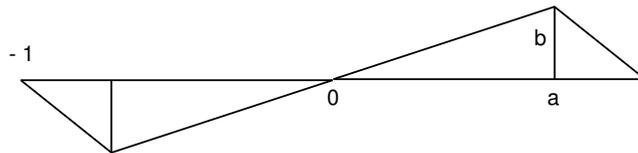
Die Anfangsgestalt der Saite

$$u(x, 0) = \sum_k \alpha_k \sin(k\pi x)$$

bestimmt die Koeffizienten α_k . Ist etwa $u(x, 0)$ von der Gestalt



so setzt man diese Funktion zu einer 2-periodischen ungeraden Funktion fort:

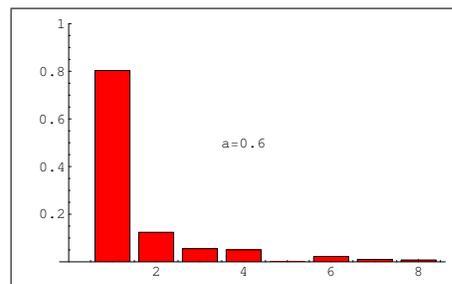
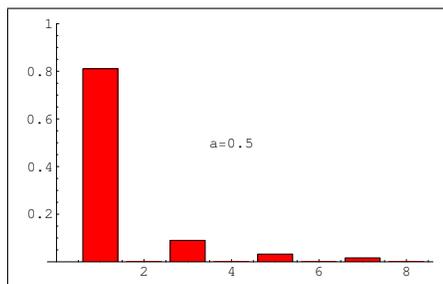


Deren Fourierkoeffizienten sind dann gerade die α_k . Befindet sich die Saite zur Zeit $t = 0$ in Ruhe, so sind die $\beta_k = 0$ und

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(k\pi t) \sin(k\pi x).$$

Die α_k geben die Amplituden der Obertöne, und durch Wahl von a und b kann man darauf Einfluss nehmen, und so die Tonqualität beeinflussen.

Hier sind die Beträge der Fourierkoeffizienten für $b = 1$ und zwei Werte von a :



□

Anhang 1: Darstellung reeller Zahlen

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass jede reelle Zahl sich als unendlicher Dezimalbruch darstellen lässt, und dass diese Darstellung eindeutig ist, wenn man 9-periodische Dezimalbrüche ausschließt. Dabei ist die Wahl der Zahl 10 vom mathematischen Standpunkt aus willkürlich, jede natürliche Zahl ≥ 2 leistet denselben Dienst. Zum Beispiel sind binäre oder Hexadezimaldarstellungen durchaus gebräuchlich. Deshalb wählen wir allgemein im folgenden eine Basiszahl

$$b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Eine *b-adische Darstellung* einer nicht-negativen reellen Zahl x ist dann gegeben durch eine Zahlenfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.
- (ii) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_k = 0$ für alle $k > n$.
- (iii) Es gilt

$$x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b^k := \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} b^{-k} + \sum_{k=0}^n a_k b^k.$$

Es ist unmittelbar klar, dass $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ genau dann eine *b-adische Darstellung* von x ist, wenn $(a_{k+m})_{k \in \mathbb{Z}}$ eine solche von $b^{-m}x$ ist. Deshalb beschränken wir uns in folgenden auf Zahlen

$$x \in [0, 1[.$$

In der Darstellung kommen dann keine positiven Potenzen von b mehr vor, und um übersichtlichere Formeln zu bekommen schreiben wir a_{-k} statt a_k , d.h. wir suchen Darstellungen der Form

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b^{-k}.$$

Satz 298 (b-adische Darstellung). *Zu jeder reellen Zahl $x \in [0, 1[$ gibt es eine eindeutig bestimmte Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- (ii) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^n a_k b^{-k} < b^{-n}.$$

Dann gilt also

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b^{-k}.$$

Man schreibt dann auch x mit den (*b-adischen*) Ziffern a_k in der Form

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \dots_b$$

mit einem unteren Index b .

Beweis. Zur Existenz. Sei

$$a_0 := 0, \quad x_0 := x.$$

Dann ist

$$0 \leq bx_0 < b.$$

Setzen wir also

$$a_1 := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq bx_0\} \quad \text{und} \quad x_1 := bx_0 - a_1,$$

so ist

$$a_1 \in \{0, \dots, b-1\} \quad \text{und} \quad 0 \leq x_1 < 1.$$

Allgemein definieren wir rekursiv

$$a_{k+1} := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq bx_k\} \quad \text{und} \quad x_{k+1} := bx_k - a_{k+1}$$

und erhalten für alle k

$$a_{k+1} \in \{0, \dots, b-1\} \quad \text{und} \quad 0 \leq x_{k+1} < 1.$$

Damit ist offenbar (i) erfüllt. Und aus

$$0 \leq x_n = bx_{n-1} - a_n < 1$$

folgt mit

$$bx_{n-1} - a_n = b(bx_{n-2} - a_{n-1}) - a_n = \dots = b^n x_0 - b^{n-1} a_1 - \dots - ba_{n-1} - a_n$$

nach Division durch b^n , dass

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^n a_k b^{-k} < b^{-n}.$$

Also gilt (ii).

Zur Eindeutigkeit. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ eine b -adische Darstellungen für x und sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Dann gilt

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^n a_k b^{-k} < b^{-n},$$

also

$$0 \leq \underbrace{b^n x - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b^{n-k}}_{=:y} - a_n < 1.$$

Dabei ist y eine reelle Zahl mit

$$y - 1 < a_n \leq y.$$

Im halboffenen Intervall $]y-1, y]$ liegt aber nur *eine* ganze Zahl, und daher ist a_n eindeutig bestimmt. Das gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. \square

Beispiel 299. Wir betrachten den Fall $b = 10$. Mit dem vorstehenden Satz haben wir jeder reellen Zahl $x \in [0, 1[$ eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten a_k zwischen 0 und 9 zugeordnet, so dass

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} = 0.a_1 a_2 \dots \quad (106)$$

gilt, und diese Reihe war unter der im Satz gemachten Bedingung (ii) eindeutig bestimmt. Natürlich ist jede Reihe der Form (106) mit Koeffizienten $a_k \in \{0, \dots, 9\}$ konvergent und liefert eine reelle Zahl x . Liefert der Satz für dieses x die originale Reihe zurück? Anders

gefragt: Ist die Abbildung, die jedem x seine Dezimaldarstellung zuordnet surjektiv auf die Reihen mit Koeffizienten zwischen 0 und 9? Das ist nicht so: Es gilt

$$\sum_{k=2}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 0.09999\dots = 0.10000\dots$$

Das beschreibt aber auch den einzig möglichen Problemfall: Wenn man 9-Perioden (oder im allgemeinen $(b-1)$ -Perioden) ausschließt, entspricht jedem $x \in [0, 1[$ genau ein unendlicher Dezimalbruch $0.a_1\dots$ und umgekehrt. Das beweisen wir im folgenden

□

Lemma 300. Gegeben seien zwei Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ und $(\tilde{a}_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ mit

$$a_k, \tilde{a}_k \in \{0, \dots, b-1\},$$

so dass

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{a}_k b^{-k} =: x.$$

Dann gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit

$$a_1 = \tilde{a}_1, \dots, a_{n-1} = \tilde{a}_{n-1}, \text{ und } a_n > \tilde{a}_n$$

genau dann, wenn

$$\tilde{a}_n = a_n - 1 \quad \text{und} \quad \tilde{a}_k = b - 1, a_k = 0 \quad \text{für alle } k > n.$$

In diesem Fall gilt

$$x - \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k b^{-k} = b^{-n}. \tag{107}$$

Deshalb ist nach der Bedingung (ii) des Satzes die b -adische Darstellung von x nicht gegeben durch die Folge $(\tilde{a}_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, sondern notwendig dann durch die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$. Die Folgen mit $(b-1)$ -Periode kommen nicht als b -adische Darstellungen vor.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b^{-k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{a}_k b^{-k} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - \tilde{a}_k) b^{-k}}_{=0} + \underbrace{(a_n - \tilde{a}_n) b^{-n}}_{\geq b^{-n}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - \tilde{a}_k) b^{-k} \\ &\geq b^{-n} + (-(b-1)) \sum_{k=n+1}^{+\infty} b^{-k} = b^{-n} + (-(b-1)) \frac{b^{-(n+1)}}{1-b^{-1}} = b^{-n} - b^{-n} = 0 \end{aligned}$$

mit Gleichheit nur für den Fall

$$\begin{aligned} a_n &= \tilde{a}_n + 1, \\ a_k - \tilde{a}_k &= -(b-1) \quad \text{für alle } k \geq n+1. \end{aligned}$$

Das beweist den ersten Teil des Satzes. In diesem Fall ist also

$$x = \sum_{k=1}^n a_k b^{-k} = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k b^{-k} + b^{-n},$$

und daraus folgt (107). □

Anhang 2: Subtileres über die Stetigkeit

Beispiel 301. Definiere $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden natürlichen Zahlen } p, q \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f genau in $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ unstetig.

Beweis. Jede rationale Zahl ist Limes irrationaler Zahlen. Daher ist die Funktion in den rationalen Zahlen unstetig. Andererseits gibt es zu $q \in \mathbb{N}$ höchstens q rationale Zahlen der Form $\frac{p}{q}$ in $]0, 1[$. Ist daher $(\frac{p_i}{q_i})$ eine Folge, die gegen eine Irrationalzahl x konvergiert, so ist $\lim \frac{1}{q_i} = 0$ und damit f in x stetig.

Setzt man $f(0) = 1$ und erweitert f auf \mathbb{R} periodisch mit Periode 1, so ist die erweiterte Funktion genau in den rationalen Punkten unstetig. □

Im Gegensatz dazu gilt:

Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die genau in den rationalen Zahlen stetig ist.

Beweis. a) Die Menge A der Stetigkeitspunkte ist ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen (G_δ -Menge).

Um $x \in A$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein offenes Intervall $I_n(x)$ mit

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } y \in I_n(x).$$

Die Menge

$$G_n = \bigcup_{x \in A} I_n(x)$$

ist offen und

$$A = \bigcap G_n.$$

Offenbar ist nämlich $A \subset \bigcap G_n$. Aber für $y \in \bigcap G_n$ gibt es zu jedem n ein $x_n \in A$, so dass $y \in I_n(x_n)$. Dann ist aber

$$|f(x_n) - f(z)| < \frac{1}{n} \text{ für alle } z \in I_n(x_n),$$

und deshalb

$$|f(z) - f(y)| < \frac{2}{n} \text{ für alle } z \in I_n(x_n).$$

Daher ist $y \in A$.

b) Aus dem Baireschen Kategoriensatz folgt, dass \mathbb{Q} keine G_δ -Menge ist. (Vgl. z.B. Hewitt-Stromberg S. 68.) □

Beispiel 302 (U. Brehm). Dieses Beispiel zeigt, dass der Abelsche Grenzwertsatz 285 nicht für komplexe Potenzreihen gilt.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mu(n) := \frac{3+(-1)^n}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$. Dann ist die komplexe Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{\mu(n)}$$

in $z = 1$ konvergent, aber dort nicht stetig.

Beweis. Wir zeigen die Existenz einer Folge (r_m) mit $0 < r_m < 1$ und $\lim r_m = 1$, so dass

$$\lim \left| f(r_m e^{\frac{i\pi}{2m+1}}) \right| = \infty.$$

Nach Konstruktion ist $\mu(n) \equiv n \pmod{2}$ und für $n \geq m$ ist $(2m+1) | \mu(n)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} r_m^{\mu(n)} e^{i\pi \frac{\mu(n)}{2m+1}} \right| &\geq \left| \sum_{n=m}^{\infty} \dots \right| - \left| \sum_{n=1}^{m-1} \dots \right| \\ &= \left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} r_m^{\mu(n)} \underbrace{(-1)^{\frac{\mu(n)}{2m+1}}}_{=(-1)^n} \right| - \left| \sum_{n=1}^{m-1} \dots \right| \\ &\geq \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} r_m^{\mu(n)} \right) - (m-1) \end{aligned}$$

Also bleibt zu zeigen, dass man r_m so wählen kann, dass z.B.

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} r_m^{\mu(n)} \geq 2m-1 \quad \text{und} \quad \lim r_m = 1.$$

wegen der Divergenz der harmonischen Reihe gibt es aber $N_m > m$ mit

$$\sum_{n=m}^{N_m} \frac{1}{n} \geq 2m,$$

und aus Stetigkeitsgründen findet man $r_m \in]1 - \frac{1}{m}, 1[$ mit

$$\sum_{n=m}^{N_m} \frac{1}{n} r_m^{\mu(n)} \geq 2m-1.$$

Es folgt

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} r_m^{\mu(n)} \geq 2m-1.$$

□

Anhang 3: Nullstellen von C^∞ -Funktionen

Ist $f \in C^{k+1}(J)$ auf einem offenen Intervall J um 0 und ist $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0$, so gilt nach dem Satz von Taylor für $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1} + R(x) = \left(\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} + \frac{R(x)}{x^{k+1}} \right) x^{k+1} = h(x)x^{k+1}.$$

Der Satz von Taylor sagt weiter, das

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^{k+1}} = 0.$$

Setzen wir $h(0) := \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$, so ist h in 0 also stetig.

Damit haben wir eine Information über das Verhalten einer C^{k+1} -Funktion in der Nähe einer k -fachen Nullstelle. Ist f sogar ein Polynom, so wissen wir aus dem Satz über die Polynomdivision, dass $h(x)$ wieder ein Polynom ist.

Unter den eingangs gemachten Voraussetzungen für f gibt uns der Satz von Taylor aber über die Regularität von h in 0 außer der Stetigkeit keine weiteren Informationen. Wenn f noch öfter differenzierbar ist, so kann man vermuten, dass auch h in 0 differenzierbar ist. Für C^∞ -Funktionen ist das richtig, wie der folgende Satz zeigt, aber der Beweis ist nicht so simpel.

Satz 303 (Lemma von Bohnenblust). Sei $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion auf einem offenen Intervall J um 0 und seien

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0$$

für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine C^∞ -Funktion $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^{k+1}h(x).$$

Für diese gilt

$$h(0) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}.$$

Für den Beweis benötigen wir folgendes

Lemma 304. Seien $a < 0 < b$ und $g \in C^1([a, b])$. Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$: Die Funktion $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) := \int_0^1 t^m g(xt) dt$$

ist differenzierbar und

$$\phi'(x) := \int_0^1 t^{m+1} g'(xt) dt.$$

Ist $g \in C^\infty([a, b])$, so folgt also auch $\phi \in C^\infty([a, b])$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} - \int_0^1 t^{m+1} g'(xt) dt &= \int_0^1 \left(t^m \frac{g((x + \Delta x)t) - g(xt)}{\Delta x} - t^{m+1} g'(xt) \right) dt \\ &= \int_0^1 t^m \left(\frac{g((x + \Delta x)t) - g(xt)}{\Delta x} - t g'(xt) \right) dt. \end{aligned}$$

Für festes $t \in [0, 1]$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi = \xi_{x,t}$ zwischen x und $x + \Delta x$, so dass

$$\frac{g((x + \Delta x)t) - g(xt)}{\Delta x} = t g'(\xi t).$$

Nach Voraussetzung ist g' stetig, also gleichmäßig stetig auf $[a, b]$. Zu dem gewählten $\epsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$, so dass für alle $\xi, x \in [a, b]$ gilt

$$|\xi - x| < \delta \implies |g'(\xi) - g'(x)| < \epsilon.$$

Dann gilt aber auch für jedes $t \in [0, 1]$

$$|\xi - x| < \delta \implies |t^{m+1}(g'(\xi t) - g'(xt))| < \epsilon$$

Für $0 < |\Delta x| < \delta$ ist daher

$$\left| \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} - \int_0^1 t^{m+1} g'(xt) dt \right| \leq \epsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beweis zum Lemma von Bohnenblust. Durch vollständige Induktion über k

$k = 0$. Sei also $f(0) = 0$. Definiere

$$h(x) := \int_0^1 f'(xt) dt.$$

Nach dem Lemma ist $h \in C^\infty([a, b])$. Weiter gilt

$$xh(x) = \int_0^1 x f'(xt) dt = \int_0^1 \frac{df(xt)}{dt} dt = f(xt)|_{t=0}^1 = f(x).$$

$k \rightarrow (k + 1)$. Sei der Satz für k bewiesen und sei

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k+1)}(0) = 0.$$

Dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$f(x) = x^{k+1} \tilde{h}(x)$$

mit einer C^∞ -Funktion \tilde{h} , für die

$$\tilde{h}(0) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(0) = 0.$$

Also gibt es eine C^∞ -Funktion h mit

$$\tilde{h}(x) = xh(x).$$

Dann ist $f(x) = x^{k+2}h(x)$, und aus der wiederholt angewendeten Produktregel folgt

$$\frac{1}{(k+2)!} f^{(k+2)}(0) = h(0).$$

□

Anhang 4: Differentiation von Reihen

Hier geben wir eine Verallgemeinerung des Satzes über die Differentiation von Potenzreihen an:

Satz 305 (Differenzierbarkeit von Reihen). *Auf dem offenen Intervall J seien differenzierbare Funktionen $f_k : J \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (108)$$

für alle $x \in J$ konvergent ist. Sei $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ die dadurch gegebene Summenfunktion. Die Reihe $\sum f'_k(x)$ besitze eine von x unabhängige konvergente Majorante: Es gebe eine konvergente Reihe $\sum c_k$ reeller Zahlen mit

$$|f'_k| \leq c_k$$

für fast alle k . Dann ist f differenzierbar und es gilt

$$f' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k.$$

Die Reihe (108) darf man also gliedweise differenzieren.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k < \epsilon, \quad (109)$$

und wir wählen ein solches. Nach dem Vergleichskriterium ist die Reihe $\sum f'_k(x)$ für jedes x konvergent.

Seien nun $x \in J$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $]x - h, x + h[\subset J$. Nach den Rechenregeln für konvergente Reihen erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum f'_k(x) \right| = \\ & = \left| \sum_{k=0}^N \left(\frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f'_k(x) \right) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - \sum_{k=N+1}^{\infty} f'_k(x) \right| \\ & = \left| \sum_{k=0}^N \left(\frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f'_k(x) \right) + \sum_{k=N+1}^{\infty} f'_k(\xi_k) - \sum_{k=N+1}^{\infty} f'_k(x) \right| \\ & \leq \left| \sum_{k=0}^N \left(\frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f'_k(x) \right) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f'_k(\xi_k) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f'_k(x) \right| \\ & < \sum_{k=0}^N \left| \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f'_k(x) \right| + 2\epsilon \end{aligned}$$

Weil die f_k differenzierbar sind, gibt es zu jedem $k \in \{1, \dots, N\}$ ein $\delta_k > 0$, so dass für $|h| < \delta_k$

$$\left| \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - f'_k(x) \right| < \frac{\epsilon}{N}.$$

Ist daher $|h| < \delta = \min\{\delta_0, \dots, \delta_k\}$, so folgt

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum f'_k(x) \right| < 3\epsilon.$$

□

Anhang 5: Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion

Schon Riemann und Weierstraß haben nach Funktionen gesucht, die zwar stetig, aber nirgends differenzierbar sind. Weierstraß hat wohl die erste solche Funktion gefunden. Hier geben wir ein einfacheres Beispiel an, dass von T. Takagi (1903) stammt.

Sei $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Funktion mit $K(x+1) = K(x)$ und

$$K(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und sei f die (ebenfalls 1-periodische) Funktion mit

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K(2^k x)}{2^k}. \quad (110)$$

Nach dem Weierstraß-Kriterium aus Beispiel ?? ist f stetig. Wir wollen nun zeigen, dass es nirgends differenzierbar ist. Der Beweis stammt von de Rham (1957). Wir betrachten $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $i \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\alpha_n := \frac{1}{2^n} \leq x_0 \leq \beta_n := \frac{i+1}{2^n}.$$

Weil $K(x) = K(0) = 0$ für ganzzahliges x , erhalten wir

$$f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K(2^k \frac{i}{2^n})}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K(2^k \frac{i}{2^n})}{2^k}, \quad f(\beta_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K(2^k \frac{i+1}{2^n})}{2^k}$$

Daher ist

$$r_n := \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \frac{f_n(\beta_n) - f_n(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

Aber die Funktion

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K(2^k x)}{2^k}$$

ist ein Polygonzug und r_n dessen Steigung auf dem Intervall $]\alpha_n, \beta_n[$. Nach Konstruktion ist $]\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}[\subset]\alpha_n, \beta_n[$ und $r_{n+1} = r_n \pm 1$, so dass die Folge (r_n) divergiert. Aber mit $\lambda_n := \frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}$ gilt

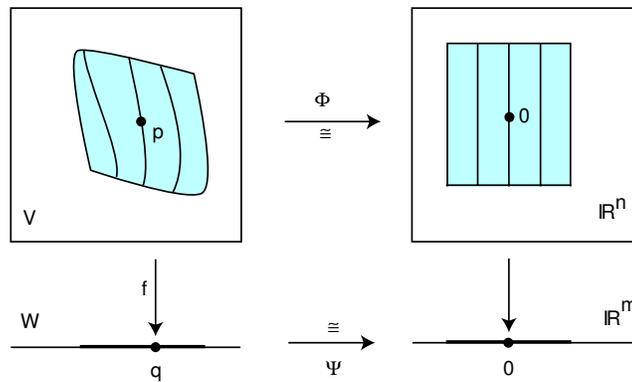
$$r_n = \lambda_n \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{f(x_0) - f(\alpha_n)}{x_0 - \alpha_n},$$

wobei der erste Summand verschwindet, wenn $x_0 = \alpha_n$ (was dann übrigens $x_0 = \alpha_m$ für alle $m > n$ nach sich zieht). Wäre f in x_0 differenzierbar, so wäre (r_n) konvergent gegen gegen die Ableitung an dieser Stelle. Widerspruch!

Analysis II

Prof. Dr. Dirk Ferus

Sommersemester 2007



Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Topologie	7
1.1 Topologie in metrischen Räumen	7
1.2 Konvergenz	17
1.3 Kompaktheit	22
1.4 Zusammenhang	29
1.5 Stetige Abbildungen	32
1.6 Fünf wichtige Sätze über stetige Abbildungen	38
1.7 Normierte Vektorräume	42
2 Grundlagen der mehrdimensionalen Differentiation	48
2.1 Die Ableitung	48
2.2 Rechenregeln für differenzierbare Abbildungen	54
2.3 Richtungsableitungen, partielle Ableitungen	63
2.4 Höhere Ableitungen	67
2.5 Schrankensatz, Satz von Taylor	74
2.6 Lokale Extrema	79
2.7 Differentialoperatoren der klassischen Vektoranalysis	83
2.7.1 Gradient	83
2.7.2 Divergenz	84
2.7.3 Rotation	85
2.7.4 Laplaceoperator	86
2.8 Ein Kapitel Newtonsche Mechanik	88
3 Mehrdimensionale Differentialrechnung: Die großen Sätze	92
3.1 Der Umkehrsatz	92
3.2 Implizite Funktionen	98
3.3 Der Rangsatz	103
4 Mannigfaltigkeiten	108
5 Differentialgleichungen	115
5.1 Existenz- und Eindeutigkeit	115
5.2 Lineare Differentialgleichungen.	118
5.2.1 Der Hauptsatz über lineare Differentialgleichungen	119
5.2.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	123
5.2.3 Skalare lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.	130
6 Anhang	135
6.1 Hauptminorenkriterium	135
6.2 Vektorwertige Integrale	137

Literatur

Zur Analysis

Barner/Flohr: Analysis II. Walter de Gruyter, etwa Euro 30.-

Forster: Analysis II. Differential und Integralrechnung in einer Variablen. Vieweg, etwa Euro 16.-

Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 2. Teubner, etwa Euro 35.-

Hildebrandt: Analysis 2, Springer, etwa Euro 28.-

Königsberger: Analysis 2, Springer, etwa Euro 25.-

Rudin, W.: Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill 1964/1987

Zur Geschichte der Mathematik (und Analysis)

Moritz Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 4 Bände, um 1900

N. Bourbaki, Elements of the History of Mathematics, Springer

Website: The MacTutor History of Mathematics Archiv, <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/>

1 Grundlagen der Topologie

1.1 Topologie in metrischen Räumen

- Bevor wir mit der Analysis von Funktionen mehrerer Variabler beginnen können, müssen wir deren Definitionsbereiche, also höher-dimensionale Räume genauer kennenlernen.
- Wir legen die Grundlagen für die Definition von Konvergenz in solchen Räumen und damit für die Definitionen von Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen auf solchen Räumen.

Metrische Räume

- Wir lernen, was eine Metrik zur Abstandsmessung von Punkten in einem Raum (d.h. in einer Menge) ist
- und betrachten dafür viele sehr verschiedene Beispiele. Das verdeutlicht gleichzeitig die "Universalität" abstrakter mathematischer Begriffsbildungen.

Definition 1. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung (der *Metrik*)

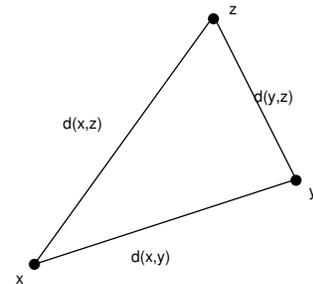
$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$:

$$d(x, y) \geq 0 \text{ und } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (1)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie}) \quad (2)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (3)$$



Beispiel 2. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.

□

Beispiel 3 (Standardmetrik auf \mathbb{R}^n). Wichtigstes Beispiel für dieses Semester:

Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$X = \mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

und für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Wir nennen diese Metrik die *Euklidische Metrik* oder die *Standardmetrik* auf \mathbb{R}^n . Nur die Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ bedarf eines Beweises. Wir verschieben ihn auf das nächste Beispiel. Aber dort ist die Situation etwas allgemeiner und damit komplizierter. Versuchen Sie einen einfacheren Beweis zu finden.

□

Beispiel 4 (l^p -Metrik). Für den \mathbb{R}^n gibt es nicht nur die im letzten Beispiel angegebene Metrik, sondern viele mehr. Zum Beispiel für $p \geq 1$ die sogenannte l^p -Metrik:

$$d^p(x, y) := \sqrt[p]{\sum |x_i - y_i|^p}$$

Für $p = 1$ können Sie die Dreiecksungleichung selbst beweisen, für $p > 1$ ist das etwas komplizierter. An der Stelle (*) benutzen wir die Höldersche Ungleichung aus der Analysis I:

Es gilt mit $q := \frac{p}{p-1}$ für $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p &= \sum_{i=1}^n |a_i + b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \dots \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Division mit $(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{q}}$ liefert wegen $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

falls $\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p > 0$. Aber die Ungleichung gilt natürlich auch, wenn $\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p = 0$. Mit

$$a_i := y_i - x_i, \quad b_i := z_i - y_i.$$

ergibt sich die Dreiecksungleichung für d^p . □

Beispiel 5 (l^∞ -Metrik). Die sogenannte l^∞ -Metrik

$$d^\infty(x, y) := \sup\{|x_i - y_i| \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

ist eine weitere Metrik auf dem \mathbb{R}^n . Beweisen Sie die Dreiecksungleichung und

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d^p(x, y) = d^\infty(x, y)$$

zur Rechtfertigung der Bezeichnung d^∞ . □

Ein exotischeres Beispiel:

Beispiel 6 (U-Bahn). Sei X die Menge der Berliner U-Bahnstationen und $d(x, y)$ für $x, y \in X$ die Länge der kürzesten Schienenverbindung zwischen x und y . □

Beispiel 7 (Spurmetrik). Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist jede Teilmenge $A \subset X$ auf natürliche Weise ein metrischer Raum mit der von d induzierten Metrik oder *Spurmetrik*

$$d_A(x, y) := d(x, y)$$

für $x, y \in A$. □

Beispiel 8 (Diskrete Metrik). Ist X eine Menge, so liefert

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik auf X , die sogenannte *diskrete Metrik*. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung. □

Definition 9 (Beschränktheit). Sei (Y, d) ein metrischer Raum.

(i) $A \subset Y$ heißt *beschränkt*, wenn gilt:

- Zu jedem $y \in Y$ gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $d(y, y') \leq M$ für alle $y' \in A$.

Ist $Y \neq \emptyset$, so ist das äquivalent zu folgender Bedingung:

- Es gibt ein $y \in Y$ und ein $M \in \mathbb{R}$ mit $d(y, y') \leq M$ für alle $y' \in A$.

(ii) Für $\emptyset \neq A \subset Y$ heißt

$$\text{diam } A := \sup \{ d(y', y'') \mid y', y'' \in A \}$$

der *Durchmesser* von A . Wir setzen $\text{diam } \emptyset := 0$.

(iii) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ einer Menge X heißt *beschränkt*, wenn $f(X) \subset Y$ beschränkt ist.

Lemma 10. *Eine Teilmenge A des metrischen Raumes (Y, d) ist genau dann beschränkt, wenn sie endlichen Durchmesser hat.*

Beweis. Sie o.E. $A \neq \emptyset$. Ist A beschränkt, so gibt es $M \in \mathbb{R}$ und $y \in Y$ mit $d(y, y') < M$ für alle $y' \in A$. Also gilt für alle $y', y'' \in A$

$$d(y', y'') \leq d(y', y) + d(y, y'') < 2M.$$

Damit ist $\text{diam } A \leq 2M$.

Ist umgekehrt $M := \text{diam } A < \infty$ und $y \in A$, so gilt für alle $y' \in A$

$$d(y, y') \leq M,$$

also ist A beschränkt. □

Funktionsräume. Wir nehmen nun eine ganz wesentliche Erweiterung unseres Horizontes vor: Neben den Räumen, auf denen unsere Funktionen definiert sind, betrachten wir auch Räume, deren Elemente (Punkte?!) selbst Funktionen sind, sogenannte Funktionsräume. Denn wie zum Beispiel die Theorie der Potenzreihen zeigt, sind wir auch an der Konvergenz von Funktionenfolgen interessiert.

Satz 11 (Supremumsmetrik). *Seien (Y, d) ein metrischer Raum und X eine beliebige Menge, beide $\neq \emptyset$. Sei*

$$\mathcal{B}(X, Y) := \{ f : X \rightarrow Y \mid f \text{ beschränkt} \}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von X in Y . Dann definiert

$$d^{sup}(f, g) := \sup \{ d(f(x), g(x)) \mid x \in X \}$$

eine Metrik auf $\mathcal{B}(X, Y)$, die sogenannte Supremumsmetrik.

Beweis. Sei $x_0 \in X$. Dann gibt es zu $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$ ein M mit

$$d(f(x_0), f(x)) < M \quad \text{und} \quad d(g(x_0), g(x)) < M$$

für alle $x \in X$. Daher ist für alle x

$$d(f(x), g(x)) < 2M + d(f(x_0), g(x_0)),$$

und $\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}$.

Also ist $d^{sup} : \mathcal{B}(X, Y) \times \mathcal{B}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert.

(1), (2) sind trivial. Zur Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d^{sup}(f, h) &= \sup_x d(f(x), h(x)) \\ &\leq \sup_x (d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x))) \\ &\leq \sup_x d(f(x), g(x)) + \sup_x d(g(x), h(x)) \\ &= d^{sup}(f, g) + d^{sup}(g, h). \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Für $X = \{1, \dots, n\}$, $Y = \mathbb{R}$ sind $(\mathcal{B}(X, Y), d^{sup})$ und (\mathbb{R}^n, d^∞) isometrisch isomorph:

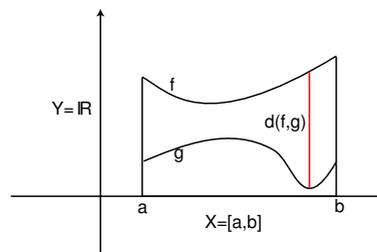
$$(\mathcal{B}(X, Y), d^{sup}) \cong (\mathbb{R}^n, d^\infty).$$

Das heißt, es gibt eine Bijektion $\phi : \mathcal{B}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}^n$, nämlich

$$\phi : f \mapsto (f(1), \dots, f(n)),$$

für die

$$d^\infty(\phi(f), \phi(g)) = d^{sup}(f, g).$$



Topologie in metrischen Räumen

- Wir erklären, was *Umgebungen* und was *offene Mengen* in einem metrischen Raum sind und lernen deren wesentliche Eigenschaften kennen.
- Begriffe wie Konvergenz oder Stetigkeit lassen sich allein mit dem Offenheitsbegriff ohne weiteren Rückgriff auf die Metrik definieren. Das ist der Ausgangspunkt der Verallgemeinerung metrischer Räume zu sogenannten *topologischen Räumen*, aber darauf gehen wir in diesem Semester nicht näher ein.

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition 12 (Umgebung, offen, abgeschlossen). Sei $a \in X$.

(i) Für $\epsilon > 0$ heißt

$$U_\epsilon(a) := \{x \in X \mid d(x, a) < \epsilon\}$$

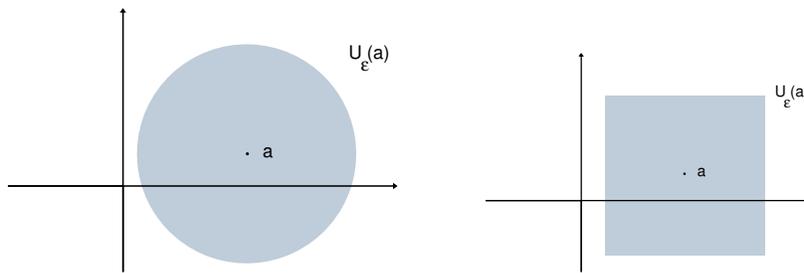
die *offene Kugel* vom Radius ϵ um a oder die (offene) ϵ -*Umgebung* von a .

(ii) $U \subset X$ heißt eine *Umgebung* von a , wenn es $\epsilon > 0$ gibt, so dass $U_\epsilon(a) \subset U$.

(iii) $Y \subset X$ heißt *offen*, wenn Y eine Umgebung jedes seiner Punkte $x \in Y$ ist.

(iv) $Y \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus Y$ offen ist.

Beispiel 13. Für die Standardmetrik bzw. die Metrik d^∞ auf \mathbb{R}^2 findet man:



□

Beispiel 14. Für die Supremumsmetrik auf $\mathcal{B}(X, Y)$ besteht $U_\epsilon(f)$ aus allen Funktionen $g : X \rightarrow Y$ mit

$$\sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\} < \epsilon.$$

□

Beispiel 15. Sei $(X, d) = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik.

$]0, 1[$, $]1, \infty[$, $] - \infty, \infty[$ sind offen
 $[0, 1]$, $[1, \infty[$, $] - \infty, \infty[$ sind abgeschlossen,
 $[0, 1[$ ist weder offen noch abgeschlossen.

□

Beispiel 16. In jedem (X, d) sind X und \emptyset sowohl offen als auch abgeschlossen.

□

Beispiel 17. Bezüglich der diskreten Metrik sind *alle* Teilmengen offen, also *alle* Teilmengen auch abgeschlossen. □

Beispiel 18. Die offenen Kugeln $U_\epsilon(a)$ sind offen (Dreiecksungleichung). □

Satz 19. Die Menge der stetigen Funktionen

$$C^0([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ist eine abgeschlossene Teilmenge von $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), d^{sup})$.

Beweis. Zunächst sind stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall beschränkt. Also ist wirklich $C^0([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.

Sei $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ unstetig an der Stelle $x_0 \in [a, b]$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ gilt:

$$\text{Es gibt ein } x \in [a, b] \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

Sei nun $g \in U_{\epsilon/3}(f)$, dh. $g \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ und $\sup |f - g| < \epsilon/3$.

Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ also ein $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ und

$$\epsilon \leq |f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{< \epsilon/3} + |g(x) - g(x_0)| + \underbrace{|g(x_0) - f(x_0)|}_{< \epsilon/3}.$$

Also gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in [a, b]$ mit

$$|x - x_0| < \delta \text{ und } |g(x) - g(x_0)| \geq \frac{\epsilon}{3}.$$

Also ist g unstetig und $U_{\epsilon/3}(f)$ besteht nur aus unstetigen Funktionen. Daher ist die Menge der unstetigen Funktionen in $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ offen und das Komplement $C^0([a, b])$ abgeschlossen. □

Satz 20 (Metrische Räume sind Hausdorffsche Räume). Sind $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raumes, so gibt es Umgebungen U von x und V von y , die disjunkt sind.

Beweis. Sei $\epsilon := d(x, y)$. Wir setzen

$$U := U_{\epsilon/2}(x), \quad V := U_{\epsilon/2}(y).$$

Wäre $z \in U \cap V$, so wäre

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Das ist ein Widerspruch zur Definition von ϵ . Also gibt es kein $z \in U \cap V$: Der Durchschnitt ist leer. □

Satz 21 (Vereinigung und Durchschnitt offener Mengen). *Die Vereinigung von beliebig vielen und der Durchschnitt von endlich vielen offenen Teilmengen eines metrischen Raumes sind wieder offen.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in X . Ist $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Weil U_i offen ist, gibt es dazu ein $\epsilon > 0$ mit

$$U_\epsilon(x) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Also ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Ist andererseits $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$, so gibt es zu jedem $i \in I$ ein $\epsilon_i > 0$ mit

$$U_{\epsilon_i}(x) \subset U_i.$$

Wir wählen zu jedem i ein solches $\epsilon_i > 0$. Ist die Indexmenge I endlich, so ist

$$\epsilon := \min\{\epsilon_i \mid i \in I\}$$

positiv, und es gilt für jedes $i \in I$

$$U_\epsilon(x) \subset U_{\epsilon_i}(x) \subset U_i.$$

Daher ist

$$U_\epsilon(x) \subset \bigcap_{i \in I} U_i.$$

□

Für unendliches I klappt das letzte Argument des Beweises nicht und ist die Aussage auch nicht richtig:

Beispiel 22. Der Durchschnitt der unendlich vielen offenen Intervalle $] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\subset \mathbb{R}$ ist $\{0\}$, also nicht offen bezüglich der Standardmetrik auf \mathbb{R} .

Korollar 23. *Der Durchschnitt von beliebig vielen und die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen.*

Beweis. Der Beweis geschieht durch „Dualisieren“. Man benutzt folgende Tatsache: Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Teilmengen von X , so gilt für $x \in X$:

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Das heißt

$$\bigcap_{i \in I} A_i = X \setminus \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

und ebenso

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X \setminus \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Daraus ergibt sich mit dem vorstehenden Satz die Behauptung. □

Bemerkung. Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X . Sind die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus \mathcal{T} wieder in \mathcal{T} , so nennt man \mathcal{T} eine *Topologie* für X und (X, \mathcal{T}) einen *topologischen Raum*.¹ Die Mengen aus \mathcal{T} nennt man dann die *offenen Mengen* von (X, \mathcal{T}) . Ein beliebiges $U \subset X$ heißt eine *Umgebung* von $x \in X$, wenn es eine offene Menge $V \in \mathcal{T}$ gibt, so dass

$$x \in V \subset U.$$

Topologische Räume sind eine Verallgemeinerung der metrischen Räume. In ihnen kann man Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit usw. einführen.

□

Satz 24 (Spurtopologie). *Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge versehen mit der induzierten Metrik d_A . Dann sind die offenen Teilmengen von (A, d_A) genau die Durchschnitte offener Teilmengen von (X, d) mit A :*

$B \subset A$ ist offen in $(A, d_A) \iff$ Es gibt eine offene Teilmenge Y in (X, d) mit $B = A \cap Y$.

Der Satz gilt auch mit "abgeschlossen" statt "offen".

Beweis. Zu (\Leftarrow) . Selbst.

Zu (\Rightarrow) . Sei $B \subset A$ offen. Dann gibt es zu jedem $x \in B$ ein $\epsilon(x) > 0$ mit

$$B \supset U_{\epsilon(x)}^A(x) := \{y \in A \mid d_A(x, y) = d(x, y) < \epsilon(x)\} = A \cap U_{\epsilon(x)}^X(x),$$

wobei

$$U_{\epsilon(x)}^X(x) := \{y \in X \mid d_A(x, y) = d(x, y) < \epsilon(x)\}.$$

Die Menge

$$Y := \bigcup_{x \in B} U_{\epsilon(x)}^X(x)$$

ist als Vereinigung offener Teilmengen von X offen in X und es gilt $B = A \cap Y$. Damit ist „ \Rightarrow “ für offene Mengen gezeigt.

Ist $B \subset A$ abgeschlossen in A , so ist $A \setminus B$ offen in A . Also gibt es nach dem eben Bewiesenen eine offene Teilmenge $Y \subset X$ mit $A \setminus B = A \cap Y$ und $B = A \cap (X \setminus Y)$ ist der Durchschnitt von A mit der abgeschlossenen Teilmenge $X \setminus Y$ von X . □

Beispiel 25. Sei $X =]0, 3]$ mit der Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$. Überlegen Sie, welche Attribute auf welche Teilmengen von X zutreffen, welche nicht:

	$]0, 1]$	$]2, 3]$	$]1, 2]$	$]0, 3]$
offen				
abgeschlossen				

□

¹ Dabei definiert man den "leeren Durchschnitt" als X und die "leere Vereinigung" als \emptyset . Will man diese logische Spitzfindigkeit vermeiden, so fordert man noch, dass $X \in \mathcal{T}$ und $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Definition 26 (Inneres, abgeschlossene Hülle, Rand). Seien (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Wir definieren:

(i) Das *Innere von Y* oder der *offene Kern von Y* ist die Menge

$$\overset{\circ}{Y} := Y^0 := \{y \in Y \mid \exists \epsilon > 0 U_\epsilon(y) \subset Y\}.$$

Die Punkte von $\overset{\circ}{Y}$ heißen *innere Punkte* von Y .

(ii) Die *abgeschlossene Hülle von Y* ist die Menge

$$\bar{Y} := X \setminus (X \setminus Y)^0.$$

(iii) Der *Rand von Y* ist die Menge

$$\partial Y := \bar{Y} \setminus \overset{\circ}{Y}.$$

Satz 27. Sei $Y \subset X$. Dann gilt

(i) $\overset{\circ}{Y}$ ist die größte offene Menge in Y :

$$\overset{\circ}{Y} = \bigcup_{U \text{ offen}, U \subset Y} U.$$

Insbesondere ist $\overset{\circ}{Y}$ als Vereinigung offener Mengen selber offen.

(ii) \bar{Y} ist die kleinste abgeschlossene Menge, die Y enthält:

$$\bar{Y} = \bigcap_{A \text{ abgeschlossen}, A \supset Y} A.$$

Insbesondere ist \bar{Y} als Durchschnitt abgeschlossener Mengen selber abgeschlossen.

(iii) Die Randpunkte von Y sind charakterisiert dadurch, dass jede ihrer Umgebungen Punkte von Y und Punkte von $X \setminus Y$ enthält:

$$\partial Y = \{x \in X \mid \forall \epsilon > 0 U_\epsilon(x) \cap Y \neq \emptyset \text{ und } U_\epsilon(x) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset\}.$$

∂Y ist abgeschlossen.

Beweis. Zu (i). Sei

$$V := \bigcup_{U \text{ offen}, U \subset Y} U.$$

Zunächst gilt $\overset{\circ}{Y} \subset V$. Ist nämlich $y \in \overset{\circ}{Y}$, so gibt es $\epsilon > 0$ mit $U := U_\epsilon(y) \subset Y$, und U ist offen. Also ist $y \in V$.

Weiter ist $\overset{\circ}{Y} \supset V$. Ist nämlich $y \in V$, so gibt es ein offenes $U \subset Y$ mit $y \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(y) \subset U \subset Y$. Also ist $y \in \overset{\circ}{Y}$.

Damit ist $\overset{\circ}{Y} = V$.

Zu (ii). Das beweisen wir durch „Dualisieren“.

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= X \setminus (X \setminus Y)^0 = X \setminus \left(\bigcup_{(X \setminus Y) \supset U \text{ offen}} U \right) = \bigcap_{(X \setminus Y) \supset U \text{ offen}} (X \setminus U) \\ &= \bigcap_{Y \subset (X \setminus U), U \text{ offen}} (X \setminus U) = \bigcap_{Y \subset A, A \text{ abgeschlossen}} A\end{aligned}$$

Zu (iii). Nach Definition ist

$$\bar{Y} \setminus Y^0 = (X \setminus (X \setminus Y)^0) \setminus Y^0 = X \setminus ((X \setminus Y)^0 \cup Y^0).$$

In $(X \setminus Y)^0$ liegen alle Punkte, die eine ganz in $X \setminus Y$ liegende Umgebung besitzen. In Y^0 liegen alle Punkte, die eine ganz in Y liegende Umgebung besitzen. Also besteht $\bar{Y} \setminus Y^0$ genau aus den Punkten, deren sämtliche Umgebungen sowohl Y wie $X \setminus Y$ treffen. Daraus folgt $\partial Y = \bar{Y} \setminus Y^0$ und auch die Abgeschlossenheit von ∂Y .

□

Beispiel 28. Seien

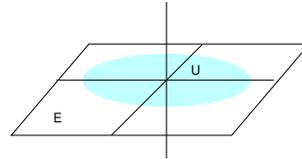
$$\begin{aligned}U &:= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3 \\ E &:= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

Wir betrachten den \mathbb{R}^3 mit der Standardmetrik d . Dann ist das Innere $\overset{\circ}{U} = \emptyset$ und

$$\partial U = \bar{U} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Betrachtet man hingegen U als Teilmenge von (E, d_E) , so ist

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{U} &= U, \\ \bar{U} &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ \partial U &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.\end{aligned}$$



□

1.2 Konvergenz

- Wir definieren Konvergenz in metrischen Räumen.
- Wir konkretisieren das an sehr verschiedenen Beispielen.
- Wir untersuchen den Zusammenhang mit der Offenheit und Abgeschlossenheit von Mengen.
- Als wichtige Sätze lernen wir das Schachtelungsprinzip und den Banachschen Fixpunktsatz kennen.

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition 29 (Konvergente Folgen). Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in (X, d) . Die Folge heißt *konvergent* gegen $a \in X$, und wir schreiben

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \quad \text{oder} \quad x_k \rightarrow a,$$

wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, a) = 0$.

Dann heißt a der *Limes* oder *Grenzwert* der Folge.

Die Folge heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in X$ gibt, so dass (x_k) gegen a konvergiert.

Eine nicht konvergente Folge heißt *divergent*.

Sei E eine Eigenschaft, die für alle Glieder einer Folge (x_k) wahr oder falsch ist.

Wie im letzten Semester vereinbaren wir folgende äquivalente Sprechweisen:

- Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass E wahr ist für alle x_k mit $k \geq k_0$.
- E gilt für *fast alle* Folgenglieder (oder für *fast alle* k).
- E gilt für *alle hinreichend großen* k .

Dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder der Folge (x_k) liegen oder, äquivalent, wenn in jedem $U_\epsilon(a)$ mit $\epsilon > 0$ fast alle Glieder der Folge (x_k) liegen.

Nach der Hausdorff-Eigenschaft ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt.

Beispiel 30. Für \mathbb{R} mit der Standardmetrik ist diese Konvergenz die übliche aus Analysis I. □

Satz 31 (Koordinatenweise Konvergenz). *Wir betrachten eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^n mit der Standardmetrik und schreiben $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$. Weiter sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = a_j \text{ für alle } j.$$

Dasselbe gilt auch für \mathbb{R}^n mit der d^p -Metrik, $1 \leq p \leq \infty$ beliebig.

Beweis. Sei $1 \leq p < \infty$ Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$|x_{kj} - a_j| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |x_{ki} - a_i|^p \right)^{1/p}}_{d(x_k, a)} \leq n^{1/p} \sup_{1 \leq i \leq n} |x_{ki} - a_i|.$$

Daraus folgt die Behauptung. Wie argumentiert man für $p = \infty$? □

Bemerkung. Die Ungleichung im letzten Beispiel hat als einfache Konsequenz die Abschätzung

$$d^\infty(x, y) \leq d^p(x, y) \leq n^{1/p} d^\infty(x, y). \quad (4)$$

Schließen Sie daraus, dass die offenen Mengen in (\mathbb{R}^n, d^p) für jedes $p \in [1, +\infty[$ dieselben sind wie in (\mathbb{R}^n, d^∞) .

Satz 32 (Folgen-Abgeschlossenheit). *Sei A eine Teilmenge des metrischen Raumes (X, d) . Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A ist abgeschlossen.

(ii) Für jede konvergente Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim x_k = x$ gilt:

$$(\forall_k x_k \in A) \implies x \in A.$$

A ist also genau dann abgeschlossen, wenn es bezüglich der Grenzwertbildung abgeschlossen ist.

Beweis. Zu (i) \implies (ii). Sei A abgeschlossen. Sei (x_k) eine Folge in A und $\lim x_k = x \in X$. Zu zeigen: $x \in A$. Wäre $x \notin A$, so läge a also in der *offenen* Menge $X \setminus A$, und diese wäre eine Umgebung von x . Dann lägen fast alle x_k in $X \setminus A$. Es liegt aber *kein* x_k in dieser Menge.

Zu (ii) \implies (i). Der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A liege wieder in A . Wir zeigen $X \setminus A$ ist offen. Andernfalls gibt es nämlich einen Punkt $x \notin A$, so dass kein $U_\epsilon(x)$ ganz in $X \setminus A$ liegt. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in A$ mit $x_k \in U_{\frac{1}{k+1}}(x)$. Offenbar konvergieren die x_k gegen $x \in X \setminus A$. Widerspruch! □

Beispiel 33 (Produktmengen). Seien $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann ist auch $A_1 \times \dots \times A_n \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Das folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Satz in Verbindung mit Satz 31. □

Definition 34 (Gleichmäßige Konvergenz). Eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen

$$f_k : X \rightarrow Y$$

der Menge $X \neq \emptyset$ in den metrischen Raum (Y, d) heißt *gleichmäßig konvergent* gegen $f : X \rightarrow Y$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 \forall x \in X d(f_k(x), f(x)) < \epsilon.$$

Das ist äquivalent zu

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 \sup_{x \in X} d(f_k(x), f(x)) < \epsilon.$$

Beispiel 35. Eine Folge (f_k) in $\mathcal{B}(X, Y)$ ist bezüglich der sup-Metrik konvergent gegen $f \in \mathcal{B}(X, Y)$ genau dann, wenn sie *gleichmäßig* gegen f konvergiert.

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz macht allerdings auch für Folgen unbeschränkter Funktionen einen Sinn. □

Beispiel 36 (Ungleichmäßige Konvergenz). Sei $f_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto x^k$ und sei

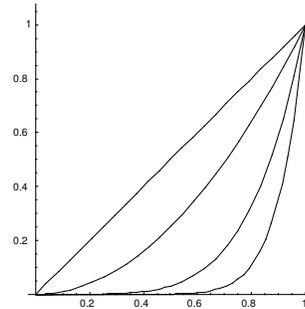
$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann konvergiert für jedes $x \in [0, 1]$ die Folge $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.

Man sagt, die Funktionenfolge (f_k) konvergiert *punktweise* gegen f . Aber für jedes k ist

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_k(x) - f(x)| = 1,$$

und daher ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.



□

Satz 37. Sei $(f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen. Ist diese Folge gleichmäßig konvergent gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so ist f stetig.

Beweis. Als stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall sind die f_k beschränkt. Also liegt die Folge in $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. Auch die Grenzfunktion liegt in diesem Raum, weil sie sich von f_k für großes k nur wenig, zum Beispiel weniger als 1 unterscheidet. Also ist sie auch beschränkt. Die Folge (f_k) konvergiert also in $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ gegen f . Nach Satz 19 ist $C^0([a, b])$ abgeschlossen, und nach Satz 32 liegt der Grenzwert f dann auch in $C^0([a, b])$. □

Definition 38 (Cauchyfolge). Eine Folge (x_k) in (X, d) heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k, l > k_0 \quad d(x_k, x_l) < \epsilon.$$

Ist jede Cauchyfolge in (X, d) konvergent, so heißt (X, d) *vollständig*.

Beispiel 39. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Das beweist man wie in der Analysis I. □

Beispiel 40. Der \mathbb{R}^n mit jeder der Metriken $d^p, 1 \leq p$ ist vollständig. Ist nämlich $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, so ist wegen

$$|x_{ki} - x_{li}| \leq \left(\sum_j |x_{kj} - x_{lj}|^p \right)^{1/p} = d^p(x_k, x_l)$$

für alle i auch $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, also konvergent. Aber koordinatenweise Konvergenz bedeutet Konvergenz im (\mathbb{R}^n, d^p) . □

Beispiel 41. $(\mathcal{B}(X, Y), d^{sup})$ ist vollständig, falls (Y, d) vollständig ist. (Beweis selbst). □

Satz 42. Ist (X, d) vollständig und $A \subset X$ versehen mit der induzierten Metrik d_A , so gilt

$$(A, d_A) \text{ vollständig} \Leftrightarrow A \text{ abgeschlossen.}$$

Beweis. Zu (\implies) . Sei (A, d_A) vollständig und sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A , die gegen $x \in X$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $x \in A$.

Als konvergente Folge ist (a_k) eine d -Cauchyfolge. Damit ist sie aber wegen $d(a_k, a_l) = d_A(a_k, a_l)$ auch eine d_A -Cauchyfolge und nach Voraussetzung konvergent gegen ein $a \in A$. Das bedeutet $\lim d_A(a_k, a) = \lim d(a_k, a) = 0$. Also konvergiert (a_k) auch in X gegen a . Dann ist aber wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes $x = a \in A$.

Zu (\impliedby) . Seien nun A abgeschlossen und (a_k) eine Cauchyfolge in (A, d_A) . Das ist dann auch eine Cauchyfolge in (X, d) , also konvergent gegen ein $x \in X$. Weil A abgeschlossen ist, liegt x in A und ist der Grenzwert von (a_k) in (A, d_A) . \square

Satz 43 (Schachtelungsprinzip). Sei (X, d) vollständig und

$$A_0 \supset A_1 \supset \dots \tag{5}$$

eine „absteigende“ Folge von abgeschlossenen Mengen $\neq \emptyset$. Es gelte $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } A_k = 0$. Dann gibt es genau ein $x^* \in X$, das in allen A_k liegt:

$$\{x^*\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Beweis. Eindeutigkeit. Sind $x_0^*, x_1^* \in \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$, so gilt

$$x_0^*, x_1^* \in A_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

und daher

$$d(x_0^*, x_1^*) \leq \text{diam } A_k.$$

Daher ist $d(x_0^*, x_1^*) = 0$, also $x_0^* = x_1^*$.

Existenz. Wähle aus jedem A_k ein a_k . Wir wollen zunächst zeigen, dass die Folge (a_k) eine Cauchyfolge ist. Sei also $\epsilon > 0$. Da $\text{diam } A_k \rightarrow 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{diam } A_k \leq \epsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Sind $k, l \geq k_0$, so sind nach (5)

$$a_k, a_l \in A_{k_0}.$$

Damit ist aber

$$d(a_k, a_l) \leq \epsilon$$

und (a_k) ist eine Cauchyfolge. Weil (X, d) vollständig ist, ist sie konvergent gegen ein $x^* \in X$, und es bleibt zu zeigen, dass $x^* \in A_k$ für alle k . Aber die Folge $(a_l)_{l \geq k}$ ist, wiederum wegen (5), eine Folge in der abgeschlossenen Menge A_k , und deshalb liegt ihr Grenzwert in A_k . \square

Lemma 44 (Cauchyfolgenkriterium). Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge im metrischen Raum (X, d) . Setze $a_k := d(x_k, x_{k+1})$. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Die Umkehrung gilt aber nicht, finden Sie ein Gegenbeispiel.

Beweis. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$d(x_k, x_{k+l}) \leq \sum_{j=k}^{k+l-1} d(x_j, x_{j+1}) = \sum_{j=k}^{k+l-1} a_j = |s_{k+l-1} - s_{k-1}|,$$

wenn s_k die k -te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Die bilden aber nach Voraussetzung eine Cauchyfolge. \square

Definition 45. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen $(X, d_X), (Y, d_Y)$ heißt *kontrahierend*, wenn es ein $\lambda \in]0, 1[$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2).$$

Wichtig ist die echte Ungleichung $\lambda < 1$. Die Zahl λ heißt dann auch ein *Kontraktionsmodul* von f .

Satz 46 (Banachscher Fixpunktsatz). *Seien (X, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine kontrahierende Abbildung. Dann hat f genau einen Fixpunkt: Es gibt genau ein $x^* \in X$ mit $f(x^*) = x^*$. Ist $x_0 \in X$ und definiert man rekursiv $x_{k+1} = f(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist die Iterationsfolge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen x^* .*

Beweis. Zur Einzigkeit. Aus $f(x_1^*) = x_1^*$ und $f(x_2^*) = x_2^*$ folgt

$$d(x_1^*, x_2^*) = d(f(x_1^*), f(x_2^*)) \leq \lambda d(x_1^*, x_2^*) < d(x_1^*, x_2^*).$$

Daraus folgt $d(x_1^*, x_2^*) = 0$, also $x_1^* = x_2^*$.

Existenz. Seien $x_0 \in X$ und dazu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert wie im Satz. Wir zeigen, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Zunächst ist

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \lambda d(x_{k-1}, x_k) \leq \lambda^2 d(x_{k-2}, x_{k-1}) \leq \dots \leq \lambda^k d(x_0, x_1)$$

Weil die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k d(x_0, x_1)$ konvergiert, ist nach dem Cauchyfolgenkriterium (x_k) also eine Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit konvergent gegen ein $x^* \in X$.

Es bleibt zu zeigen, dass x^* ein Fixpunkt von f ist. Beachten Sie dazu, dass für alle k

$$\begin{aligned} d(f(x^*), x^*) &\leq d(f(x^*), x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x^*) \leq d(f(x^*), f(x_k)) + d(x_{k+1}, x^*) \\ &\leq \lambda \underbrace{d(x^*, x_k)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(x_{k+1}, x^*)}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Es folgt $d(f(x^*), x^*) = 0$, also $f(x^*) = x^*$. \square

Bemerkung. Die Behauptung des Satzes gilt auch unter der schwächeren(!) Voraussetzung, dass nicht f , aber für ein $m \in \mathbb{N}$ die m -te Iteration $f^m := f \circ \dots \circ f$ kontrahierend ist. Beweis als Übung.

1.3 Kompaktheit

- Mit der Kompaktheit lernen wir einen zentralen Begriff der Topologie, der Analysis und der Geometrie kennen.
- Die Definition mittels offener Überdeckungen ist logisch nicht ganz einfach, dafür aber an die vielfältigen Verwendungen der Kompaktheit angepasst. Da müssen Sie also durch
- Im \mathbb{R}^n gibt es eine einfache Charakterisierung kompakter Mengen (Satz von Heine-Borel), die aber in unendlich-dimensionalen (und vielen anderen) Räumen nicht greift.
- Mit der Hausdorffmetrik sprechen wir kurz den Themenkreis der fraktalen Geometrie an.

Definition 47 (Kompaktheit). Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

- (i) Eine *offene Überdeckung* von A ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen $U_i \subset X$, so dass $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.
- (ii) A heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von A eine *endliche* Überdeckung von A enthält, d.h. wenn gilt: Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , so gibt es eine *endliche* Teilmenge $K \subset I$, so dass $A \subset \bigcup_{i \in K} U_i$. Man nennt $(U_i)_{i \in K}$ dann auch eine *endliche Teilüberdeckung*² von A .

Beispiel 48. Sei (a_n) eine gegen $a \in X$ konvergente Folge in einem metrischen Raum. Dann ist $A := \{a\} \cup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kompakt. Hat man nämlich eine offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ gegeben, so liegt a in einer der offenen Mengen. In dieser liegen dann aber fast alle a_k , und man braucht nur noch endlich viele weitere U_i , um den Rest „einzufangen“.

□

Beispiel 49. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist genau dann kompakt, wenn sie als (triviale) Teilmenge von (A, d_A) kompakt ist. Beweisen Sie das!

□

Verallgemeinerung auf topologische Räume. Da die vorstehende Definition nur den Begriff offener Mengen, nicht aber explizit die Metrik benutzt, überträgt sie sich unmittelbar auf topologische Räume. Auch die vorstehenden Beispiele übertragen sich.

Satz 50. Seien I_1, \dots, I_n abgeschlossene und beschränkte Intervalle in \mathbb{R} , $I_k = [a_k, b_k]$. Dann ist der abgeschlossene Quader

$$Q := I_1 \times \dots \times I_n$$

kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Q .

Annahme: Keine endliche Teilfamilie von $(U_i)_{i \in I}$ überdeckt ganz Q .

²Der Name ist etwas problematisch: „Teil“ heißt nicht, dass nur ein Teil von A überdeckt wird, sondern, dass man nur einen Teil der Familie offener Mengen – genauer: eine Teilmenge der Indizes – benutzt.

Wir zerlegen Q durch Halbieren aller Seiten in 2^n abgeschlossene Teilquader vom halben Durchmesser. Dann gibt es wenigstens eines dieser Teilquader, wir nennen es Q_1 , welches nicht durch endlich viele der U_i zu überdecken ist. Wir zerlegen Q_1 durch Halbieren aller Seiten in 2^n abgeschlossene Teilquader vom halben Durchmesser. Dann gibt es wenigstens einen dieser Teilquader, wir nennen es Q_2 , welches nicht durch endlich viele der U_i zu überdecken ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens finden wir eine Folge von abgeschlossenen Quadern

$$Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

mit $\text{diam } Q_k \rightarrow 0$, deren keines sich durch endlich viele der U_i überdecken läßt. Nach dem Schachtelungsprinzip gibt es $x \in \bigcap Q_k \subset Q$. Nach Voraussetzung gibt es ein i_0 mit $x \in U_{i_0}$. Weil U_{i_0} offen ist, gibt ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subset U_{i_0}$. Dann liegt aber jeder Quader Q_k vom Durchmesser $< \epsilon$ ganz in U_{i_0} . Widerspruch! \square

Für $n = 1$ liefert der Satz:

Korollar 51. *Intervalle $[a, b]$ mit $-\infty < a \leq b < +\infty$ sind kompakt in \mathbb{R} .*

Satz 52. *Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Sei $A \subset X$ kompakt. Zum Beweis müssen wir geeignete offene Überdeckungen von A konstruieren und ausnutzen, dass sie endliche Teilüberdeckungen besitzen.

Zur Beschränktheit. Ist $X = \emptyset$ so ist nichts zu zeigen. Andernfalls sei $x \in X$ und für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$U_k := U_{k+1}(x).$$

Jedes $a \in A$ liegt dann in U_k , sobald $k + 1 > d(a, x)$. Also bildet $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A , und wegen der Kompaktheit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A \subset \bigcup_{k=0}^n U_k = U_n.$$

Daher ist A beschränkt mit einem Durchmesser $\leq 2(n + 1)$.

Zur Abgeschlossenheit. Sei $x \in X \setminus A$. Zu jedem $a \in A$ sei U_a eine offene Kugel um a mit Radius $\frac{1}{2} d(a, x)$. Offenbar bildet $(U_a)_{a \in A}$ eine offene Überdeckung von A , und nach Voraussetzung gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ und a_0, \dots, a_n , so dass

$$A \subset \bigcup_{k=0}^n U_{a_k}$$

Sei

$$\epsilon := \frac{1}{2} \min\{d(x, a_k) \mid 0 \leq k \leq n\}$$

Dann ist $\epsilon > 0$ und für alle $k \in \{0, \dots, n\}$

$$U_\epsilon(x) \cap U_{a_k} = \emptyset.$$

Daher ist $U_\epsilon(x) \subset X \setminus A$, also $X \setminus A$ offen und A abgeschlossen. \square

Satz 53. *Eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Teilmenge ist kompakt.*

Beweis. Seien $A \subset X$ kompakt und $B \subset A$ eine abgeschlossene Teilmenge. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von B . Wir suchen eine endliche Teilüberdeckung.

Durch Hinzunahme der offenen Menge $U := X \setminus B$ erhält man eine offene Überdeckung von A . Weil A kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $K \subset I$ mit

$$A \subset U \cup \bigcup_{k \in K} U_k.$$

Wegen $B \cap U = \emptyset$ ist dann aber

$$B \subset \bigcup_{k \in K} U_k,$$

und wir haben für B eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in I}$ gefunden. □

Satz 54 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge A des \mathbb{R}^n mit der Standardmetrik ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Trivial nach den Sätzen 50, 52 und 53. □

Dieser Satz ist falsch in allgemeinen metrischen Räumen.

Beispiel 55. Sei M eine unendliche Menge und $(X, d) = (\mathcal{B}(M, \mathbb{R}), d^{sup})$. Für $m \in M$ sei $f_m \in \mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ definiert durch

$$f_m(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$d^{sup}(f_m, f_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } m = n, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6)$$

Die Menge

$$A := \{f_m \mid m \in M\}$$

hat daher den Durchmesser $\text{diam}(A) = 1$ und ist beschränkt.

Betrachtet man A als Teilmenge von A mit der durch d^{sup} induzierten Metrik, so ist A trivialerweise auch abgeschlossen. Nach (6) ist $U_{\frac{1}{2}}(f_m) \cap A = \{f_m\}$, und die offene Überdeckung $(U_{\frac{1}{2}}(f_m))_{m \in M}$ von A besitzt deshalb keine endliche Teilüberdeckung. Also ist A als Teilmenge von (A, d_A^{sup}) nicht kompakt, wohl aber abgeschlossen und beschränkt.

Derselbe Beweis klappt für jede unendliche Menge mit der diskreten Metrik.

Nach Satz 49 ist A auch als Teilmenge von $(\mathcal{B}(M, \mathbb{R}), d^{sup})$ nicht kompakt. Es ist aber beschränkt, s. oben, und auch abgeschlossen, wie wir mittels Satz 32 noch zeigen wollen. Eine konvergente Folge in A ist eine Cauchyfolge. Nach (6) und dem Cauchy Kriterium mit $\epsilon < 1$ sind dann aber fast alle Folgenglieder gleich, also gleich dem Limes, der damit ebenfalls in A liegt. □

Satz 56 (Bolzano-Weierstraß). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ kompakt und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A . Dann besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge.
Bemerkung: Weil A abgeschlossen ist, liegt der Limes dann in A .

Umgekehrt ist eine Teilmenge A eines metrischen Raumes kompakt, wenn in ihr jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Der Beweis ist etwas trickreich (Vgl. zum Beispiel Klaus Jänich, *Topologie, Springer Hochschultext, 2. Aufl. p.97*). Wir verzichten darauf.

Beweis. Falls es ein $a \in A$ gibt, so dass $\#\{k \mid x_k \in U\} = \infty$ für jede offene Umgebung U von a , so ist dieses a Grenzwert einer konvergenten Teilfolge: Wähle nämlich $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig und zu jedem $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ für das

$$x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a) \text{ und} \\ n_k > n_{k-1}.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist das möglich und liefert die gesuchte Teilfolge.

Gibt es kein solches a , so besitzt andererseits jedes a eine offene Umgebung U_a für die

$$\#\{k \mid x_k \in U_a\} < \infty.$$

Die Familie $(U_a)_{a \in A}$ ist eine offene Überdeckung des kompakten A , also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in A$, so dass

$$A \subset U_{a_0} \cup \dots \cup U_{a_n}.$$

Dann ist aber $\#\{k \mid x_k \in A\} < \infty$ im Widerspruch dazu, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Folge ist. Dieser Fall kann also nicht auftreten. \square

Korollar 57. Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Beweis. Ist (X, d) kompakt und $(x_k)_k$ eine Cauchyfolge in X , so hat diese nach Bolzano-Weierstraß eine gegen $x^* \in X$ konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$. Beweisen Sie mit der Dreiecksungleichung, dass dann die ganze Folge $(x_k)_k$ gegen x^* konvergiert. \square

Korollar 58 (Lebesguesche Zahl). Seien (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ kompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Dann gibt es eine positive Zahl δ , so dass gilt:

$$\text{Für alle } a \in A \text{ gibt es ein } i \in I \text{ mit } U_\delta(a) \subset U_i.$$

Jedes solche δ nennt man eine Lebesguesche Zahl der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A .

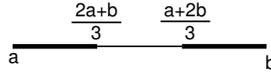
Beweis. Andernfalls gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $a \in A$, so dass $U_\delta(a)$ in keinem einzelnen der U_i enthalten ist. Wir wählen eine Nullfolge $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und zu jedem δ_k ein solches $a_k \in A$. Weil A kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge der (a_k) mit Limes $a^* \in A$. Wir können o.E. annehmen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a^*$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $a^* \in U_{i_0}$.

Weil U_{i_0} offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(a^*) \subset U_{i_0}$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\delta_k < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(a_k, a^*) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $U_{\delta_k}(a_k) \subset U_{i_0}$ im Widerspruch zur Wahl von a_k . \square

Beispiel 59 (Cantorsches Diskontinuum). Für ein kompaktes Intervall $[a, b]$ definieren wir

$$c([a, b]) := [a, \frac{2a+b}{3}] \cup [\frac{a+2b}{3}, b].$$

Die Menge $c([a, b])$ erhält man also aus $[a, b]$, indem man das mittlere Drittel aus dem Intervall herausnimmt.



Sie besteht aus zwei kompakten Intervallen der Länge $\frac{b-a}{3}$. Für die Vereinigung endlich vieler *disjunkter* kompakter Intervalle $I_1 \cup \dots \cup I_n$ definieren wir

$$c(I_1 \cup \dots \cup I_n) = c(I_1) \cup \dots \cup c(I_n).$$

Dann ist also $c(I_1 \cup \dots \cup I_n)$ wieder die Vereinigung disjunkter kompakter Intervalle. Ist $L := \max_{1 \leq k \leq n}(\text{Länge von } I_k)$, so ist das längste Teilintervall aus $c(I_1 \cup \dots \cup I_n)$ von der Länge $L/3$. Wir beginnen nun mit $C_0 := [0, 1]$ und definieren induktiv

$$C_{k+1} := c(C_k).$$

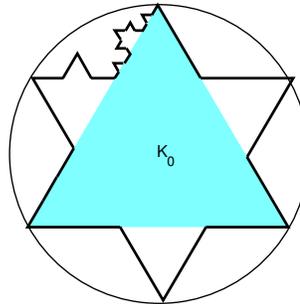
Die Menge $C := \bigcap_k C_k$ heißt das *Cantorsche Diskontinuum*. Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist C abgeschlossen und offenbar beschränkt, also kompakt und offenbar nicht leer ($0 \in C$).

Sind x und y zwei Punkte von C mit Abstand $d > 0$, so liegen sie in jedem C_k , insbesondere in einem C_k , dessen Intervall alle kürzer als d sind. Zwischen je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in C$ gibt es also einen Punkt aus $\mathbb{R} \setminus C$. Daher rührt der Name *Diskontinuum*.

□

Beispiel 60 (von Kochsche Kurve).

Wir beginnen mit einem gleichseitigen Dreieck K_0 , das in der Figur getönt ist. Auf das mittlere Drittel jeder Seite setzen wir ein (gefülltes) gleichseitiges Dreieck und erhalten einen „Stern“ K_1 . Offenbar liegt K_1 in der abgeschlossenen Umkreisscheibe U von K_0 .



Auf das mittlere Drittel jeder Seitenkante von K_1 setzen wir wieder ein gleichseitiges Dreieck und erhalten K_2 . Weil jede Seitenkante auch Seitenkante eines gleichseitigen Dreiecks in U ist, liegen die angesetzten Dreiecke in U . Fortsetzung des Verfahrens liefert eine Folge $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von U . In der obigen Abbildung ist diese Konstruktion nur lokal durchgeführt. Wir setzen

$$K = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j.$$

Den Rand ∂K nennt man die *von Kochsche Kurve* oder die *von Kochsche Schneeflocke*. Als Rand einer Menge ist sie abgeschlossen, und weil sie in der kompakten Menge U liegt, ist sie kompakt.

Weil die Länge von ∂K_{k+1} das $\frac{4}{3}$ -fache der Länge von ∂K_k ist, ist es plausibel, der von Kochschen Kurve eine unendliche Länge zuzusprechen. Die von ihr eingeschlossene Fläche K ist hingegen offensichtlich von endlichem Flächeninhalt. Allerdings fehlen uns einstweilen exakte Definitionen für *Länge* (von was?) und *Flächeninhalt*.

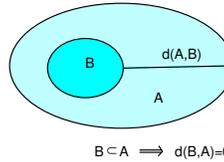
□

Beispiel 61 (Hausdorffmetrik). Sei $\mathcal{F}X$ die Menge der nicht-leeren kompakten Teilmengen eines vollständigen (kompakten) metrischen Raumes (X, d) . Definiere für $A, B \in \mathcal{F}X$

- (i) $d(x, B) := \inf\{d(x, y) \mid y \in B\}$ für $x \in A$,
- (ii) $d(A, B) := \sup\{d(x, B) \mid x \in A\}$, (wohldefiniert, weil $d(\cdot, B)$ stetig auf der kompakten Menge A),
- (iii) $h(A, B) := \sup\{d(A, B), d(B, A)\}$.

Dann ist $(\mathcal{F}X, h)$ ein vollständiger (kompakter) metrischer Raum, der *Raum der Fraktale*. h heißt die *Hausdorffmetrik*. Vgl. [M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press 1988].

Die nebenstehende Abbildung zeigt, dass $d(A, B)$ nicht symmetrisch ist.



Nachweis der Metrik-Eigenschaften.

Die Symmetrie ist klar.

Es gilt

$$h(A, B) = 0 \iff d(A, B) = 0 \text{ und } d(B, A) = 0.$$

Weiter ist

$$d(A, B) = 0 \iff d(x, B) = 0 \text{ für alle } x \in A \iff A \subset B.$$

Also $h(A, B) = 0$ genau dann, wenn $A = B$.

Dreiecksungleichung. Seien $a \in A, b \in B, c \in C$.

$$\begin{aligned} d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) &\implies d(a, C) \leq d(a, b) + d(b, C) \\ &\implies d(a, C) \leq d(a, b) + d(B, C) \\ &\implies d(a, C) \leq d(a, B) + d(B, C) \\ &\implies d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) \\ &\implies d(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C) \end{aligned}$$

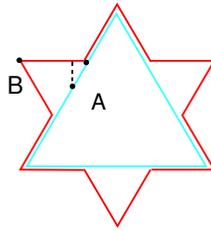
Die rechte Seite ist in A und C symmetrisch, und deshalb folgt auch

$$d(C, A) \leq h(A, B) + h(B, C),$$

also $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$.

□

Beispiel 62 (Noch einmal die von Kochsche Kurve). Seien $A = \partial K_0$ und $B = \partial K_1$ die beiden ersten Randkurven der von Kochschen Konstruktion:



Sei a die Seitenlänge des Dreiecks A . Dann ist (vgl. Abbildung) bezüglich der Standardmetrik des \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} d(A, B) &< \frac{a}{6}, \\ d(B, A) &= \frac{a}{6}\sqrt{3}, \\ h(A, B) &= \frac{a}{6}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Allgemeiner ist für die Randfolge (∂K_j) der von Kochschen Konstruktion $h(\partial K_k, \partial K_{k+1}) = (\sqrt{3}/6)^{k+1}a$. Also ist $(\partial K_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathcal{FR}^2 und man kann zeigen, dass die von Kochsche Kurve ihr Grenzwert ist.

□

Bemerkung. In *Dugundji, Topology* findet man für kompaktes X dazu noch folgende Übungsaufgaben:

- (i) Für beliebiges $E \subset X$ ist

$$\{A \in \mathcal{FX} \mid E \subset A\}$$

abgeschlossen.

- (ii) Setze für beliebiges $E \subset X$

$$\begin{aligned} I(E) &= \{A \in \mathcal{FX} \mid A \subset E\} \\ J(E) &= \{A \in \mathcal{FX} \mid A \cap E \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Dann sind $I(E)$ und $J(E)$ mit E offen bzw. abgeschlossen.

- (iii) Die Abbildung $\mathcal{FX} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{diam}(A)$ ist stetig.
 (iv) Die Abbildung $\mathcal{FX} \times \mathcal{FX} \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto d(A, B)$ ist stetig.
 (v) \mathcal{FX} ist kompakt.

1.4 Zusammenhang

- Die Rolle der Intervalle in \mathbb{R} wird in metrischen Räumen übernommen von den sogenannten *zusammenhängenden Mengen*, die wir jetzt kennenlernen.

Jede Menge X mit mindestens zwei Elementen läßt sich trivialerweise schreiben als Vereinigung zweier nicht-leerer disjunkter Teilmengen. Aber nicht jeder metrische Raum läßt sich schreiben als Vereinigung zweier nicht-leerer disjunkter *offener* Mengen.

Definition 63 (Zusammenhang). Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (i) X heißt *zusammenhängend*, wenn es nicht die Vereinigung zweier nicht-leerer disjunkter offener Mengen ist:

Für alle offenen $U, V \subset X$ mit

$$U \cap V = \emptyset \quad \text{und} \quad U \cup V = X$$

gilt

$$U = \emptyset \quad \text{oder} \quad V = \emptyset.$$

Das ist äquivalent zur Forderung, dass \emptyset und X die einzigen zugleich offen und abgeschlossen Teilmengen sind.

- (ii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *zusammenhängend*, wenn (A, d_A) zusammenhängend ist.
- (iii) X heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ einen Weg von p nach q , d.h. eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow X$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ gibt.³

Satz 64 (Zusammenhängende Teilmengen). *Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann ist A genau dann zusammenhängend, wenn gilt:*

Für alle offenen $U, V \subset X$ mit

$$U \cap V = \emptyset \quad \text{und} \quad U \cup V \supset A$$

gilt

$$U \cap A = \emptyset \quad \text{oder} \quad V \cap A = \emptyset.$$

Beweis. Zu (\implies) . Sei (A, d_A) zusammenhängend und seien $U, V \subset X$ wie im Satz. Dann sind $U \cap A$ und $V \cap A$ offene Teilmengen von (A, d_A) mit leerem Durchschnitt, deren Vereinigung A ist. Also ist $U \cap A = \emptyset$ oder $V \cap A = \emptyset$.

Zu (\impliedby) . Wir wollen zeigen, dass (A, d_A) zusammenhängend ist. Seien also $U, V \subset A$ offen in A mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = A$. Dann gibt es offene Mengen \tilde{U}, \tilde{V} von X mit

$$\tilde{U} \cap A = U, \quad \tilde{V} \cap A = V.$$

Aber um die Voraussetzungen anwenden zu können, müssen \tilde{U} und \tilde{V} disjunkt sein. Deshalb müssen wir die Erweiterungen \tilde{U} und \tilde{V} von U und V sorgfältig konstruieren.

Wir wählen zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon(x) > 0$ mit $U_{\epsilon(x)}(x) \cap A \subset U$. Das geht, weil U offen ist in A . Wir definieren

$$\tilde{U} := \bigcup_{x \in U} U_{\frac{1}{2}\epsilon(x)}(x).$$

³Allerdings haben wir noch gar nicht definiert, was stetige Abbildungen sind. Das ist also eine Definition „auf Vorrat“.

Entsprechend definieren wir \tilde{V} . Natürlich sind das offene Teilmengen von (X, d) , und sie sind auch disjunkt: Wäre $z \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$, so gäbe es $x \in U$ und $y \in V$ mit

$$z \in U_{\frac{1}{2}\epsilon(x)}(x) \cap U_{\frac{1}{2}\epsilon(y)}(y).$$

Sei etwa $\epsilon(y) \leq \epsilon(x)$. Dann ist aber

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq \frac{1}{2}\epsilon(x) + \frac{1}{2}\epsilon(y) \leq \epsilon(x)$$

Dann wäre aber $y \in U$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$.

Jetzt können wir die Voraussetzungen auf \tilde{U} und \tilde{V} anwenden und erhalten $\tilde{U} \cap A = U = \emptyset$ oder $\tilde{V} \cap A = V = \emptyset$. \square

Zeigen Sie (später) entsprechend: Für $A \subset X$ ist (A, d_A) wegzusammenhängend genau dann, wenn es zu allen $p, q \in A$ eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow X$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ mit $c([a, b]) \subset A$ gibt.

Bemerkung zur Verallgemeinerung auf topologische Räume. Die obige Definition des Begriffs *zusammenhängend* benutzt nur offene Mengen, nicht explizit die Metrik. Daher läßt sich die Definition ohne Modifikation auf topologische Räume erweitern. Die schwierige Richtung von Satz 64 gilt allerdings nicht für topologische Räume. Ein Gegenbeispiel findet man so: Man nimmt eine Menge X , die wenigstens drei verschiedene Punkte O, P, Q enthält. Man definiert

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{Y \subset X \mid O \in Y\}.$$

als System der offenen Menge. \mathcal{T} ist abgeschlossen gegenüber Durchschnitt und Vereinigung, definiert also wirklich eine Topologie auf X . Die Teilmenge $A = \{P, Q\}$ enthält die in A offenen disjunkten Teilmengen $U = \{P\}$ und $V = \{Q\}$. Aber diese lassen sich nicht zu *disjunkten* in X offenen Teilmengen erweitern, weil jede solche den Punkt O enthält.

Satz 65. Sei $A \subset B \subset \bar{A} \subset X$ und sei A zusammenhängend. Dann ist auch B zusammenhängend. Insbesondere ist auch \bar{A} zusammenhängend.

Beweis. Seien $U, V \subset X$ offen und disjunkt mit $B \subset U \cup V$. Wir müssen zeigen, dass $U \cap B = \emptyset$ oder $V \cap B = \emptyset$. Weil A zusammenhängend ist, gilt $U \cap A = \emptyset$ oder $V \cap A = \emptyset$. Sei etwa $U \cap A = \emptyset$. Wäre $U \cap B \neq \emptyset$, so gäbe es also ein $b \in U \cap B$ und, weil U offen ist, dazu ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(b) \subset U$. Natürlich ist $b \in \bar{A}$. Also liegen in $U_\epsilon(b)$ auch Punkte von A . Die liegen dann aber in U . Widerspruch zur Annahme $U \cap A = \emptyset$! \square

Satz 66. Die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} sind genau die Intervalle.

Beweis. Sei J ein Intervall. Seien $U, V \subset \mathbb{R}$ offen mit $U \cap V = \emptyset$ und $J \subset U \cup V$. Annahme: $p \in U \cap J$, $r \in V \cap J$ und o.E. $p < r$. Wir müssen zeigen, dass dies zum Widerspruch führt. Sei

$$q := \sup\{t \mid [p, t] \subset U\}.$$

Dann gilt nach Voraussetzung $q \leq r < \infty$. Offenbar ist $q \notin U$, denn andernfalls wäre wegen der Offenheit von U auch $[p, q + \epsilon] \subset U$ für kleines $\epsilon > 0$ im Widerspruch zur Wahl von q .

Andrerseits ist $q \notin V$, weil sonst wegen der Offenheit von V auch $q - \epsilon \in V$ für kleines $\epsilon > 0$ im Widerspruch zur Wahl von q .

Damit ist $q \notin U \cup V$. Widerspruch zu $q \in J \subset U \cup V$.

Sei $J \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend. Seien $p < q < r$ mit $p, r \in J$. Wäre $q \notin J$, so wäre

$$J \subset]-\infty, q[\cup]q, \infty[,$$

also $J \subset]-\infty, q[$ oder $J \subset]q, \infty[$ im Widerspruch dazu, dass p in der einen, r in der anderen dieser Mengen liegt. \square

1.5 Stetige Abbildungen

- Nachdem der Konvergenzbegriff in metrischen Räumen erklärt ist, ist es leicht, auch die Stetigkeit von Abbildungen solcher Räume zu erklären.
- Wir machen uns mit der Bedeutung dieses Begriffes in verschiedenen einfachen Situationen vertraut und formulieren Rechenregeln für stetige Abbildungen.
- Etwas abstrakter ist die Charakterisierung der Stetigkeit mittels offener oder abgeschlossener Mengen.

Definition 67 (Stetigkeit). Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $G \subset X$ eine Teilmenge und $f : X \supset G \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- f heißt *stetig in* $p \in G$, wenn $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ ist, d.h. wenn für jede gegen p konvergente Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in G auch $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(p)$ ist.
- f heißt *stetig in* oder *auf* G , wenn es stetig in jedem Punkt $p \in G$ ist.
- Offenbar ist $f : X \supset G \rightarrow Y$ im Sinne dieser Definition stetig (in $p \in G$), genau dann, wenn es (in p) stetig ist als Abbildung des metrischen Raumes (G, d_G) nach Y .

Beispiel 68 (Komponentenweise Stetigkeit). Ist (X, d_X) beliebig und $(Y, d_Y) = \mathbb{R}^m$, so ist $f = (f_1, \dots, f_m)$ genau dann stetig in p , wenn alle Komponentenfunktionen $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ in p stetig sind. Das folgt unmittelbar aus der Definition und Satz 31.

□

Partielle Stetigkeit. Bei einer Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ kann man also die Stetigkeit einfach an den (reellwertigen) Komponentenfunktionen untersuchen. \mathbb{R}^m oder \mathbb{R} auf der rechten Seite macht also „keinen großen Unterschied“. Jetzt betrachten wir umgekehrt eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow Y$. Dann können wir $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ als Funktion jeder einzelnen Variablen betrachten, indem wir uns vorstellen, dass die anderen festbleiben. Es stellt sich die naheliegende Frage, ob f in p stetig ist, wenn alle die Funktionen

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto f(x_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \\ x_2 &\mapsto f(p_1, x_2, p_3, \dots, p_n) \\ x_3 &\mapsto f(p_1, p_2, x_3, \dots, p_n) \\ &\dots \\ x_n &\mapsto f(p_1, p_2, p_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

stetig sind. Man nennt das partielle Stetigkeit, weil man immer nur einen Teil der Variablen - nämlich eine - als variabel betrachtet. Folgt aus partieller Stetigkeit die Stetigkeit? Das ist nicht so:

Partielle Stetigkeit impliziert NICHT Stetigkeit.

Beispiel 69. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0, 0) := 0$ und

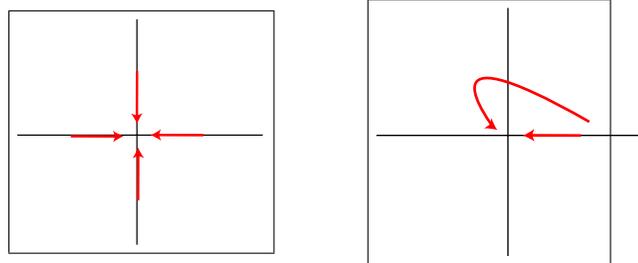
$$f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ geht nämlich die Folge $(\frac{1}{k}, \frac{\lambda}{k})$ gegen $(0, 0)$, aber es ist

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{\lambda}{k}\right) = \frac{\lambda}{k^2\left(\frac{1}{k^2} + \frac{\lambda^2}{k^2}\right)} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

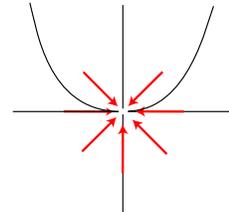
Für $\lambda \neq 0$ und $k \rightarrow \infty$ geht das also nicht gegen $0 = f(0,0)$. Andererseits ist f in $(0,0)$ wegen $f(x,0) = 0 = f(0,y)$ aber partiell stetig.

Dieses Beispiel zeigt genauer, warum partielle Stetigkeit viel schwächer ist als „totale“ Stetigkeit: Die Variable x muß sich der Stelle p auf beliebige Weise nähern dürfen. Bei der partiellen Stetigkeit schränkt man sich aber auf achsenparallele Annäherung ein.



In unserem Beispiel ist die Funktion auf allen Geraden durch den Nullpunkt jeweils konstant (Wert $\lambda/(1+\lambda^2)$), nur im Nullpunkt hat sie definitionsgemäß den Wert 0. Der kommt heraus, wenn man auf der x -Achse ($\lambda = 0$) oder auf der y -Achse ($\lambda = \infty$) an den Nullpunkt heranläuft, aber eben nur dann.

Selbst wenn $f(x) \rightarrow f(p)$ bei Annäherung auf allen Geraden durch p gilt, folgt daraus nicht die Stetigkeit in p . Ein Gegenbeispiel liefert die Funktion g mit $g(x,y) = 1$, falls $y = x^2 \neq 0$, und $g(x,y) = 0$ sonst. Wie sieht der Graph dieser Funktion aus?



□

Beispiel 70. Die Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$$

$$\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$$

$$\eta : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1}{x_2}$$

sind stetig.

Wir zeigen das für α . Seien $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ und $(x_k = (x_{k1}, x_{k2}))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim x_k = p$. Dann ist

$$d(\alpha(x_k), \alpha(p)) = |(x_{k1} + x_{k2}) - (p_1 + p_2)| \leq |x_{k1} - p_1| + |x_{k2} - p_2|.$$

Aber nach Satz 31 folgt aus $\lim x_k = p$, dass $\lim x_{ki} = p_i$ für $i = 1, 2$. Daher geht die rechte Seite gegen Null und $\lim \alpha(x_k) = \alpha(p)$.

Beweis für μ und η selbst. Für den letzteren Fall benutzt man die Abschätzung

$$\left| \frac{x_1}{x_2} - \frac{p_1}{p_2} \right| = \left| \frac{x_1 p_2 - x_2 p_1}{x_2 p_2} \right| \leq \frac{|x_1 - p_1| |p_2| + |p_1| |p_2 - x_2|}{|x_2 p_2|}.$$

□

Beispiel 71. Dieselben Argumente wie im vorstehenden Beispiel zeigen die Stetigkeit der Determinante

$$\det : M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_{ij}) \mapsto \sum_{\sigma} \text{sign } \sigma x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)},$$

wenn man den Raum $M(n \times n, \mathbb{R})$ der quadratischen n -reihigen Matrizen auf die offensichtliche Weise mit dem \mathbb{R}^{n^2} identifiziert und eine der l^p -Metriken verwendet. Auch die mit der Transponierten $(x_{ij})^T$ gebildete Abbildung

$$M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R}), \quad (x_{ij}) \mapsto (x_{ij})(x_{ij})^T$$

gebildete Abbildung ist stetig. □

Beispiel 72. Seien (X, d) metrischer Raum und $a \in X$. Dann ist

$$d(\cdot, a) : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, a)$$

stetig. □

Beispiel 73. Sei $(X, d) = (C^0([a, b], \mathbb{R}), d^{sup})$. Dann ist die Abbildung

$$\int_a^b : X \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

stetig, denn es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| dx \\ &= |b - a| d^{sup}(f, g). \end{aligned}$$

□

Satz 74. Seien (X_i, d_i) , $i = 1, 2, 3$ metrische Räume und $f_i : X_i \supset G_i \rightarrow X_{i+1}$ für $i = 1, 2$ Abbildungen mit $f_1(G_1) \subset G_2$. Es sei f_1 stetig in $p_1 \in G_1$ und f_2 stetig in $p_2 := f_1(p_1)$. Dann ist $f_2 \circ f_1 : X_1 \supset G_1 \rightarrow X_3$ stetig in p_1 .
Kurz: Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.

Beweis. Leicht. □

Korollar 75. Ist (X, d) ein metrischer Raum, und sind $f, g : X \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $p \in G$, ist ferner $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch die Abbildungen

$$f + g, f - g, fg, \lambda f : X \supset G \rightarrow \mathbb{R}$$

in p stetig. Insbesondere ist also der Vektorraum

$$C^0(X, \mathbb{R}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ein reeller Vektorraum.

Ist $g(p) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g} : X \supset \{x \in G \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ in p stetig.

Beweis. Die Abbildungen sind vom Typ

$$x \mapsto (f(x), g(x)) \xrightarrow{\alpha} f(x) + g(x),$$

wobei die erste stetige Komponentenfunktionen besitzt. □

Satz 76 (ϵ - δ -Kriterium für Stetigkeit). Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \supset G \rightarrow Y$. Sei $p \in G$. Dann ist f in p genau dann stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$d_Y(f(p), f(x)) < \epsilon \text{ für alle } x \in G \text{ mit } d_X(p, x) < \delta.$$

Die letzte Bedingung ist äquivalent zu

$$f(U_\delta(p) \cap G) \subset U_\epsilon(f(p)).$$

Beweis. Zu (\implies). Sei $\epsilon > 0$. Gäbe es kein δ wie angegeben, so gäbe es insbesondere zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in G$ mit

$$d_X(p, x_k) < \frac{1}{k+1}, \text{ aber } d_Y(f(p), f(x_k)) \geq \epsilon.$$

Dann wäre aber $\lim x_k = p$ und $\lim f(x_k) \neq f(p)$. Widerspruch!

Zu (\impliedby). Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen p konvergente Folge. Wir müssen zeigen, dass $\lim f(x_k) = f(p)$. Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $\delta > 0$ dazu gewählt wie im Satz. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_k, p) < \delta$ für alle $k \geq k_0$. Dann ist aber $d_Y(f(x_k), f(p)) < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$. □

Satz 77. (i) Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Dann ist f stetig genau dann, wenn für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist. D.h. f ist genau dann stetig, wenn das Urbild aller offenen Mengen offen ist.

(ii) Die Aussage bleibt richtig, wenn man überall „offen“ durch „abgeschlossen“ ersetzt.

(iii) Ist f nicht auf ganz X definiert, sondern nur

$$f : X \supset G \rightarrow Y$$

stetig, so sind die Urbilder offener Mengen offen in (G, d_G) , aber nicht unbedingt in X .

Oft wird dieser Satz etwas großzügig zitiert als:

Stetige Urbilder(?) offener Mengen sind offen.

Finden Sie Beispiele, die zeigen, dass die Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen im allgemeinen nicht offen sind.

Beweis. Zu (i \implies). Seien also f stetig und $V \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(V)$ offen ist. Sei dazu $x \in f^{-1}(V)$. Zu $f(x) \in V$ gibt es dann ein $\epsilon > 0$ mit

$$U_\epsilon(f(x)) \subset V.$$

Dazu gibt es dann ein $\delta > 0$ mit

$$f(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(f(x)) \subset V.$$

Das bedeutet aber $U_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$.

Zu (i \impliedby). Sei das Urbild jeder offenen Menge offen und sei $p \in X$.

Sei weiter $\epsilon > 0$. Dann ist $U_\epsilon(f(p))$ offen, also ist $f^{-1}(U_\epsilon(f(p)))$ offen und damit eine Umgebung von p . Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(p) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(p)))$, d.h. mit

$$f(U_\delta(p)) \subset U_\epsilon(f(p)).$$

Das war aber zu zeigen.

Zu (ii). Die Aussage über abgeschlossene Mengen folgt, weil $A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $Y \setminus A$ offen ist, und weil andererseits

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

Zu (iii). Die Offenheit in (G, d_G) ist klar nach (i). □

Beispiel 78. Die Einheitssphäre

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$$

ist das Urbild von $\{1\} \in \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung

$$x \mapsto \sum x_i^2.$$

Also ist S^n abgeschlossen und, weil beschränkt, auch kompakt. □

Beispiel 79 (Matrizengruppen). Wir erinnern an Beispiel 71. Daraus folgt:

- (i) Die *allgemeine lineare Gruppe* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, gebildet aus den invertierbaren Matrizen, ist offen in $M(n \times n, \mathbb{R})$:

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

- (ii) Die *spezielle lineare Gruppe* $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, gebildet aus allen Matrizen der Determinanten = 1, ist abgeschlossen in $M(n \times n, \mathbb{R})$:

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\}).$$

- (iii) Die Gruppe der *orthogonalen Matrizen* $\mathbf{O}(n)$, gebildet aus allen Matrizen mit

$$(x_{ij})(x_{ij})^T = E (= \text{Einheitsmatrix})$$

ist abgeschlossen in $M(n \times n, \mathbb{R})$. Weil alle ihre Komponenten x_{ij} maximal vom Betrag 1 sind, ist sie auch beschränkt und damit kompakt in $M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Die angegebenen Teilmengen von $M(n \times n, \mathbb{R})$ sind tatsächlich *Gruppen* bezüglich der Matrixmultiplikation. Sie haben außerdem eine von $M(n \times n, \mathbb{R})$ geerbte Metrik, in der die Gruppenoperationen stetig sind. Damit sind sie (die wichtigsten) Beispiele sogenannter *Liegruppen*.

□

1.6 Fünf wichtige Sätze über stetige Abbildungen

- Die Sätze und Definitionen in diesem Abschnitt verallgemeinern Sätze und Definitionen, die wir (mit Ausnahme des letzten Satzes) aus der Analysis I für reelle Funktionen schon kennen.
- Die Beweise sind sehr einfach, weil die Definitionen bereits die wesentlichen Eigenschaften erfassen.

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume.

Satz 80 (vom Zusammenhang). *Seien $A \subset X$ zusammenhängend und $f : A \rightarrow Y$ stetig. Dann ist auch $f(A) \subset Y$ zusammenhängend.*

Bemerkung. Das verallgemeinert den Zwischenwertsatz!

Beweis. Seien $U, V \subset Y$ offen und disjunkt mit $f(A) \subset U \cup V$. Zu zeigen: $U \cap f(A) = \emptyset$ oder $V \cap f(A) = \emptyset$.

Nach Satz 77 sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen in (A, d_A) . Sie sind weiter disjunkt mit

$$A = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Weil A zusammenhängend ist, folgt

$$f^{-1}(U) = \emptyset \text{ oder } f^{-1}(V) = \emptyset,$$

und entsprechend ist $U \cap f(A) = \emptyset$ oder $V \cap f(A) = \emptyset$.

□

Satz 81 (Kompaktheitssatz). *Seien $A \subset X$ kompakt und $f : A \rightarrow Y$ stetig. Dann ist auch $f(A) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Also gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$, so dass

$$A = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i).$$

Aber dann ist

$$f(A) \subset \bigcup_{i \in J} U_i.$$

□

Beispiel 82. Untersuchen Sie die Funktion

$$\frac{\ln x}{x} :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

um zu zeigen, dass stetige Abbildungen im allgemeinen weder beschränkte Mengen in beschränkte Mengen noch abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen abbilden.

□

Satz 83 (vom Maximum). Seien $A \subset X$ kompakt $\neq \emptyset$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sein Maximum und Minimum an.

Beweis. Nach dem Kompaktheitssatz ist $f(A) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also insbesondere beschränkt. Daher ist die Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gibt es eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim f(x_k) = \sup f$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat (x_k) in dem metrischen Raum (A, d_A) eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$. Ist $x^* := \lim x_{k_j} \in A$, so folgt

$$f(x^*) = \lim f(x_{k_j}) = \lim f(x_k) = \sup f.$$

Also wird das Supremum angenommen und ist das Maximum von f .

Analog für das Minimum. □

Definition 84. Sei $f : X \supset G \rightarrow Y$. f heißt *gleichmäßig stetig auf G* , wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in G f(U_\delta(x) \cap G) \subset U_\epsilon(f(x)).$$

f ist genau dann gleichmäßig stetig auf der Teilmenge $G \subset X$ in diesem Sinne, wenn es auf (G, d_G) gleichmäßig stetig ist.

Offenbar impliziert gleichmäßige Stetigkeit die gewöhnliche Stetigkeit. Die Umkehrung ist nicht richtig:

Beispiel 85. Die Funktion $f = x^2$ ist auf $[0, 2]$ gleichmäßig stetig. Auf \mathbb{R} ist sie stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. □

Satz 86 (von der gleichmäßigen Stetigkeit). Seien $f : X \supset A \rightarrow Y$ stetig und A kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es zu jedem $x \in A$ ein $\delta_x > 0$ mit

$$f(U_{\delta_x}(x) \cap A) \subset U_{\frac{1}{2}\epsilon}(f(x)).$$

Wir setzen

$$U_x := U_{\delta_x}(x).$$

Dann ist $(U_x)_{x \in A}$ eine offene Überdeckung von A . Sei $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl dazu. Dann gilt für alle $x \in A$: Es gibt ein $y \in A$ mit $U_\delta(x) \subset U_y$. Also ist

$$f(U_\delta(x) \cap A) \subset f(U_y \cap A) \subset U_{\frac{1}{2}\epsilon}(f(y))$$

Insbesondere ist dann $f(x) \in U_{\frac{1}{2}\epsilon}(f(y))$ und deshalb

$$f(U_\delta(x) \cap A) \subset U_{\frac{1}{2}\epsilon}(f(y)) \subset U_\epsilon(f(x)).$$

□

Beispiel 87. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall. Dann ist f gleichmäßig stetig, und es gibt zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$. Wähle eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ und wähle

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig. Setze dann $\phi(x) := f(\xi_i)$ für alle $x \in [x_{i-1}, x_i[$ und $\phi(b) = f(b)$. Dann ist ϕ also eine Treppenfunktion, und es gilt für alle $x \in [x_{i-1}, x_i[$

$$|f(x) - \phi(x)| = |f(x) - f(\xi_i)| < \epsilon$$

und

$$|f(b) - \phi(b)| = 0 < \epsilon.$$

Die Treppenfunktion approximiert die stetige Funktion f also besser als ϵ .

Auch andere Approximationsresultate für stetige Abbildungen benutzen die gleichmäßige Stetigkeit, vgl. Übungen und den Weierstraßschen Approximationssatz z.B. in *S. Hildebrandt, Analysis I*.

□

Der in der Definition 34 eingeführte Begriff der gleichmäßigen *Konvergenz* einer Funktionenfolge hat mit der gleichmäßigen *Stetigkeit* nichts zu tun. Im Raum der beschränkten Funktionen bedeutete gleichmäßige Konvergenz einfach die Konvergenz bezüglich der Supremumsmetrik, und in dem Zusammenhang haben wir einen Spezialfall des folgenden Satzes schon kennengelernt, vgl. Satz 37.

Satz 88 (von der gleichmäßigen Konvergenz). *Sei die Folge $(f_i : G \rightarrow Y)_{i \in \mathbb{N}}$ auf $G \subset X$ gleichmäßig konvergent gegen $f : G \rightarrow Y$. Sind alle f_i stetig, so ist auch f stetig.*

Beweis. Wir zeigen die Stetigkeit in $p \in G$. Sei $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in G mit Grenzwert p . Zu zeigen:

$$\lim f(x_j) = f(p).$$

Sei dazu $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ und alle $x \in G$

$$d_Y(f_k(x), f(x)) < \epsilon/3.$$

Weil f_{k_0} in p stetig ist, gibt es ein j_0 mit

$$d_Y(f_{k_0}(x_j), f_{k_0}(p)) < \epsilon/3$$

für alle $j \geq j_0$. Dann ist aber für $j \geq j_0$

$$d_Y(f(x_j), f(p)) \leq d_Y(f(x_j), f_{k_0}(x_j)) + d_Y(f_{k_0}(x_j), f_{k_0}(p)) + d_Y(f_{k_0}(p), f(p)) < \epsilon.$$

□

Beispiel 89 (von der konstanten Majorante, Weierstraß). Sei $(f_k : G \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen. Sei $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass

$$|f_k(x)| \leq c_k \text{ für alle } x \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} c_i \text{ konvergent.}$$

Dann ist die Partialsummenfolge

$$s_n := \sum_{n=0}^n f_n$$

auf G gleichmäßig konvergent. Zum Beweis setzen wir

$$\gamma_n := \sum_{k=0}^n c_k, \quad \gamma := \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Zu $\epsilon > 0$ gibt es dann ein N mit $|\gamma - \gamma_m| < \epsilon$ für alle $m \geq N$. Dann ist aber für alle x und m, n mit $N < m < n$

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s_m(x)| &= \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n c_k = \gamma_n - \gamma_m \leq \gamma - \gamma_m < \epsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

Also ist $(s_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in G$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} und deshalb konvergent. Der Grenzwert sei $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. Bildet man in (7) den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$, so folgt

$$|s(x) - s_m(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in G \text{ und } m > N,$$

also die gleichmäßige Konvergenz. Nach dem letzten Satz ist $s : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wenn alle f_k stetig sind.

Insbesondere kann man das anwenden auf Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$. Ist $R > 0$ der Konvergenzradius dieser Reihe, und $0 < r < R$, so ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \text{ konvergent}$$

und

$$|a_k(x - x_0)^k| \leq |a_k| r^k \text{ für alle } x \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

Also ist die Potenzreihe auf $[x_0 - r, x_0 + r]$ gleichmäßig konvergent und ihre Grenzfunktion auf jedem solchen Intervall stetig. Also ist sie auf $]x_0 - R, x_0 + R[$ stetig, aber das wussten wir schon. Man sagt auch, Potenzreihen seien gleichmäßig konvergent auf jedem Kompaktum im Inneren ihres Konvergenzbereichs.

□

1.7 Normierte Vektorräume

- Wir lernen normierte Vektorräume kennen, die in der mehrdimensionalen Analysis als Definitions- und Zielbereiche der Funktionen dienen.
- Endlich-dimensionale normierte Vektorräume sind insbesondere *vollständige* metrische Räume, und auf ihnen ist jede lineare Abbildung stetig.

Differentialrechnung beschäftigt sich mit der linearen Approximation von Funktionen. In einem allgemeinen metrischen Raum macht das keinen Sinn, weil man keine *lineare Struktur* hat. Zum Beispiel kann man die U-Bahnstationen aus Beispiel 6 nicht addieren. Den richtigen Rahmen für Linearität bieten *Vektorräume*. Und wenn man außerdem über Konvergenz reden will, braucht man in den Vektorräumen eine Metrik, die sich mit der linearen Struktur verträgt. Das führt zur Klasse der *normierten Vektorräume*, mit denen wir uns jetzt befassen wollen.

Ausblick: Man kann nicht nur in normierten Vektorräumen Differentialrechnung betreiben, sondern auch in Räumen, die sich selber durch lineare Räume approximieren lassen: wie Flächen durch ihre Tangentialräume. Das führt zur Analysis auf sogenannten *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*.

„Vektorraum“ heißt hier immer *reeller* Vektorraum.

Definition 90. Sei V ein Vektorraum. Eine *Norm* für V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|,$$

so dass für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $\|v\| \geq 0$ und $(\|v\| = 0 \iff v = 0)$,
- (ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$,
- (iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Ein *normierter Vektorraum* $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Vektorraum V zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ auf V . Durch die Definition

$$d(u, v) := \|u - v\| \tag{8}$$

wird daraus ein metrischer Raum, und alle Begriffe, die wir für metrische Räume erklärt haben, sind auch für normierte Vektorräume erklärt. Wenn wir in normierten Vektorräumen von Konvergenz, Stetigkeit, offenen Mengen etc. sprechen, beziehen wir uns immer auf die Metrik (8). Normierte Vektorräume sind also spezielle metrische Räume.

Beispiel 91 (Der \mathbb{R}^n mit der Standardnorm). Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ besitzt eine Norm $\|x\| := \sqrt{\sum x_i^2}$, die wir als die *Standardnorm* oder *Euklidische Norm* des \mathbb{R}^n bezeichnen wollen. Die Axiome (i) und (ii) sind klar, die Dreiecksungleichung folgt, wenn wir beachten, dass

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = d(x, y)$$

die Standardmetrik aus Beispiel 3 ist. Damit folgt

$$\|x + y\| = d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(-y, 0) = \|x - 0\| + \|-y - 0\| = \|x\| + \|y\|.$$

Wenn wir vom \mathbb{R}^n als normiertem Vektorraum sprechen, beziehen wir uns immer auf die vorstehende Norm, obwohl es sehr viele andere gibt. Die Metriken d^p aus Beispiel 4 wie die Metrik d^∞ kommen alle von einer Norm

$$\|x\|_p := d^p(x, 0),$$

der sogenannten l^p -Norm. □

Beispiel 92. Der Vektorraum der beschränkten Funktionen $V = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ gestattet die Norm $\|f\| = \|f\|_{sup} = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$, die zur Supremumsmetrik führt. □

Beispiel 93. Nicht jede Metrik kommt von einer Norm, schon weil metrische Räume im allgemeinen eben keine Vektorräume sind: Beliebige Teilmengen von normierten Vektorräumen sind als Teilmengen von metrischen Räumen wieder metrische Räume, im allgemeinen aber keine normierten Vektorräume.

Aber auch auf „kompletten“ Vektorräumen gibt es Metriken, die nicht von einer Norm kommen. Zum Beispiel kommt die diskrete Metrik auf dem \mathbb{R}^n nicht von einer Norm. Warum nicht? □

Bemerkung. In der linearen Algebra haben Sie die Norm in einem Euklidischen Vektorraum kennengelernt. Jedes positiv definite Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert eine Norm vermöge

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Aber nicht jede Norm auf einem reellen Vektorraum kommt von einem Skalarprodukt. Notwendig und hinreichend ist die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

Das die Bedingung notwendig ist, rechnen Sie leicht nach. Dass sie auch hinreichend ist, ist schwieriger zu zeigen. Man definiert

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

und muss dann vor allem die Bilinearität zeigen. Einen Beweis finden Sie zum Beispiel in *W. Klingenberg, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Springer 1984, p. 117.*

Lemma 94. *In einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ gilt für alle $u, v \in V$*

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|.$$

Beweis. Es gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\|u\| = \|(u - v) + v\| \leq \|u - v\| + \|v\|,$$

und daher

$$\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|.$$

Aus Symmetriegründen ist dann aber auch $\|v\| - \|u\| \leq \|u - v\|$, und daraus folgt die Behauptung. □

Als Folgerung ergibt sich, dass die Funktion

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$$

stetig ist.

Definition 95. Mit $L(V, W)$ bezeichnen wir den *Vektorraum der linearen Abbildungen*

$$F : V \rightarrow W$$

vom Vektorraum V in den Vektorraum W .

Satz 96. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume, und sei $F : V \rightarrow W$ linear. Dann ist F genau dann stetig, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $v \in V$

$$\|F(v)\|_W \leq C\|v\|_V.$$

Beweis. Zu (\implies). Wenn F stetig ist, ist es insbesondere in 0 stetig. Also gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$F(U_\delta(0)) \subset U_\epsilon(F(0)) = U_1(0).$$

Mit anderen Worten:

$$\|v\|_V < \delta \implies \|F(v)\|_W < 1.$$

Dann gilt aber für alle $v \neq 0$

$$1 > \|F(\frac{\delta}{2\|v\|_V} v)\|_W = \frac{\delta}{2\|v\|_V} \|F(v)\|_W.$$

Das impliziert

$$\|F(v)\|_W \leq \frac{2}{\delta} \|v\|_V$$

auch für $v = 0$. Also können wir $C = \frac{2}{\delta}$ wählen.

Zu (\impliedby). Gibt es ein C wie im Satz, so ist für alle $v_1, v_2 \in V$

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|_W = \|F(v_1 - v_2)\|_W \leq C\|v_1 - v_2\|_V.$$

Daraus folgt die (gleichmäßige) Stetigkeit von F . □

Wir verzichten im weiteren auf den Index am Normsymbol.

Definition 97. Sie $n \in \mathbb{N}$. Ein (reeller) Vektorraum V heißt *n-dimensional*, wenn es einen Isomorphismus

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$$

gibt. Dabei ist ein *Isomorphismus* eine *bijektive* Abbildung Φ , so dass Φ und Φ^{-1} linear sind. Ein Vektorraum heißt *endlich-dimensional*, wenn er *n-dimensional* für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

Satz 98. Seien V, W normierte Vektorräume und V endlich-dimensional. Dann ist jede lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ stetig.

Beweis. 1. Fall: $V = \mathbb{R}^n$. Zunächst gilt für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

wobei $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ den j -ten Vektor der sogenannten Standardbasis des \mathbb{R}^n bezeichnet, der in der j -ten Komponente eine 1 und sonst lauter 0 hat. Daher ist

$$\|F(x)\| = \|F(\sum_{j=1}^n x_j e_j)\| = \|\sum_{j=1}^n x_j F(e_j)\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|F(e_j)\| \leq M \sum_{j=1}^n |x_j|$$

mit $M := \max_j \|F(e_j)\|$. Wegen $|x_j| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ folgt $\sum_{j=1}^n |x_j| \leq n\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, also

$$\|F(x)\| \leq Mn\|x\|,$$

und F ist stetig.

2. Fall: V beliebig, endlich-dimensional. Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ ein Isomorphismus. Dann ist Φ nach dem 1. Fall stetig, und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $\|\Phi(x)\| \leq C\|x\|$ für alle x . Wir zeigen, dass es auch ein $B > 0$ gibt, so dass

$$B\|x\| \leq \|\Phi(x)\| \leq C\|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Die Funktion $\|\Phi\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist als Komposition stetiger Funktionen stetig und nimmt deshalb auf der kompakten Menge

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

ihr Minimum B in einem Punkt $x^* \in S^{n-1}$ an. Weil $x^* \neq 0$ und Φ ein Isomorphismus ist, ist

$$B := \|\Phi(x^*)\| > 0.$$

Für alle $x \neq 0$ gilt

$$\|\Phi(x)\| = \left\| \Phi\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \left\| \Phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq B\|x\|.$$

und die Ungleichung $\|\Phi(x)\| \geq B\|x\|$ gilt offenbar auch für $x = 0$. Damit ist (9) bewiesen. Es folgt

$$\|\Phi^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{B}\|v\| \text{ für alle } v \in V.$$

Schließlich ist nach dem 1. Fall die lineare Abbildung $F \circ \Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow W$ stetig mit

$$\|F \circ \Phi(x)\| \leq A\|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Damit erhalten wir

$$\|F(v)\| = \|F \circ \Phi(\Phi^{-1}(v))\| \leq A\|\Phi^{-1}(v)\| \leq AB\|v\|.$$

□

Korollar 99 (Die Operatornorm auf $L(V, W)$). *Seien V und W normierte Vektorräume und $V \neq \{0\}$ endlich-dimensional. Dann definiert*

$$\|F\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|F(v)\|}{\|v\|} \text{ für } F \in L(V, W)$$

eine Norm auf dem Vektorraum $L(V, W)$.

Beweis. Nach dem Satz gibt es ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $v \neq 0$

$$\frac{\|F(v)\|}{\|v\|} \leq C.$$

Daher ist $\|F\| \in \mathbb{R}$. Die Norm-Eigenschaften sind leicht zu verifizieren. □

Korollar 100. *Sei V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Dann gilt*

(i) Es gibt $c, C > 0$, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$c \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C \|v\|_1.$$

Man sagt: Je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind äquivalent.

(ii) Eine Menge $G \subset V$ ist genau dann bezüglich $\|\cdot\|_1$ offen, wenn sie bezüglich $\|\cdot\|_2$ offen ist. Daher sind auch Begriffe wie Konvergenz, Kompaktheit, Stetigkeit usw. unabhängig von der in V verwendeten Norm.

(iii) $\|\cdot\|_1$ -Cauchyfolgen sind auch $\|\cdot\|_2$ -Cauchyfolgen. Also ist auch der Begriff Cauchyfolge unabhängig von der in V verwendeten Norm.

Beweis. Zu (i). Weil die Identität $\text{id} : (V, \|\cdot\|_2) \rightarrow (V, \|\cdot\|_1)$ linear, also stetig ist, gibt es ein $M > 0$ mit

$$\|v\|_1 \leq M \|v\|_2,$$

also

$$\frac{1}{M} \|v\|_1 \leq \|v\|_2$$

für alle v . Die Stetigkeit von id in der anderen Richtung liefert die zweite Ungleichung.

Zu (ii). Ist G offen bezüglich $\|\cdot\|_1$ und betrachtet man wieder id als stetige Abbildung von $(V, \|\cdot\|_2)$ nach $(V, \|\cdot\|_1)$, so ist auch

$$G = \text{id}^{-1}(G)$$

offen. Die umgekehrte Richtung folgt aus Symmetriegründen.

Zu (iii). Folgt leicht aus (i). □

Beispiel 101. Für die l^p -Normen auf \mathbb{R}^n aus Beispiel 91 gilt: Ist $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|x\|_q, \quad (10)$$

wobei $\frac{1}{+\infty} := 0$.

Beweis: Sei zunächst $q < +\infty$. Die linke Abschätzung ist leicht: Man kann o.E. annehmen, dass

$$1 = (\|x\|_q)^q = \sum_i |x_i|^q.$$

Insbesondere sind dann alle $|x_i| \leq 1$ und daher $|x_i|^p \geq |x_i|^q$. Damit ist $\sum_i |x_i|^p \geq 1$ und

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p} \geq 1 = \|x\|_q.$$

Die rechte Ungleichung beweisen wir später im Beispiel 185.

Für den Fall $q = +\infty$ vergleiche (4). □

Definition 102. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt ein *Banachraum*.

Satz 103. Jeder endlich-dimensionale normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Beweis. 1. Fall: $V = \mathbb{R}^n$ mit der Standardnorm. Das haben wir bereits im Beispiel 40 gezeigt.

2. Fall: V beliebiger endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Sie $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V . Nach unserer Definition (oder nach Linearer Algebra) gibt es einen Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$. Dann ist auch $\Phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, also stetig, und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\|\Phi^{-1}(v_j) - \Phi^{-1}(v_k)\| = \|\Phi^{-1}(v_j - v_k)\| \leq C\|v_j - v_k\|$$

für alle $j, k \in \mathbb{N}$. Also ist auch $(x_k = \Phi^{-1}(v_k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R}^n . Sie ist nach dem 1. Fall konvergent gegen ein $x^* \in \mathbb{R}^n$. Wegen der Stetigkeit von Φ ist deshalb

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi(x^*).$$

□

Beispiel 104. Vergleiche Beispiele 71 und 79. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein n -dimensionaler Banachraum. Die Wahl einer Basis von V liefert nach linearer Algebra einen Isomorphismus

$$\Phi : L(V, V) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$$

zwischen dem Raum der linearen Abbildungen von V in sich und dem Raum der $(n \times n)$ -Matrizen. Wenn wir $L(V, V)$ mit der Operatornorm und $M(n \times n, \mathbb{R})$ zum Beispiel mit dem $\mathbb{R}^{(n^2)}$ identifizieren und mit der entsprechenden Norm ausstatten, ist Φ nach Satz 98 ein Homöomorphismus. Die Determinante ist nach Beispiel 71 stetig auf $M(n \times n, \mathbb{R})$, und weil die Determinante der linearen Abbildung $F \in L(V, V)$ nach linearer Algebra gerade die Determinante der Matrix $\Phi(F)$ ist, ist auch die Determinantenfunktion auf $L(V, V)$ stetig. Damit ist das Urbild von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, also die invertierbaren Endomorphismen von V , eine *offene* Teilmenge $\mathbf{GL}(V)$, die unter Φ der Menge der invertierbaren Matrizen $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ entspricht. Für invertierbare Matrizen sind die Komponenten der Inversen durch gebrochenrationale Funktionen der originalen Komponenten gegeben, also insbesondere stetig. Daher ist die Inversenbildung auf $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ und wegen der Φ -Invarianz auch auf $\mathbf{GL}(V)$ eine stetige Abbildung.

□

Wir halten noch einmal das Ergebnis aus dem Korollar 100 fest:

Ein (abstrakter) endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum hat unendlich viele Basen, aber keine von diesen ist besonders ausgezeichnet. Ebenso besitzt er unendlich viele Normen, aber keine von diesen ist besonders ausgezeichnet. Allerdings sind sie alle äquivalent: Die durch sie definierten Metriken liefern alle dieselben offenen Mengen, dieselben konvergenten Folgen, dieselben stetigen Abbildungen. Um über Offenheit, Konvergenz oder Stetigkeit in endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorräumen zu sprechen, kann man eine beliebige Norm wählen. Weil es aber egal ist, welche man wählt, kann man eben unabhängig von einer solchen Wahl über Offenheit, Konvergenz oder Stetigkeit reden.

Der \mathbb{R}^n besitzt eine Standardbasis und eine Standardnorm, die die Standardmetrik d^2 liefert. Natürlich kann man davon Gebrauch machen, oft muss man aber nicht ...

Mehr zu diesem Thema gleich in der Vorbemerkung zum nächsten Abschnitt und im Abschnitt 2.7 über die klassische Vektoranalysis.

2 Grundlagen der mehrdimensionalen Differentiation

Wir werden die Differentialrechnung in endlich-dimensionalen Banachräumen entwickeln. Nach dem vorangehenden Abschnitt sind diese isomorph zu einem \mathbb{R}^n , und man könnte sich auch auf die letzteren beschränken.

Der Vorteil wäre, dass man im \mathbb{R}^n eine ausgezeichnete Basis und damit ausgezeichnete Koordinaten hat. Dadurch wird die Theorie konkreter. Man könnte die Differentialrechnung auf dem Begriff der partiellen Ableitung, also der Ableitung nach einer einzelnen Variablen, aufbauen.

Der Nachteil wäre, dass man im \mathbb{R}^n eine ausgezeichnete Basis und damit ausgezeichnete Koordinaten hat. Diese verschleiern die Tatsache, dass die Konzepte der Differentialrechnung geometrischer Natur sind und mit speziellen Koordinaten nichts zu tun haben, vielleicht aber sehr viel mit anderen Strukturen, die auf dem \mathbb{R}^n auch noch so selbstverständlich vorkommen, dass wir sie gar nicht bemerken.

Zum Beispiel ist $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ ein zweidimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 . Hat man darauf eine differenzierbare Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so ist es zunächst unklar, was ihre partiellen Ableitungen sein sollen. Erst wenn man in V eine Basis gewählt hat und damit eine Isomorphie von V auf \mathbb{R}^2 , macht der Begriff der partiellen Ableitungen von f einen Sinn. Allerdings für jede Basiswahl einen anderen. Und es gibt keine „kanonische“ Weise, eine Basis zu wählen. Hingegen kann man den viel wichtigeren Begriff des *Gradienten* ohne partielle Ableitungen definieren, braucht dafür aber ein Skalarprodukt. Und das Skalarprodukt des \mathbb{R}^3 liefert auf ganz kanonische Weise eines für den Untervektorraum V . (Vgl. Abschnitt 2.7.1.)

2.1 Die Ableitung

- Wir lernen die Ableitung als lineare Approximation einer Abbildung in der Nähe eines Punktes kennen.
- Wir berechne die Ableitung in einfachsten Fällen.

Im folgenden seien V, W endlich-dimensionale Banachräume⁴ und G eine offene Teilmenge von V .

Definition 105. Sei $f : V \supset G \rightarrow W$ eine Abbildung der offenen Menge G .

- (i) f heißt *differenzierbar in $p \in G$* , wenn es eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ gibt, so dass für die durch

$$f(x) = f(p) + F(x - p) + R(x) \tag{11}$$

definierte „Restfunktion“ $R : G \rightarrow W$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{\|x - p\|} = 0. \tag{12}$$

F ist dann eindeutig bestimmt, vgl. Lemma 106, und wir nennen es *die Ableitung* oder *das Differential von f in p* .

Notation:

$$F = D_p f = d_p f.$$

- (ii) f heißt *differenzierbar (auf G)*, falls f in allen $p \in G$ differenzierbar ist.

⁴Im folgenden genügt es, wenn V endlich-dimensional ist. Aber da wir keine konkreten Anwendungen für unendlich-dimensionales W im Sinn haben, sei der Einfachheit halber auch W endlich-dimensional.

Bemerkungen.

- *Analytisch* gesprochen ist $D_p f$ die lineare Approximation von f in der Nähe von p . Schreibt man x statt p und Δx für $x - p$, so erhält man

$$\Delta f := f(x + \Delta x) - f(x) \approx D_x f(\Delta x).$$

- Die Notation $f'(p)$ für die Ableitung finde ich weniger empfehlenswert, weil die Ableitung eine lineare Abbildung ist, so dass man dann $f'(p)(v)$ schreiben müßte. Wir heben uns diese Schreibweise daher auf für den Fall, wo $D_p f$ auf kanonische Weise durch eine *Matrix* gegeben ist, vgl. Beispiel 114.

Lemma 106. *Ist f in p differenzierbar und F wie in der Definition, so gilt für alle v in V :*

$$F(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

Beachten Sie: Weil der Definitionsbereich G von f offen ist, liegt für jedes $v \in V$ und hinreichend kleines $|t|$ der Punkt $p + tv$ in G . Deshalb ist der Limes sinnvoll. Die Definition der Differenzierbarkeit kann man auch für Abbildungen von nicht-offenen Teilmengen hinschreiben, aber die Ableitung ist dann im allgemeinen nicht mehr eindeutig.

Beweis. Ist F wie in der Definition, so folgt

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \frac{f(p) + F(tv) + R(p + tv) - f(p)}{t} = F(v) + \frac{R(p + tv)}{t}.$$

Aber

$$\frac{R(p + tv)}{t} = \frac{R(p + tv)}{\underbrace{\|p + tv - p\|}_{\rightarrow 0}} \underbrace{\frac{|t| \|v\|}{t}}_{= \pm \|v\|}.$$

□

Differenzierbarkeit und das Differential hängen wegen Korollar 100 nicht ab von den gewählten Normen auf V und W . Wir werden deshalb die Norm oft auch nicht spezifizieren. Wenn man eine braucht, nimmt man eine.

Beispiel 107 (Der Fall $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Wie hängt die neue Ableitungsdefinition mit der aus dem letzten Semester zusammen?

Die einzigen linearen Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} sind die Abbildungen $x \mapsto ax$ mit einem festen $a \in \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ ist deshalb differenzierbar im Sinne der Analysis I genau dann, wenn sie auch nach der neuen Definition differenzierbar ist. Dann gilt für $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}$

$$D_p f(v) = f'(p)v,$$

d.h.

$$\boxed{f'(p) = D_p f(1)} \tag{13}$$

oder verbal:

$$\boxed{\text{Neue Ableitung} = \text{Multiplikation mit der alten Ableitung.}}$$

□

Beispiel 108. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 + 3x + 4y + 5xy^2$. Dann ist f in $(0, 0)$ differenzierbar mit

$$D_{(0,0)}f(u, v) = 3u + 4v.$$

Es ist nämlich

$$f(x, y) = 1 + 3(x - 0) + 4(y - 0) + 5xy^2,$$

und weil $5xy^2$ in $(x - 0)$ und $(y - 0)$ „kubisch ist“, geht der Rest für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ gegen null:

$$\left| \frac{5xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 5 \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} y^2 \right| \leq 5y^2.$$

Durch Nachrechnen können Sie bestätigen, dass

$$f(x, y) = 32 + 23(x - 1) + 24(y - 2) + \underbrace{20(x - 1)(y - 2) + 5(y - 2)^2 + 5(x - 1)(y - 2)^2}_{=: R(x, y)}.$$

Der Rest dividiert durch $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$ geht für $(x, y) \rightarrow (1, 2)$ wieder gegen null. Damit ist f auch in $(x, y) = (1, 2)$ differenzierbar und

$$D_{(1,2)}f(u, v) = 23u + 24v.$$

(Die Umrechnung von f auf den Punkt $(x, y) = (1, 2)$ geschieht erst für x und dann für y mit der Taylorformel aus Analysis I. Vgl. auch Satz 148).

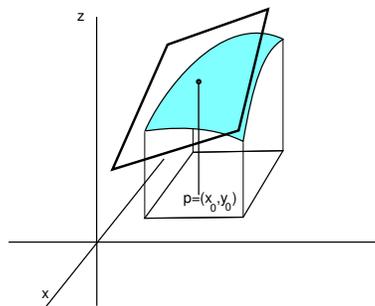
□

Geometrische Interpretation.

Die *geometrische Interpretation* ist am einfachsten im Fall $f : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist der Graph von

$$x \mapsto f(p) + D_p f(x - p)$$

eine Ebene im \mathbb{R}^3 , die *Tangentialebene* an den Graphen von f .



Beispiel 109. Die (offene) obere Einheits-Halbkugel ist gegeben durch den Graphen von

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

über der offenen Menge $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2})$ ist gegeben durch den Graphen der affinen Abbildung

$$f(x_0, y_0) + D_{(x_0, y_0)}f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

falls f differenzierbar ist. Aber das wissen wir noch nicht, und wir wissen auch noch nicht, wie wir $D_{(x_0, y_0)}f$ berechnen sollen.

□

Berechnung von Ableitungen. Das ist offenbar ein wichtiges Problem, dem wir noch länger nachgehen werden. Wir beginnen mit zwei ganz trivialen Fällen:

Beispiel 110 (Konstante Abbildungen). Sei $f : V \supset G \rightarrow W$ konstant. Dann ist $D_p f = 0$ für alle $p \in G$. □

Beispiel 111 (Lineare Abbildungen). Sei $f : V \rightarrow W$ linear. Dann ist

$$f(x) = f(p) + f(x - p) + 0.$$

Also ist f in jedem Punkt $p \in V$ differenzierbar und $D_p f = f$. Zum Beispiel ist die Additionsabbildung

$$\alpha : V \times V \rightarrow V, (x, y) \mapsto \alpha(x, y) = x + y$$

vom Vektorraum $V \times V$ der Paare in den Vektorraum V linear:

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)) &= \alpha((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ &= \lambda_1 \alpha(x_1, y_1) + \lambda_2 \alpha(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Also ist α differenzierbar, und für alle (x, y) und (u, v) in $V \times V$ ist

$$D_{(x,y)} \alpha(u, v) = u + v. \quad \square$$

Nun ein etwas anspruchsvolleres Beispiel.

Beispiel 112 (Skalarmultiplikation). Die Abbildung der Skalarmultiplikation

$$\mu : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

ist differenzierbar in jedem $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times V$. Es ist nämlich

$$\mu(\lambda, x) = \lambda x = \underbrace{\lambda_0 x_0}_{\mu(\lambda_0, x_0)} + \underbrace{(\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(x - x_0)}_{=: F(\lambda - \lambda_0, x - x_0)} + \underbrace{(\lambda - \lambda_0)(x - x_0)}_{=: R(\lambda, x)}.$$

Diese Gleichung rechnet man leicht nach. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{(\lambda, x) \rightarrow (\lambda_0, x_0)} \frac{R(\lambda, x)}{\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\|} = 0.$$

Dazu braucht man eine Norm auf $\mathbb{R} \times V$. Wir nehmen an, dass auf V eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben ist, und definieren

$$\|(\lambda, x)\| := |\lambda| + \|x\|.$$

Rechnen Sie nach, dass das wirklich eine Norm definiert. Damit gilt dann:

$$\frac{|R(\lambda, x)|}{\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\|} = \frac{|\lambda - \lambda_0| \|x - x_0\|}{|\lambda - \lambda_0| + \|x - x_0\|} \leq \|x - x_0\| \rightarrow 0$$

für $(\lambda, x) \rightarrow (\lambda_0, x_0)$. Daraus folgt die Behauptung. Wir halten fest:

$$\boxed{D_{(\lambda_0, x_0)} \mu(\lambda, x) = \lambda_0 x + \lambda x_0.}$$

Das ist eine Art Produktregel, auf die wir noch zurückkommen. □

Die beiden folgenden Beispiele sind überaus wichtig! Sie stellen einen ersten Schritt zur expliziten praktischen Berechnung von Ableitungen dar.

Beispiel 113 (Komponentenweise Differentiation). Sei

$$f = (f_1, \dots, f_m) : V \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mit Komponentenfunktionen $f_i : G \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann in p differenzierbar, wenn alle f_i in p differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$D_p f(v) = (D_p f_1(v), \dots, D_p f_m(v)) \text{ für alle } v \in V. \quad (14)$$

Beweis. In Komponenten sieht die Gleichung (11) so aus:

$$f_i(x) = f_i(p) + F_i(x - p) + R_i(x).$$

Nun ist F linear genau dann, wenn alle Komponenten F_i linear sind. Und weil Konvergenz im \mathbb{R}^n einfach komponentenweise Konvergenz ist, folgt die Behauptung durch Betrachtung der Komponenten $\frac{R_i(x)}{\|x-p\|}$ von $\frac{R(x)}{\|x-p\|}$.

Dieses Beispiel gestattet eine Verallgemeinerung auf folgende Situation:

Seien V und W_1, \dots, W_m endlich-dimensionale Banachräume, $G \subset V$ offen und seien

$$f_i : V \supset G \rightarrow W_i$$

für $i \in \{1, \dots, m\}$ Abbildungen. Wir definieren

$$\begin{aligned} f : V \supset G &\rightarrow W_1 \times \dots \times W_m \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)). \end{aligned}$$

Dann ist f genau dann differenzierbar in p , wenn alle f_i in p differenzierbar sind, und es gilt wieder die Gleichung (14). □

Beispiel 114 (Funktionalmatrix). $f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar in $p \in G$. Dann ist $D_p f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, und eine solche wird nach Linearer Algebra dargestellt durch eine Matrix, die wir mit $f'(p)$ bezeichnen und die *Jacobimatrix* oder *Funktionalmatrix* von f in p nennen. Die Spalten sind gerade die Bilder der Basisvektoren e_1, \dots, e_n :

$$f'(p) = (D_p f(e_1) \dots D_p f(e_n)) = (D_p f_i(e_j)) = \begin{pmatrix} D_p f_1(e_1) & \dots & D_p f_1(e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ D_p f_m(e_1) & \dots & D_p f_m(e_n) \end{pmatrix}.$$

Die Formel im Lemma 106 liefert eine Möglichkeit, die $D_p f_m(e_j)$ zu berechnen. Wir kommen im Abschnitt 2.3 darauf zurück. □

Beispiel 115 (Kurven). Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \supset]a, b[\rightarrow W$ nennt man eine Kurve in W . Ist f in $t \in]a, b[$ differenzierbar, so ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$D_t f(\lambda) = \lambda D_t f(1),$$

Also ist $D_t f : \mathbb{R} \rightarrow W$ durch den *Tangentenvektor* $\dot{f}(t) := D_t f(1)$ eindeutig bestimmt. Ist $W = \mathbb{R}^m$ und $f = (f_1, \dots, f_m)$, so ist

$$\dot{f}(t) = \left(\dot{f}_1(t), \dots, \dot{f}_m(t) \right).$$

Dabei ist nach Lemma 106

$$\dot{f}_i(t) = D_t f_i(1) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f_i(\tau + t) - f_i(t)}{\tau}.$$

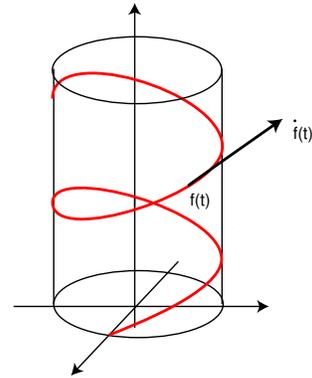
$\dot{f}_i(t)$ ist also die gewöhnliche Ableitung der Analysis I. Insbesondere können wir die Definition von \dot{f} auch auf den Fall kompakter Intervalle $[a, b]$ ausdehnen.

Konkret: Die Kurve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ ist eine Spiralkurve. Sie hat den Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{f}(t) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

Und es gilt zum Beispiel

$$D_2 f(-5) = (5 \sin 2, -5 \cos 2, -5).$$



□

2.2 Rechenregeln für differenzierbare Abbildungen

- Differenzierbare Abbildungen sind stetig.
- Die wichtigsten Hilfsmittel zur Berechnung von Ableitungen sind wie in der Analysis I die Kettenregel und die Produktregel, die wir hier kennenlernen.
- Wir betrachten viele Beispiele für multilineare Abbildungen (Produkte) und sehr wichtige Beispiele von Ableitungen.
- Es lohnt sich, die Formeln (21), (23), (24) und (25) auswendig zu wissen.

Satz 116. *Seien V, W endlich-dimensionale Banachräume. Ist $f : V \supset G \rightarrow W$ in $p \in G$ differenzierbar, so ist es dort auch stetig.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus

$$f(x) = f(p) + D_p f(x - p) + R(x),$$

weil für $x \rightarrow p$ das Restglied gegen 0 geht, und weil die lineare Abbildung $D_p f$ auf einem endlich-dimensionalen Banachraum stetig ist. \square

Satz 117 (Kettenregel). *Seien U, V, W endlich-dimensionale Banachräume, $G \subset U$ und $H \subset V$ offen, $g : G \rightarrow V$ und $f : H \rightarrow W$ Abbildungen mit $g(G) \subset H$. Sei g differenzierbar in $p \in G$ und f differenzierbar in $q = g(p) \in H$. Dann ist die Abbildung $f \circ g : G \rightarrow W$ differenzierbar in p , und es gilt:*

$$D_p(f \circ g) = D_{g(p)}f \circ D_p g.$$

Beweis. Die definierenden Gleichungen

$$\begin{aligned} g(x) &= g(p) + D_p g(x - p) + R(x) \\ f(y) &= f(q) + D_q f(y - q) + S(y) \end{aligned}$$

implizieren

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(p)) + D_q f(g(x) - g(p)) + S(g(x)) \\ &= f(g(p)) + D_q f(D_p g(x - p)) + \underbrace{D_q f(R(x)) + S(g(x))}_{=: T(x)}. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{T(x)}{\|x - p\|} = 0. \tag{15}$$

Im folgenden benutzen wir die im Korollar 99 definierte Operatornorm.

Zunächst gilt

$$\frac{\|D_q f(R(x))\|}{\|x - p\|} \leq \|D_q f\| \frac{\|R(x)\|}{\|x - p\|} \rightarrow 0 \tag{16}$$

für $x \rightarrow p$.

Schwieriger ist der zweite Summand von $T(x)$. Die Behauptung

$$\lim_{y \rightarrow q} \frac{S(y)}{\|y - q\|} = 0$$

ist äquivalent zur Behauptung:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 (\|y - q\| < \delta \implies \|S(y)\| \leq \epsilon \|y - q\|).$$

Sei $\epsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ dazu wie vorstehend gewählt. Weil g stetig ist in p , gibt es ein $\eta > 0$, so dass

$$\|x - p\| < \eta \implies \|g(x) - g(p)\| < \delta.$$

Für $\|x - p\| < \eta$ ist dann also

$$\|S(g(x))\| \leq \epsilon \|g(x) - g(p)\| = \epsilon \|D_p g(x - p) + R(x)\| \leq \epsilon (\|D_p g\| \|x - p\| + \|R(x)\|).$$

Weil $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{\|x - p\|} = 0$, kann man annehmen, dass $\eta > 0$ so klein ist, dass

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x - p\|} < 1 \quad \text{für } 0 < \|x - p\| < \eta.$$

Dann folgt

$$\|S(g(x))\| \leq \epsilon (\|D_p g\| \|x - p\| + \|x - p\|) = \epsilon (\|D_p g\| + 1) \|x - p\|.$$

Wir haben also zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gefunden, so dass

$$0 < \|x - p\| < \eta \implies \frac{\|S(g(x))\|}{\|x - p\|} \leq \epsilon (\|D_p g\| + 1).$$

Das bedeutet aber

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\|S(g(x))\|}{\|x - p\|} = 0. \tag{17}$$

Aus (16) und (17) folgt (15) und damit die Behauptung. \square

Die Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$ eines Vektorraums ist in jedem der beiden Argumente linear, man nennt das *bilinear*. Eine Verallgemeinerung sind die *multilinearen* oder *k-linearen* Abbildungen, zum Beispiel die Determinante. Der folgende Satz verallgemeinert das Beispiel 112 auf multilineare Abbildungen.

Satz 118 (Produktregel). *Seien V_1, \dots, V_k, W endlich-dimensionale Banachräume und*

$$\mu : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$$

eine k-lineare Abbildung, d.h. μ ist in jedem seiner k Argumente linear. Dann ist μ differenzierbar und es gilt

$$D_{(p_1, \dots, p_k)} \mu(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i=1}^k \mu(p_1, \dots, p_{i-1}, v_i, p_{i+1}, \dots, p_k).$$

Bemerkung: Der erste Summand ist zu interpretieren als $\mu(v_1, p_2, \dots, p_k)$, der letzte entsprechend.

Beweis. A. Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von μ , genauer: Es gibt C mit

$$\|\mu(x_1, \dots, x_k)\| \leq C \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_k\| \quad \text{für alle } x_i \in V_i. \tag{18}$$

Ist e_1, \dots, e_n eine Basis von V , so sind die Koordinatenabbildungen

$$x = \sum_j x_j e_j \mapsto x_i$$

linear, also stetig, und es gibt zu jedem i eine Konstante C_i mit $|x_i| \leq C_i \|x\|$ für alle x .

Wir wählen nun Basen e_{i1}, \dots, e_{in_i} für V_i und schreiben $x_i = \sum_j x_{ij} e_{ij} \in V_i$. Aus der Multilinearität folgt dann

$$\begin{aligned} \|\mu(x_1, \dots, x_k)\| &= \left\| \sum_{j_1, \dots, j_k} x_{1j_1} \cdot \dots \cdot x_{kj_k} \mu(e_{1j_1}, \dots, e_{kj_k}) \right\| \\ &\leq \sum_{j_1, \dots, j_k} C_{1j_1} \|x_1\| \cdot \dots \cdot C_{kj_k} \|x_k\| \cdot \|\mu(e_{1j_1}, \dots, e_{kj_k})\| \\ &= \underbrace{\left(\sum_{j_1, \dots, j_k} C_{1j_1} \cdot \dots \cdot C_{kj_k} \|\mu(e_{1j_1}, \dots, e_{kj_k})\| \right)}_{=: C} \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_k\|. \end{aligned}$$

B. Nun zum eigentlichen Beweis. Dazu müssen wir den Restterm

$$R(x_1, \dots, x_k) = \mu(x_1, \dots, x_k) - \mu(p_1, \dots, p_k) - \sum_{i=1}^k \mu(p_1, \dots, p_{i-1}, x_i - p_i, p_{i+1}, \dots, p_k)$$

berechnen. Dann müssen wir eine Norm $\|\cdot\|$ auf $V_1 \times \dots \times V_k$ wählen und zeigen, dass

$$\lim_{(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (p_1, \dots, p_k)} \frac{R(x_1, \dots, x_k)}{\|(x_1, \dots, x_k) - (p_1, \dots, p_k)\|} = 0.$$

Eigentlich müssen wir den Restterm natürlich gar nicht berechnen, sondern wir müssen ihn in einer Form schreiben, die es ermöglicht, den Grenzwert zu berechnen. Dazu führen wir folgende Schreibweise ein:

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}(p, x) := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu(p_1, \dots, x_{j_1} - p_{j_1}, \dots, x_{j_m} - p_{j_m}, \dots, p_k), \quad (19)$$

wobei über alle Produkte summiert wird, die aus $\mu(p_1, \dots, p_k)$ entstehen, indem man die p_{j_i} ersetzt durch $x_{j_i} - p_{j_i}$. Der Restterm ist dann also

$$R(x_1, \dots, x_k) = \mu(x_1, \dots, x_k) - \mu(p_1, \dots, p_k) - \sum_{1 \leq j_1 \leq k} \mu_{j_1}(p, x).$$

Wir zeigen gleich in einem Lemma, dass dann

$$R(x_1, \dots, x_k) = \sum_{m=2}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}(p, x). \quad (20)$$

Jeder Summand der rechten Seite enthält also mindestens zwei ‘Faktoren’ der Form $(x_j - p_j)$ und geht deshalb für $(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (p_1, \dots, p_k)$ mindestens quadratisch gegen 0.

Genauer: Ist $\|\cdot\|_i$ eine Norm auf V_i , so definiert

$$\|(x_1, \dots, x_k)\| := \|x_1\|_1 + \dots + \|x_k\|_k$$

eine Norm auf $V_1 \times \dots \times V_k$, und weil nach (18)

$$\begin{aligned} & \frac{\|\mu(p_1, \dots, x_{j_1} - p_{j_1}, \dots, x_{j_2} - p_{j_2}, \dots, p_k)\|}{\|((x_1, \dots, x_k) - (p_1, \dots, p_k))\|} \\ & \leq C \|p_1\| \dots \underbrace{\frac{\|x_{j_1} - p_{j_1}\|}{\|p_1\| + \dots + \|x_{j_1} - p_{j_1}\| + \dots + \|p_k\|}}_{\leq 1} \dots \underbrace{\|x_{j_2} - p_{j_2}\|}_{\rightarrow 0} \dots \|p_k\|, \end{aligned}$$

geht das Restglied gegen 0. □

Die Restgliedformel (20) folgt aus

Lemma 119. Für jede k -lineare Abbildung $\mu : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ und alle (x_1, \dots, x_k) und $(p_1, \dots, p_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ gilt unter der Verwendung von (19)

$$\mu(x_1, \dots, x_k) = \mu(p_1, \dots, p_k) + \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}(p, x)$$

Die p -Terme auf der rechten Seite heben sich also weg.

Beweis. Wir zeigen das durch vollständige Induktion über k .

$k = 1$. Die Formel

$$\mu(x_1) = \mu(p_1) + \mu(x_1 - p_1)$$

folgt aus der 1-Linearität.

$k \rightarrow k + 1$. Sei also $\mu : V_1 \times \dots \times V_{k+1} \rightarrow W$ eine k -lineare Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned} (*) & := \mu(p_1, \dots, p_{k+1}) + \sum_{m=1}^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k+1} \mu_{j_1 \dots j_m}(p, x) \\ & = \mu(p_1, \dots, p_{k+1}) + \sum_{m=1}^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}(p, x) \\ & \quad + \sum_{m=1}^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m = k+1} \mu_{j_1 \dots j_m}(p, x). \end{aligned}$$

Im mittleren Term kann $m = k + 1$ nicht vorkommen. Deshalb können wir fortfahren

$$\begin{aligned} (*) & = \mu(p_1, \dots, p_{k+1}) + \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}(p, x) \\ & \quad + \mu(p_1, \dots, p_k, x_{k+1} - p_{k+1}) + \sum_{m=2}^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m = k+1} \mu_{j_1 \dots j_m}(p, x). \end{aligned}$$

Wir definieren nun zwei k -lineare Abbildungen auf $V_1 \times \dots \times V_k$ durch

$$\begin{aligned} \mu^0(x_1, \dots, x_k) & := \mu(x_1, \dots, x_k, p_{k+1}), \\ \mu^1(x_1, \dots, x_k) & := \mu(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
(*) &= \mu^0(p_1, \dots, p_k) + \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}^0(p, x) \\
&\quad + \mu^1(p_1, \dots, p_k) - \mu^0(p_1, \dots, p_k) \\
&\quad + \sum_{m=2}^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-1} \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}^1(p, x) - \sum_{m=2}^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-1} \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}^0(p, x) \\
&= \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}^0(x, p) + \mu^1(p_1, \dots, p_k) \\
&\quad + \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}^1(p, x) - \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}^0(p, x) \\
&= \mu^1(p_1, \dots, p_k) + \sum_{m=1}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} \mu_{j_1 \dots j_m}^1(p, x) \\
&\stackrel{Ind.Vor.}{=} \mu^1(x_1, \dots, x_k) = \mu(x_1, \dots, x_{k+1}).
\end{aligned}$$

□

Die Produktregel aus der Analysis I ist eine Kombination aus der vorstehenden Produktregel mit der Kettenregel. Das erklären wir genauer:

Beispiel 120 (Alte Produktregel). Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $p \in J$ und seien $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Sei weiter $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Multiplikationsabbildung $(x, y) \mapsto xy$ und sei

$$(f, g) : J \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad t \mapsto (f(t), g(t)).$$

Wir betrachten die Komposition

$$h := \mu \circ (f, g) : t \mapsto f(t)g(t).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
h'(p) &\stackrel{(13)}{=} D_p h(1) \\
&\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} D_{(f(p), g(p))} \mu \circ D_p (f, g)(1) \\
&\stackrel{(14)}{=} D_{(f(p), g(p))} \mu \circ (D_p f(1), D_p g(1)) \\
&\stackrel{(13)}{=} D_{(f(p), g(p))} \mu \circ (f'(p), g'(p)) \\
&\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \mu(f'(p), g(p)) + \mu(f(p), g'(p)) \\
&= f'(p)g(p) + f(p)g'(p).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 121. Hier sind wichtige multilineare Produkte. Überlegen Sie, was in jedem einzelnen Fall die Produktregel besagt.

(i) Das normale Produkt reeller Zahlen hatten wir gerade

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy.$$

(ii) Matrix mal Vektor: Sei $M(m \times n, \mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen $(m \times n)$ -Matrizen.

$$M(m \times n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, (A, x) \mapsto Ax.$$

(iii) Allgemeiner

$$L(V, W) \times V \rightarrow W, (f, v) \mapsto f(v)$$

(iv) Das kanonische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(v) Allgemeiner jedes Skalarprodukt

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

auf einem Euklidischen Vektorraum V , oder noch allgemeiner jede Bilinearform.

(vi) Das Kreuzprodukt

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto x \times y$$

auf dem \mathbb{R}^3 .

(vii) Die Determinante als Funktion der Spalten:

$$\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det(x_1, \dots, x_n).$$

Dieses führen wir in einem Beispiel weiter unten aus.

□

Beispiel 122. Wir betrachten einen Euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und dazu: die Produktabbildung

$$\mu : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

die lineare "Diagonal-Abbildung"

$$\delta : V \rightarrow V \times V, x \mapsto (x, x),$$

und die "Norm-Abbildung"

$$r : V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Dann ist

$$r = \sqrt{\cdot} \circ \mu \circ \delta.$$

Seien $x, p \in V$ und $p \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass r in p differenzierbar ist und das Differential ausrechnen.

- δ ist als lineare Abbildung differenzierbar und

$$D_p \delta(x) = \delta(x) = (x, x).$$

- μ ist nach der Produktregel differenzierbar und

$$D_{(p,p)} \mu(x, x) = \mu(x, p) + \mu(p, x) = 2\mu(x, p).$$

- Die Wurzel $\sqrt{\cdot}$ ist nach Analysis I differenzierbar und

$$(\sqrt{\cdot})'(\tilde{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{t}}}.$$

Das bedeutet

$$D_{\tilde{t}}\sqrt{\cdot}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{t}}}t.$$

Nimmt man die vorstehenden Ergebnisse zusammen, so sieht man, dass r in p nach der Kettenregel differenzierbar ist und

$$D_p r(x) = \frac{1}{2\sqrt{\mu(p,p)}} 2\mu(x,p) = \frac{\langle x, p \rangle}{r(p)}. \quad (21)$$

□

Beispiel 123. Für Vektoren $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$X := (x_1, \dots, x_n)$$

für die Matrix mit den Spalten x_j . Ist (e_1, \dots, e_n) die kanonische Basis des \mathbb{R}^n , so ist also

$$E := (e_1, \dots, e_n)$$

die n -reihige Einheitsmatrix. So identifizieren wir den Raum $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ mit dem Raum $M(n \times n, \mathbb{R})$ der quadratischen n -reihigen Matrizen. Die Determinante – nehmen Sie das als Definition, wenn Sie in der Linearen Algebra noch nicht so weit sind – ist mit dieser Identifikation eine n -lineare Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det(x_1, \dots, x_n)$$

mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \det(x_1, \dots, x_n) &= 0, \text{ falls zwei der } x_j \text{ gleich sind,} \\ \det(e_1, \dots, e_n) &= 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Damit gilt für $A = (a_1, \dots, a_n) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und entsprechendes B nach der Produktregel

$$\begin{aligned} D_A \det(B) &= \sum_{j=1}^n \det(a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_{k=1}^n b_{kj} e_k, a_{j+1}, \dots, a_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_{kj} \underbrace{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, \dots, a_n)}_{=: a_{jk}^v} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_{kj} a_{jk}^v. \end{aligned}$$

Definiert man also die *Adjungte* $\text{adj}(A)$ der Matrix A durch

$$\text{adj}(A) := (a_{jk}^v)_{j,k=1,\dots,n} = (\det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, \dots, a_n))_{j,k=1,\dots,n},$$

so ist $D_A \det(B)$ gerade die Summe der Diagonalelemente der Matrix $B \text{adj}(A)$, die sogenannte *Spur* dieser Matrix:

$$D_A \det(B) = \text{Spur}(B \text{adj}(A)).$$

Wir merken noch an:

1. Ist $A = E$, so ist nach (22)

$$e_{jk}^v = \det(e_1, \dots, e_{j-1}, e_k, e_{j+1}, \dots, e_n) = \delta_{jk},$$

also $\text{adj}(E) = E$ und

$$\boxed{D_E \det(B) = \text{Spur}(B)}. \quad (23)$$

2. Allgemein gilt nach (22)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik}^v a_{kj} &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = \delta_{ij} \det(A), \end{aligned}$$

also $\text{adj}(A)A = \det(A)E$. Ist $\det A \neq 0$, so ist A also invertierbar und

$$\text{adj}(A) = \det(A)A^{-1}.$$

In diesem Fall ist

$$\boxed{D_A \det(B) = \det(A) \text{Spur}(BA^{-1})}. \quad (24)$$

□

Beispiel 124. Sei V ein endlich-dimensionaler Banachraum. Wir wollen zeigen

- $\mathbf{GL}(V) := \{A \in L(V, V) \mid A \text{ invertierbar}\}$ ist offen in $L(V, V)$,
- die Abbildung

$$\text{inv} : \mathbf{GL}(V) \rightarrow L(V, V), \quad A \mapsto A^{-1}$$
 ist differenzierbar und
- ihre Ableitung ist

$$\boxed{D_A \text{inv}(B) = -A^{-1}BA^{-1}}. \quad (25)$$

Beachten Sie: Für $V = \mathbb{R}$ ist

$$\lambda(x^{-1})' = D_x(x^{-1})(\lambda) = -x^{-1}\lambda x^{-1} = \lambda(-x^{-2})$$

genau die aus der Schule bekannte Formel für die Ableitung von $\frac{1}{x}$.

Wir benutzen auf $L(V, V)$ die Operatornorm und die Ungleichung

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (26)$$

für die Norm der Komposition von A und B (Beweis?).

Sei $A \in \mathbf{GL}(V)$ und $B \in L(V, V)$ mit

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}. \quad (27)$$

Aus (26) folgt dann also

$$\|A^{-1}(A - B)\| < 1. \quad (28)$$

Nun benutzen wir

$$B = A - (A - B) = A(E - A^{-1}(A - B)),$$

wobei E die identische Abbildung von V ist, und denken an die geometrische Reihe. Wir definieren

$$S_n := \left(\sum_{k=0}^n (A^{-1}(A-B))^k \right) A^{-1}.$$

Aus

$$\|S_{n+m} - S_n\| = \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} (A^{-1}(A-B))^k \right) A^{-1} \right\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \|A^{-1}(A-B)\|^k \right) \|A^{-1}\|$$

folgt mit (28), dass die S_n eine Cauchyfolge bilden. Weil $L(V, V)$ endlich-dimensional, also ein Banachraum ist, existiert $S := \lim S_n$. Aus

$$\begin{aligned} S_n A &= E + A^{-1}(A-B) + \dots + (A^{-1}(A-B))^n \\ S_n A (A^{-1}(A-B)) &= A^{-1}(A-B) + \dots + (A^{-1}(A-B))^n + (A^{-1}(A-B))^{n+1} \end{aligned}$$

folgt durch Subtraktion:

$$S_n B = E - (A^{-1}(A-B))^{n+1}.$$

Der letzte Term geht für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, also ist $SB = E$, d.h. $S = B^{-1}$. Verschärft man (27) zu

$$\|A - B\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}, \quad (29)$$

so folgt mit der Dreiecksungleichung und (26)

$$\|S_n\| \leq \sum_{k=0}^n \|A^{-1}(A-B)\|^k \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \|A^{-1}\| = 2\|A^{-1}\|.$$

Aus (29) folgt also $\|B^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|$ und damit

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \|A-B\| \|A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|^2 \|A-B\|.$$

Das impliziert die Stetigkeit von inv . Schließlich untersuchen wir den Restterm

$$\begin{aligned} R(B) &= \text{inv}(B) - \text{inv}(A) + A^{-1}(B-A)A^{-1} = B^{-1} - A^{-1} + A^{-1}(B-A)A^{-1} \\ &= -A^{-1}(B-A)B^{-1} + A^{-1}(B-A)A^{-1} = A^{-1}(B-A)(A^{-1} - B^{-1}). \end{aligned}$$

Dann ist nach (26)

$$\frac{\|R(B)\|}{\|B-A\|} \leq \|A^{-1}\| \|A^{-1} - B^{-1}\|.$$

Wegen der Stetigkeit von inv geht das für $B \rightarrow A$ gegen 0 und inv ist differenzierbar mit der angegebenen Ableitung.

□

Im vorstehenden Beispiel haben wir eigentlich nur benutzt, dass $L(V, V)$ ein Banachraum mit einer "Multiplikation" AB ist, für die (26) gilt, eine sogenannte *Banachalgebra*. Dass es sich bei den Elementen um lineare Abbildungen handelt, spielte keine Rolle: Wir haben einen Satz aus der Theorie der Banachalgebren bewiesen.

2.3 Richtungsableitungen, partielle Ableitungen

- Nun endlich die Differentiation für bescheidenere Ansprüche!
- Richtungs- und insbesondere partielle Ableitungen kann man mit Methoden der Analysis I ausrechnen.
- Aber der Zusammenhang mit der (totalen) Differenzierbarkeit ist nicht ganz trivial.

Seien V, W endlich-dimensionale Banachräume, $G \subset V$ offen, $p \in G$ und $f : V \supset G \rightarrow W$ eine Abbildung.

Definition 125. (i) Für $v \in V$ definiere die *Richtungsableitung* von f in p in Richtung v durch

$$\partial_v f(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

falls dieser Limes existiert.

(ii) Ist $V = \mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Basis e_1, \dots, e_n , so nennt man die Richtungsableitungen $\partial_{e_i}(p)$ die *partiellen Ableitungen* von f in p .

Notation:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \partial_i f(p) = \partial_{e_i} f(p).$$

Statt x_i auch andere Variablennamen.

Es gilt also

$$\partial_i f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Das ist (für $W = \mathbb{R}$) die Ableitung von f nach der i -ten Variablen im Sinne der Analysis I.

Beispiel 126. Ist f in p differenzierbar, so existieren dort alle Richtungsableitungen und es gilt

$$\partial_v f(p) = D_p f(v).$$

Speziell gilt also im Fall $V = \mathbb{R}^n$

$$\partial_i f(p) = D_p f(e_i).$$

□

Beispiel 127 (Funktionalmatrix zu Fuß). Ist weiter

$$f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

differenzierbar, so ist nach Beispiel 114 die Darstellungsmatrix von $D_p f$, also die Funktionalmatrix, mit Methoden der Analysis I zu berechnen:

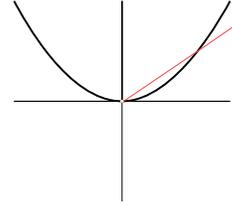
$$f'(p) = (\partial_j f_i(p))_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}.$$

□

Beispiel 128. Vgl. Beispiel 69.

Existieren in p alle Richtungsableitungen, so muß f in p nicht differenzierbar, ja nicht einmal stetig sein, wie man an

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x^2 > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



sieht.

□

Satz 129 (Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit). *Existieren auf ganz G alle Richtungsableitungen (oder im Fall $V = \mathbb{R}^n$ auch nur alle partiellen Ableitungen) und sind diese stetig, so ist f in G differenzierbar.*

Dieser Satz ist ein überaus nützliches Kriterium, weil oft die Berechnung von partiellen Ableitungen nach *Analysis I* sehr einfach und die Stetigkeit der Ableitungen offensichtlich ist.

Beweis. Wir führen den Beweis nur für $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}$. Mittels komponentenweiser Differentiation bzw. partieller Differentiation folgt daraus der Satz für $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$. Sind schließlich $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ und $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow W$ Isomorphismen und setzt man $\tilde{f} := \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$, so ist f genau dann differenzierbar bzw. partiell differenzierbar, wenn das entsprechende für \tilde{f} gilt. Daraus folgt der Satz dann für beliebige V, W .

Seien also $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}$. Für $p \in G$ definiere

$$F_p(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=0}^n x_j \partial_j f(p).$$

Dann ist $F_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear und der offensichtliche Kandidat für die Ableitung an der Stelle p . Wir betrachten eine offene ϵ -Kugel $U = U_\epsilon(p)$, die ganz in der offenen Menge G liegt, und beschränken uns im folgenden auf $x \in U$. Beachten Sie, dass dann auch die Punkte $(p_1, \dots, p_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ in U und damit im Definitionsbereich von f liegen. Für $x \in U$ gilt daher

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= f(x_1, \dots, x_n) - f(p_1, \dots, p_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) - f(p_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad + f(p_1, x_2, \dots, x_n) - f(p_1, p_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f(p_1, \dots, p_{n-1}, x_n) - f(p_1, \dots, p_n). \end{aligned}$$

Wir wenden auf jede Zeile den Mittelwertsatz an.

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= \partial_1 f(\xi_1, x_2, \dots, x_n)(x_1 - p_1) \\ &\quad + \partial_2 f(p_1, \xi_2, \dots, x_n)(x_2 - p_2) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \partial_n f(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi_n)(x_n - p_n) \end{aligned}$$

mit ξ_i zwischen x_i und p_i . Daraus folgt

$$\frac{f(x) - f(p) - F_p(x - p)}{\|x - p\|} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{x_i - p_i}{\|x - p\|}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{(\partial_i f(p_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n) - \partial_i f(p))}_{\rightarrow 0}$$

und mit der Stetigkeit der partiellen Ableitungen die Behauptung. \square

Beispiel 130. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y) = (\sin x \cos y, \sin x \sin y, \cos y)$$

hat die folgende Matrix partieller Ableitungen:

$$(\partial_j f_i(x, y)) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen sind offensichtlich stetig. Daher ist die Funktion differenzierbar und das Differential $D_{(x,y)}f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wird durch die obige Matrix $f'(x, y)$ repräsentiert. \square

Beispiel 131 (Das „totale Differential“). Die Koordinaten-Abbildungen

$$x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_i$$

sind linear. Deshalb ist für alle p in \mathbb{R}^n

$$D_p x_i = x_i.$$

Jedes $v \in \mathbb{R}^n$ läßt sich schreiben als

$$v = \sum x_i(v) e_i = \sum D_p x_i(v) e_i.$$

Ist f in $p \in G \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so folgt

$$D_p f(v) = D_p f\left(\sum D_p x_i(v) e_i\right) = \sum D_p x_i(v) D_p f(e_i) = \sum \partial_i f(p) D_p x_i(v).$$

Das schreibt man auch so:

$$Df = \sum \partial_i f D x_i \tag{30}$$

oder - gebräuchlicher -

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Man nennt diesen Ausdruck das „totale Differential“ von f im Gegensatz zu den einzelnen partiellen Differentialen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Bei Lichte besehen ist das totale Differential an der Stelle p aber einfach nur die Ableitung $D_p f$. \square

Beispiel 132 (Kettenregel in partiellen Ableitungen). Für differenzierbare Abbildungen zwischen den Standardräumen sieht die Kettenregel in partiellen Ableitungen folgendermaßen aus:

Aus $D_p(f \circ g) = D_{g(p)}f \circ D_p g$ folgt nach linearer Algebra

$$(f \circ g)'(p) = f'(g(p))g'(p),$$

wobei rechts das Produkt der Matrizen steht. Also, wenn wir die Variablen im Definitionsraum von f mit y_j und im Definitionsraum von g mit x_k bezeichnen,

$$\left(\frac{\partial(f \circ g)_i}{\partial x_k}(p) \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(g(p)) \right) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(p) \right)$$

oder

$$\frac{\partial(f \circ g)_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(g(p)) \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(p).$$

Abgekürzte Notation:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}.$$

□

2.4 Höhere Ableitungen

- Die Ableitung einer Funktion von mehreren Variablen ist nicht eine Zahl, sondern eine Lineare Abbildung. Entsprechend werden erst recht die höheren Ableitungen solcher Funktionen kompliziertere Gebilde, nämlich multilineare Abbildungen.
- Wir lernen, wie man sie “trotzdem” effektiv berechnen kann.
- Wir lernen den Satz von Schwarz über die Symmetrie höherer Ableitungen, der manche Rechnung vereinfacht, aber auch wichtige Anwendungen auf Differentialgleichungen hat.

Vorbemerkung. Wir erinnern daran, dass $L(V, W)$ den Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach W bezeichnet. Sind V und W endlich-dimensional, so ist auch $L(V, W)$ endlich-dimensional und es gilt $\dim L(V, W) = (\dim V)(\dim W)$, vgl. Lineare Algebra.

Definition 133 (Zweite Ableitung). Sei $f : V \subset G \rightarrow W$ auf G differenzierbar. Dann ist

$$Df : G \rightarrow L(V, W), p \mapsto D_p f.$$

Ist diese Abbildung differenzierbar in $p \in G$, so heißt f in p zweimal differenzierbar und

$$D_p^2 f := D_p(Df) : V \rightarrow L(V, W)$$

die zweite Ableitung von f in p .

Wir haben also für $v_1, v_2 \in V$

$$\begin{aligned} D_p^2 f(v_1) &\in L(V, W), \\ D_p^2 f(v_1)(v_2) &\in W. \end{aligned}$$

Beispiel 134. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $r : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $r(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Wir haben im Beispiel 122 ausgerechnet, dass

$$D_p r(v) = \frac{1}{r(p)} \langle p, v \rangle,$$

also

$$Dr : x \mapsto D_x r = \frac{1}{r(x)} \langle x, \cdot \rangle \in L(V, \mathbb{R}).$$

Das ist das Produkt der Abbildung $\frac{1}{r} : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Abbildung

$$\begin{aligned} g : V &\rightarrow L(V, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \langle x, \cdot \rangle \end{aligned}$$

1. Faktor: Weil r differenzierbar ist, ist nach der Kettenregel auch $\frac{1}{r}$ differenzierbar, und es ist

$$D_p \frac{1}{r}(v) = -\frac{1}{r^2(p)} D_p r(v) = -\frac{1}{r^3(p)} \langle p, v \rangle.$$

2. Faktor: Die Abbildung $g : V \rightarrow L(V, \mathbb{R})$ ist linear, also auch differenzierbar und

$$D_p g(v) = g(v) = \langle v, \cdot \rangle.$$

Produktregel: Daher ist Dr nach der Produktregel differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} D_p(Dr)(v) &= -\frac{1}{r^3(p)} \langle p, v \rangle \langle p, \cdot \rangle + \frac{1}{r(p)} \langle v, \cdot \rangle \\ &= \frac{1}{r^3(p)} (r^2(p) \langle v, \cdot \rangle - \langle p, v \rangle \langle p, \cdot \rangle) \\ &= \frac{1}{r^3(p)} (\langle p, p \rangle \langle v, \cdot \rangle - \langle p, v \rangle \langle p, \cdot \rangle), \end{aligned}$$

also

$$D_p^2 r(v)(w) = \frac{1}{r^3(p)} (\langle p, p \rangle \langle v, w \rangle - \langle p, v \rangle \langle p, w \rangle).$$

□

Es ist klar, wie man **höhere als 2. Ableitungen** definiert. Dabei entsteht allerdings ein kleines Problem: Wir erhalten $D_p^3 f \in L(V, L(V, L(V, W)))$, und den Zielraum der 7. Ableitung mag man nicht mehr hinschreiben. Dieses Problem vermeiden wir folgendermaßen:

Wir definieren

$$D_p^2 f(v, w) := D_p f^2(v)(w).$$

Dann ist

$$D_p^2 f : V \times V \rightarrow W$$

eine *bilineare Abbildung* von V nach W . Im obigen Beispiel ist also

$$D_p^2 r(v, w) := \frac{1}{r^3(p)} (\langle p, p \rangle \langle v, w \rangle - \langle p, v \rangle \langle p, w \rangle). \quad (31)$$

Bezeichnen wir mit $L^k(V, W)$ den Vektorraum der k -linearen Abbildungen von V nach W , so haben wir allgemeiner einen kanonischen Isomorphismus

$$j_k : L(V, L^{k-1}(V, W)) \rightarrow L^k(V, W)$$

mit

$$j_k(\Phi)(v_1, \dots, v_k) := \Phi(v_1)(v_2, \dots, v_k).$$

(Beweisen Sie das! Es folgt, dass $\dim L^k(V, W) = (\dim V)^k (\dim W) < \infty$, wenn V und W endlich-dimensional sind.)

Damit definieren wir induktiv die k -Ableitung $D_p^k f$ einer Funktion an der Stelle p wie folgt:

Definition 135 (Höhere Ableitungen). Ist $f : V \supset G \rightarrow W$ bereits $(k-1)$ mal differenzierbar und ist die $(k-1)$ -te Ableitung

$$D^{k-1} f : G \rightarrow L^{k-1}(V, W), x \mapsto D_x^{k-1} f$$

in $p \in G$ differenzierbar, so heißt f in p k -mal differenzierbar und die k -te Ableitung in p ist gegeben durch

$$D_p^k f(v_1, \dots, v_k) := j_k(D_p(D^{k-1} f))(v_1, \dots, v_k) = D_p(D^{k-1} f)(v_1)(v_2, \dots, v_k).$$

Die k -te Ableitung einer k -mal differenzierbaren Abbildung $f : V \supset G \rightarrow W$ an einer Stelle p ist also eine k -lineare Abbildung

$$\boxed{D_p^k f \in L^k(V, W)}.$$

Lemma 136. Ist f in p k -mal differenzierbar so gilt für $v_1, \dots, v_k \in V$

$$D_p^k f(v_1, \dots, v_k) = \partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} f(p).$$

Insbesondere existiert die rechte Seite.

Beweis. Durch Induktion über k .

$k = 1$. $D_p f(v) = \partial_v f(p)$ wissen wir schon.

$(k - 1) \rightarrow k$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} g : L^{k-1}(V, W) &\rightarrow W \\ \mu &\mapsto \mu(v_2, \dots, v_k). \end{aligned}$$

ist linear. Nach Kettenregel und Voraussetzung ist daher $g \circ D^{k-1} f$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} D_p(g \circ D^{k-1} f)(v_1) &= g(D_p(D^{k-1} f)(v_1)) = D_p(D^{k-1} f)(v_1)(v_2, \dots, v_k) \\ &= D_p^k f(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Andrerseits ist nach Induktionsvoraussetzung

$$g \circ D^{k-1} f = D^{k-1} f(v_2, \dots, v_k) = \partial_{v_2} \dots \partial_{v_k} f$$

und deshalb nach dem Fall $k = 1$

$$D_p(g \circ D^{k-1} f)(v_1) = \partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} f.$$

□

Dieses Lemma impliziert insbesondere folgende Vereinfachung: Um $D_p^2 f(v_1, v_2)$ zu berechnen, muß ich nicht die schwerer vorzustellende Abbildung $Df : G \rightarrow L(V, W)$ differenzieren, sondern ich kann $Df(v_2) : G \rightarrow W$ in Richtung v_1 differenzieren: Ich darf *vor* der zweiten Ableitung den Vektor v_2 einsetzen.

$$D_p^2 f(v_1, v_2) = \partial_{v_1} \partial_{v_2} f(p) = D_p(Df(v_2))(v_1).$$

Dabei muß man auf die Reihenfolge der Vektoren achten – bis wir gleich gezeigt haben, dass sie keine Rolle spielt!

Beispiel 137 (Höhere Ableitungen auf dem \mathbb{R}^n). Ist $f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow W$ in $p \in G$ k -mal differenzierbar, und hat man k Vektoren

$$v_j = (v_{1j}, \dots, v_{nj}) \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1, \dots, k\},$$

gegeben, so gilt

$$\boxed{D_p^k f(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(p) v_{i_1 1} \dots v_{i_k k}.} \quad (32)$$

Also läßt sich die k -te Ableitung von f mittels k -facher partieller Ableitungen ausrechnen.

Konkret betrachten wir die Normfunktion $r(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir finden

$$\partial_j r = \frac{x_j}{r}, \quad \partial_i \partial_j r = \frac{r \delta_{ij} - x_j \frac{x_i}{r}}{r^2} = \frac{1}{r^3} (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$$

und damit

$$D_p^2 r(v, w) = \frac{1}{r^3(p)} \left(r^2(p) \sum_{i=1}^n v_i w_i - \left(\sum_{i=1}^n p_i v_i \right) \left(\sum_{j=1}^n p_j w_j \right) \right).$$

Vergleichen Sie das mit (31).

□

Für spätere Verwendung zeigen wir hier noch das folgende

Lemma 138. Für k -mal differenzierbares $f : V \supset G \rightarrow W$, $p \in G$ und $v_1, \dots, v_k \in V$ gilt

$$D_p^k f(v_1, \dots, v_k) = D_p^{k-1}(Df)(v_1, \dots, v_{k-1})(v_k).$$

Beweis. Ich beweise das für $V = \mathbb{R}^n$ mit den Koordinatenprojektionen $x_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall geht nach Wahl einer Basis genauso, nur treten an die Stelle der x_j dann die dualen Basisvektoren. Es ist

$$\begin{aligned} D_p^{k-1}(Df)(v_1, \dots, v_{k-1})(v_k) &= D_p^{k-1} \left(\sum_{j=1}^n (\partial_j f) x_j \right) (v_1, \dots, v_{k-1})(v_k) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}, j=1}^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}} \partial_j f(p) v_{i_1 1} \dots v_{i_{k-1} k-1} x_j(v_k) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}, j=1}^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}} \partial_j f(p) v_{i_1 1} \dots v_{i_{k-1} k-1} v_{j k}. \end{aligned}$$

Vergleich mit (32) liefert die Behauptung. □

Für die Frage, ob f zweimal differenzierbar ist, gibt es ebenfalls ein gutes Kriterium mittels partieller Ableitungen: Sei f differenzierbar (z.B. weil es überall stetige partielle Ableitungen besitzt). Nach (30) ist Df wegen der Konstanz der Abbildungen $p \mapsto D_p x_i = x_i$ genau dann differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ alle differenzierbar sind. Das läßt sich wieder mittels partieller Ableitungen testen, und man erhält: Existieren alle zweiten partiellen Ableitungen von f auf G und sind sie dort stetig, so ist f zweimal differenzierbar.

Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen.

Definition 139 (C^k -Funktionen). Ist $f : V \supset G \rightarrow W$ k -mal differenzierbar und die Abbildung

$$D^k f : G \rightarrow L^k(V, W), \quad p \mapsto D_p^k f$$

stetig, so heißt f k -mal stetig differenzierbar. Nach der vorstehenden Bemerkung ist das für $V = \mathbb{R}^n$ äquivalent dazu, dass alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung von f existieren und stetig sind. Wir schreiben dafür

$$f \in C^k(G, W) \text{ oder kurz } f \in C^k.$$

Schließlich soll $f \in C^\infty$ bedeuten, dass f beliebig oft differenzierbar ist – die Stetigkeit der Ableitungen folgt dann natürlich von selbst.

Ist f in p zweimal differenzierbar und sind u, v „hinreichend kleine“ Vektoren, so gilt

$$f(p+u+v) - f(p+u) - f(p+v) + f(p) \approx D_{p+u} f(v) - D_p f(v) \approx D_p^2 f(u, v).$$

Die linke Seite ist also eine Approximation für die 2. Ableitung, die zum Beispiel in der diskreten Mathematik wichtig ist. Wir berechnen damit die 2. Ableitung:

Lemma 140. Sei $f : V \supset G \rightarrow W$ differenzierbar und in $p \in G$ zweimal differenzierbar. Dann gilt für alle $u, v \in V$

$$D_p^2 f(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tu + tv) - f(p + tu) - f(p + tv) + f(p)}{t^2}.$$

Weil der Zähler rechts in u und v symmetrisch ist, folgt daraus der wichtige

Satz 141 (H.A. Schwarz). Sei $f : V \supset G \rightarrow W$ in G 2-mal differenzierbar. Dann gilt für alle $u, v \in V$ und $p \in G$

$$D_p^2 f(u, v) = D_p^2 f(v, u).$$

Beweis des Lemmas 140. 1. Schritt. Es genügt der Beweis für den Fall $W = \mathbb{R}$, weil $f = \sum f_i e_i$, wo die e_i eine Basis von W und die f_i reellwertige Funktionen sind.

2. Schritt. In Anlehnung an die heuristische Betrachtung oben definieren wir eine Funktion

$$F(t) := f(p + u + tv) - f(p + tv).$$

Dabei seien $\|u\|$ und $\|v\|$ hinreichend klein, so dass $p + u + tv$ und $p + tv$ für $0 \leq t \leq 1$ in G liegen. Dann ist nach dem Mittelwertsatz für ein $\tau \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} f(p + u + v) - f(p + u) - f(p + v) + f(p) &= F(1) - F(0) \\ &= F'(\tau) \\ &= D_{p+u+\tau v} f(v) - D_{p+\tau v} f(v) \\ &= (D_{p+u+\tau v} f - D_p f)(v) - (D_{p+\tau v} f - D_p f)(v) \\ &=: (*) \end{aligned}$$

Wir wenden jetzt auf die Funktion Df die Definition der Differenzierbarkeit an der Stelle p an, und erhalten für $x = p + u + \tau v$ bzw. $x = p + \tau v$

$$\begin{aligned} (*) &= D_p^2 f(u + \tau v)(v) + R(p + u + \tau v)(v) \\ &\quad - D_p^2 f(\tau v)(v) - R(p + \tau v)(v) \\ &= D_p^2 f(u, v) + (R(p + u + \tau v) - R(p + \tau v))(v). \end{aligned}$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|R(x)\| \leq \epsilon \|x - p\|, \text{ falls } \|x - p\| < \delta. \quad (33)$$

Beachten Sie, dass $R(x) \in L(V, W)$. Für die Norm von $R(x)$ verwenden wir daher wie üblich die Operatornorm auf $L(V, W)$.

Für $\|u\| + \|v\| < \delta$ ist dann

$$\begin{aligned} \|R(p + u + \tau v)\| &\leq \epsilon \|u + \tau v\| \leq \epsilon (\|u\| + \|v\|), \\ \|R(p + \tau v)\| &\leq \epsilon \|\tau v\| \leq \epsilon (\|u\| + \|v\|), \end{aligned}$$

also

$$\|(*) - D_p^2 f(u, v)\| = \|(R(p + u + \tau v) - R(p + \tau v))(v)\| \leq 2\epsilon (\|u\| + \|v\|) \|v\|.$$

Nun seien $u, v \in V$ beliebig und $t_0 > 0$ bei vorgegebenem $\epsilon > 0$ so klein gewählt, dass $\|t_0 u\| + \|t_0 v\| < \delta$ ist, vgl. (33). Dann folgt für alle t mit $|t| \leq t_0$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{f(p+tu+tv) - f(p+tu) - f(p+tv) + f(p)}{t^2} - D_p^2 f(u, v) \right\| \\ &= \left\| \frac{f(p+tu+tv) - f(p+tu) - f(p+tv) + f(p) - D_p^2 f(tu, tv)}{t^2} \right\| \\ &\leq 2\epsilon \frac{(\|tu\| + \|tv\|)\|tv\|}{t^2} = 2\epsilon(\|u\| + \|v\|)\|v\| \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Korollar 142 (zum Satz von Schwarz). *Ist $f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow W$ in G 2-mal differenzierbar (oder 2-mal partiell differenzierbar mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen), so gilt für alle i, j*

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

Beispiel 143 (Wichtige Anwendung: Integrabilitätskriterium). Seien $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$. Die elementarste Frage der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist die, ob es eine Funktion $y : G \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle i gilt:

$$\partial_i y = f_i. \tag{34}$$

Haben die f_i stetige partielle Ableitungen, so hat ein solches y , falls es existiert, stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung 2. Also ist eine *notwendige* Bedingung für die Lösbarkeit von (34), dass

$$\partial_j f_i = \partial_j \partial_i y = \partial_i \partial_j y = \partial_i f_j,$$

d.h.

$$\partial_j f_i = \partial_i f_j \quad \text{für alle } i, j.$$

\square

Aus dem Satz von Schwarz in Verbindung mit dem Lemma 136 ergibt sich unmittelbar die folgende Verallgemeinerung:

Korollar 144 (zum Satz von Schwarz). *Ist $f : V \supset G \rightarrow W$ k -mal differenzierbar in G , so gilt für jede Permutation (i_1, \dots, i_k) von $(1, \dots, k)$ und für alle $p \in G$ und $v_1, \dots, v_k \in V$*

$$D_p^k f(v_1, \dots, v_k) = D_p^k f(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$$

bzw.

$$\partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} f(p) = \partial_{v_{i_1}} \dots \partial_{v_{i_k}} f(p).$$

Bemerkungen. In der Literatur (z.B. im Buch von Rudin) findet man den Satz von Schwarz häufig in folgender Form: *Existieren alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung von f und sind sie stetig, so gilt*

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

Aus dem Vergleich mit unserer Version ergeben sich zwei Fragen:

1. Gibt es Funktionen, die zweimal differenzierbar, aber nicht zweimal stetig differenzierbar sind? Dann ist die Version des Satzes 141 stärker als die oben zitierte.

Antwort: Ja. Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^4 \sin \frac{1}{x}$$

ist auf \mathbb{R} zweimal differenzierbar, aber die 2. Ableitung ist in 0 nicht stetig. Entsprechendes gilt dann auch für die durch $f(x, y) := g(x)$ definierte Funktion auf \mathbb{R}^2 .

2. Gibt es Funktionen mit (nicht stetigen) partiellen Ableitungen 2. Ordnung, für die der Satz von Schwarz nicht gilt?

Antwort: Ja. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0 \\ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt überall stetige 1. partielle Ableitungen und (in 0 unstetige) 2. partielle Ableitungen. Für sie gilt

$$\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = 1 \neq -1 = \partial_2 \partial_1 f(0, 0).$$

Beweise als Übung.

2.5 Schrankensatz, Satz von Taylor

- Schrankensatz und Satz von Taylor kann man auch für Funktionen mehrerer Variablen formulieren.

In höherdimensionalen Räumen wird die naive Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes

$$f(b) - f(a) \stackrel{?}{=} D_\xi f(b - a) \text{ für geeignetes } \xi \text{ zwischen(?) } a \text{ und } b$$

falsch. Zum Beispiel gilt für die Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, dass

$$f(2\pi) - f(0) = (0, 0, 2\pi).$$

Aber für alle $\xi \in]0, 2\pi[$ ist $D_\xi f(2\pi - 0) = 2\pi(-\sin t, \cos t, 1) \neq (0, 0, 2\pi)$.

Der Schrankensatz, den wir jetzt beweisen, liefert einen Ersatz für den Mittelwertsatz.

Satz 145 (Schrankensatz). *Seien V, W endlich-dimensionale Banachräume und sei*

$$f : V \supset G \rightarrow W$$

eine differenzierbare Abbildung. Seien $a, b \in G$, so dass die Strecke

$$\overline{ab} := \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

in G enthalten ist. Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in \overline{ab}} \|D_x f\| \|b - a\|.$$

Zusatz. Wenn f in den Endpunkten von \overline{ab} nicht differenzierbar, aber stetig ist, gilt dieselbe Behauptung, wobei das Supremum über alle Punkte von $\overline{ab} \setminus \{a, b\}$ zu nehmen ist.

Beweis. Sei $K := \sup_{x \in \overline{ab}} \|D_x f\|$ und sei $\epsilon > 0$. Sei o.E. $K < \infty$, sonst ist nichts zu zeigen. Wir definieren

$$A := \{t \in [0, 1] \mid \|f(a + t(b - a)) - f(a)\| \leq t(K + \epsilon)\|b - a\|\}.$$

Weil beide Seiten der Ungleichung in der Definition von A in $t \in [0, 1]$ stetig sind, ist A abgeschlossen. Wegen $0 \in A$ ist $A \neq \emptyset$. Insbesondere gilt

$$\sup A =: s \in A \subset [0, 1].$$

Wir zeigen $s = 1$, d.h.

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (K + \epsilon)\|b - a\|.$$

Weil das für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt daraus die Behauptung.

Annahme: $s < 1$. Die Funktion f ist in $p = a + s(b - a)$ differenzierbar, und wir haben

$$f(a + t(b - a)) = f(a + s(b - a)) + D_p f((t - s)(b - a)) + R(a + t(b - a))$$

mit $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{\|x - p\|} = 0$, also $\lim_{t \rightarrow s} \frac{R(a + t(b - a))}{|t - s| \cdot \|b - a\|} = 0$.

(Beachten Sie $\|(a + t(b - a)) - (a + s(b - a))\| = \|(t - s)(b - a)\| = |t - s|\|b - a\|$.)

Daher gibt es $\delta > 0$, so dass für $s < t < s + \delta$ gilt

$$\|R(a + t(b - a))\| \leq \epsilon(t - s) \cdot \|b - a\|.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt für $s < t < s + \delta$

$$\begin{aligned} \|f(a + t(b - a)) - f(a + s(b - a))\| &\leq \|D_p f\| (t - s) \cdot \|b - a\| + \epsilon(t - s) \cdot \|b - a\| \\ &\leq (t - s)(K + \epsilon)\|b - a\|. \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \|f(a + t(b - a)) - f(a)\| &\leq \|f(a + t(b - a)) - f(a + s(b - a))\| + \|f(a + s(b - a)) - f(a)\| \\ &\leq (t - s)(K + \epsilon)\|b - a\| + s(K + \epsilon)\|b - a\| \\ &= t(K + \epsilon)\|b - a\|. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Definition von s . Also ist $s = 1$ und (i) bewiesen.

Zum Zusatz. Ist f nur im „Inneren“ der Strecke \overline{ab} differenzierbar, so gilt nach dem Beweisen für alle $0 < t_1 < t_2 < 1$

$$\begin{aligned} \|f(a + t_2(b - a)) - f(a + t_1(b - a))\| &\leq \sup_{0 < t < 1} \|D_{a+t(b-a)} f\| \|(a + t_2(b - a)) - (a + t_1(b - a))\| \\ &= \sup_{0 < t < 1} \|D_{a+t(b-a)} f\| (t_2 - t_1)\|b - a\|. \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang $t_1 \searrow 0$ und $t_2 \nearrow 1$ folgt mit der Stetigkeit von f die Behauptung. \square

Berechnung der Operatornorm. Bisher hatte die Operatornorm nur eine Hilfsfunktion. Der Schrankensatz macht es wünschenswert, sie explizit zu berechnen. Das ist ein Problem der linearen Algebra. Wir geben die Resultate für zwei einfache Fälle.

1. $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei bezüglich der Standardbasen gegeben durch die $m \times 1$ -Matrix $A = (a_1, \dots, a_n)$. Dann ist die Operatornorm bezüglich der Euklidischen Norm von \mathbb{R}^n und dem Betrag $|\cdot|$ auf \mathbb{R} gegeben durch

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

Im Falle des Schrankensatzes, ist $F = Df$ gegeben durch die Matrix

$$f' = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$$

und

$$\|Df\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\partial_i f)^2}.$$

2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei bezüglich der Standardbasen gegeben durch die $m \times n$ -Matrix A . Die Normen auf \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m seien die üblichen Euklidischen Normen. Mit A^T bezeichnen wir die transponierte Matrix. Dann ist $A^T A$ eine symmetrische (=selbstadjungierte) $n \times n$ -Matrix und $\|A\|$ ist die Wurzel aus dem Maximum der Eigenwerte von $A^T A$.

Korollar 146. Sei $G \subset V$ offen und zusammenhängend und sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D_p f = 0$ für alle $p \in G$. Dann ist f konstant.

Beweis. Sei $p \in G$ und

$$U := \{x \in G \mid f(x) = f(p)\}.$$

Ist $a \in U$, so gibt es $r > 0$ mit $U_r(a) \subset G$. Aus dem Schrankensatz folgt dann für alle $b \in U_r(a)$

$$\|f(b) - f(p)\| = \|f(b) - f(a)\| \leq 0 \cdot \|b - a\|,$$

also $b \in U$. Deshalb ist U offen. Andererseits ist

$$G \setminus U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{f(p)\})$$

ebenfalls offen. Weil G zusammenhängend ist, folgt dass entweder $U = \emptyset$ oder $G \setminus U = \emptyset$. Wegen $p \in U$ folgt $U = G$. \square

Für spätere Verwendung “verfeinern” wir dieses Korollar noch etwas:

Korollar 147. *Seien $G \subset V_1 \times V_2$ offen und $f : G \rightarrow W$ differenzierbar. Es gelte für alle $(p_1, p_2) \in G$, dass*

$$0 = D_{(p_1, p_2)} f(0, \cdot) : V_2 \rightarrow W.$$

Offenbar gibt es zu jedem $(p_1, p_2) \in G$ ein $\epsilon > 0$ mit

$$U_\epsilon(p_1) \times U_\epsilon(p_2) \subset G.$$

Dafür gilt dann

$$f(q_1, q_2) = f(q_1, r_2) \text{ für alle } q_1 \in U_\epsilon(p_1) \text{ und } q_2, r_2 \in U_\epsilon(p_2).$$

Mit andern Worten: Ist die V_2 -Ableitung von f Null, so hängt f lokal nicht von der V_2 -Variablen ab.

Beweis. Betrachte die Funktion

$$g : V_2 \supset U_\epsilon(p_2) \rightarrow W, t \mapsto f(q_1, t).$$

Für diese gilt nach der Kettenregel angewendet auf $t \mapsto (q_1, t) \mapsto f(q_1, t)$

$$D_t g(v_2) = D_{(q_1, t)} f(0, v_2) = 0,$$

und aus dem Schrankensatz angewendet auf g folgt $g(q_2) = g(r_2)$ und damit die Behauptung. \square

Satz 148 (Taylorformel). *Sei $f : V \supset G \rightarrow W$ n -mal differenzierbar. Dann läßt sich f darstellen als*

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D_p^k f(\underbrace{x-p, \dots, x-p}_{k\text{-mal}}) \right) + R(x), \quad (35)$$

wobei für die dadurch definierte Restfunktion R gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{\|x-p\|^n} = 0.$$

Zusatz: *Ist f sogar $(n+1)$ -mal differenzierbar und reellwertig(!) und ist $\overline{px} \subset G$, so gibt es $q \in \overline{px}$, so dass*

$$R(x) = \frac{1}{(n+1)!} D_q^{n+1} f(\underbrace{x-p, \dots, x-p}_{(n+1)\text{-mal}}).$$

Beweis. Der Zusatz folgt direkt aus dem 1-dimensionalen Fall: Wir setzen $v := x - p$ und

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t) := f(p + tv).$$

Dann gibt es $\tau \in [0, 1]$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= g(1) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) \right) + \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\tau) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\partial_v \dots \partial_v}_{k\text{-mal}} f(p) \right) + \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\partial_v \dots \partial_v}_{(n+1)\text{-mal}} f(p + \tau v) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D_p^k f(\underbrace{x-p, \dots, x-p}_{k\text{-mal}}) + \frac{1}{(n+1)!} D_q^{n+1} f(\underbrace{x-p, \dots, x-p}_{(n+1)\text{-mal}}) \end{aligned}$$

mit $q = p + \tau v$.

Nun zum Beweis der ersten Taylorformel. Die kann man nicht einfach auf den eindimensionalen Fall zurückführen. Die Mehrdimensionalität von W ist dabei sekundär. Aber ein Ansatz wie oben führt nur zu Informationen über $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(p+tv)}{\|tv\|^n}$, und das ist eine deutlich eingeschränkte Aussage.

Beweis durch vollständige Induktion über n .

$n = 1$. Das ist einfach die Definition der Differenzierbarkeit.

$(n-1) \rightarrow n$. Die Induktionsvoraussetzung angewendet auf die $(n-1)$ -mal differenzierbare Funktion Df liefert

$$D_x f = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} D_p^k (Df)(x-p, \dots, x-p) \right) + \tilde{R}(x) \quad (36)$$

mit

$$\lim_{x-p \rightarrow 0} \frac{\tilde{R}(x)}{\|x-p\|^{n-1}} = 0. \quad (37)$$

Nun berechnen wir die Ableitung von

$$R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D_p^k f(x-p, \dots, x-p).$$

Der erste Term unter dem Summenzeichen ist $f(p)$, fällt bei der Differentiation also weg. Unter Benutzung der Produktregel, des Satzes von Schwarz und des Lemmas 138

$$\begin{aligned} D_x R(v) &= D_x f(v) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} k D_p^k f(x-p, \dots, x-p, v) \\ &= D_x f(v) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} D_p^{k-1} (Df)(x-p, \dots, x-p)(v). \end{aligned}$$

Also ist

$$D_x R = D_x f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} D_p^k (Df)(x-p, \dots, x-p) = \tilde{R}(x).$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(p) \subset G$, so dass für alle $x \in U_\delta(p)$

$$\|\tilde{R}(x)\| \leq \epsilon \|x - p\|^{n-1} \quad (38)$$

Wegen $R(p) = 0$ folgt aus dem Schrankensatz dann für alle $x \in U_\delta(p)$

$$\|R(x)\| = \|R(x) - R(p)\| \leq \sup_{y \in U_\delta(p)} \|D_y R\| \|x - p\| \leq \epsilon \|x - p\|^n,$$

also

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{\|x - p\|^n} = 0.$$

□

2.6 Lokale Extrema

- Wir wenden die Taylorformel auf Extremalprobleme an.

Definition 149. Sei $l \in L^k(V, \mathbb{R})$ eine k -lineare Abbildung. Wenn der Zielraum \mathbb{R} ist, nennt man solche Abbildungen auch k -Linearformen, insbesondere für $k = 2$ Bilinearformen.

l heißt

- (i) *positiv definit*, wenn $l(v, \dots, v) > 0$ für alle $v \neq 0$.
- (ii) *positiv-semidefinit*, wenn $l(v, \dots, v) \geq 0$ für alle v .
- (iii) *negativ definit*, wenn $l(v, \dots, v) < 0$ für alle $v \neq 0$.
- (iv) *negativ-semidefinit*, wenn $l(v, \dots, v) \leq 0$ für alle v .
- (v) *indefinit*, wenn $v \mapsto l(v, \dots, v)$ das Vorzeichen wechselt.

Lemma 150. Sei $l \in L^k(V, \mathbb{R})$ eine symmetrische k -Linearform, d.h. es gelte

$$l(v_1, \dots, v_k) = l(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$$

für jede Permutation (i_1, \dots, i_k) von $(1, \dots, k)$. Dann gilt:

- (i) Ist $l(v, \dots, v) = 0$ für alle $v \in V$, so ist $l = 0$.
- (ii) Ist k ungerade, so ist $l = 0$ oder l indefinit.

Beweis. Zu (i). Vollständige Induktion über k .

$k = 1$. Trivial.

$(k - 1) \rightarrow k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= l(tv + w, \dots, tv + w) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} l(\underbrace{tv, \dots, tv}_{i\text{-mal}}, w, \dots, w) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} t^i l(\underbrace{v, \dots, v}_{i\text{-mal}}, w, \dots, w). \end{aligned}$$

Ein Polynom verschwindet aber nur dann identisch, wenn alle Koeffizienten=0 sind. Daher ist insbesondere $l(v, \dots, v, w) = 0$ für alle v, w . Bei festem w ist $l(., \dots, ., w)$ symmetrisch und $(k - 1)$ -linear. Deshalb ist nach Induktionsvoraussetzung $l(v_1, \dots, v_{k-1}, w) = 0$ für alle v_i, w .

Zu (ii). Gibt es ein v mit $l(v, \dots, v) \neq 0$, etwa > 0 , so ist $l(-v, \dots, -v) < 0$ und l indefinit. Andernfalls ist $l = 0$ nach (i). □

Definition 151. Die Funktion $f : V \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ hat in p ein *strenges lokales Maximum*, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$\forall x \in G (0 < \|x - p\| < \epsilon \implies f(x) < f(p)).$$

Analog erklärt man strenge lokale Minima.

Satz 152 (Lokale Extrema). Sei $f : V \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal differenzierbar, $k \geq 1$, $p \in G$ und

$$D_p f = 0, \dots, D_p^{k-1} f = 0, \\ D_p^k f \neq 0.$$

Dann gilt:

- (i) Ist $D_p^k f$ negativ definit, so hat f in p ein strenges lokales Maximum.
- (ii) Ist $D_p^k f$ positiv definit, so hat f in p ein strenges lokales Minimum.
- (iii) Ist $D_p^k f$ indefinit, insbesondere k ungerade, so hat f in p kein lokales Extremum, sondern einen sogenannten Sattelpunkt.

Im semidefiniten Fall wird keine Aussage gemacht.

Aus (iii) folgt insbesondere die wichtige notwendige Bedingung:

$$\boxed{\text{Hat } f \text{ in } p \text{ ein lokales Extremum, so ist } D_p f = 0.}$$

Beweis des Satzes. Die Idee des Beweises ergibt sich aus der Taylorformel. Es gilt

$$f(x) - f(p) = \frac{1}{k!} D_p^k f(x - p, \dots, x - p) + R(x), \quad (39)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{\|x - p\|^k} = 0. \quad (40)$$

Also haben $f(x) - f(p)$ und $D_p^k f(x - p, \dots, x - p)$ dasselbe Vorzeichen, vorausgesetzt, man kann das Restglied vernachlässigen. Letzteres zu zeigen, ist das technische Problem des Beweises.

Die Einheitssphäre $S := \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, nach dem Satz von Heine-Borel (der in endlich-dimensionalen Banachräumen ebenso gilt wie im Standard- \mathbb{R}^n . Warum?) also kompakt. Daher existieren

$$m := \min_{v \in S} D_p^k f(v, \dots, v) \text{ und } M := \max_{v \in S} D_p^k f(v, \dots, v).$$

Für beliebiges $v \in V$ folgt daraus

$$m\|v\|^k \leq D_p^k f(v, \dots, v) \leq M\|v\|^k.$$

Ist $D_p^k f$ positiv definit, negativ definit oder indefinit, so ist $\epsilon := \frac{1}{2k!} \min(|m|, |M|) > 0$. Wegen (40) gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(p) \subset G$ und

$$|R(x)| \leq \epsilon \|x - p\|^k \text{ für alle } x \in U_\delta(p).$$

Zu (i). Ist $D_p^k f$ negativ definit, also $M < 0$, so folgt für $x \in U_\delta(p)$

$$\frac{1}{k!} D_p^k f(x - p, \dots, x - p) + R(x) \leq \frac{M}{k!} \|x - p\|^k - \frac{M}{2k!} \|x - p\|^k = \frac{M}{2k!} \|x - p\|^k \leq 0$$

mit Gleichheit nur für $x = p$. Aus (39) folgt die Behauptung (i).

Zu (ii). Analog.

Zu (iii). Im indefiniten Fall ist $m < 0 < M$, und es gibt $v_1, v_2 \in S$ mit

$$D_p^k f(v_1, \dots, v_1) = m, \quad D_p^k f(v_2, \dots, v_2) = M.$$

Dann ist $x_j := p + \frac{\delta}{2} v_j \in U_\delta(p)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} D_p^k f(x_1 - p, \dots, x_1 - p) + R(x_1) &\leq \frac{m}{k!} \|x_1 - p\|^k - \frac{m}{2k!} \|x_1 - p\|^k = \frac{m}{2k!} \|x_1 - p\|^k < 0, \\ \frac{1}{k!} D_p^k f(x_2 - p, \dots, x_2 - p) + R(x_2) &\geq \frac{M}{k!} \|x_2 - p\|^k - \frac{M}{2k!} \|x_2 - p\|^k = \frac{M}{2k!} \|x_2 - p\|^k > 0. \end{aligned}$$

Aus (39) folgt die Behauptung (iii). \square

Bemerkung. Die Frage, wann eine symmetrische k -Linearform zum Beispiel positiv definit ist, ist eine Frage an die (multi)lineare Algebra. Ein häufiger Spezialfall ist $k = 2$. Wir wollen überdies annehmen, dass $V = \mathbb{R}^n$ ist. Dann ist

$$D_p^2 f(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(p) u_i v_j.$$

Die (symmetrische) Matrix

$$H = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(p) & \dots & \partial_1 \partial_n f(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(p) & \dots & \partial_n \partial_n f(p) \end{pmatrix}$$

der zweiten partiellen Ableitungen heißt auch die *Hessesche Matrix* von f . Für sie gilt also

$$D_p^2 f(u, v) = \langle Hu, v \rangle$$

mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. Es ist also eine interessante Frage, wann die durch eine symmetrische Matrix A gegebene Bilinearform $\langle Au, v \rangle$ positiv definit ist. In der Linearen Algebra lernt man (z.B. im Zusammenhang mit der Hauptachsentransformation), dass dies genau dann gilt, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind. Dann nennt man auch A positiv definit. In der linearen Algebra lernt man auch, wie man die Eigenwerte bestimmt, und hat damit eine Methode, um im Fall $k = 2$ positive Definitheit nachzuprüfen.

Ein anderes Kriterium ist das folgende:

Lemma 153 (Hauptminorenkriterium). *Eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix*

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind. Dabei sind Hauptminoren oder Hauptabschnittsdeterminanten die Determinanten der Matrizen

$$A_k := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$$

A ist genau dann negativ definit, wenn die Hauptminoren wechselndes Vorzeichen beginnend mit $a_{11} < 0$ haben.

Man findet dieses Kriterium oft in der Literatur zitiert (als Kriterium von Sylvester oder Hurwitz), aber selten bewiesen. Wir geben deshalb einen Beweis im Anhang.

Im Falle $n = 2$ ist die Hessematrix gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \partial_x^2 f & \partial_y \partial_x f \\ \partial_x \partial_y f & \partial_y^2 f \end{pmatrix}$$

und wir erhalten folgendes Kriterium für lokale Extrema:

Satz 154. Sei $f : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf der offenen Menge G und sei $p \in G$. Dann gilt:

(i) Hat f in p ein lokales Extremum, so ist $D_p f = 0$.

(ii) Ist $D_p f = 0$ und gilt

$$\partial_x^2 f(p) \partial_y^2 f(p) - (\partial_x \partial_y f(p))^2 > 0,$$

so hat f in p ein strenges lokales Extremum, und zwar

- ein Maximum, falls $\partial_x^2 f(p) < 0$,
- ein Minimum, falls $\partial_x^2 f(p) > 0$.

(iii) Ist

$$\partial_x^2 f(p) \partial_y^2 f(p) - (\partial_x \partial_y f(p))^2 < 0,$$

so hat f in p kein lokales Extremum. (Sattelpunkt)

Wir geben dafür noch einen direkten Beweis ohne weiteren Bezug auf die lineare Algebra:

Beweis. Wir bezeichnen die Hessematrix kurz mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$D_p^2 f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = ax^2 + 2bxy + cy^2 =: \phi(x, y).$$

Wählt man $y = 0$, so sieht man, dass $a > 0$ bzw. $a < 0$ notwendig für die positive bzw. negative Definitheit ist. Die ist in diesem Fall dann aber äquivalent dazu, dass

$$0 < x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2 = \left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{c}{a}y^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2 = \left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}y^2.$$

Wählt man nun $y \neq 0$ und $x = -\frac{b}{a}y$, so ergibt sich $ac - b^2$ als weitere notwendige Bedingung. Diese ist aber auch hinreichend: Die rechte Seite ist dann ≥ 0 , und verschwindet nur für $y = 0$ und $x = 0$. \square

2.7 Differentialoperatoren der klassischen Vektoranalysis

- Wir interpretieren Abbildungen - wie in der Physik - als Vektor- oder Skalarenfelder.
- Gradient, Divergenz, Rotation und Laplaceableitung sind Felder, die mit Hilfe von Differentiationsprozessen aus anderen Feldern entstehen. Diese Operationen haben sich in der Physik als wichtig erwiesen.
- Wir lernen elementare Definitionen dieser Operationen im \mathbb{R}^n , bemühen uns aber auch um Definitionen in abstrakten Vektorräumen um zu klären, welche zusätzlichen Strukturen ggf. noch erforderlich sind.

Definition 155. Sei $G \subset V$ eine offene Teilmenge des endlich-dimensionalen Banachraums V . Für diese Vorlesung vereinbaren wir folgende Sprechweisen:

- Ein *Vektorfeld* auf G ist eine Abbildung $X : G \rightarrow V$.
- Ein *skalares Feld* auf G ist eine reellwertige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir wollen im folgenden eine kurze Einführung der klassischen Differentialoperatoren geben. Wir geben jeweils zwei Definitionen, eine elementare im \mathbb{R}^n und eine abstrakte, die etwas mehr lineare Algebra voraussetzt und die aufzeigt, welche „Hintergrundstrukturen“ in die Definition einfließen.

2.7.1 Gradient

- **Naiv.** Mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ bezeichnen wir das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n . Der *Gradient* eines differenzierbaren skalaren Feldes $f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ ist das folgende Vektorfeld:

$$\text{grad } f : G \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto \text{grad}_p f := (\partial_1 f(p), \dots, \partial_n f(p)).$$

Fundamentale Eigenschaften:

- $\langle \text{grad}_p f, v \rangle = D_p f(v)$ für alle $v \in V$.
- Der Gradient steht senkrecht auf den Niveaus von f . Genauer gilt für eine differenzierbare Kurve $c :]a, b[\rightarrow G$

$$f \circ c \text{ konstant} \iff \langle \text{grad}_{c(t)} f, \dot{c}(t) \rangle = 0 \text{ für alle } t. \quad (41)$$

Das folgt aus der Kettenregel, weil $\langle \text{grad}_{c(t)} f, \dot{c}(t) \rangle = D_{c(t)} f(\dot{c}(t)) = \frac{d}{dt}(f \circ c)$.

- Der Gradient ist ein linearer Differentialoperator:

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\text{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{grad } f + \beta \text{grad } g.$$

- Der Gradient gibt die Richtung und Größe des stärksten Wachstums der Funktion f an:

Ist $\|v\| = 1$ und ϕ der Winkel zwischen dem Gradienten und der Richtung v , so ist

$$\partial_v f(p) = \|\text{grad}_p f\| \cos \phi.$$

- **Für Fortgeschrittene.** Ist $l : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine (nicht notwendig symmetrische) Bilinearform, so liefert

$$j_l : V \rightarrow V^* = L(V, \mathbb{R}), v \mapsto l(v, \cdot)$$

eine lineare Abbildung von V in V^* . Ist diese Abbildung ein Isomorphismus, so heißt l *nicht-degeneriert*. Ist l nicht-degeneriert, so kann man den l -Gradienten eines differenzierbaren skalaren Feldes $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ definieren durch

$$\text{grad}_p^l f := j_l^{-1}(D_p f),$$

d.h. durch die Gleichung

$$l(\text{grad}_p^l f, v) = D_p f(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Er ist ebenfalls ein linearer Differentialoperator und die obigen Eigenschaften (i), (ii) gelten mit l statt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Beispiel 156 (Euklidischer Gradient). Seien $V = \mathbb{R}^n$ und $l(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ das übliche Skalarprodukt. Das liefert den „naiven“ Gradienten wie oben. Allgemeiner gibt es in jedem *Euklidischen Vektorraum* einen kanonischen Gradienten. □

Beispiel 157 (Vierergradient). Sei $V = \mathbb{R}^4$ und

$$L(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

das sogenannte *Lorentzprodukt*. Der zugehörigen Gradient, der sogenannte *Vierergradient* ist gegeben durch

$$\text{grad}^L f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f, -\partial_4 f).$$

Er spielt – wie das Lorentzprodukt – eine große Rolle in der Relativitätstheorie. □

Beispiel 158 (Symplektischer Gradient). Sei $V = \mathbb{R}^{2n}$ und

$$\sigma(x, y) = x_{n+1} y_1 + \dots + x_{2n} y_n - x_1 y_{n+1} - \dots - x_n y_{2n}$$

das sogenannte *symplektische Skalarprodukt*. Der entsprechende *symplektische Gradient* ist gegeben durch

$$\text{grad}^\sigma f = (-\partial_{n+1} f, \dots, -\partial_{2n} f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f).$$

Er spielt eine wichtige Rolle in der Hamilton-Jacobi-Theorie der klassischen Mechanik, vgl. Beispiel 160. □

2.7.2 Divergenz

- **Naiv.** Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $X = (X_1, \dots, X_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann ist die *Divergenz* von X das folgende skalare Feld:

$$\text{div } X : G \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \text{div}_p X := \sum_{i=1}^n \partial_i X_i(p).$$

Beachte: $\text{div } X$ ist gerade die Summe der Diagonalelemente der Jacobimatrix $(\partial_j X_i)$ von X .

- **Für Fortgeschrittene.** Ist V ein beliebiger endlich-dimensionaler Vektorraum und $X : G \rightarrow V$ ein differenzierbares Vektorfeld, so ist für p in G das Differential $D_p X$ ein Endomorphismus von V . Man definiert

$$\boxed{\operatorname{div} X = \operatorname{Spur}(D_p X)}.$$

Der Satz von Gauß (Spezialfall des in der Analysis III zu beweisenden Stokesschen Integralsatzes) gibt eine Interpretation des Divergenz als "Quellstärke" des Feldes X . Das hat damit zu tun, dass die Spur die Ableitung der Determinante ist und die Determinante Volumina misst.

2.7.3 Rotation

- **Naiv.** Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $X : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Die *Rotation* von X ist das folgende Vektorfeld:

$$\operatorname{rot} X : G \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit

$$\operatorname{rot}_p X := \begin{pmatrix} \partial_2 X_3(p) - \partial_3 X_2(p) \\ \partial_3 X_1(p) - \partial_1 X_3(p) \\ \partial_1 X_2(p) - \partial_2 X_1(p) \end{pmatrix}.$$

- **Für Fortgeschrittene.** Für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt $a \times b$ charakterisiert durch die Bedingungen

(i) $a \times b = 0$, falls a, b linear abhängig,

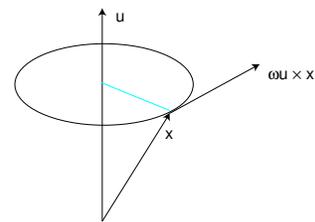
und andernfalls

(ii) $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \angle(a, b)$,

(iii) $\langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0$ und $(a, b, a \times b)$ ist eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^3 .

Durch diese Bedingungen lässt sich ein Vektorprodukt in jedem orientierten 3-dimensionalen Euklidischen Vektorraum definieren.

Wir erklären nun zwei Methoden, um Achsrotationen in einem orientierten 3-dimensionalen Euklidischen Vektorraum V zu beschreiben. Die Achse sei gegeben durch einen Einheitsvektor u . Das Geschwindigkeitsfeld der Drehung in einem Punkt $x \in V$ muss dann senkrecht zu x und u stehen und mit dem Abstand von der Achse linear anwachsen.



Das wird geleistet

1. durch ein Feld

$$x \mapsto \omega u \times x,$$

wo $\omega \in \mathbb{R}$ die sogenannte Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, oder

2. durch ein Feld

$$x \mapsto Ax,$$

wobei A ein schiefadjungierter (=schiefsymmetrischer) Endomorphismus von V mit $\operatorname{Kern}(A) = \mathbb{R}u$ ist. (Jeder schiefadjungierte Endomorphismus $\neq 0$ eines dreidimensionalen Raumes hat einen 1-dimensionalen Kern. Warum?)

Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Methoden ist einfach: Für $a \in V$ ist $A : x \mapsto a \times x$ schiefadjungiert, weil

$$\langle a \times x, y \rangle = -\langle x, a \times y \rangle,$$

und die Abbildung

$$a \mapsto a \times \dots$$

liefert eine Isomorphismus(!) von V auf den Vektorraum der schiefadjungierten Endomorphismen von V .

Das Differential $D_p X$ eines differenzierbaren Vektorfeldes an der Stelle p ist im allgemeinen weder schief-symmetrisch noch symmetrisch, aber man kann es in einen schief-symmetrischen Anteil (= Rotationsanteil) und in einen symmetrischen Anteil zerlegen:

$$D_p X = \frac{1}{2}(D_p X - D_p X^*) + \frac{1}{2}(D_p X + D_p X^*).$$

(Der $*$ bezeichnet die Adjungierte oder transponierte Matrix.) Dann gilt (Nachrechnen!)

$$\boxed{\text{rot}_p X \times \dots = D_p X - D_p X^*}.$$

In diesem Sinne ist die Rotation $\text{rot } X$ der doppelte Rotationsanteil von DX .

Es gibt eine Verallgemeinerung der Rotation auf Vektorräume beliebiger Dimension, aber nicht mehr für Vektorfelder, sondern für kompliziertere Objekte, die sogenannten Differentialformen vgl. (Analysis III).

Satz 159. *Für zweimal differenzierbare Felder gilt*

$$\begin{aligned} \text{rot grad } f &= 0, \\ \text{div rot } X &= 0. \end{aligned}$$

Das gibt also notwendige Bedingungen dafür, dass sich ein differenzierbares Vektorfeld als Gradient (eines Potentials) oder Rotation (eines Vektorpotentials) schreiben läßt: die Rotation bzw. Divergenz muß verschwinden. Lokal, nicht aber global, sind diese Bedingungen auch hinreichend, vgl. Analysis III.

Beweis. Stures Nachrechnen unter Benutzung des Satzes von Schwarz über die Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen. □

2.7.4 Laplaceoperator

Für zweimal differenzierbare skalare Felder auf $G \subset \mathbb{R}^n$ (oder in einem Euklidischen Vektorraum) ist der *Laplaceoperator* definiert durch

$$\boxed{\Delta f = \text{div grad } f.}$$

In Koordinaten bedeutet das

$$\Delta_p f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(p).$$

Funktionen mit $\Delta f = 0$ heißen *harmonische Funktionen*.

Der Laplaceoperator spielt eine fundamentale Rolle für die Beschreibung sehr vieler physikalischer Phänomene (Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung, Schrödingergleichung). Zum Beispiel ist die Amplitude f einer Welle in einem homogenen 3-dimensionalen Medium eine Funktion der Raumkoordinaten x_i und der Zeit t und genügt der Gleichung

$$\Delta_p f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Normiert man die Ausbreitungsgeschwindigkeit auf $c = 1$ und verwendet im \mathbb{R}^4 den Vierergradienten, so schreibt man den entsprechenden Laplaceoperator auch als $\square f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f$, und die Wellengleichung wird einfach

$$\square f = 0.$$

2.8 Ein Kapitel Newtonsche Mechanik

Die Differentialrechnung verdankt ihre Entstehung ganz wesentlich den Bemühungen um das Verständnis der Gesetze der Mechanik. Daher ist es (auch für angehende Finanzmathematikerinnen) nicht unangemessen, ein wenig über die mathematischen Modelle der Mechanik zu lernen.

- Wir lernen die Newtonschen Bewegungsgleichungen und zeigen die Erhaltungssätze für Energie und Drehimpuls.
- Wir leiten die Keplerschen Planetengesetze aus Newtons Gravitationsgesetz und Bewegungsgesetz her.

Die Bewegung eines *Massenpunktes* der Masse m im 3-dimensionalen Euklidischen Raum wird beschrieben durch eine Kurve

$$x : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto x(t),$$

wobei wir die in der Physik übliche Bezeichnungsweise verwenden. Die Geschwindigkeit der Punktes ist

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Dx(1) : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

und seine Beschleunigung gegeben durch

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} : J \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Das Newtonsche Bewegungsgesetz besagt nun, dass diese Bewegung bestimmt wird durch die Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt, und zwar durch die Formel “Kraft = Masse mal Beschleunigung”:

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Dabei ist die Kraft gegeben durch ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, wenn wir uns auf den Fall beschränken, dass die Kraft nur vom Ort und nicht auch von der Zeit abhängt (auf *autonome Systeme* würde der Physiker sagen). In der Physik ist es üblich, den Impuls $p := m\dot{x}$ als “dummy-Variable” einzuführen und die Bewegung des Massenpunktes als eine Kurve im 6-dimensionalen sogenannten *Phasenraum* zu verstehen. Ein Vorteil dieser Beschreibung ist, dass bei bekannter Kraft F die Bewegung des Punktes bekannt ist, wenn man weiß, wo im Phasenraum er sich zu einem Zeitpunkt t_0 befindet. Die Newtonsche Bewegungsgleichung im Phasenraum ist dann das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= m^{-1}p, \\ \dot{p} &= F(x). \end{aligned} \tag{42}$$

Lösungen $t \mapsto (x(t), p(t))$ heißen auch *Phasenkurven*. Ihre ersten 3 Komponenten liefern also die Bahn des Massenpunktes im Ortsraum, die zweiten 3 dagegen den Impuls.

Beispiel 160 (Energieerhaltungssatz). Wir nehmen an, dass die Kraft F ein Potential $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, d.h. dass

$$F(x) = -\operatorname{grad}_x U.$$

Wir definieren dann eine Funktion $H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Phasenraum durch

$$H(x, p) = U(x) + \frac{1}{2m} \langle p, p \rangle.$$

H ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie und heißt auch die *Hamiltonfunktion*. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

oder, unter Verwendung des symplektischen Gradienten aus Beispiel 158,

$$(\dot{x}, \dot{p}) = -\text{grad}_{(x,p)}^\sigma H.$$

Weil für die symplektische Bilinearform aber $\sigma(v, v) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^{2n}$, folgt daraus

$$\sigma(\text{grad}_{(x(t), p(t))}^\sigma H(\dot{x}(t), \dot{p}(t))) = 0.$$

Nach (41) ist also H auf den Phasenkurven $(x(t), y(t))$ konstant. Wir haben den Energieerhaltungssatz bewiesen. □

Beispiel 161 (Drehimpulserhaltung). Wir nehmen nun an, dass F ein zentrales Feld ist, d.h. dass für alle $x \neq 0$

$$F(x) = f(x)x.$$

Wir definieren eine Funktion

$$J : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x(x, p) \mapsto x \times p,$$

die der *Drehimpuls* heißt. Für eine Phasenkurve $t \mapsto (x(t), p(t))$ erhalten wir

$$\frac{d}{dt} J(x, p) = \dot{x} \times p + x \times \dot{p} = -m^{-1} p \times p - f(x)x \times x = 0.$$

Also ist der Drehimpuls J auf jeder Phasenkurve konstant. Wegen $J \perp x$ liegt die zugehörige Ortskurve in einer Ebene senkrecht zum konstanten J . □

Das letzte Beispiel dieses Abschnitts dokumentiert eine der ganz großen Leistungen in der Geschichte der Naturwissenschaften und einen phantastischen frühen Erfolg der neu entdeckten Differentialrechnung.

Beispiel 162 (Keplersche Gesetze als Konsequenz der Newtonschen Bewegungsgleichung und des Gravitationsgesetzes). Die Keplerschen Gesetze für die Bewegung der Planeten in einem Zentralfeld besagen:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt.
2. Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Kepler (1571-1630) hatte diese Gesetze aus umfassenden astronomischen Beobachtungen (von Tycho Brahe und ihm selbst) errechnet. Das ist eine staunenswerte Leistung experimenteller Naturwissenschaft, vor allem, wenn man bedenkt, dass Kepler eines der ersten Fernrohre konstruierte. Eine Generation später führten sie Newton zur Entdeckung seines Gravitationsgesetzes

$$F(x) = -\gamma m M \frac{x}{r^3}, \quad r = \|x\|, \tag{43}$$

aus dem sich in Verbindung mit den Bewegungsgleichungen die Keplerschen Gesetze herleiten, wie wir nun zeigen wollen.

Die Bewegungsgleichung sieht so aus:

$$\dot{x} = m^{-1}p \quad (44)$$

$$\dot{p} = -\gamma m M \frac{x}{r^3}. \quad (45)$$

Weil das Gravitationsfeld zentralsymmetrisch ist, ist der Drehimpuls $J = x \times p$ längs jeder Lösungskurve (x, p) konstant, und die Bewegung verläuft in einer Ebene senkrecht zu J .

Zwischenrechnung. Wir betrachten eine Lösung $t \mapsto (x(t), p(t))$ der Bewegungsgleichungen und erhalten

$$\frac{d}{dt}(J \times p) = J \times \dot{p} = (x \times p) \times \dot{p} = \langle x, \dot{p} \rangle p - \langle p, \dot{p} \rangle x = -\gamma m^2 M \left(\frac{\dot{x}}{r} - \frac{\langle \dot{x}, x \rangle}{r^3} x \right).$$

Wenn man Erfahrung im Differenzieren von Vektorfeldern hat, kommt einem der Klammerausdruck bekannt vor, vgl. auch Beispiel 122. Nach (21) ist nämlich

$$\frac{d}{dt} \frac{x}{r} = \frac{\dot{x}}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} x = \frac{\dot{x}}{r} - \frac{\langle x, \dot{x} \rangle}{r^3} \frac{dr}{dt}.$$

Wir definieren deshalb

$$A(x, p) := \frac{J \times p}{\gamma m^2 M} + \frac{x}{r}.$$

Dann ist auch der sogenannte *Lenzsche Vektor* A eine Erhaltungsgröße, d.h. $t \mapsto A(x(t), p(t))$ ist längs jeder Phasenkurve konstant.

Wir nehmen jetzt an, dass J in Richtung der z -Achse zeigt. Dann liegen $J \times p$ und x in der xy -Ebene. Also liegt auch A in der xy -Ebene, und wir nehmen an, dass das konstante(!) A in Richtung der positiven x -Achse zeigt. Wir schreiben $x = r(\cos \phi, \sin \phi, 0)$ in Zylinderkoordinaten. Mit $\|A\| =: \epsilon$ ist dann

$$\langle A, x \rangle = \epsilon r \cos \phi.$$

Andrerseits ist

$$\langle A, x \rangle = \frac{\langle J \times p, x \rangle}{\gamma m^2 M} + r = -\frac{\langle J, x \times p \rangle}{\gamma m^2 M} + r = -\underbrace{\frac{\langle J, J \rangle}{\gamma m^2 M}}_{=: \eta} + r$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$r(1 - \epsilon \cos \phi) = \eta. \quad (46)$$

Das ist die Polarkoordinaten-Gleichung eines Kegelschnitts mit Brennpunkt im Ursprung und für $\epsilon < 1$ eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \frac{\eta}{1 - \epsilon^2}, \quad b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (47)$$

Das findet man in jeder besseren Formeltafel. Wir geben eine kurze Herleitung:

Hier sollen $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$ die kartesischen Koordinaten des Punktes $x(t)$ bezeichnen. Aus (46) folgt

$$r = \epsilon x + \eta,$$

und nach Quadrieren

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= \epsilon^2 x^2 + 2\epsilon\eta x + \eta^2 \\
 x^2(1 - \epsilon^2) - 2\epsilon\eta x + y^2 &= \eta^2 \\
 x^2 - 2\epsilon \underbrace{\frac{\eta}{1 - \epsilon^2}}_{=:a} x + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= \eta \frac{\eta}{1 - \epsilon^2} = \eta a = (1 - \epsilon^2)a^2 \\
 (x - \epsilon a)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= (1 - \epsilon^2)a^2 + \epsilon^2 a^2 = a^2
 \end{aligned}$$

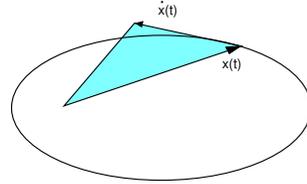
Nach Division mit a^2 folgt schließlich – falls $\epsilon < 1$ – die Gleichung für eine in Richtung der x -Achse verschobene Ellipse mit den Halbachsen a und $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$:

$$\frac{(x - \epsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} = 1.$$

Damit ist das 1. Keplersche Gesetz bewiesen.

Der Flächeninhalt des Dreieck zwischen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{2} \|x \times \dot{x}\| = \frac{1}{2m} \|x \times p\| = \frac{1}{2m} \|J\|.$$



In einem kleinen Zeitintervall Δt überstreicht der Fahrstrahl in erster Näherung die Fläche $\frac{1}{2} \|x \times \Delta t \dot{x}\|$, zwischen t_0 und t_1 also die Fläche

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \|x \times \dot{x}\| dt = \frac{t_1 - t_0}{2m} \|J\|.$$

Das ist das 2. Keplersche Gesetz.

Ist T die Umlaufzeit, so ist die Fläche der Ellipse $F = T \frac{\|J\|}{2m}$. Andererseits gilt für Ellipsen, dass $F = \pi ab$. Daher erhalten wir

$$\frac{T^2}{4m^2} \|J\|^2 = \pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2) = \pi^2 a^3 \eta = \pi^2 a^3 \frac{\|J\|^2}{\gamma m^2 M}.$$

Also

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3.$$

Das ist das 3. Keplersche Gesetz.

□

3 Mehrdimensionale Differentialrechnung: Die großen Sätze

3.1 Der Umkehrsatz

- Weil die Ableitung einer differenzierbaren Abbildung diese lokal sehr gut approximiert, gibt sie zum Beispiel Auskunft auf die Frage nach der lokalen Umkehrbarkeit der Funktion.

Lemma 163. Für endlich-dimensionale Banachräume V, W gleicher Dimension sei

$$\text{Iso}(V, W) := \{A \in L(V, W) \mid A \text{ invertierbar}\}.$$

Dann gilt:

(i) $\text{Iso}(V, W)$ ist offen in $L(V, W)$.

(ii) Die Inversenabbildung

$$\text{inv} : \text{Iso}(V, W) \rightarrow L(W, V), A \mapsto A^{-1}$$

ist differenzierbar mit

$$D_A \text{inv}(B) = -A^{-1}BA^{-1}$$

(iii) Für $A \in \text{Iso}(V, W)$ und $v \in V$ gilt

$$\|A(v)\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \|v\|, \quad (48)$$

wobei $\|A^{-1}\|$ die Operatornorm bezeichnet.

Beweis. Die Behauptungen (i), (ii) folgen aus dem Beispiel 124 mit Hilfe eines Isomorphismus $\Phi : V \rightarrow W$.

Zu (iii). Es ist

$$\|v\| = \|A^{-1}(A(v))\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A(v)\|.$$

Daraus folgt (48). □

Satz 164 (Umkehrsatz). Seien $G \subset V$ offen und $f : V \supset G \rightarrow W$ stetig differenzierbar, d.h. Df existiert und ist stetig. Sei $p \in G$ und sei

$$D_p f : V \rightarrow W \text{ invertierbar.}$$

Dann ist f bei p lokal invertierbar mit stetig differenzierbarem Inversen. Genauer: Es gibt eine offene Umgebung U von p in G , so dass gilt

(i) $f|_U$ ist injektiv,

(ii) $f(U)$ ist offen in W ,

(iii) $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow V$ ist stetig differenzierbar und für alle $x \in U$ gilt

$$D_{f(x)}(f|_U)^{-1} = (D_x f)^{-1}.$$

Bemerkung. Aus der letzten Formel folgt: Ist f sogar k -mal stetig differenzierbar, so ist auch die lokale Umkehrung k -mal stetig differenzierbar.

Definition 165. Eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung mit einem k -mal stetig differenzierbaren Inversen heißt ein C^k -Diffeomorphismus.

Eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarem Differential ist also lokal ein C^1 -Diffeomorphismus.

Beweis des Umkehrsatzes. Zu (i). Lokale Injektivität von f bei p .

Wir setzen $F := D_p f$ und $\beta := \frac{1}{\|F^{-1}\|}$.

Idee: Seien x, y nah bei p . Dann ist

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &= \|(f(y) - f(p)) - (f(x) - f(p))\| \\ &\approx \|D_p f(y - p) - D_p f(x - p)\| = \|F(y - x)\| \stackrel{(48)}{\geq} \beta \|y - x\|. \end{aligned} \quad (49)$$

Aus $y \neq x$ „folgt“ dann also $f(y) \neq f(x)$.

Um das zu präzisieren, müssen wir das \approx -Zeichen quantitativ kontrollieren. Der Approximationsfehler ist

$$\|f(y) - f(x) - F(y - x)\| = \|(f(y) - F(y)) - (f(x) - F(x))\| = \|\phi(y) - \phi(x)\|$$

mit

$$\phi(x) := f(x) - F(x).$$

Offenbar ist ϕ stetig differenzierbar und $D_p \phi = D_p f - F = 0$. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$U = U_\delta(p) \subset G$$

und

$$\|D_\xi \phi\| \leq \frac{\beta}{3} \text{ für alle } \xi \in U.$$

(Hier genügt im Augenblick auch $\|D_\xi \phi\| < \beta$, aber im Hinblick auf den Beweis von (ii) fordern wir die schärfere Abschätzung.) Dann ist nach dem Schrankensatz

$$\|\phi(y) - \phi(x)\| \leq \sup_{\xi \in U} \|D_\xi \phi\| \|y - x\| \leq \frac{\beta}{3} \|y - x\|.$$

Der Approximationsfehler in (49) ist also maximal $\frac{1}{3}$ der rechten Seite. Also ist

$$\|f(y) - f(x)\| \geq \frac{2}{3} \beta \|y - x\| \quad (50)$$

und $f|_U$ injektiv. Nach dem Lemma ist weiter

$$D_x f \text{ invertierbar für } x \in U. \quad (51)$$

Zu (ii). Offenheit von $f(U)$.

Seien U wie oben und $x \in U$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$U_\epsilon(f(x)) \subset f(U).$$

Wähle zunächst $r > 0$ mit

$$K := \{y \in V \mid \|y - x\| \leq r\} \subset U.$$

Nach (50) gilt

$$\|y - x\| = r \implies \|f(y) - f(x)\| \geq \frac{2}{3}\beta r, \quad (52)$$

d.h. die Randpunkte von K werden durch f auf Punkte abgebildet, die mindestens den Abstand $\frac{2}{3}\beta r$ von $f(x)$ haben. Wir wollen zeigen, dass

$$U_{\frac{1}{3}\beta r}(f(x)) \subset f(K) \subset f(U). \quad (53)$$

Sei also $z \in U_{\frac{1}{3}\beta r}(f(x))$. Sei $y^* \in K$ ein Punkt, in dem die stetige Funktion $\|f(y) - z\|$ auf dem kompakten K ihr Minimum annimmt. Wir wollen zeigen, dass $f(y^*) = z$; dann ist (53) bewiesen.

Zunächst ist

$$\|y^* - x\| < r. \quad (54)$$

Sonst wäre nach Definition von K nämlich $\|y^* - x\| = r$, und nach (52) folgte mit der Dreiecksungleichung

$$\|f(y^*) - z\| \geq \frac{1}{3}\beta r.$$

Aber das steht wegen $\|z - f(x)\| < \frac{1}{3}\beta r$ im Widerspruch zur Wahl von y^* .

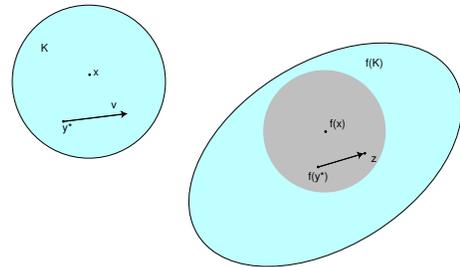
Wir nehmen nun an, dass

$$f(y^*) \neq z. \quad (55)$$

Wegen der Invertierbarkeit von $D_{y^*}f$ gibt es dann ein $v \neq 0$ mit

$$D_{y^*}f(v) = z - f(y^*) \neq 0.$$

Geht man von y^* in Richtung v , so bleibt man für eine Weile in K , und das f -Bild bewegt sich in Richtung $z - f(y^*)$, also in Richtung auf z zu. Daher liegt für kleine positive t der Punkt $f(y^* + tv)$ näher an z als $f(y^*)$, und wir erhalten einen Widerspruch zur Wahl von y^* .



Wir präzisieren das:

Wähle $\delta_1 > 0$ so klein, dass $y^* + tv \in K$ für alle $t \in [0, \delta_1]$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(y^* + tv) - z &= f(y^*) - z + tD_{y^*}f(v) + R(y^* + tv) \\ &= (f(y^*) - z)(1 - t) + R(y^* + tv). \end{aligned}$$

Es gibt ein $t \in]0, \delta_1[$, so dass

$$\|R(y^* + tv)\| \leq \frac{\|z - f(y^*)\|}{2\|v\|} \|tv\| = \frac{t}{2} \|z - f(y^*)\|,$$

also

$$\|f(y^* + tv) - z\| \leq (1 - t)\|f(y^*) - z\| + \frac{t}{2} \|z - f(y^*)\| < \|f(y^*) - z\|$$

im Widerspruch zur Wahl von y^* . Damit war die Annahme (55) falsch, und es gilt $f(y^*) = z$, also $U_{\frac{1}{3}\beta r}(f(x)) \subset U$.

Zu (iii). Stetige Differenzierbarkeit der lokalen Umkehrabbildung.

Sei $g := (f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow V$. Seien $z, w \in f(U)$ und $x := g(z)$. Dann haben wir

$$\underbrace{f(g(w))}_{=w} = \underbrace{f(g(z))}_{=z} + D_x f(g(w) - g(z)) + R(g(w))$$

oder

$$D_x f(g(w) - g(z)) - (w - z) = -R(g(w)).$$

mit $\lim_{y \rightarrow x} \frac{R(y)}{\|y-x\|} = 0$. Wegen (51) ist $D_x f$ invertierbar. Es folgt

$$g(w) = g(z) + (D_x f)^{-1}(w - z) - \underbrace{(D_x f)^{-1}(R(g(w)))}_{=: \tilde{R}(w)}.$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{\tilde{R}(w)}{\|w - z\|} = 0. \quad (56)$$

Wegen der Injektivität von g und nach (50) gilt für $w \neq z$

$$0 < \|g(w) - g(z)\| \leq \frac{3}{2\beta} \|w - z\|.$$

Insbesondere ist g stetig, und aus

$$\frac{\tilde{R}(w)}{\|w - z\|} = -(D_x f)^{-1} \left(\underbrace{\frac{R(g(w))}{\|g(w) - g(z)\|}}_{\rightarrow 0 \text{ für } w \rightarrow z} \right) \underbrace{\frac{\|g(w) - g(z)\|}{\|w - z\|}}_{\leq \frac{3}{2\beta}}$$

folgt die Behauptung (56). Also ist g differenzierbar und

$$D_{f(x)} g = D_z g = (D_x f)^{-1}.$$

Schließlich ist $z \mapsto g(z) \mapsto D_{g(z)} f \mapsto (D_{g(z)} f)^{-1}$ als Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig. Damit haben wir die stetige Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung gezeigt. \square

Bemerkung. Die Formel für die Ableitung folgt auch aus

$$(f|_U)^{-1} \circ f|_U = \text{id}$$

mit der Kettenregel:

$$D_{f(x)}(f|_U)^{-1} \circ D_x(f|_U) = D_x \text{id} = \text{id}.$$

Beispiel 166. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$ hat die Funktionalmatrix

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Sie ist deshalb stetig differenzierbar und $D_{(x,y)}f$ ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ invertierbar. Also besitzt f um jeden Punkt lokal ein stetig differenzierbares Inverses. Aber f ist nicht global invertierbar, weil z.B. $f(1, 1) = f(-1, -1)$. Es ist

$$f(\{(x, y) \mid x > 0 \text{ und } y > 0\}) = \{(x, y) \mid y > 0\}$$

und

$$g(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u}, \sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u} \right), \quad v > 0$$

ist das Inverse von $f|_{\{(x,y) \mid x>0 \text{ und } y>0\}}$. Die Formel für die Ableitung der Inversen liefert

$$g'(f(x, y)) = (f'(x, y))^{-1} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel ergibt sich für $x = y = 1$, also $(u, v) = (0, 2)$,

$$g'(0, 2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel 167 (Stetige Polarkoordinaten). Die Polarkoordinaten in der Ebene sind nicht eindeutig, die Winkelkoordinate ist nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmt. Und wenn man die Eindeutigkeit mit “Gewalt” erzwingt, indem man zum Beispiel verlangt, dass $\phi \in [-\pi, \pi]$, so wird die Winkelkoordinate auf der negativen x -Achse unstetig.

Wir wollen aber überlegen: Eine stetige Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kann man auch in Polarkoordinaten mit stetiger Winkelfunktion beschreiben: Ist $c(a) = \|c(a)\|(\cos \phi_0, \sin \phi_0)$, so gibt es genau eine stetige Funktion $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(a) = \phi_0$ und

$$\begin{aligned} c(t) &= \|c(t)\|(\cos \Phi(t), \sin \Phi(t)) \\ &= \|c(t)\|e^{i\Phi(t)} \text{ in komplexer Notation.} \end{aligned} \tag{57}$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \supset G &:= \{(r, \phi) \mid r > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (r, \phi) &\mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi) \end{aligned}$$

Dann ist

$$f'(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie nach, dass das für alle $(r, \phi) \in G$ invertierbar ist. Also ist f nach dem Umkehrsatz lokal invertierbar. Wir wissen natürlich mehr: Die Abbildung f ist surjektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, und mittels Arcus-Funktionen lassen sich lokale Umkehrabbildungen explizit hinschreiben. Weil das wegen der erforderlichen Fallunterscheidungen mühsam ist, wählen wir nun zu jedem $p = (r, \phi) \in G$ eine offene Umgebung U_p , die von f diffeomorph auf eine offene Menge $V_p := f(U_p) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ abgebildet wird. Dann ist $(V_p)_{p \in G}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, und wegen der Stetigkeit von c ist $(c^{-1}(V_p))_{p \in G}$ eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Nach dem Lebesgue-Lemma gibt es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

so dass jedes $[t_{j-1}, t_j]$ in einem der $c^{-1}(V_p)$ enthalten ist. Wir wählen zu jedem j ein solches p , und schreiben $f_j := f|_{U_p}$.

Wir definieren nun rekursiv

$$\begin{aligned}\Phi(a) &:= \phi_0 \\ \Phi(t) &:= (f_j^{-1}(c(t)))_2 - (f_j^{-1}(c(t_{j-1})))_2 + \Phi(t_{j-1}) \text{ für } t \in]t_{j-1}, t_j].\end{aligned}$$

Dabei bedeutet der untere Index $(\cdot)_2$ die 2. Komponente (eben die ϕ -Komponente). Offenbar ist dann $\Phi|_{]t_{j-1}, t_j]}$ stetig, und weil außerdem

$$\lim_{t \searrow t_{j-1}} \Phi(t) = \Phi(t_{j-1}),$$

ist $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir zeigen, dass (57) gilt. Nehmen wir an, dass das bereits für $t \leq t_{j-1}$ erfüllt ist. Dann folgt für $t_{j-1} < t \leq t_j$:

$$\begin{aligned}\|c(t)\|e^{i\Phi(t)} &= \|c(t)\| \exp\left(i\left((f_j^{-1}(c(t)))_2 - (f_j^{-1}(c(t_{j-1})))_2 + \Phi(t_{j-1})\right)\right) \\ &= \|c(t)\| \exp\left(i(f_j^{-1}(c(t)))_2\right) \frac{\|c(t_{j-1})\| \exp(i\Phi(t_{j-1}))}{\|c(t_{j-1})\| \exp\left(i(f_j^{-1}(c(t_{j-1})))_2\right)} \\ &= c(t) \frac{c(t_{j-1})}{c(t_{j-1})} = c(t).\end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit von Φ . Wir nehmen an, dass

$$\|c(t)\|e^{i\Phi(t)} = c(t) = \|c(t)\|e^{i\tilde{\Phi}(t)} \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Dann folgt

$$e^{i(\Phi(t) - \tilde{\Phi}(t))} = 1 \text{ für alle } t \in [a, b],$$

also

$$\Phi(t) - \tilde{\Phi}(t) \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Wenn Φ und $\tilde{\Phi}$ stetig sind mit $\Phi(a) = \phi_0 = \tilde{\Phi}(a)$, so folgt daraus $\Phi = \tilde{\Phi}$.

□

3.2 Implizite Funktionen

- Ist F linear, so ist $F(x, y) = F((x, 0) + (0, y)) = F(x, 0) + F(0, y)$ und die Frage, ob sich die Gleichung $F(x, y) = 0$ nach $y = y(x)$ auflösen lässt, ist einfach die Frage nach der Umkehrbarkeit von $F(0, \cdot)$. Wir lernen im Satz über implizite Funktionen die Antwort auf die entsprechende Frage für differenzierbares F .

Problem: Seien V_0, V_1, W endlich-dimensionale Banachräume und $f : V_0 \times V_1 \rightarrow W$. Unter welchen Voraussetzungen hat die Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{58}$$

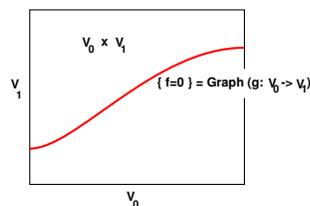
für jedes $x \in V_0$ genau eine Lösung $y \in V_1$?

Unter diesen Umständen gibt es dann eine eindeutig bestimmte Funktion $g : V_0 \rightarrow V_1$, für die für alle $x \in V_0$ gilt

$$f(x, g(x)) = 0. \tag{59}$$

Man sagt dann auch, dass (58) sich nach einer Funktion $y = g(x)$ eindeutig auflösen lässt oder dass g durch (59) *implizit definiert* wird.

Geometrisch bedeutet das, dass man das Niveau $f = 0$ als Graphen $\{(x, g(x)) \mid x \in V_0\}$ einer Funktion $g : V_0 \rightarrow V_1$ beschreibt, also durch V_0 parametrisiert: Jeder Punkt auf dem 0-Niveau liegt über genau einem Punkt von V_0 .



Im Fall $W = \mathbb{R}^m$ hat f die Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m . Man hat also m Gleichungen, die Dimension von W ist die Anzahl der gegebenen Gleichungen. Ebenso kann man die Dimension von V_1 als die Anzahl der gesuchten Unbekannten y_i ansehen. Es ist also wohl vernünftig, $\dim V_1 = \dim W$ zu wählen.

Beispiel 168. Sei $f = F : V_0 \times V_1 \rightarrow W$ linear und sei $\dim V_1 = \dim W$. Dann hat man

$$F(x, y) = F((x, 0) + (0, y)) = F(x, 0) + F(0, y),$$

d.h. F liefert zwei lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} F(\cdot, 0) &: V_0 \rightarrow W, \\ F(0, \cdot) &: V_1 \rightarrow W. \end{aligned}$$

Dann ist (58) genau dann für jedes $x \in V_0$ eindeutig lösbar, wenn die lineare Abbildung $F(0, \cdot) : V_1 \rightarrow W$ invertierbar ist. Die Gleichung

$$0 = F(x, y) = F(x, 0) + F(0, y)$$

ist nämlich äquivalent zu

$$F(0, y) = -F(x, 0).$$

Das ist höchstens dann eindeutig lösbar, wenn $F(0, \cdot)$ injektiv ist. Nach der Dimensionsvoraussetzung ist in diesem Fall aber $F(0, \cdot)$ bijektiv und die Gleichung tatsächlich für jedes x eindeutig lösbar. Man findet

$$g(x) = -F(0, \cdot)^{-1}(F(x, 0)).$$

Im Fall $V_0 = \mathbb{R}^n$ und $V_1 = W = \mathbb{R}^m$ ist F gegeben durch eine $m \times (n + m)$ -Matrix der Form

$$\left(\underbrace{F^{(1)}}_n \mid \underbrace{F^{(2)}}_m \right),$$

und $F(0, \cdot)$ wird repräsentiert durch die quadratische $m \times m$ -Matrix $F^{(2)}$, die also invertierbar sein muß.

□

Wenn wir dieses Ergebnis von linearen Abbildungen auf differenzierbare Abbildungen verallgemeinern wollen, ist es plausibel, dass wir nur ein *lokales* Ergebnis erhalten. Experimentieren Sie ein bißchen mit dem Fall $V_0 = V_1 = W = \mathbb{R}$ und

$$f(x, y) := x - y^2.$$

Satz 169 (über implizite Funktionen). *Seien V_0, V_1, W endlich-dimensionale Banachräume, $G \subset V_0 \times V_1$ offen und $f : V_0 \times V_1 \supset G \rightarrow W$ stetig differenzierbar.*

Sei $(p, q) \in G$ mit

$$f(p, q) = 0, \tag{60}$$

$$D_{(p,q)}f(0, \cdot) : V_1 \rightarrow W \text{ invertierbar.} \tag{61}$$

Beachte, dass damit $\dim V_1 = \dim W$.

Dann läßt sich

$$f(x, y) = 0 \tag{62}$$

in einer Umgebung von (p, q) eindeutig nach einer stetig differenzierbaren Abbildung $y = g(x)$ auflösen.

Genauer:

Es gibt offene Umgebungen U_0 von p in V_0 und U_1 von q in V_1 mit folgenden Eigenschaften:

(i) $U_0 \times U_1 \subset G$, und zu jedem $x \in U_0$ gibt es genau ein $y \in U_1$ mit

$$f(x, y) = 0.$$

(ii) Die nach (i) eindeutig bestimmte Funktion $g : U_0 \rightarrow U_1$ mit

$$f(x, g(x)) = 0$$

ist stetig differenzierbar.

(iii) Für alle $x \in U_0$ ist $D_{(x,g(x))}f(0, \cdot) : V_1 \rightarrow W$ invertierbar und für $v \in V_0$ ist

$$D_x g(v) = - (D_{(x,g(x))}f(0, \cdot))^{-1} \circ D_{(x,g(x))}f(v, 0). \tag{63}$$

Bemerkung. Im Fall $V_0 = \mathbb{R}^n, V_1 = W = \mathbb{R}^m$ werden die linearen Abbildungen

$$D_{(x,y)}f(0, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{bzw.} \quad D_{(x,y)}f(\cdot, 0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

repräsentiert durch die Matrizen

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right)_{i,j=1,\dots,m} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y) \right)_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n}$$

Beweis zum Satz über implizite Funktionen.

Die Idee. Die Gleichung $f(x, y) = 0$ ist genau dann eindeutig nach y auflösbar, wenn dasselbe für die Gleichung

$$h(x, y) := (x, f(x, y)) = (x, 0)$$

gilt. h erweist sich nach dem Umkehrsatz als lokal invertierbar, und die gesuchte Lösungsfunktion g ist dann gegeben durch

$$(x, g(x)) = h^{-1}(x, 0),$$

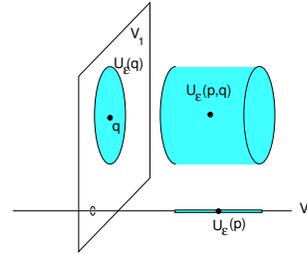
also durch die zweite Komponente von $h^{-1}(\cdot, 0)$.

A. Vorbemerkung. Da $V_0 \times V_1$ endlich-dimensional ist, sind alle Normen äquivalent, und wir verwenden der Einfachheit halber die Norm

$$\|(v, w)\| = \sup(\|v\|, \|w\|).$$

Das hat den Vorteil, dass

$$U_\epsilon((p, q)) = U_\epsilon(p) \times U_\epsilon(q) \text{ für } (p, q) \in V_0 \times V_1 \text{ und } \epsilon > 0.$$



Analog verfahren wir gleich mit dem Raum $V_0 \times W$.

B. Reduktion auf den Umkehrsatz. Wir setzen die obige Beweisidee um und definieren die Abbildung

$$h : V_0 \times V_1 \supset G \rightarrow V_0 \times W, (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$$

zwischen gleich-dimensionalen Vektorräumen. Es gilt

$$D_{(x,y)}h(v, w) = (v, D_{(x,y)}f(v, w)), \tag{64}$$

und deshalb ist mit f auch h stetig differenzierbar. Weiter ist

$$D_{(p,q)}h \text{ invertierbar,} \tag{65}$$

denn

$$\begin{aligned} 0 = D_{(p,q)}h(v, w) &\stackrel{(64)}{\iff} v = 0 \text{ und } D_{(p,q)}f(v, w) = 0 \\ &\iff v = 0 \text{ und } D_{(p,q)}f(0, w) = 0 \iff v = 0 \text{ und } w = 0 \end{aligned}$$

nach Voraussetzung.

C. Anwendung des Umkehrsatzes. Nach dem Umkehrsatz gibt es $\epsilon > 0$, so dass

$$\begin{aligned} U &:= U_\epsilon(p) \times U_\epsilon(q) \subset G, \\ h|U &\text{ injektiv,} \\ h(U) &\text{ offen,} \\ (h|U)^{-1} &\text{ stetig differenzierbar.} \end{aligned}$$

Da $h(U)$ offen und

$$(p, 0) = (p, f(p, q)) = h(p, q) \in h(U) \subset V_0 \times W,$$

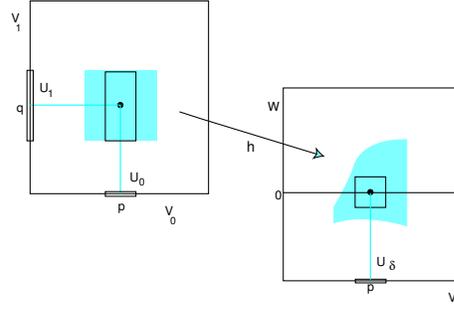
gibt es $\delta > 0$ mit $\delta < \epsilon$ und

$$U_\delta(p) \times U_\delta(0) = U_\delta((p, 0)) \subset h(U) \subset V_0 \times W.$$

Wir setzen nun

$$U_0 := U_\delta(p), \quad U_1 := U_\epsilon(q),$$

und behaupten, dass diese das Gewünschte leisten.



Zu (i). Zunächst ist

$$U_0 \times U_1 \subset U_\epsilon(p) \times U_\epsilon(q) = U \subset G. \quad (66)$$

Ist $x \in U_0$, so ist $(x, 0) \in U_\delta((p, 0)) \subset h(U)$. Darum gibt es nach dem Umkehrsatz genau ein $(\tilde{x}, y) \in U$ mit $h(\tilde{x}, y) = (x, 0)$.

Offenbar ist

- $\tilde{x} = x$,
- $y \in U_1$ nach Definition von U und U_1 , und
- $f(x, y) = 0$ nach Definition von h .

Also gibt es zu jedem $x \in U_0$ ein $y \in U_1$ mit $f(x, y) = 0$. Wir bezeichnen dieses y mit $g(x)$.

Sind $y_1, y_2 \in U_1$ mit $f(x, y_1) = 0 = f(x, y_2)$, so folgt $h(x, y_1) = (x, 0) = h(x, y_2)$, also $y_1 = y_2$.

Damit ist (i) bewiesen.

Zu (ii). Für $x \in U_0$ haben wir eben gezeigt, dass

$$h(x, g(x)) = (x, f(x, g(x))) = (x, 0).$$

Bezeichnen wir also mit $\pi : V_0 \times V_1 \rightarrow V_1, (v, w) \mapsto w$ die Projektion, so ist

$$g(x) = \pi \circ (h|U)^{-1}(x, 0).$$

Daher ist g stetig differenzierbar.

Zu (iii). Nach (65) ist $D_{(x,y)}h$ für $(x, y) \in U$ invertierbar. Nach (62) haben wir dann

$$D_{(x,y)}h(0, w) = (0, D_{(x,y)}f(0, w)) = 0 \iff w = 0.$$

Daraus folgt, dass für $(x, y) \in U$ auch $D_{(x,y)}f(0, \cdot)$ injektiv und damit invertierbar ist. Insbesondere ist also für alle $x \in U_0$

$$D_{(x,g(x))}f(0, \cdot) \text{ invertierbar.} \quad (67)$$

Nun differenzieren wir

$$\phi : U_0 \ni x \mapsto \underset{\alpha}{(x, g(x))} \mapsto f(x, g(x))$$

nach der Kettenregel. Wir erhalten

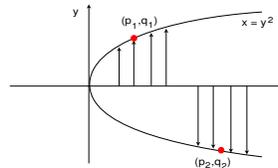
$$\begin{aligned} D_x \phi(v) &= D_{(x,g(x))}f(D_x \alpha(v)) \\ &= D_{(x,g(x))}f(v, D_x g(v)) \\ &= D_{(x,g(x))}f(v, 0) + D_{(x,g(x))}f(0, D_x g(v)). \end{aligned} \quad (68)$$

Andererseits ist $\phi = 0$, also $D_x \phi = 0$. Damit folgt aus (67) und (68) die Formel in (iii). \square

Beispiel 170. Seien $V_0 = V_1 = W = \mathbb{R}$ und $f : V_0 \times V_1 = G \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x - y^2$. Dann ist

$$D_{(p,q)}f(v, w) = v - 2qw.$$

In $(p, q) = (0, 0)$ ist die Voraussetzung über die Invertierbarkeit der Ableitung also nicht erfüllt, wohl aber in allen Punkten (q^2, q) mit $q \neq 0$. In der Nähe dieser Punkte läßt sich $f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \mid x - y^2 = 0\}$ also lokal als Graph schreiben.



□

3.3 Der Rangsatz

- Der Rangsatz beinhaltet in gewisser Weise die Quintessenz der linearen Approximation differenzierbarer Abbildungen.

In der Linearen Algebra betrachtet man folgendes Problem: Eine lineare Abbildung

$$F : V \rightarrow W$$

zwischen zwei \mathbb{R} -Vektorräumen der Dimensionen n und m kann man durch eine $(m \times n)$ -Matrix darstellen, *nachdem man in V und W Basen gewählt hat*. Die Darstellungsmatrix hängt wesentlich von den gewählten Basen ab, und man kann fragen, ob man sie durch geschickte Wahl der Basen besonders einfach gestalten kann. Tatsächlich kann man immer die folgende Form erreichen

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Zahl der Einsen ist dabei der Rang r der linearen Abbildung, d.h. die Dimension von $F(V)$. Dieses Resultat kann man auch so formulieren:

Ist $F : V \rightarrow W$ wie oben, so gibt es Isomorphismen $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gegeben ist durch

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Die Isomorphismen Φ und Ψ nennt man auch *Koordinaten*. In geeigneten Koordinaten sieht also jede lineare Abbildung vom Rang r aus wie

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Wir übertragen das nun lokal auf C^k -Abbildungen, vgl. Definition 139. An die Stelle der *linearen* Koordinatenabbildung $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tritt jetzt ein C^k -Diffeomorphismus

$$\Phi : V \supset U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$$

(also eine bijektive C^k -Abbildung mit C^k -Inversem) zwischen offenen Umgebungen und U von $p \in G$ und \tilde{U} von $\Phi(p) = 0$ in \mathbb{R}^n und analog für Ψ . Diese Diffeomorphismen nennt man ebenfalls (*krummlinige*) *Koordinaten*.

Satz 171 (Rangsatz). Seien V, W Banachräume der Dimensionen n und m , $G \subset V$ offen, und

$$f : V \supset G \rightarrow W \quad k\text{-mal stetig differenzierbar, } 1 \leq k \leq +\infty.$$

f sei von konstantem Rang r , d.h. der Rang von $D_x f : V \rightarrow W$ sei $= r$ unabhängig von $x \in G$. Dann gilt: Zu jedem $p \in G$ gibt es C^k -Diffeomorphismen

$$\Phi : V \supset U_1 \rightarrow \tilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^n$$

und

$$\Psi : W \supset U_2 \rightarrow \tilde{U}_2 \subset \mathbb{R}^m$$

offener Umgebungen von p bzw. $f(p)$ auf offene Umgebungen von $0 = \Phi(p)$ in \mathbb{R}^n bzw. von $\Psi(f(p)) = 0 \in \mathbb{R}^m$, so dass

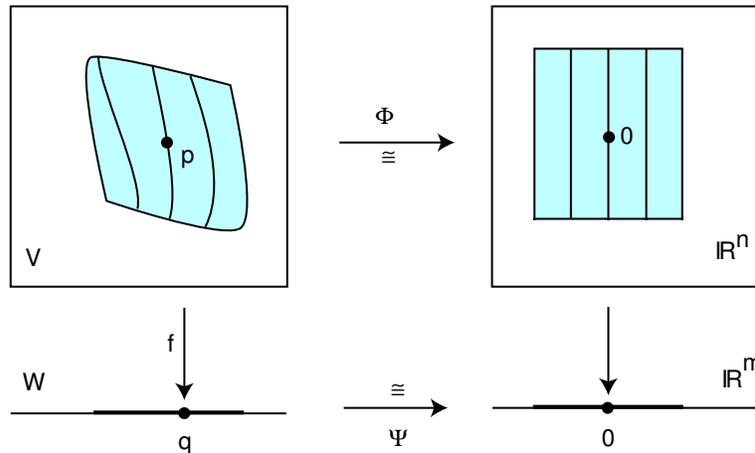
$$f(U_1) \subset U_2$$

und

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \quad \text{für alle } x \in \tilde{U}_1.$$

C^k -Abbildungen von konstantem Rang r sind also in geeigneten C^k -Koordinaten von der Form

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$



Konvention. Um die Notation übersichtlich zu halten, schreiben wir zum Beispiel:

Sei $g : V \rightarrow W$ ein lokaler Diffeomorphismus bei p ,

wenn g auf einer offenen Umgebung von $p \in V$ (nicht notwendig aber auf ganz V) definiert und C^k -differenzierbar ist, und eine (eventuell kleinere) offene Umgebung von p diffeomorph auf eine offene Umgebung von $g(p)$ in W abbildet.

Wegen des zu Beginn dieses Abschnittes angeführten Satzes aus der linearen Algebra genügt es, folgende Version des Rangsatzes zu beweisen:

Satz 172 (Rangatz, 2. Version). Seien V, W endlich-dimensionale Banachräume, sei $G \subset V$ offen, $p \in G$ und sei

$$f : V \supset G \rightarrow W \in C^k \quad \text{und von konstantem Rang } r.$$

Dann gibt es lokale C^k -Diffeomorphismen

$$\begin{aligned} \phi : V &\rightarrow V \text{ bei } p \text{ mit } \phi(p) = p, \\ \psi : W &\rightarrow W \text{ bei } f(p) \text{ mit } \psi(f(p)) = f(p), \end{aligned}$$

für die auf einer offenen Umgebung von $0 \in V$

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} = D_p f$$

gilt. In geeigneten lokalen Koordinaten um p und $f(p)$ sieht f also aus wie seine Ableitung, d.h. wie eine lineare Abbildung vom Rang r .

Beweis. Vorbereitung. Durch Translationen (also C^∞ -Diffeomorphismen) in V und W können wir erreichen, dass $p = 0$ und $f(p) = 0$. Das setzen wir im folgenden voraus. Um den Beweis übersichtlich zu halten, benutzen wir die obige Konvention und verzichten auf die explizite Kontrolle der Definitionsbereiche.

Wir definieren

$$V_2 := \text{Kern } D_0 f, \quad W_1 := \text{Bild } D_0 f = D_0 f(V),$$

und wählen zu V_2 und W_1 komplementäre Unterräume, so dass also

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad W = W_1 \oplus W_2.$$

Das Differential $D_0 f$ bildet dann also den r -dimensionalen Raum V_1 isomorph auf W_1 ab. Entsprechend der Zerlegung bezeichnen wir für $x \in V$ die Komponenten in V_1 bzw. V_2 mit x_1 bzw. x_2 und entsprechend für $y \in W$. Insbesondere ist $f = f_1 + f_2$ mit $f_i : G \rightarrow W_i$.

1. Schritt: Konstruktion von ϕ . Die Komponentenabbildungen sind linear, und deshalb ist

$$F := D_0(f_1|_{V_1}) = (D_0 f|_{V_1})_1 : V_1 \rightarrow W_1$$

ein Isomorphismus. Daher ist nach dem Umkehrsatz

$$f_1|_{V_1} : V_1 \rightarrow W_1$$

ein lokaler Diffeomorphismus⁵. Dann ist auch $F^{-1} \circ f_1 : V_1 \rightarrow V_1$ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir definieren $\phi : V \rightarrow V$ durch

$$\phi(x) := F^{-1}(f_1(x)) + x_2 \text{ für } x = x_1 + x_2.$$

Dann ist

$$D_0 \phi(v_1 + v_2) = F^{-1}(D_0 f_1(v_1 + v_2)) + v_2 = v_1 + v_2,$$

also

$$D_0 \phi = \text{id}_V, \tag{69}$$

und deshalb ist ϕ ein lokaler Diffeomorphismus.

⁵ Genauer: "... ein lokaler C^k -Diffeomorphismus bei 0.", aber das unterdrücken wir in Zukunft: Alle unsere lokalen Diffeomorphismen und Abbildungen sind "bei 0" und k -mal stetig differenzierbar.

Aus der Definition folgt für die V_1 -Komponente $\phi_1(x) = F^{-1} \circ f_1(x)$, also $\phi_1(\phi^{-1}(x)) = F^{-1} \circ f_1(\phi^{-1}(x))$ und

$$f_1(\phi^{-1}(x)) = F(x_1). \quad (70)$$

2. Schritt: Konstruktion von ψ . Nun definieren wir $\psi : W \rightarrow W$ durch

$$\psi(y_1 + y_2) = y_1 + y_2 - f_2 \circ \phi^{-1} \circ F^{-1}(y_1).$$

Dafür gilt

$$D_0\psi(w_1 + w_2) = w_1 + \underbrace{w_2 - D_0(f_2 \circ \phi^{-1} \circ F^{-1})(w_1)}_{\in W_2} = 0 \iff w_1 = 0 \text{ und } w_2 = 0.$$

Also $D_0\psi$ injektiv und damit bijektiv, und ψ ist ein lokaler Diffeomorphismus. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) &= \psi(f \circ \phi^{-1}(x)) \\ &\stackrel{(70)}{=} \psi(F(x_1) + f_2 \circ \phi^{-1}(x)) \\ &= F(x_1) + f_2 \circ \phi^{-1}(x) - f_2 \circ \phi^{-1} \circ F^{-1}(F(x_1)) \\ &= F(x_1) + f_2 \circ \phi^{-1}(x) - f_2 \circ \phi^{-1}(x_1) \end{aligned}$$

Wir sind also fertig, wenn wir zeigen können, dass für $x \in V$ nah bei 0

$$f_2 \circ \phi^{-1}(x) = f_2 \circ \phi^{-1}(x_1). \quad (71)$$

3. Schritt: Nachweis von (71). Das ist das eigentliche Herzstück des Beweises. Aus (70) folgt

$$\begin{aligned} D_x f(D_{\phi(x)}\phi^{-1}(v_1 + v_2)) &= D_{\phi(x)}(f \circ \phi^{-1})(v_1 + v_2) \\ &= D_{\phi(x)}(f_1 \circ \phi^{-1} + f_2 \circ \phi^{-1})(v_1 + v_2) \\ &= F(v_1) + D_{\phi(x)}f_2(v_1 + v_2). \end{aligned} \quad (72)$$

Wir betrachten nun die Projektion $\pi_1 : W \rightarrow W_1, y \mapsto y_1$. Aus der letzten Gleichung folgt

$$\pi_1(D_x f(V)) \supset \pi_1(D_x f(D_{\phi(x)}\phi^{-1}(V_1))) = F(V_1) = W_1.$$

Damit ist $\text{Rang}(D_x f) \geq \dim W_1 = r$ für alle Punkte x nah bei $p = 0$.

Gäbe es $v_2 \in V_2$ mit $D_{\phi(x)}(f_2 \circ \phi^{-1})(v_2) = w_2 \neq 0$, so wäre

$$w_2 \stackrel{(72)}{=} D_x f(D_{\phi(x)}\phi^{-1}(v_2)) \in D_x f(V) \quad \text{und} \quad \pi_1(w_2) = D_{\phi(x)}(\pi_1 \circ f_2 \circ \phi^{-1})(v_2) = 0.$$

Also wäre $w_2 \in \text{Kern } \pi_1|_{D_x f(V)}$ und nach Linearer Algebra

$$\dim D_x f(V) = \dim \text{Kern}(\pi_1) + \dim \text{Bild}(\pi_1) \geq r + 1$$

im Widerspruch zur Rangvoraussetzung über f , die wir hier zu ersten Mal benutzen. Es folgt

$$D_x(f_2 \circ \phi^{-1})|_{V_2} = 0,$$

d.h. $f_2 \circ \phi^{-1}$ ist nach Korollar 147 lokal unabhängig von der V_2 -Komponenten und

$$f_2 \circ \phi^{-1}(x) = f_2 \circ \phi^{-1}(x_1).$$

□

Wir halten noch ein Ergebnis aus diesem Beweis fest: Im letzten Schritt haben wir – ohne Benutzung der Konstanz des Ranges – gezeigt, dass für alle Punkte x nah bei p

$$D_p f(V) = W_1 \subset \pi_1(D_x f(V)),$$

Also ist der Rang von Df in Nachbarnpunkten von p mindestens so groß wie in p . Man sagt, er ist *unterhalb-stetig*. Damit erhalten wir:

Lemma 173. Für jede stetig differenzierbare Funktion ist der Rang unterhalb-stetig.

Beispiel 174. Auf der Menge der reellen invertierbaren $n \times n$ Matrizen betrachten wir die Abbildung

$$f : M(n \times n, \mathbb{R}) \supset \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$$

mit $f(A) = AA^T$, wobei A^T die transponierte Matrix bezeichnet. Dafür gilt

$$D_A f(B) = BA^T + AB^T,$$

und diese Matrix ist symmetrisch(=selbstadjungiert)! Ist andererseits $C \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, so folgt

$$D_A f\left(\frac{1}{2}C(A^{-1})^T\right) = \frac{1}{2}C(A^{-1})^T A^T + \frac{1}{2}A(A^{-1})C^T = C.$$

Also ist für alle $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ das Bild von $D_A f$ der $\frac{n(n+1)}{2}$ -dimensionale Raum aller symmetrischen Matrizen und f ist von konstantem Rang $\frac{n(n+1)}{2}$.

□

Korollar 175. Sei $f : V \subset G \rightarrow W$ stetig differenzierbar.

- (i) Ist f eine Immersion, d.h. $D_p f$ für alle p injektiv, so ist f lokal injektiv.
- (ii) Ist f eine Submersion, d.h. $D_p f$ für alle p surjektiv, so ist f eine offene Abbildung, d.h. f bildet offene Mengen in offene Mengen ab.

Beweis. Selbst.

□

4 Mannigfaltigkeiten

- Wir lernen mit den Mannigfaltigkeiten eine Verallgemeinerung des Flächenbegriffs auf beliebige Dimension (und Kodimension) kennen.
- Beispiele sind vor allem die “Niveaus” von Abbildungen, wie die höherdimensionalen Sphären, aber auch viel abstraktere Räume, wie etwa die orthogonalen Matrizen.
- Der Tangentialraum ist eine lineare Approximation der Mannigfaltigkeit und ermöglicht, auch für Funktionen auf Mannigfaltigkeiten die Ableitung als lineare Abbildung zu definieren.
- Als Anwendung behandeln wir Extrema unter Nebenbedingungen.

Eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit im Banachraum V ist eine Teilmenge $M \subset V$, die in geeigneten krummlinigen Koordinaten (für V !) lokal so aussieht wie ein m -dimensionaler Untervektorraum:

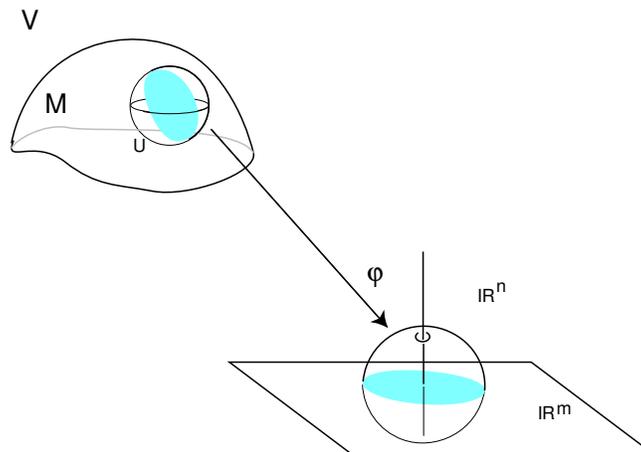
Definition 176. Seien $m, k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Eine Teilmenge $M \subset V$ eines n -dimensionalen Banachraums heißt eine m -dimensionale C^k -(Unter)mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U von p in V und einen C^k -Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ auf eine offene Teilmenge $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

$$M \cap U = \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \phi(U)),$$

d.h.

$$M \cap U = \{x \in U \mid \phi_{m+1}(x) = \dots = \phi_n(x) = 0\}. \quad (73)$$

Dabei betrachten wir also $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ als den Unterraum aller Punkte, deren letzte $n - m$ Koordinaten verschwinden.



Eine große Klasse von Beispielen liefert der folgende

Satz 177 (Gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten). Seien V und W Banachräume endlicher Dimension. Seien $G \subset V$ offen und $g : G \rightarrow W \in C^k$, $k > 0$, vom konstanten Rang r , $0 < r < n := \dim V$ und $q \in g(G)$. Dann ist

$$M := g^{-1}(\{q\})$$

eine $n - r$ -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit.

Im Fall $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist M also eine Niveaukurve bzw. -fläche. Gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten kann man also auch als *Niveaumannigfaltigkeiten* bezeichnen.

Beweis. Sei $p \in M$. Nach dem Rangatz gibt es C^k -Diffeomorphismen

$$\Phi : V \supset U_1 \rightarrow \tilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^n$$

und

$$\Psi : W \supset U_2 \rightarrow \tilde{U}_2 \subset \mathbb{R}^m \quad (m = \dim W)$$

offener Umgebungen von p bzw. $q = g(p)$ auf offene Umgebungen von $\Phi(p) = 0$ in \mathbb{R}^n bzw. von $\Psi(q) = 0$ in \mathbb{R}^m , so dass

$$g(U_1) \subset U_2$$

und

$$\Psi \circ g \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \quad \text{für alle } x \in \tilde{U}_1. \quad (74)$$

Dann gilt für $p' \in U := U_1$

$$\begin{aligned} p' \in M &\iff g(p') = q \\ &\iff \Psi(g(p')) = 0 \\ &\iff \Psi \circ g \circ \Phi^{-1} \circ \Phi(p') = 0 \\ &\stackrel{(74)}{\iff} \Phi_1(p') = \dots = \Phi_r(p') = 0. \end{aligned}$$

Bis auf die Nummerierung der Koordinatenfunktionen ist das die Definitionsgleichung (73). \square

Beispiel 178. Die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \right) - 1$$

hat die Funktionalmatrix

$$g'(x_1, \dots, x_{n+1}) = 2(x_1, \dots, x_{n+1}),$$

und weil \mathbb{R} eindimensional ist, ist $D_x g$ surjektiv für alle $x \neq 0$. Daher ist die Einheitssphäre

$$S^n := \{x \mid g(x) = 0\} = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \mid \sum x_i^2 = 1 \right\}$$

eine n -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} . \square

Beispiel 179. Wir betrachten im n^2 -dimensionalen Vektorraum der quadratischen n -reihigen Matrizen die Menge

$$\mathbf{O}(n) = \{A \in M(n \times n) \mid AA^t = E\}$$

der *orthogonalen Matrizen*. Nach Beispiel 174 ist das eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Die orthogonalen Matrizen bilden außerdem bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Die Gruppenoperationen sind offenbar differenzierbar und $\mathbf{O}(n)$ ist eine sogenannte *Liegruppe*. \square

Definition 180 (Tangentialraum). Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit im n -dimensionalen Banachraum V , sei $p \in M$ und $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem dazu wie in der Definition 176. Dann ist also

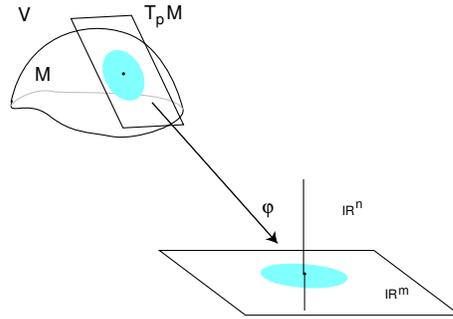
$$M \cap U = \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \phi(U)),$$

und wir definieren den Tangentialraum $T_p M$ an M in p durch

$$T_p M := D_{\phi(p)} \phi^{-1}(\mathbb{R}^m).$$

Das ist also ein m -dimensionaler Vektorraum und eine lineare Approximation für M in der Nähe von p .

Auf dem nebenstehenden Bild ist eigentlich nicht $T_p M$ dargestellt, sondern der nach p verschobene Tangentialraum, weil das unserer anschaulichen Vorstellung eher entspricht. Zum Rechnen ist natürlich der Vektorunterraum $T_p M$ angenehmer als der parallele affine Unterraum.



Damit der Tangentialraum wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass er nicht vom gewählten Koordinatensystem abhängt. Sei also $\tilde{\phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein weiteres Koordinatensystem um p wie in der Definition 176. Wir können o.E. annehmen, dass $U = \tilde{U}$. Weil ϕ und $\tilde{\phi}$ lokale Diffeomorphismen sind, folgt aus $\tilde{\phi}^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \tilde{\phi}(U)) = M \cap U = \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \phi(U))$, dass

$$\tilde{\phi} \circ \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \phi(U)) \subset \mathbb{R}^m$$

und deshalb

$$D_p \tilde{\phi} \circ D_{\phi(p)} \phi^{-1}(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^m,$$

also

$$D_{\phi(p)} \phi^{-1}(\mathbb{R}^m) \subset \left(D_p \tilde{\phi} \right)^{-1}(\mathbb{R}^m) = D_{\tilde{\phi}(p)} (\tilde{\phi}^{-1})(\mathbb{R}^m).$$

Durch Vertauschen von ϕ und $\tilde{\phi}$ ergibt sich die umgekehrte Inklusion, also Gleichheit der Räume.

Beispiel 181. Ist $M = g^{-1}(\{q\}) \subset V$ eine gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeit wie im Satz 177, so gilt für $p \in M$ und ein Koordinatensystem $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um p , dass $M \cap U = \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \phi(U))$, also $g \circ \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \phi(U)) = \{q\}$ und daher

$$D_p g(T_p M) = D_p g(D_{\phi(p)} \phi^{-1}(\mathbb{R}^m)) = 0.$$

Weil der Rang von g aber gerade $\dim V - \dim M$ ist, folgt

$$T_p M = \text{Kern } D_p g = (D_p g)^{-1}(\{0\}).$$

Das ist die linearisierte Version von

$$M = g^{-1}(\{q\}).$$

□

Auf Mannigfaltigkeiten kann man “Analysis treiben”, insbesondere die Differenzierbarkeit von Funktionen erklären. Das Differential an einer Stelle $p \in M$ ist dann eine lineare Abbildung auf dem Tangentialraum $T_p M$.

Wir betrachten dazu nur ein

Beispiel 182 (Extrema auf Mannigfaltigkeiten). Seien $G \subset V$ offen und $M \subset G$ ein Mannigfaltigkeit. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir suchen lokale Extrema der Funktion $f|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $p \in M$ und $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem um p wie in der Mannigfaltigkeitsdefinition, $\phi(p) = 0$. Dann ist $M \cap U = \phi^{-1}(\mathbb{R}^m)$. Hat also $f|_M$ in p ein lokales Extremum, so hat $f \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R}^m \cap \phi(U)}$ in 0 ein lokales Extremum. Deshalb ist

$$D_0(f \circ \phi^{-1})(\mathbb{R}^m) = D_p f(T_p M) = 0. \quad (75)$$

Notwendig für lokale Extrema der Einschränkung $f|_M$ von f ist also das Verschwinden der Einschränkung der Ableitung auf den Tangentialraum an M .

Ist $M = g^{-1}(\{q\})$ gleichungsdefiniert, so bedeutet (75), dass

$$\text{Kern } D_p g \subset \text{Kern } D_p f. \quad (76)$$

□

Die im Beispiel zuletzt betrachtete Situation ist unter dem Namen *Extremwerte unter Nebenbedingungen* berühmt. Sei $g : V \supset G \rightarrow W$ stetig differenzierbar und sei $q \in g(G)$. Sei weiter $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir suchen lokale Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung $g = q$, d.h. lokale Extrema von $f|_{g^{-1}(\{q\})}$. Die Menge

$$\tilde{G} := \{p \in G \mid D_p g \text{ ist surjektiv}\}$$

ist nach Lemma 173 eine offene Teilmenge und $g^{-1}(\{q\}) \cap \tilde{G}$ eine Mannigfaltigkeit M der Dimension $\dim V - \dim W$. Hat $f|_{g^{-1}(\{q\})}$ ein lokales Extremum in $p \in M$, so gilt dort also die notwendige Bedingung (76). Typischerweise ist in den Anwendungen die Menge $g^{-1}(\{q\}) \setminus M$ der sogenannten singulären Punkte eine endliche Punktmenge, die man dann noch gesondert untersuchen muss.

Wir geben noch eine Variante von (76), die für die explizite Berechnung lokaler Extrema unter Nebenbedingungen hilfreich ist:

Es ist ein Standardproblem der lineare Algebra, den Kern einer linearen Abbildung zu bestimmen, also zu prüfen, ob (76) gilt. Aber meistens kennt man p gar nicht, sondern will die Extremalstellen erst finden. Das führt in der Regel auf nicht-lineare Gleichungssysteme, die schwer zu lösen sind. Bei der Bestimmung der Punkte vom zweiten Typ ist aber das folgende Lemma hilfreich:

Lemma 183 (Lagrange-Multiplikatoren). Sei G offen in $V = \mathbb{R}^n$ und seien $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $g = (g_1, \dots, g_m) : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar bzw. stetig differenzierbar.

Dann ist (76) äquivalent dazu, dass es reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gibt (sog. Lagrange-Multiplikatoren), so dass für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\partial_j f(p) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_j g_i(p). \quad (77)$$

Beweis. Bezeichnen wir die Funktionalmatrizen mit $f'(p)$ bzw. $g'(p)$, die Transposition mit $(\dots)^T$ und setzen wir $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, so ist (77) äquivalent zu

$$f'(p) = \lambda g'(p) \quad \text{oder} \quad f'(p)^T = g'(p)^T \lambda^T.$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die erweiterte Matrix $(g'(p)^T, f'(p)^T)$ denselben Rang wie $g'(p)^T$ hat, wenn also die Matrix $\begin{pmatrix} g'(p) \\ f'(p) \end{pmatrix}$ denselben Rang wie die Matrix $g'(p)$ hat. Weil beide dieselbe Anzahl von Spalten haben, ist das genau dann der Fall, wenn die Kerne dieser beiden Matrizen gleiche Dimension haben. Weil aber

$$\text{Kern } g'(p) \supset \text{Kern} \begin{pmatrix} g'(p) \\ f'(p) \end{pmatrix} = \text{Kern } g'(p) \cap \text{Kern } f'(p),$$

ist das genau dann der Fall, wenn $\text{Kern } D_p g \subset \text{Kern } D_p f$. □

Rezept. Zur Bestimmung der Kandidaten p für Stellen lokaler Extrema von

$$f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$$

unter der Nebenbedingungen $g = 0$ mit $g : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ sucht man

1. alle Punkte p mit $g(p) = 0$, in denen $D_p g(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^m$ (singuläre Punkte),
2. alle Lösungen p, λ von

$$g_1(p) = 0, \dots, g_m(p) = 0,$$

$$\partial_j f(p) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_j g_i(p), \quad j = 1, \dots, m.$$

Das sind $m + n$ Gleichungen für die $n + m$ Variablen $p_1, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Die λ 's kann man wieder vergessen.

In typischen Problemen ist $m < n$, und die so gefundene Kandidatenmenge diskret oder sogar endlich.

Beispiel 184. Wir betrachten das Problem,

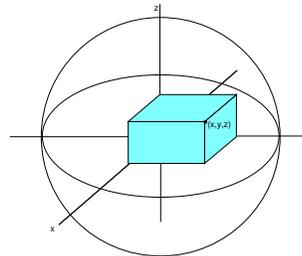
$$f(x, y, z) = xyz$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

zu maximieren, also das größte achsenparallele Quader in der Einheitskugel B zu finden. (Dessen Volumen ist dann $8|xyz|$, vgl. Abbildung.)

Beachten Sie, dass hier die Nebenbedingung durch eine *Ungleichung* gegeben ist. Die Kugel B ist kompakt, und weil f stetig ist, nimmt es auf B sein Maximum an. Das kann nicht in einem inneren Punkt geschehen, weil wir sonst alle Seiten des Quaders ein wenig vergrößern können und immer noch in der Kugel B bleiben:



Wenn $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, ist auch $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 < 1$ und es gibt $\epsilon > 0$ mit

$$(|x| + \epsilon)^2 + (|y| + \epsilon)^2 + (|z| + \epsilon)^2 < 1.$$

Dafür ist aber

$$f(|x| + \epsilon, |y| + \epsilon, |z| + \epsilon) = (|x| + \epsilon)(|y| + \epsilon)(|z| + \epsilon) > |xyz| \geq xyz = f(x, y, z).$$

Ein anderes Argument liefert dasselbe Ergebnis: Läge das Maximum in einem inneren Punkt (x, y, z) so wäre

$$f'(x, y, z) = (yz \ xz \ xy) = (0 \ 0 \ 0).$$

Dann wäre aber $f(x, y, z) = 0$ das Maximum. Jedoch nimmt f offenbar auch positive Werte an.

Also wird das Maximum auf dem Rand angenommen, ist also ein Maximum unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Die Funktionalmatrix

$$g'(x, y, z) = (2x \ 2y \ 2z)$$

ist $\neq (0 \ 0 \ 0)$ für alle Punkte, die die Nebenbedingung erfüllen. Daher gibt es keine singulären Punkte.

Wir lösen nach dem Rezept:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

und

$$yz = \lambda 2x,$$

$$xz = \lambda 2y,$$

$$xy = \lambda 2z.$$

Multipliziert man diese letzteren Gleichungen mit x, y, z , addiert und verwendet die Nebenbedingung, so hat man

$$3xyz = 2\lambda.$$

Einsetzen von λ in die obigen Gleichungen liefert

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}$$

oder zwei Koordinaten sind 0, die dritte dann wegen der Nebenbedingung ± 1 . Die letzteren Punkte liefern aber $f = 0$ und scheiden daher für ein Extremum aus. Mögliche Extrema liegen also in den Punkten

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

mit voneinander unabhängigen Vorzeichen. Die entsprechenden Funktionswerte sind

$$f = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Die positiven sind die Maxima, die negativen die Minima.

□

Als eine weitere Anwendung für die Methode der Lagrange-Multiplikatoren beweisen wir im nächsten Beispiel die früher behauptete Abschätzung der l^p -Normen gegeneinander, vgl. Beispiel 101.

Beispiel 185. Wir erinnern an die Definition der l^p -Norm auf \mathbb{R}^n :

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Wir zeigen: Für $1 \leq p \leq q$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\boxed{\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q.} \quad (78)$$

Wir zeigen das durch vollständige Induktion über n .

$n = 1$. Trivial.

$n - 1 \implies n$. Es genügt zu zeigen: Für alle $x = (x_1, \dots, x_n)$ gilt

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^q = 1 \implies 1 \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Die Voraussetzung impliziert $|x_i| \leq 1$ und deshalb $|x_i|^q \leq |x_i|^p$ für alle i . Also folgt die linke Ungleichung, wir müssen nur noch die rechte beweisen. Offenbar können wir uns dabei auf die kompakte Menge

$$\left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^q = 1 \text{ mit } x_i \geq 0 \text{ für alle } i \right\}$$

beschränken. Ist wenigstens ein $x_i = 0$, so liegt x in einem \mathbb{R}^{n-1} . Nach Induktionsvoraussetzung gilt für solche x also

$$\|x\|_p \leq (n-1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Daher genügt es zu zeigen, dass die differenzierbare Funktion $f(x) := \sum_{i=1}^n x_i^p$ auf der Menge $\{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i > 0\}$ unter der Nebenbedingung

$$g(x) := \sum_{i=1}^n x_i^q = 1$$

das Maximum $\left(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^p$ besitzt. Die notwendige Bedingung für ein Extremum ist die Existenz eines λ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = p x_j^{p-1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = \lambda q x_j^{q-1}$$

oder

$$x_j^{p-q} = \lambda \frac{q}{p}$$

für alle j . Daraus folgt $x_1 = \dots = x_n$, nach der Nebenbedingung also $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n^{1/q}}$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$f(x) = n \frac{1}{n^{p/q}} = n^{1-\frac{p}{q}} = \left(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^p$$

und damit das (eindeutig bestimmte) Maximum von f .

□

5 Differentialgleichungen

5.1 Existenz- und Eindeutigkeit

- Was ist eine Differentialgleichung? Was ist eine Lösung einer Differentialgleichung?
- Die Differentialgleichung $y' = f$ hat für stetiges f auf einem Intervall viele Lösungen, nämlich die Stammfunktionen von f . Durch Vorgabe des Funktionswertes $y(a)$ an einer Stelle wird daraus *eine* eindeutige Lösung ausgewählt. Der Satz von Picard-Lindelöf verallgemeinert das zu einem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für eine große Klasse von Differentialgleichungen.

Definition 186. Seien V ein endlich-dimensionaler Banachraum, $G \subset \mathbb{R} \times V$ offen, und

$$f : G \rightarrow V, (t, x) \mapsto f(t, x)$$

eine Abbildung.

- (i) Die Gleichung

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{79}$$

heißt *eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in expliziter Form*, (kurz *eine Differentialgleichung*) oder ein *dynamisches System*. In physikalischen Anwendungen ist t oft eine Zeitvariable, daher die Namenswahl und die Verwendung des Punktes ' anstelle des Strichs '.

- (ii) Ist f in der ersten Variablen konstant, so kann man f auffassen als eine Abbildung $f : V \supset G \rightarrow V$. In diesem Fall nennt man

$$\dot{x} = f(x) \tag{80}$$

eine *autonome Differentialgleichung* oder ein *autonomes System*.

- (iii) Eine auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit nicht-leerem Inneren $\overset{\circ}{J} \neq \emptyset$ definierte differenzierbare Funktion $x : J \rightarrow V$ heißt *eine Lösung von (79)*, wenn für alle $t \in J$

$$(t, x(t)) \in G \text{ und } \dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

- (iv) Sei $(t_0, x_0) \in G$. Das Gleichungssystem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{81}$$

heißt ein *Anfangswertproblem*.

- (v) Eine Lösung $x : J \rightarrow V$ von (79) heißt *eine Lösung des Anfangswertproblems (81)*, wenn außerdem $t_0 \in J$ und $x(t_0) = x_0$ ist.
- (vi) Das Anfangswertproblem (81) heißt *eindeutig lösbar*, wenn es eine Lösung gibt, und wenn je zwei Lösungen $x_1 : J_1 \rightarrow V$ und $x_2 : J_2 \rightarrow V$ auf $J_1 \cap J_2$ übereinstimmen.

Beispiel 187. Die Bahn $x(t)$ eines Punktes der Masse m in einem zeit-, raum- und geschwindigkeitsabhängigen Kraftfeld im 3-dimensionalen Raum ist gegeben durch das Newtonsche Bewegungsgesetz

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}).$$

Nach Einführung des Impulses $p = m\dot{x}$ als zusätzlicher Variabler nimmt dieses mit $V = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ die Form (79) an:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= m^{-1}p \\ \dot{p} &= F(t, x, m^{-1}p).\end{aligned}$$

□

Im einfachsten Fall hängt f nicht von x ab, sondern ist nur eine Funktion von t . Dann ist das Problem, die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t)$$

zu lösen, einfach(?) das Problem, f zu integrieren. In der Theorie der Differentialgleichungen betrachtet man dieses Problem als „trivial“.

Jenseits von diesem einfachsten Fall gibt es aber nur noch in sehr speziellen Fällen Verfahren zur Lösung einer Differentialgleichung im naiven Sinne. Das bedeutet, dass man im Einzelfall allenfalls mit speziellen Tricks Lösungen finden und/oder mit numerischen Verfahren berechnen kann. In anderen Fällen kann man sich eventuell wichtige Informationen über die Lösungen verschaffen, ohne diese explizit zu kennen. Zum Beispiel sind sicher alle Lösungen von $\dot{x} = 1 + x^2 + x^{14}$ streng monoton wachsend.

Gerade in dieser Situation ist es wichtig zu wissen, *ob* eine Differentialgleichung Lösungen hat und *wieviele* sie gegebenenfalls hat: Dann weiß man wenigstens, wonach man sucht. Eine weitere Hilfe können Informationen über die Struktur der Lösungsmenge liefern. Zum Beispiel kann man bei manchen Differentialgleichungen schon gefundene Lösungen benutzen, um weitere zu finden.

Diese Überlegungen unterstreichen die Bedeutung des folgenden Satzes:

Satz 188 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz). *Sei $f : \mathbb{R} \times V \supset G \rightarrow V$ stetig auf der offenen Menge G , und sei $(t_0, x_0) \in G$. Dann ist das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{82}$$

lösbar. Ist f nach x stetig differenzierbar, so ist die Lösung eindeutig. Insbesondere gibt es eine Lösung auf einem Intervall der Form $J =]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$.

Bemerkung. Der Existenzsatz bei stetiger rechter Seite stammt von Peano, der Existenz- und Eindeutigkeitsatz bei zusätzlicher lokaler Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite bezüglich x von Picard und Lindelöf. Die hier gemachten Voraussetzungen sind etwas zu scharf, dafür bequem zu formulieren. Die Beweisidee werden wir im nächsten Abschnitt für den Spezialfall linearer Differentialgleichungen kennenlernen, den allgemeinen Fall und andere Details überlassen wir der Vorlesung über Gewöhnliche Differentialgleichungen.

(Gegen)beispiele. Die folgenden Beispiele sollen die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf illustrieren.

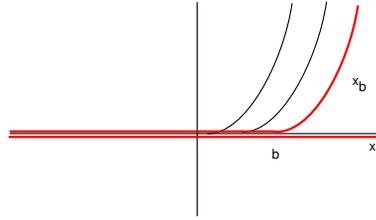
Beispiel 189. Für stetiges f besitzt (82) immer Lösungen (Satz von Peano), aber die sind nicht unbedingt eindeutig.

Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = 0$$

hat unendlich viele Lösungen, z.B. $x = 0$ oder, für $b > 0$, die Lösungen

$$x_b(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq b \\ \frac{1}{27}(t-b)^3 & \text{für } t \geq b. \end{cases}$$



□

Beispiel 190. Für un stetige rechte Seite muß (82) keine Lösung haben. Ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und

$$f(t, x) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases},$$

so hat (82) mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ keine Lösung, weil die Ableitung einer differenzierbaren Funktion keine Sprungstellen hat (Satz von Dini).

□

Der Satz 188 macht keine Aussage über die maximale Größe des Definitionsbereichs einer Lösung.

Beispiel 191. Die Funktion $f(t, x) := 1 + x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert. Die Lösung von

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0$$

existiert aber auf keinem größeren Intervall als $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, wo sie durch $x = \tan$ gegeben ist.

□

5.2 Lineare Differentialgleichungen.

- Lineare Differentialgleichungen sind einfach lineare Gleichungssysteme, wenn auch auf Vektorräumen aus Funktionen. Darum kennen wir die Struktur des Lösungsraumes aus der linearen Algebra: er ist ein affiner Raum, gegeben durch eine konkrete Lösung, plus die Lösung des zugehörigen homogenen Systems, also den Kern der linearen Abbildung, die dem System zugrunde liegt.
- Weil die beteiligten Funktionenräume aber unendliche Dimension haben, sind die Existenz von Lösungen und die Dimension des Kerns nicht so klar. Wir klären das im nächsten Abschnitt.

Definition 192. Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = F(t)x + g(t), \quad (83)$$

wobei $F : J \ni t \mapsto F(t) \in L(V, V)$ und $g : J \rightarrow V$ stetig sind. Jede Lösung x ist dann offenbar stetig differenzierbar. Wir bezeichnen mit $C^k(J, V)$ den Vektorraum der k -mal stetig differenzierbaren Abbildungen von J nach V und definieren

$$L : C^1(J, V) \rightarrow C^0(J, V), x \mapsto \dot{x} - F(t)x.$$

Dann ist L eine lineare Abbildung. Die auf J definierten Lösungen der *zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung*

$$\dot{x} = F(t)x \quad (84)$$

bilden deshalb einen Vektorraum $\text{Kern}(L)$, und alle Lösungen von (83) auf J erhält man, indem man zu einer Lösung \tilde{x} von (83) alle Lösungen der homogenen Gleichung addiert.

Beispiel 193. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 3x_2 + 2 \cos^2 t \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + x_2 + 2 \sin^2 t \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2 \sin^2 t \end{pmatrix}$$

Das zugehörige homogene System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

hat Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

(Nachrechnen! Im Abschnitt 5.2.2 wird erklärt, wie man die finden kann.) Wir zeigen gleich, dass das *alle* Lösungen sind. *Eine* Lösung für das inhomogene System werden wir weiter unten konstruieren, nämlich

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin 2t + \cos 2t - 1 \\ -\sin 2t - \cos 2t - 1 \end{pmatrix}.$$

Die „allgemeine Lösung“ der inhomogenen Gleichung ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin 2t + \cos 2t - 1 \\ -\sin 2t - \cos 2t - 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

□

5.2.1 Der Hauptsatz über lineare Differentialgleichungen

- Wir lernen, wie man eine Differentialgleichung in eine Integralgleichung umschreibt und diese mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes löst.

Satz 194 (Hauptsatz über lineare Differentialgleichungen). Sei $n := \dim V$. Mit den obigen Bezeichnungen gilt für $t_0 \in J, x_0 \in V$:

(i) Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(t)x + g(t) \\ x(t_0) &= \xi_0\end{aligned}\tag{85}$$

hat genau eine auf ganz J definierte Lösung.

(ii) Der Lösungsraum $\text{Kern}(L)$ der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\dot{x} = F(t)x\tag{86}$$

ist n -dimensional.

Funktionen $x_1, \dots, x_n \in \text{Kern}(L)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn ihre Werte $x_1(t), \dots, x_n(t) \in V$ an einer (und dann an jeder) Stelle $t \in J$ linear unabhängig sind. In diesem Fall ist jede Lösung der homogenen Gleichung (86) von der Form

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t), \quad c_i \in \mathbb{R},\tag{87}$$

und für jedes n -Tupel (c_1, \dots, c_n) reeller Zahlen ist das eine Lösung.

(iii) Ist (x_1, \dots, x_n) eine Basis von $\text{Kern } L$, so ist jede Lösung von (85) von der Form

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) x_i(t),\tag{88}$$

mit geeigneten Funktionen $c_1, \dots, c_n \in C^1(J, \mathbb{R})$.

Die Funktion (88) ist genau dann eine Lösung von (85), wenn die c_i die folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\sum_{i=1}^n \dot{c}_i(t) x_i(t) = g(t).\tag{89}$$

Variation der Konstanten. Ist x_1, \dots, x_n eine Basis von $\text{Kern}(L)$, so erhält man durch Lösen des gewöhnlichen linearen Gleichungssystems (89) die $\dot{c}_i(t)$. Anschließende Integration liefert die $c_i(t)$ und damit eine Lösung von (85) in der Form (88). Diese Methode nennt man Variation der Konstanten.

Beweis. Die Idee. Ist $x : J \rightarrow V$ eine Lösung des Anfangswertproblems, so gilt nach Integration der Differentialgleichung:

$$x(t) = \xi_0 + \underbrace{\int_{t_0}^t (F(\tau)x(\tau) + g(\tau))d\tau}_{=: \Phi(x)(t)}. \quad (90)$$

Die Lösung x ist also ein Fixpunkt von Φ . Umgekehrt folgt aus $x = \Phi(x)$ mit stetigem x sofort die (sogar stetige) Differenzierbarkeit von x , die Anfangsbedingung $x(t_0) = \xi_0$ und durch Differenzieren

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + g(t).$$

Wir wollen deshalb Φ als Abbildung auf einem metrischen Raum stetiger Funktionen x auffassen und mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen, dass Φ genau einen Fixpunkt hat. Dann ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar. Überdies liefert der Fixpunktsatz ein Iterationsverfahren zur Berechnung der Lösung.

Dabei braucht man allerdings offenbar das Integral von Funktionen mit Werten in einem Banachraum V mit Norm $\|\cdot\|_V$, das ich hier ebenso wenig erklären will, wie die Formel

$$\left\| \int_{t_0}^t f(t)dt \right\|_V \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(t)\|_V dt \right|,$$

die wir im Beweis benötigen. (Die Absolutstriche auf der rechten Seite braucht man, wenn man auch $t < t_0$ zulassen will.) Sie können sich einfach vorstellen, dass $V = \mathbb{R}^n$ und komponentenweise integrieren, oder im Anhang Genaueres darüber finden.

Der Standardbeweis des Existenz- und Eindeigkeitssatzes von Picard und Lindelöf benutzt dieselbe Idee.

Zu (i). 1. Schritt: Existenz und Eindeutigkeit für kompaktes J . Wir nehmen zunächst an, dass J ein kompaktes Intervall ist. Wir wählen ein $\alpha \geq 0$, über das wir später verfügen wollen, und erklären auf dem Vektorraum $C^0(J, V)$ der auf J stetigen Abbildungen nach $(V, \|\cdot\|)$ eine Norm durch

$$\|x\|_\alpha := \sup_{t \in J} \|x(t)\| e^{-\alpha|t-t_0|}.$$

Offenbar ist $\|x\|_0$ die normale Supremumsnorm. Überlegen Sie, dass man auch für $\alpha > 0$ eine Norm erhält, für die

$$\min_{t \in J} \left(e^{-\alpha|t-t_0|} \right) \|x\|_0 \leq \|x\|_\alpha \leq \max_{t \in J} \left(e^{-\alpha|t-t_0|} \right) \|x\|_0.$$

Die α -Normen sind also zur Supremumsnorm äquivalent, und $(C^0(J, V), \|\cdot\|_\alpha)$ ist mit jeder α -Norm vollständig. Für $x \in C^0(J, V)$ definieren wir nun $\Phi : C^0(J, V) \rightarrow C^0(J, V)$ durch

$$\Phi(x)(t) := \xi_0 + \int_{t_0}^t (F(\tau)x(\tau) + g(\tau))d\tau.$$

Weil F stetig ist, ist $C := \sup_{t \in J} \|F(t)\| < \infty$. Damit gilt für $x, y \in C^0(J, V)$, $t \in J$ und positives α

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t F(\tau)(x(\tau) - y(\tau))d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|F(\tau)(x(\tau) - y(\tau))\| d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t C \|x(\tau) - y(\tau)\| e^{-\alpha|\tau-t_0|} e^{\alpha|\tau-t_0|} d\tau \right| \\ &\leq C \|x - y\|_\alpha \left| \int_{t_0}^t e^{\alpha|\tau-t_0|} d\tau \right| \leq C \|x - y\|_\alpha \frac{e^{\alpha|t-t_0|}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich im Fall $t < t_0$ wie folgt:

$$\left| \int_{t_0}^t e^{\alpha|\tau-t_0|} d\tau \right| = \int_t^{t_0} e^{\alpha(t_0-\tau)} d\tau = e^{\alpha t_0} \left. \frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha} \right|_t^{t_0} = e^{\alpha t_0} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_0}}{\alpha} \leq \frac{e^{\alpha|t-t_0|}}{\alpha}.$$

Den Fall $t_0 \leq t$ können Sie selbst machen. Wir erhalten

$$\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| e^{-\alpha|t-t_0|} \leq \frac{C}{\alpha} \|x - y\|_\alpha$$

und damit

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\alpha \leq \frac{C}{\alpha} \|x - y\|_\alpha.$$

Wählen wir also $\alpha > C$. so ist Φ kontrahierend und besitzt nach dem Banachschen Fixpunktsatz 46 genau einen Fixpunkt $x \in C^0(J, V)$. Also besitzt das Anfangswertproblem genau eine Lösung auf J .

2. Schritt: Existenz und Eindeutigkeit für nicht-kompaktes J . Ist J nicht kompakt, so gibt es eine Folge kompakter Intervalle $(J_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$t_0 \in J_0 \subset J_1 \subset \dots$$

und

$$J = \bigcup_{i=0}^{\infty} J_i.$$

Dazu gibt es eine Folge eindeutig bestimmter Lösungen $x_i : J_i \rightarrow V$ des Anfangswertproblems, für die also gilt $x_{i+1}|_{J_i} = x_i$. Setzt man deshalb $x(t) := x_i(t)$, falls $t \in J_i$, so definiert das eine Funktion $x : J \rightarrow V$, die das Anfangswertproblem löst.

Sind schließlich $x_1, x_2 : J \rightarrow V$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems und ist $t \in J \setminus \{t_0\}$, so sei I das kompakte Intervall mit Endpunkten t_0 und t . Dann sind $x_1|_I$ und $x_2|_I$ Lösungen des Anfangswertproblems, nach dem 1. Schritt ist also $x_1|_I = x_2|_I$ und insbesondere $x_1(t) = x_2(t)$. Daraus folgt die Eindeutigkeit.

Zu (ii). Sei $t_1 \in J$. Die Abbildung

$$\text{Kern(L)} \rightarrow V, x \mapsto x(t_1)$$

ist linear. Weil das Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung $x(t_1) = x_1$ genau eine Lösung hat, ist diese Abbildung also ein Isomorphismus. Daraus folgt die Behauptung.

Zu (iii). Sei x_1, \dots, x_n eine Basis von Kern(L) und seien $c_1, \dots, c_n \in C^1(J, V)$. Wir setzen

$$x(t) = \sum c_i(t) x_i(t).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{x} - F(t)x(t) &= \frac{d}{dt} \sum c_i(t) x_i(t) - F(t) \sum c_i(t) x_i(t) \\ &= \sum \dot{c}_i x_i + \sum c_i(t) (\dot{x}_i - F(t)x_i(t)) \\ &= \sum \dot{c}_i x_i. \end{aligned}$$

Also ist x genau dann eine Lösung von $\dot{x} = F(t)x + g(t)$, wenn für alle $t \in J$

$$\sum \dot{c}_i(t) x_i(t) = g(t).$$

Umgekehrt sind für jedes $t \in J$ die Vektoren $x_1(t), \dots, x_n(t) \in V$ linear unabhängig, und daher gibt es eindeutig bestimmte \dot{c}_i , die dieses inhomogene lineare Gleichungssystem lösen. Schreibt man das Gleichungssystem in Koordinaten aus, so ist die Lösung eine rationale Funktion in den Koeffizienten. Die sind aber stetig, und daher sind auch die \dot{c}_i stetige Funktionen. Durch Integration findet man C^1 -Funktionen c_i und damit eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Jede andere unterscheidet sich davon nur durch eine Linearkombination der x_i mit konstanten Koeffizienten, ist also auch von der Form $x(t) = \sum c_i(t)x_i(t)$. \square

Bemerkung. Nach dem Hauptsatz ist das Problem, eine lineare Differentialgleichung zu lösen, reduziert auf den homogenen Fall. Wenn $F(t) = A \in L(V, V)$ unabhängig von t ist, spricht man von einer *linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*. In diesem Fall kann man eine Lösungsbasis für die homogene Gleichung mit Methoden der linearen Algebra bestimmen, vgl. den nächsten Abschnitt 5.2.2.

Beispiel 195. Wir kommen zurück auf das Beispiel 193. Die Lösungen

$$\begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

der homogenen Gleichung sind linear unabhängig, weil sie an der Stelle 0 linear unabhängig sind. Sie bilden also eine Lösungsbasis für die homogene Differentialgleichung.

Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$x_s(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2 \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Lösen liefert

$$\dot{c}_1(t) = e^{-4t}, \quad \dot{c}_2(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t)e^{2t} = \cos 2t e^{2t},$$

und Integration

$$c_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}, \quad c_2(t) = \frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t)e^{2t}.$$

Damit erhalten wir die früher schon angegebene Lösung

$$\begin{aligned} x_s(t) &= -\frac{1}{4}e^{-4t} \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t)e^{2t} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin 2t + \cos 2t - 1 \\ -\sin 2t - \cos 2t - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

der inhomogenen Gleichung. \square

5.2.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

- Homogene lineare Differentialgleichungen mit von t unabhängiger rechter Seite kann man explizit lösen.
- Wir lernen im Vorübergehen die Matrix-Exponential-Lösung kennen und betrachten dann genauer die Eigenwertmethode zur Lösung.
- Diese ist besonders einfach für diagonalisierbare Endomorphismen, aber wir diskutieren auch, wie man den allgemeinen Fall bewältigt.

Nach dem vorangehenden Abschnitt gibt es mit der Variation der Konstanten eine Methode zur Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen, wenn man die *zugehörige homogene* Differentialgleichung $\dot{x} = F(t)x$ vollständig gelöst hat. Für das letztere Problem aber gibt es keine allgemeines Verfahren. Nur im Fall konstanter Funktion F kann man eine Lösung explizit hinschreiben. Das wollen wir jetzt erläutern.

Im Fall $V = \mathbb{R}$ hat die Differentialgleichung

$$\dot{x} = ax$$

die Lösungen $x(t) = x(0)\exp(ta)$. Ist nun V ein endlich-dimensionaler Banachraum und $F(t) = A$ eine konstante lineare Abbildung von V in sich, so kann man entsprechend den Ansatz $x(t) = \exp(tA)$ machen. Aber was soll $\exp(tA)$ überhaupt bedeuten?

Nun, Endomorphismen (quadratische Matrizen) kann man miteinander multiplizieren und damit sind die Potenzen A^k definiert. Dann ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Folge $\left(\sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} A^j\right)_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert und konvergent im Banachraum $L(V, V)$, eine konvergente Potenzreihe in $L(V, V)$ gewissermaßen⁶. Sie definiert eine differenzierbare Funktion

$$X : \mathbb{R} \rightarrow L(V, V), t \mapsto \exp(tA)$$

mit $\dot{X} = AX$. Und für jeden Vektor $v \in V$ ist dann nach der Produktregel

$$x : t \mapsto X(t)v = \exp(tA)v$$

eine Lösung von

$$\dot{x} = Ax. \tag{91}$$

Mit einer Basis v_1, \dots, v_n von V erhält man eine Basis

$$x_1(t) = \exp(tA)v_1, \dots, x_n(t) = \exp(tA)v_n$$

für den Lösungsraum von (91), weil die Funktionswerte für $t = 0$ linear unabhängig sind.

Die Berechnung der verallgemeinerten Exponentialfunktion ist natürlich nicht so leicht ist, aber die Lineare Algebra bietet Hilfe. Wir bezeichnen mit $E : V \rightarrow V$ im folgenden die Identität bzw. die Einheitsmatrix. Wenn das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda E)$ von A in Linearfaktoren zerfällt, besitzt A eine *Jordansche Normalform*, was in anderen Worten bedeutet: Es gibt eine Basis v_1, \dots, v_n von V aus *Hauptvektoren* von A . Zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt es einen Eigenwert λ_i und ein $k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass

$$(A - \lambda_i E)^{k_i} v_i = 0.$$

Im Idealfall ist $k_i = 1$ für alle i , d.h. A ist diagonalisierbar und die v_i bilden eine Basis aus *Eigenvektoren*.

⁶Diese Konstruktion ist nicht ganz ohne: Weil die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, ist zum Beispiel meistens $\exp(A + B) \neq \exp(A)\exp(B)$. Gleichheit gilt allerdings, wenn $AB = BA$.

Nun kann man zeigen:

$$\exp(tA) = \exp(t\lambda E + t(A - \lambda E)) = \exp(t\lambda E) \exp(t(A - \lambda E)) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j.$$

Insbesondere ist also

$$x_i(t) = \exp(tA)v_i = e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j v_i,$$

und man bekommt eine Lösungsbasis mittels endlicher Summen. Ist A diagonalisierbar und v_1, \dots, v_n eine Basis aus Eigenvektoren mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist also

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, x_n(t) = e^{\lambda_n t} v_n$$

eine Lösungsbasis für $\dot{x} = Ax$.

In den vorstehenden Überlegungen sind wir mit vektorwertigen Potenzreihen relativ großzügig umgegangen. Wir geben nun einen strengen Beweis für den folgenden

Satz 196. Seien $A \in L(V, V)$ ein Endomorphismus, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $v \in V$ ein Hauptvektor der Stufe k von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$(A - \lambda E)^k v = 0.$$

Dann ist

$$x(t) := e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j v$$

eine Lösung von $\dot{x} = Ax$. Diese Lösung ist also von der Form $e^{\lambda t} v(t)$, wobei $v(t)$ ein Polynom in t mit vektoriellen Koeffizienten ist.

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$x(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j v,$$

wobei wir jetzt bis k summieren. Das macht ja keinen Unterschied. Wir finden

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda x(t) + e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda E)^j v \\ &= \lambda x(t) + e^{\lambda t} (A - \lambda E) \sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda E)^{j-1} v \\ &= \lambda x(t) + (A - \lambda E) e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j v \\ &= Ax(t). \end{aligned}$$

□

Korollar 197. *Besitzt V eine Basis v_1, \dots, v_n aus Hauptvektoren von $A \in L(V, V)$ der Stufen k_1, \dots, k_n und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so liefern die Funktionen*

$$x_i(t) := e^{\lambda_i t} \left(\sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_i E)^j v_i \right), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

eine Lösungsbasis von $\dot{x} = Ax$.

Nach linearer Algebra ist die Voraussetzung dieses Satzes genau dann erfüllt, wenn A eine Jordansche Normalform besitzt, d.h. wenn das charakteristische Polynom von A in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Nach dem Satz sind die x_i Lösungen, und wegen $x_i(0) = v_i$ sind sie linear unabhängig. \square

Beispiel 198. Vgl. Beispiel 193. Die Matrix der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte 4 und -2 mit Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Deshalb ist

$$x_1(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Lösungsbasis. \square

In diesem Beispiel hat man eine Basis aus Eigenvektoren. Braucht man aber Hauptvektoren höherer Stufe, so wird die Sache mühsam, denn man muß die Matrixpotenzen bis $(A - \lambda E)^k$ bilden. Einfacher geht es bei doppelten Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. bei Eigenwerten der algebraischen Vielfachheit 2 und der geometrischen Vielfachheit 1:

Beispiel 199. Wir betrachten $\dot{x} = Ax$. Sei λ ein Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit 2 und der geometrischen Vielfachheit 1, d.h. λ ist eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms, aber $\dim \text{Kern}(A - \lambda E) = 1$. Sei v_1 einen Eigenvektor zu λ . Dann gibt es zu λ einen von v_1 linear unabhängigen Hauptvektor v_2 . Für den gilt

$$0 = (A - \lambda E)^2 v_2 = (A - \lambda E)((A - \lambda E)v_2) = A(A - \lambda E)v_2 - \lambda(A - \lambda E)v_2.$$

Das heißt, $(A - \lambda E)v_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . (Beachte $(A - \lambda E)v_2 \neq 0$, sonst wäre v_2 ja ein von v_1 linear unabhängiger Eigenvektor.) Damit ist $(A - \lambda E)v_2 = av_1$ mit $a \neq 0$ und

$$(A - \lambda E) \left(\frac{1}{a} v_2 \right) = v_1.$$

Weil es auf Vielfache $\neq 0$ bei Eigen- und Hauptvektoren nicht ankommt, können wir den Faktor $1/a$ vergessen.

Fazit: Das Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)v_2 = v_1$$

ist lösbar und liefert uns „den“ fehlenden Hauptvektor zum Eigenwert λ . Die zugehörige Lösung ist dann

$$x(t) = e^{\lambda t} (v_2 + tv_1).$$

\square

Beispiel 200. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Die Gleichung

$$(A - 1E)v = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert einen linear unabhängigen Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1. Daher liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

einen Hauptvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1, der offenbar von dem Eigenvektor linear unabhängig ist. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = Ax$$

hat in diesem Fall eine Lösungsbasis aus

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und einer weiteren Lösung $x_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2.

□

Beispiel 201. Die Voraussetzungen des Beispiels 199 sind nötig: Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3.$$

Also ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 3. Die zugehörige Eigenvektorgleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

hat Rang 1. Sie liefert also zwei linear unabhängige Eigenvektoren, zum Beispiel

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aber keines der beiden Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist lösbar! Um den fehlenden Hauptvektor zu finden muss man also eine von v_1 und v_2 unabhängige Lösung v_3 von $(A - 1E)^2 v = 0$ finden. In diesem Fall ist das trivial, weil die algebraische Vielfachheit 3 ist, die Hauptvektoren also den ganzen \mathbb{R}^3 aufspannen. Man kann

deshalb *irgendeinen* von v_1 und v_2 unabhängigen Vektor v_3 wählen, z.B. $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Eine Lösungsbasis von $\dot{x} = Ax$ ist in diesem Fall also

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

□

Komplexe Eigenwerte. Um Probleme mit der abstrakten Komplexifizierung reeller Vektorräume zu vermeiden, beschränken wir uns im folgenden auf $V = \mathbb{R}^n$ und Matrizen A .

Bekanntlich hat nicht jede reelle Matrix eine reelle Jordansche Normalform, d.h. der \mathbb{R}^n besitzt möglicherweise keine Basis aus Hauptvektoren. Wie kommt man dann zu einer Lösungsbasis von $\dot{x} = Ax$?

Zunächst kann man die obigen Überlegungen ohne wesentliche Änderung auf komplexwertige Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ verallgemeinern. Man stellt fest, dass das Anfangswertproblem eindeutig lösbar und der Lösungsraum von $\dot{x} = Ax$ ein n -dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum ist. Und weil über \mathbb{C} jede Matrix eine Jordansche Normalform besitzt, liefert die obige Theorie also eine Methode zur Gewinnung einer Lösungsbasis für komplexe homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten.

Wenn man aber von einem reellen Problem ausgeht, möchte man gern eine reelle Lösungsbasis haben. Seien also die Matrix A reell und $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine komplexe Lösung. Wir bezeichnen mit $\bar{}$ die komponentenweise komplexe Konjugation als Abbildung von \mathbb{C}^n nach \mathbb{C}^n . Weil diese Abbildung reell linear ist, folgt aus $\dot{x}(t) = Ax(t)$, dass

$$\dot{\bar{x}}(t) = \overline{\dot{x}(t)} = \overline{Ax(t)} = A\bar{x}(t)$$

ist. Mit jeder komplexen Lösung ist also auch die dazu konjugierte Funktion eine Lösung. Weil Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, erhält man aus jeder komplexen Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ zwei reelle

$$x_{re}(t) := \frac{1}{2}(x(t) + \bar{x}(t)), \quad x_{im}(t) := \frac{1}{2i}(x(t) - \bar{x}(t)).$$

Die komplexen Lösungen $x(t)$ und $\bar{x}(t)$ liefern natürlich dieselben reellen Lösungen, deshalb kann man von jedem konjugiert-komplexen Paar eine Lösung ignorieren. Ist schließlich $x(t)$ eine komplexe Lösung mit reellem Anfangswert $x(t_0) = \xi_0$, so ist x_{re} eine reelle Lösung

mit demselben Anfangswert, x_{im} eine mit Anfangswert $x_{im}(t_0) = 0$, also $x_{im} = 0$. Daher ist $x = x_{re}$ überhaupt reell, und man bekommt auf diese Weise Lösungen für alle reellen Anfangswerte, also alle reellen Lösungen.

Wir betrachten das noch genauer. Ist u_1, \dots, u_n eine Basis des \mathbb{C}^n und $u_k = v_k + iw_k$ mit $u_k, w_k \in \mathbb{R}^n$ und ist weiter $\xi \in \mathbb{R}^n$, so gibt es $\alpha_k = \beta_k + i\gamma_k$ mit $\beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$\xi = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^n (\beta_k v_k - \gamma_k w_k) + i \sum_{k=1}^n (\beta_k w_k + \gamma_k v_k) = \sum_{k=1}^n (\beta_k v_k - \gamma_k w_k).$$

Die Real- und Imaginärteile der u_k bilden also ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n . Berechnet man nun die Eigenwerte des reellen A und dazu mittels Hauptvektoren eine Lösungsbasis x_1, \dots, x_n für den Raum der komplexen Lösungen von $\dot{x} = Ax$, so kann man sich bei konjugiert-komplexen Eigenwerten jeweils auf einen beschränken und für den dazu konjugierten die konjugierten Lösungen verwenden. Spaltet man diese in Real- und Imaginärteil und läßt die doppelt auftretenden Lösungen fort, so erhält man n reelle Lösungen x_{r1}, \dots, x_{rn} , deren Werte $x_{r1}(0), \dots, x_{rn}(0)$ nach der vorstehenden Überlegung den \mathbb{R}^n erzeugen und die deshalb linear unabhängig sind.

Wir fassen zusammen:

Gesucht eine reelle Lösungsbasis für $\dot{x} = Ax$ mit reeller $n \times n$ -Matrix A .

1. Berechne die Eigenwerte von A , also die reellen und komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E)$. Von den Paaren konjugiert-komplexer Eigenwerten lasse jeweils einen weg.
2. Zu jedem der verbleibenden Eigenwerte λ der algebraischen Vielfachheit k berechne k linear unabhängige Hauptvektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ als Lösungen von $(A - \lambda E)^k v = 0$. Sie liefern k Lösungen
$$x_{\lambda, \kappa}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j v_\kappa, \quad \kappa \in \{1, \dots, k\}.$$
3. Die entstehenden nicht-reellen Lösungen zerlege in Real- und Imaginärteil. Das liefert insgesamt n linear unabhängige reelle Lösungen und damit eine reelle Lösungsbasis.

Wir schließen mit einem einfachen

Beispiel 202. Wir betrachten $\dot{x} = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 5 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = (\lambda - (1 + 3i))(\lambda - (1 - 3i)).$$

Berechnung eines Eigenvektors zu $\lambda = 1 + 3i$:

$$\begin{pmatrix} -1 - 3i & 5 \\ -2 & 1 - 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix}$$

Das liefert die komplexe Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} \\ &= e^t (\cos 3t + i \sin 3t) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t - 3 \sin 3t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} 5 \sin 3t \\ 3 \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und die reellen Lösungen

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t - 3 \sin 3t \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 5 \sin 3t \\ 3 \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix},$$

die offenbar linear unabhängig sind.

□

5.2.3 Skalare lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.

- Skalare lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung treten sehr häufig auf, zum Beispiel in vielen grundlegenden Problemen der Mechanik oder Elektrotechnik.
- Wir wissen schon, wie man sie umschreiben kann in ein lineares System erster Ordnung, aber hier lernen wir, wie man diesen Aufwand vermeiden und direkt Lösungen finden kann.

Problem: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $f_1, \dots, f_n, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir suchen Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$x^{(n)} + f_1(t)x^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(t)\dot{x} + f_n(t)x = g(t), \quad (92)$$

gegebenenfalls mit den Anfangsbedingungen in $t_0 \in J$

$$x(t_0) = \xi_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}. \quad (93)$$

Wir haben in der Einleitung zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen schon am Beispiel der Newtonschen Bewegungsgleichung demonstriert, wie man die Differentialgleichung höherer Ordnung auf eine erster Ordnung in einem höher-dimensionalen Raum übersetzt. Wir wenden das auf das vorstehende Problem an.

Ist x eine Lösung von (92), (93), und setzt man $y_1 = x, y_2 = \dot{x}, \dots, y_n = x^{(n-1)}$, so folgt mit

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -f_n & -f_{n-1} & \dots & -f_1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad y(t_0) = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix} \quad (94)$$

Ist umgekehrt $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (94), so ist $x := y_1$ eine solche von (92), (93).

Damit folgt aus dem Hauptsatz 194 über lineare Differentialgleichungen:

Satz 203. *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$x^{(n)} + f_1(t)x^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(t)\dot{x} + f_n(t)x = g(t), \quad (95)$$

$$x(t_0) = \xi_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}. \quad (96)$$

mit stetigen Funktionen $f_1, \dots, f_n, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall J um t_0 und $\xi_0, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$

Dann gilt

(i) *Das Anfangswertproblem hat genau eine auf ganz J definierte Lösung.*

(ii) *Der Lösungsraum der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung*

$$x^{(n)} + f_1(t)x^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(t)\dot{x} + f_n(t)x = 0 \quad (97)$$

ist ein n -dimensionaler Untervektorraum von $C^n(J, \mathbb{R})$.

Satz 203 (Fortsetzung). (iii) Lösungen x_1, \dots, x_n von (97) sind genau dann linear unabhängig, wenn die Spaltenvektoren der sogenannten Wronskimatrix

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

an einer Stelle (und dann an allen Stellen) $t \in J$ linear unabhängig sind.

(iv) (Variation der Konstanten) Hat man eine Lösungsbasis x_1, \dots, x_n für die homogene Gleichung (97), so erhält man alle Lösungen der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)x_i(t),$$

wo die Funktionen $c_i \in C^1(J, \mathbb{R})$ bis auf Konstanten bestimmt sind durch ein lineares Gleichungssystem für ihre Ableitungen:

$$W(t) \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 204. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 6\dot{x} + 8x &= 64t^2 \\ x(0) &= 5, \dot{x}(0) = 0 \end{aligned}$$

mit den geschenkten Lösungen $x_1(t) = e^{2t}, x_2(t) = e^{4t}$ für die zugehörige homogene Gleichung.

0. Schritt. Die Wronskimatrix der beiden Lösungen in $t=0$ ist

$$W(0) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ 2e^{2t} & 4e^{4t} \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Offenbar sind die Spalten linear unabhängig und x_1, x_2 bilden daher eine Basis für den Lösungsraum der homogenen Gleichung.

1. Schritt. Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ 2e^{2t} & 4e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 64t^2 \end{pmatrix}$$

liefert

$$\dot{c}_1(t) = -32t^2e^{-2t}, \quad \dot{c}_2(t) = 32t^2e^{-4t}.$$

2. Schritt. Integrieren mit partieller Integration oder <http://integrals.wolfram.com/> liefert

$$c_1(t) = 8e^{-2t}(1 + 2t + 2t^2), \quad c_2(t) = -e^{-4t}(1 + 4t + 8t^2).$$

3. Schritt. Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist also

$$x(t) = 8(1 + 2t + 2t^2) - (1 + 4t + 8t^2) + a_1e^{2t} + a_2e^{4t} = (7 + 12t + 8t^2) + a_1e^{2t} + a_2e^{4t}$$

mit beliebigen Konstanten $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

4. Schritt. Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen, berechnen wir

$$\begin{aligned}x(0) &= 7 + a_1 + a_2 = 5 \\ \dot{x}(0) &= 12 + 2a_1 + 4a_2 = 0\end{aligned}$$

und erhalten aus diesem linearen Gleichungssystem $a_1 = 2, a_2 = -4$. Damit ist die gesuchte Lösung

$$x(t) = 7 + 12t + 8t^2 + 2e^{2t} - 4e^{4t}.$$

Bemerkung. Variation der Konstanten *ein* Algorithmus zur Ermittlung einer Lösung für die inhomogene Gleichung. Er erfordert Lösen eines linearen Gleichungssystems und Integrationen. Nicht selten kann man durch genaues Hinsehen (oder Erfahrung) auch eine Lösung für die inhomogene Gleichung leichter finden, eventuell sogar einfach hinschreiben. Im obigen Fall liefert die linke Seite der Differentialgleichung, weil die Koeffizienten konstant sind, für jedes eingesetzte Polynom $x(t)$ wieder ein Polynom, und zwar vom gleichen Grad. Weil aber auch die rechte Seite ein Polynom von zweitem Grad ist, kann man versuchen, einfach

$$x(t) = A + Bt + Ct^2$$

anzusetzen und die Koeffizienten (durch Koeffizientenvergleich) so zu bestimmen, dass t^2 herauskommt. Das ist im obigen Fall wesentlich einfacher als die Variation der Konstanten. Probieren Sie es!

□

Wir wollen nun zeigen, wie man eine Lösungsbasis für eine lineare homogene Differentialgleichung finden kann, wenn ihre Koeffizienten *konstant* sind. Wie im Fall der Systeme ist es günstig, dabei auch komplexwertige Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zuzulassen und sich später zu überlegen, wie man daraus wieder reellwertige gewinnen kann.

Satz 205. *Wir betrachten also auf $J = \mathbb{R}$ die homogene lineare Differentialgleichung*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = 0 \tag{98}$$

mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

(i) *Eine Basis für den Unterraum aller komplexwertigen Lösungen von (98) in $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist gegeben durch die Funktionen*

$$x_{ij}(t) = t^j e^{t\lambda_i}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq k_i - 1.$$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Nullstellen des sogenannten charakteristischen Polynoms

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

der Differentialgleichung und k_i ist die Vielfachheit der Nullstelle λ_i .

(ii) *Sind die a_i reell und besitzt $\chi(\lambda)$ nicht-reelle Nullstellen, so treten diese in konjugierten Paaren gleicher Multiplizität auf. Ist $\lambda = \alpha \pm i\omega$ ein solches Paar mit Multiplizität k , so erhält man daraus reelle linear unabhängige Lösungen*

$$t^j e^{\alpha t} \cos(\omega t) \text{ und } t^j e^{\alpha t} \sin(\omega t), \quad 0 \leq j \leq k - 1.$$

Auf diese Weise erhält man eine Basis des reellen Lösungsraumes von (98).

Wir brauchen einige Vorbereitungen für den Beweis. Wenn der Satz richtig ist, sind alle Lösungen beliebig oft differenzierbar. Wir suchen unsere Lösungen deshalb gleich im Raum

$$C^\infty := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

und schreiben D^k zur Abkürzung für $\frac{d^k}{dt^k}$. Für ein Polynom

$$\phi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

mit möglicherweise komplexen Koeffizienten a_k definieren wir

$$\phi(D) \in L(C^\infty, C^\infty)$$

durch

$$\begin{aligned} \phi(D)x &= a_0D^n x + a_1D^{n-1}x + \dots + a_{n-1}Dx + a_nx \\ &= a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{x} + a_nx. \end{aligned}$$

Lemma 206. (i) Die "Einsetzung" $\phi \mapsto \phi(D)$ ist ein Algebra-Homomorphismus von der Algebra der Polynome in die Algebra $L(C^\infty, C^\infty)$. Insbesondere gilt für Polynome $\phi(\lambda), \psi(\lambda)$ und $\rho(\lambda) = \phi(\lambda)\psi(\lambda)$, dass

$$\rho(D) = \phi(D)\psi(D) : C^\infty \rightarrow C^\infty.$$

Daher ist $\phi(D)\psi(D) = \psi(D)\phi(D)$.

(ii) Seien $p \neq 0$ ein Polynom, $k \in \mathbb{N}$ und $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.

Wir setzen D in das Polynom $\phi(\lambda) := (\lambda - \mu)^k$ ein. Dann ist

$$(D - \mu)^k (p(t)e^{\nu t}) = q(t)e^{\nu t}$$

mit einem Polynom q , für das gilt:

$$\begin{aligned} \mu \neq \nu &\implies \text{Grad } q = \text{Grad } p, \\ \mu = \nu &\implies \text{Grad } q = (\text{Grad } p) - k, \end{aligned}$$

Dabei soll $\text{Grad } q < 0$ bedeuten, dass $q = 0$.

Beweis des Lemmas. Zu (i). Seien $\phi(\lambda) = \sum a_i\lambda^i$, $\psi(\lambda) = \sum b_j\lambda^j$. Dann ist

$$\phi(D)\psi(D)x = \phi(D) \sum b_jx^{(j)} = \sum b_j \sum a_ix^{(i+j)}.$$

Zu (ii). Vollständige Induktion über k . Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen.

$k \rightarrow (k + 1)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$(D - \mu)^k (p(t)e^{\nu t}) = q(t)e^{\nu t}$$

mit einem Polynom $q(t)$ vom im Satz beschriebenen Grad. Dann gilt aber

$$(D - \mu)^{k+1} (p(t)e^{\nu t}) = (D - \mu)q(t)e^{\nu t} = (\dot{q}(t) + \nu q(t) - \mu q(t))e^{\nu t}.$$

Ist $\mu = \nu$, so verkleinert sich der Grad des Polynom-Faktors vor $e^{\nu t}$ um 1, andernfalls bleibt er gleich. □

Beweis des Satzes. Zu (i). Ist $\chi(\lambda)$ das im Satz definierte charakteristische Polynom, so ist die Differentialgleichung gegeben durch

$$\chi(D)x = 0.$$

Andrerseits ist nach dem Lemma für $j < k_i$

$$\begin{aligned} \chi(D)x_{ij}(t) &= (D - \lambda_1)^{k_1} \dots (D - \lambda_m)^{k_m} (t^j e^{\lambda_i t}) \\ &= (D - \lambda_1)^{k_1} \dots (D - \lambda_{i-1})^{k_{i-1}} (D - \lambda_{i+1})^{k_{i+1}} \dots (D - \lambda_m)^{k_m} (D - \lambda_i)^{k_i} (t^j e^{\lambda_i t}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher sind die angegebenen Funktionen n Lösungen der Differentialgleichung. Wir zeigen ihre lineare Unabhängigkeit. Sei

$$0 = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij}(t) = \sum_i p_i(t) e^{\lambda_i t}$$

für alle t . Dabei sind die $p_i(t)$ Polynome vom Grad $\leq k_i - 1$, und wir müssen zeigen, dass sie alle 0 sind. Aber nach dem Lemma ist

$$0 = (D - \lambda_2)^{k_2} \dots (D - \lambda_m)^{k_m} \left(\sum_i p_i(t) e^{\lambda_i t} \right) = q_1(t) e^{\lambda_1 t}$$

mit einem Polynom q_1 vom selben Grad wie p_1 . Also folgt $p_1 = 0$, und entsprechend für die anderen $p_i(t)$.

Zu (ii). Nach der Eulerschen Identität ist

$$\begin{aligned} t^j e^{\alpha t} \cos \omega t &= \frac{1}{2} t^j e^{(\alpha+i\omega)t} + \frac{1}{2} t^j e^{(\alpha-i\omega)t}, \\ t^j e^{\alpha t} \sin \omega t &= \frac{1}{2i} t^j e^{(\alpha+i\omega)t} - \frac{1}{2i} t^j e^{(\alpha-i\omega)t}. \end{aligned}$$

Daher sind die $\cos - \sin$ -Lösungen als Linearkombination (mit komplexen Koeffizienten) von Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung auch Lösungen. Weil man aus ihnen die komplexe Lösungsbasis linear kombinieren kann, bilden sie ein Erzeugendensystem für den komplexen Lösungsraum mit n Elementen. Daher sind sie linear unabhängig über den komplexen Zahlen, also erst recht über den reellen Zahlen. \square

Beispiel 207. Die charakteristische Gleichung von

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + ax = 0$$

hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-a}$. Für $a = 8, 9, 10$ erhält man als Lösungsbasen also

$$x_1(t) = e^{2t}, x_2 = e^{4t}$$

bzw.

$$x_1(t) = e^{3t}, x_2 = te^{3t}$$

bzw.

$$x_1(t) = e^{(3+i)t}, x_2 = e^{(3-i)t}.$$

Im letzteren Fall ist eine reelle Lösungsbasis gegeben durch

$$x_1(t) = e^{3t} \cos t, x_2 = e^{3t} \sin t.$$

\square

6 Anhang

6.1 Hauptminorenkriterium

Wir geben einen Beweis (von Udo Jeromin) für dieses Kriterium. Vgl. auch *M. Köcher, Lineare Algebra und analytische Geometrie, Springer*.

Hauptminorenkriterium. Eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind. Dabei sind Hauptminoren die Determinanten der Matrizen

$$A_k := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$$

A ist genau dann negativ definit, wenn die Hauptminoren wechselndes Vorzeichen beginnend mit $a_{11} < 0$ haben.

Beweis. Die Behauptung über negative Definitheit folgt aus der über positive Definitheit durch Betrachtung von $-A$. Wir beweisen also nur den ersten Teil des Kriteriums.

Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen wir das kanonische Skalarprodukt der Euklidischen Räume. A ist positiv definit, wenn gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}^n (x \neq 0 \implies \langle Ax, x \rangle > 0).$$

Wir benutzen das obige Zitat aus der linearen Algebra

$$A \text{ positiv definit} \implies \text{alle Eigenwerte positiv} \implies \det A > 0$$

und kommen zum Beweis des Lemmas:

Beweis von \implies .

$$\text{Für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \text{ mit } k \leq n \text{ sei } x' := \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ist A positiv definit, so gilt für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$:

$$0 < \langle Ax', x' \rangle = \langle A_k x, x \rangle.$$

Also sind alle A_k ebenfalls positiv definit und haben daher positive Determinante.

Beweis von \impliedby . Seien nun umgekehrt alle $\det A_k$ positiv. Wir zeigen durch vollständige Induktion über n , dass A positiv definit ist.

Der Beweis benutzt folgende Idee, um die Determinante der ganzen Matrix mit der eines Hauptminors in Verbindung zu bringen:

Ist $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ eine Blockmatrix mit quadratischem A und D , und ist A invertierbar, so gilt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Das kann man im Kopf nachrechnen. Insbesondere ist dann

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

$n = 1$. Nichts zu zeigen.

$(n - 1) \rightarrow n$. Wir nehmen also an, der Satz sei für $n - 1$ bereits bewiesen. Dann ist A_{n-1} positiv definit und insbesondere invertierbar.

1. *Schritt*. Für $y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ ist nach Voraussetzung

$$\left\langle A \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A_{n-1}y, y \rangle > 0.$$

2. *Schritt*. Es genügt zu zeigen, dass

$$f(y) := \left\langle A \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle > 0 \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Wegen $\langle A(tx), tx \rangle = t^2 \langle Ax, x \rangle$ folgt dann

$$\langle Ax, x \rangle > 0 \text{ für alle } x \text{ mit } x_n \neq 0,$$

und mit dem ersten Schritt ergibt sich daraus die Behauptung. Schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & a \\ a^T & \alpha \end{pmatrix}$$

mit $a = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \end{pmatrix}$ und $\alpha = a_{nn}$, so wird

$$f(y) = \langle A_{n-1}y, y \rangle + 2 \langle a, y \rangle + \alpha.$$

3. *Schritt*. Ist $\lambda > 0$ der kleinste Eigenwert von A_{n-1} , so gilt

$$\langle A_{n-1}y, y \rangle \geq \lambda \langle y, y \rangle,$$

also

$$\langle A_{n-1}y, y \rangle + 2 \langle a, y \rangle + \alpha \geq \lambda \|y\|^2 - 2 \|a\| \|y\| - |\alpha| = \|y\| (\lambda \|y\| - \|a\|) - |\alpha|.$$

Das wird groß, wenn $\|y\|$ groß wird: Außerhalb einer hinreichend großen Kugel im \mathbb{R}^{n-1} ist daher $f(y) \geq f(0)$. Deshalb nimmt die stetige Funktion f auf \mathbb{R}^{n-1} ihr globales Minimum an. An dieser Stelle verschwindet ihre Ableitung, die wir jetzt berechnen:

$$D_y f(v) = \langle A_{n-1}y, v \rangle + \langle A_{n-1}v, y \rangle + 2 \langle a, v \rangle = 2 \langle A_{n-1}y + a, v \rangle.$$

Das Minimum wird also angenommen an der Stelle $y_* = -A_{n-1}^{-1}a$. Sein Wert ist

$$f(y_*) = \langle a, A_{n-1}^{-1}a \rangle - 2 \langle a, A_{n-1}^{-1}a \rangle + \alpha = \alpha - \langle a, A_{n-1}^{-1}a \rangle.$$

4. *Schritt*. Nach der Vorüberlegung ist

$$\det A_n = \det A_{n-1} (\alpha - \langle a, A_{n-1}^{-1}a \rangle).$$

Mit $\det A_n$ und $\det A_{n-1}$ ist also auch $f(y_*) = \alpha - \langle a, A_{n-1}^{-1}a \rangle$ positiv. □

6.2 Vektorwertige Integrale

Wir definieren das Integral für stetige Funktionen $g : [a, b] \rightarrow V$ mit Werten in einem endlich-dimensionalen Banachraum V so:

Ist b_1, \dots, b_n eine Basis von V , so schreibt sich g als

$$g = \sum g_i b_i$$

mit stetigen reellwertigen Funktionen g_i . Wir setzen

$$\int_a^b g(t) dt := \sum_i \left(\int_a^b g_i(t) dt \right) b_i.$$

Man zeigt, dass das von der gewählten Basis unabhängig ist. Falls $V = \mathbb{R}^n$, bedeutet das einfach komponentenweise Integration.

Für das so verallgemeinerte Integral gelten die folgenden vom \mathbb{R} -wertigen Fall vertrauten Regeln:

$$\int_a^b (g + h)(t) dt = \int_a^b g(t) dt + \int_a^b h(t) dt, \quad \int_a^b \lambda g(t) dt = \lambda \int_a^b g(t) dt, \quad (99)$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^t g(\tau) d\tau = g(t), \quad (100)$$

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt. \quad (101)$$

Die beiden ersten Gleichungen folgen trivial aus der Definition. Die dritte beweise ich nur für den Fall $V = \mathbb{R}^n$ und die Norm zum üblichen Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$.

Aus (99) folgt für $v \in \mathbb{R}^n$

$$\int_a^b \langle v, g(t) \rangle dt = \int_a^b \left(\sum v_i g_i(t) \right) dt = \sum v_i \int_a^b g_i(t) dt = \langle v, \int_a^b g(t) dt \rangle.$$

Setzt man

$$v := \frac{\int_a^b g(t) dt}{\left\| \int_a^b g(t) dt \right\|} \in \mathbb{R}^n, \quad (102)$$

so wird

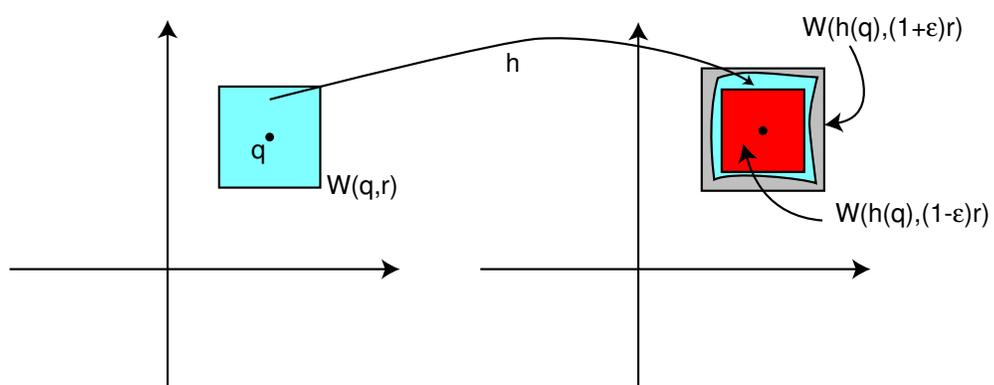
$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| = \langle v, \int_a^b g(t) dt \rangle = \int_a^b \langle v, g(t) \rangle dt \stackrel{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\leq} \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

Ebenso beweist man den allgemeinen Fall, nachdem man zuvor gezeigt hat, dass es zu jedem $v \in V$ (bei uns $v = \int g$) ein $\omega \in L(V, \mathbb{R})$ gibt, für das $\|\omega\| \leq 1$ und $\omega(v) = \|v\|$ ist.)

Analysis III

Prof. Dr. Dirk Ferus

Wintersemester 2007/8



Inhaltsverzeichnis

1	Definition des Lebesgueintegrals	7
1.1	Intervalle und Maße	8
1.2	Treppenfunktionen, Nullmengen	14
1.3	Das Integral auf $\mathcal{L}_+^1(\phi)$	20
1.4	Das Integral auf $\mathcal{L}^1(\phi)$	25
2	Die Konvergenzsätze	27
2.1	Der Konvergenzsatz von Beppo Levi	27
2.2	Der Konvergenzsatz von Lebesgue	34
3	Messbare Funktionen	38
4	Sukzessive Integration: Fubini und Tonelli	42
5	Messbare und integrierbare Mengen	46
6	Der Transformationssatz	53
6.1	Nullmengen und Verzerrung durch lineare Abbildungen	53
6.2	Verzerrung durch C^1 -Diffeomorphismen	59
6.3	Der Transformationssatz	63
6.4	Das Lemma von Sard	68
7	Räume integrierbarer Funktionen	70
7.1	Die L^p -Räume	70
7.2	Die Vollständigkeit der L^p -Räume	74
8	Fourierreihen	78
8.1	Lineare Algebra und Geometrie im Hilbertraum	79
8.2	Orthonormalsysteme und Fourierreihen im L^2	83
8.3	Punktweise Konvergenz	86
8.4	Cesàro-Konvergenz	92
8.5	Rückblick auf das Lebesgueintegral	98
9	Der Satz von Stokes	101
9.1	Alternierende multilineare Algebra	102
9.1.1	Äußeres Produkt	107
9.2	Differentialformen	111
9.3	Die Cartansche oder äußere Ableitung	116
9.4	Potentiale von Differentialformen	121
9.5	Integration von Differentialformen über Ketten	128
9.6	Der Satz von Stokes	136
9.7	Beispiele und Anwendungen	141

9.7.1	$H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und der Fixpunktsatz von Brouwer	141
9.7.2	Der Cauchysche Integralsatz	147
10	Anhang	152
10.1	Sternförmige Mengen	152
10.2	Homotopie und Homologie von Wegen	158
10.3	Klassische Integralsätze	163
10.3.1	Der Hodge-*-Operator	163
10.3.2	Klassische Differentialoperatoren und Integralsätze	166
10.3.3	Harmonische Funktionen	170
10.4	Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten	173
10.4.1	Mannigfaltigkeiten	173
10.4.2	Zerlegung der Eins	177
10.4.3	Orientierung	178
10.4.4	Integration über Mannigfaltigkeiten	182
10.4.5	Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten	185
10.4.6	Der Abbildungsgrad	189
10.4.7	Der Antipodensatz	192
10.4.8	Der Satz von Holditch	195

Literatur

Zur Analysis insgesamt

Barner/Flohr: Analysis II. Walter de Gruyter, Euro 30.-

Theodor Bröcker: Analysis II. Spektrum Akademischer Verlag , Euro 20.-

Gelbaum/Olmsted: Counterexamples in Analysis, Holden-Day 1964

Zum Lebesgueintegral

Alan J. Weir, Lebesgue Integration and Measure, Cambridge 1973 , Euro 37.-

Friedrich Hirzebruch/Winfried Scharlau, Funktionalanalysis, Spektrum Verlag, Euro 15.- (Steilkurs)

F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956

Zu den Differentialformen

Michael Spivak, Calculus on Manifolds, HarperCollins, Euro 48.-

Raoul Bott, Loring W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer Graduate Texts 1982, Euro 60.-

Ilka Agricola/Thomas Friedrich, Globale Analysis, Vieweg 2001, Euro 30.-

Zur Geschichte der Mathematik (und Analysis)

Moritz Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 4 Bände, um 1900

Felix Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Springer-Verlag

N. Bourbaki, Elements of the History of Mathematics, Springer

Zur Geschichte des Satzes von Stokes

Victor J. Katz, The history of Stokes' Theorem, Mathematics Magazine 52 (1979), p146-156

Das griechische Alphabet

<i>Alpha</i>	α	<i>A</i>
<i>Beta</i>	β	<i>B</i>
<i>Gamma</i>	γ	Γ
<i>Delta</i>	δ	Δ
<i>Epsilon</i>	ϵ	<i>E</i>
<i>Zeta</i>	ζ	<i>Z</i>
<i>Eta</i>	η	<i>H</i>
<i>Theta</i>	θ, ϑ	Θ

<i>Iota</i>	ι	<i>I</i>
<i>Kappa</i>	κ	<i>K</i>
<i>Lambda</i>	λ	Λ
<i>Mu</i>	μ	<i>M</i>
<i>Nu</i>	ν	<i>N</i>
<i>Xi</i>	ξ	Ξ
<i>Omikron</i>	o	<i>O</i>
<i>Pi</i>	π	Π

<i>Rho</i>	ρ, ϱ	<i>P</i>
<i>Sigma</i>	σ	Σ
<i>Tau</i>	τ	<i>T</i>
<i>Ypsilon</i>	υ	<i>Y</i>
<i>Phi</i>	ϕ, φ	Φ
<i>Chi</i>	χ	<i>X</i>
<i>Psi</i>	ψ	Ψ
<i>Omega</i>	ω	Ω

1 Definition des Lebesgueintegrals

Wir haben in der Analysis I das Regelintegral für reell- (oder komplex-)wertige Funktionen auf einem Intervall kennen gelernt. Es diente unter anderem zur Flächenberechnung. Will man auch Volumina berechnen, so scheint eine Erweiterung der Integration auf Funktionen von mehreren Variablen wünschenswert. Das werden wir jetzt in Angriff nehmen, gleichzeitig aber das Regelintegral verallgemeinern.

Es gibt verschiedene Integralbegriffe,

- eben das *Regelintegral*, welches Sie im ersten Semester kennengelernt haben,
- das *Riemannsche Integral*, das lange Zeit in den Lehrbüchern der Analysis Standard war, und
- das *Lebesguesche Integral*, das wir in diesem Semester betrachten wollen.

Für Treppenfunktionen, ja für alle „anständigen“ Funktionen, liefern diese Integrale denselben Wert. Sie unterscheiden sich aber hinsichtlich der jeweiligen Menge der „integrierbaren“ Funktionen; diese Menge vergrößert sich bei den obigen drei Integralbegriffen in der angegebenen Reihenfolge.

Aber es ist nicht das Ziel, möglichst „exotische“ Funktionen auch noch integrieren zu können, es geht um andere Vorteile: In vielen Anwendungen der Analysis möchte man Grenzwertprozesse in Funktionenräumen, zum Beispiel im Raum der integrierbaren Funktionen, durchführen. Ein Beispiel aus der Theorie der Differentialgleichungen haben Sie im letzten Semester beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf gesehen, andere Beispiele im Zusammenhang mit der Fourier-Entwicklung von Funktionen gaben Lebesgue (um 1900) den Anlass zur Entwicklung seiner Integrationstheorie. Ziel ist, dass unter *möglichst allgemeinen* Voraussetzungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

gilt, und hier gewinnt das Lebesgueintegral um Längen!

Der wesentliche Unterschied in den Definitionen kommt (jedenfalls bei unserem Zugang) folgendermaßen zustande:

Zunächst definiert man das Integral für Treppenfunktionen auf die offensichtliche Weise. Dann erweitert man es auf Funktionen, die sich durch Treppenfunktionen „gut approximieren“ lassen. Der Unterschied liegt in der Definition von „gut approximieren“.

- Bei den Regelfunktionen betrachtet man Grenzwerte von Folgen von Treppenfunktionen im Sinne *gleichmäßiger Konvergenz*.
- In der Riemannschen Theorie betrachtet man Funktionen, die sich zwischen zwei Treppenfunktionen mit beliebig klein vorgegebener Integraldifferenz einsperren lassen (*Sandwiching*).
- In der Lebesgueschen Theorie schließlich betrachtet man Grenzwerte von *monotonen* Folgen von Treppenfunktionen.

Es gibt verschiedene Zugänge zum Lebesgueintegral. Der hier gewählte basierend auf *Hirzebruch/Scharlau* und *Weir* geht zurück auf Riesz-Nagy (vgl. Literaturliste). Er zielt direkt auf das Integral im \mathbb{R}^n und stellt die Monotonie in den Vordergrund. Das ist jedenfalls für die Analysis angemessen und nach meiner Meinung verständlicher als der (sehr elegante) Zugang über eine axiomatische Maßtheorie.

1.1 Intervalle und Maße

- Wir lernen ein Axiomensystem für Maße auf der Menge aller Intervalle des \mathbb{R}^n kennen. Diese Definition hat allerdings nur provisorischen Charakter. Später werden wir den Maßbegriff auf eine viel größere Familie von Teilmengen des \mathbb{R}^n erweitern.
- Schon im eindimensionalen Fall war die Definition des Integrals für Treppenfunktionen nicht ganz einfach, weil man die Unabhängigkeit von der Darstellung der Treppenfunktion zeigen musste. Den Beweis haben wir damals nur skizziert. In höheren Dimensionen ist das noch viel komplizierter. Wir formulieren und beweisen mit dem Zerlegungslemma ein fundamentales Hilfsmittel für solche Probleme.

Wir beschränken uns nicht auf Flächen- oder Volumenberechnung, sondern betrachten allgemeinere Maße. Stellen Sie sich etwa vor, dass Sie für einen Körper im \mathbb{R}^3 nicht das Volumen, sondern durch Integration einer Dichte seine Masse ermitteln möchte.

Definition 1.

- (i) Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{I}(\mathbb{R}^n) := \{I \subset \mathbb{R}^n \mid I = I_1 \times \dots \times I_n, I_k \text{ beschränktes Intervall in } \mathbb{R}\}$$

die Menge der *beschränkten Intervalle* im \mathbb{R}^n . Dabei lassen wir auch leere Intervall zu.

Bemerkung: Der Durchschnitt zweier beschränkter Intervalle ist wieder ein beschränktes Intervall.

- (ii) Eine Abbildung $\phi : \mathbf{I}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein *Maß*, wenn sie *additiv, monoton und regulär* ist, d.h. folgende drei Eigenschaften besitzt:

- Additivität: Für alle $I, I_1, I_2 \in \mathbf{I}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$I = I_1 \dot{\cup} I_2 \implies \phi(I) = \phi(I_1) + \phi(I_2).$$

Dabei bezeichnet $\dot{\cup}$ die *disjunkte Vereinigung*.

- Monotonie: Für alle $I, J \in \mathbf{I}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$I \subset J \implies \phi(I) \leq \phi(J).$$

- Regularität¹:

$$\forall I \in \mathbf{I}(\mathbb{R}^n) \forall \epsilon > 0 \exists J \in \mathbf{I}(\mathbb{R}^n) (J \text{ offen}) \wedge (I \subset J) \wedge (\phi(J) \leq \phi(I) + \epsilon).$$

Aus der Additivität folgt $\phi(\emptyset) = 0$ und mit der Monotonie dann $\phi \geq 0$.

Beispiel 2 (Lebesguemaß). Das *Lebesguemaß* auf \mathbb{R} ist definiert durch

$$\mu_1 : \mathbf{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, I \mapsto \mu_1(I) := \begin{cases} 0 & \text{für } I = \emptyset, \\ \sup(I) - \inf(I) & \text{für } I \neq \emptyset \end{cases}.$$

Jedem Intervall wird also seine „Länge“ zugeordnet.

□

¹Der Begriff der Regularität stellt eine Verbindung zur Topologie des \mathbb{R}^n her, der für die Analysis sehr bedeutsam, in der abstrakteren Maßtheorie aber nicht erwünscht ist und dort deshalb nicht auftritt.

Beispiel 3 (Produktmaß). Sind ϕ_1, ϕ_2 Maße auf \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q , so definiert

$$\phi(I_1 \times I_2) := \phi_1(I_1)\phi_2(I_2)$$

für $I_1 \times I_2 \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{I}(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{I}(\mathbb{R}^q)$ ein Maß, das *Produktmaß* $\phi = \phi_1 \times \phi_2$.

Insbesondere erhält man das *n-dimensionale Lebesguemaß* μ_n rekursiv durch $\mu_n = \mu_{n-1} \times \mu_1$.

Beweis der Maßeigenschaften. Wir zeigen nur die Additivität, die beiden anderen Eigenschaften sind sehr einfach.

Sei $I = J \dot{\cup} K$ mit $I = I_1 \times I_2$ und entsprechend für J, K . Wir setzen voraus, dass $J \neq \emptyset \neq K$. Dann gilt insbesondere

$$J_q \cup K_q = I_q \quad q = 1, 2. \quad (1)$$

1. Fall: Sei $J_1 \cap K_1 \neq \emptyset$. Wir zeigen zunächst, dass dann

$$J_1 = K_1. \quad (2)$$

Aus Symmetriegründen genügt der Nachweis, dass $J_1 \subset K_1$. Sei also $x_1 \in J_1 \subset I_1$. Nach Voraussetzung gibt es $y_1 \in J_1 \cap K_1$, und dazu ein $y_2 \in K_2 \subset I_2$, so dass also $(y_1, y_2) \in K \subset I$. Nun ist $(x_1, y_2) \in I = J \dot{\cup} K$. Wäre $(x_1, y_2) \in J$, so also $y_2 \in J_2$ und $(y_1, y_2) \in J$ im Widerspruch zu $J \cap K = \emptyset$. Also ist $(x_1, y_2) \in K$ und daher $x_1 \in K_1$ und (2) bewiesen.

Nun folgt wegen $J \cap K = \emptyset$, dass $J_2 \cap K_2 = \emptyset$. Damit ist

$$\begin{aligned} \phi(I) &= \phi_1(I_1)\phi_2(I_2) = \phi_1(I_1)(\phi_2(J_2) + \phi_2(K_2)) \\ &= \phi_1(J_1)\phi_2(J_2) + \phi_1(K_1)\phi_2(K_2) = \phi(J) + \phi(K). \end{aligned}$$

2. Fall: $J_2 \cap K_2 \neq \emptyset$. Beweist man wie den ersten Fall.

3. Fall: $J_1 \cap K_1 = \emptyset = J_2 \cap K_2$. Seien $x_1 \in J_1, y_2 \in K_2$.

Nach (1) ist dann $(x_1, y_2) \in I$, also z.B. $(x_1, y_2) \in J$. Dann ist aber $y_2 \in J_2$. Widerspruch! Dieser Fall kommt nicht vor.

□

Beispiel 4 (Diracmaß). Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Teilmenge, d.h. $\#(M \cap K) < \infty$ für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann definiert

$$\delta_M(I) := \#(M \cap I)$$

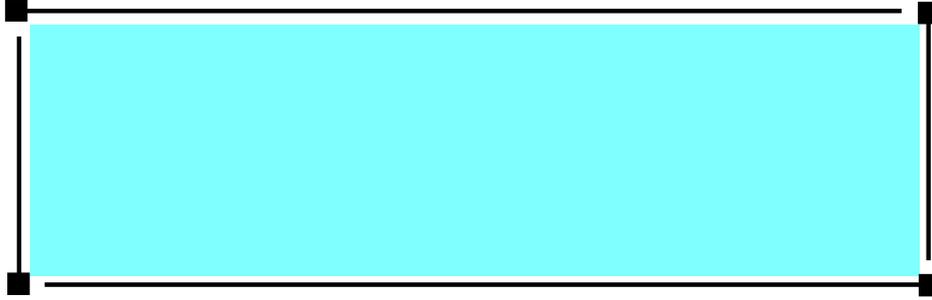
ein Maß. Für $M = \{0\}$ heißt $\delta := \delta_M$ das *Diracmaß in 0*.

□

Satz 5 (Additivitätssatz für Intervalle). Seien $I, I_1, \dots, I_k \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ und I_1, \dots, I_k paarweise disjunkt. Dann gilt:

$$I = \bigcup_{j=1, \dots, k} I_j \implies \phi(I) = \sum_{j=1, \dots, k} \phi(I_j).$$

Das Problem beim Beweis verdeutlicht die folgende Vereinigung von 5(!) Intervallen:



Keine zwei dieser Intervalle bilden vereinigt ein Intervall. Deshalb kann man nicht einfach das Additivitätsaxiom mehrfach anwenden.

Die Lösung bietet eine Zerlegung in kleinere „atomare“ disjunkte Intervalle, in der Abbildung die vier Ecken, die vier offenen Seiten und die offene Rechteckfläche. Daraus kann man erst vertikale „Spalten“ und daraus dann das ganze Intervall so aufbauen, dass man jedesmal das Additivitätsaxiom anwenden kann. Das Maß des ganzen Intervalls, aber auch das Maß jedes der obigen fünf Teilintervalle ist jeweils die Summe der Maße der beteiligten „Atome“.

Erst über der linken unteren Ecke,



dann über dem offenen mittleren Intervall,



dann über der rechten unteren Ecke einen "Turm" aufbauen.



Schließlich die Türme zusammensetzen.



Wir nennen eine Familie $(J_\rho)_{1 \leq \rho \leq m}$ von paarweise disjunkten Intervallen aus $I(\mathbb{R}^n)$ eine *Intervallkette*, wenn

$$\bigcup_{\rho=1}^r J_\rho$$

für jedes $r \in \{1, \dots, m\}$ ein Intervall ist. Nach vollständiger Induktion ist dann für jedes Maß ϕ

$$\phi\left(\bigcup_{\rho=1}^m J_\rho\right) = \sum_{\rho=1}^m \phi(J_\rho).$$

Der Beweis des obigen Satzes wird im wesentlichen reduziert auf das folgende

Lemma 6 (Zerlegungslemma). Seien $I^1, \dots, I^m \in I(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Familie

$$(J_{\rho_1 \dots \rho_n})_{1 \leq \rho_i \leq 4m-1}$$

von $(4m-1)^n$ (zum Teil vielleicht leeren) Intervallen in $I(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die $J_{\rho_1 \dots \rho_n}$ sind paarweise disjunkt.

(ii) Für alle q ist

$$I^q = \bigcup_{I^q \cap J_{\rho_1 \dots \rho_n} \neq \emptyset} J_{\rho_1 \dots \rho_n}.$$

(iii) Definiere für $q \in \{1, \dots, m\}$

$$J_{\rho_1 \dots \rho_n}^q = I^q \cap J_{\rho_1 \dots \rho_n}.$$

(Nach (i), (ii) ist das leer oder $= J_{\rho_1 \dots \rho_n}$.) Definiere weiter für $1 \leq j < n$ und $1 \leq \rho_1, \dots, \rho_j \leq 4m - 1$

$$J_{\rho_1 \dots \rho_j}^q = \bigcup_{\rho_{j+1}, \dots, \rho_n=1}^{4m-1} J_{\rho_1 \dots \rho_j \rho_{j+1}, \dots, \rho_n}^q.$$

Dann ist für alle $1 \leq j \leq n$ und alle $1 \leq \rho_1, \dots, \rho_{j-1} \leq 4m - 1$ die Familie

$$\left(J_{\rho_1 \dots \rho_j}^q \right)_{1 \leq \rho_j \leq 4m-1}$$

eine Intervallkette.

(iv) Ist ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n , so gilt

$$\phi(I^q) = \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n=1}^{4m-1} \phi(J_{\rho_1 \dots \rho_n}^q).$$

Beweis. Wir beweisen (i) - (iii) durch vollständige Induktion über die Dimension n .

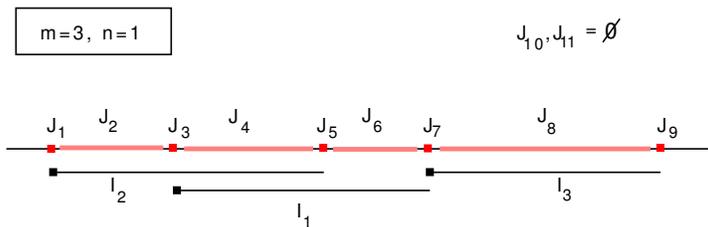
$n = 1$. Seien $a_q := \inf I^q, b_q := \sup I^q$ und

$$\{a_q \mid q \in \{1, \dots, m\}\} \cup \{b_q \mid q \in \{1, \dots, m\}\} = \{J_1, J_3, \dots, J_{2r-1}\}$$

mit

$$J_1 < J_3 < \dots < J_{2r-1}.$$

Das sind $r \leq 2m$ Punkte, weil ja Endpunkte der Intervalle zusammenfallen können. Wir bezeichnen die $r - 1$ offenen Intervalle dazwischen mit $J_{2i} =]J_{2i-1}, J_{2i+1}[$. Wenn wir die J_{2i-1} als einpunktige Intervalle verstehen, haben wir also eine Folge von $2r - 1 \leq 4m - 1$ aneinander anschliessenden disjunkten Intervallen. Wenn es weniger als $4m - 1$ sind, füllen wir durch leere Intervalle auf, setzen also $J_{2r} = \dots = J_{4m-1} = \emptyset$.



Dann ist offenbar $(J_\rho)_{1 \leq \rho \leq 4m-1}$ eine Intervallkette, und es gelten (i) und (ii). Für jedes q ist weiter $(J_\rho^q)_{1 \leq \rho \leq 4m-1}$ eine Intervallkette, die in der Regel mit einigen leeren Intervallen beginnt (und endet), und es ist

$$I^q = \bigcup_{\rho=1}^{4m-1} J_\rho^q.$$

Damit gilt (iii).

$n \rightarrow n + 1$. Sei

$$I^q = \underset{\sim}{I}^q \times \tilde{I}^q$$

mit $\underset{\sim}{I}^q \in I(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{I}^q \in I(\mathbb{R})$. Wir wählen dazu

- $J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n}$ gemäß der Induktionsvoraussetzung und
- \tilde{J}_ρ wie im Fall $n = 1$.

Damit setzen wir

$$J_{\rho_1 \dots \rho_n \rho_{n+1}} := J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \times \tilde{J}_{\rho_{n+1}}.$$

Diese Intervalle erfüllen die Behauptung: Sie sind paarweise disjunkt, weil ihre Faktoren disjunkt sind. Es gilt

$$\begin{aligned} I^q &= I^q \times \tilde{I}^q = \left(\bigcup_{\substack{I^q \cap J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \\ \neq \emptyset}} J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \right) \times \left(\bigcup_{\tilde{I}^q \cap \tilde{J}_{\rho_{n+1}} \neq \emptyset} \tilde{J}_{\rho_{n+1}} \right) \\ &= \bigcup_{\substack{I^q \cap J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \\ \tilde{I}^q \cap \tilde{J}_{\rho_{n+1}} \neq \emptyset}} J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \times \tilde{J}_{\rho_{n+1}} = \bigcup_{I^q \cap J_{\rho_1 \dots \rho_{n+1}} \neq \emptyset} J_{\rho_1 \dots \rho_{n+1}}. \end{aligned}$$

Die Kettenbedingung (iii) folgt für den letzten Index ρ_{n+1} aus dem Fall $n = 1$ und für die anderen aus der Induktionsvoraussetzung, weil eine Intervallkette eine Intervallkette bleibt, wenn man das Kartesische Produkt ihrer Glieder mit einem festen Intervall bildet.

Damit sind (i) - (iii) bewiesen.

Schließlich gilt (vi) wegen

$$\phi(I^q) = \phi\left(\bigcup_{\rho_1} J_{\rho_1}^q\right) = \sum_{\rho_1} \phi(J_{\rho_1}^q) = \sum_{\rho_1} \phi\left(\bigcup_{\rho_2} J_{\rho_1 \rho_2}^q\right) = \dots = \sum_{\rho_1} \dots \sum_{\rho_n} \phi(J_{\rho_1 \dots \rho_n}^q).$$

□

Beweis des Additivitätssatzes. Wähle zu I, I_1, \dots, I_k eine Familie $(J_{\rho_1 \dots \rho_n})$ wie im Zerlegungslemma. Weil $I = \bigcup I_j$, ist ohne Einschränkung

$$I = \bigcup_{1 \leq \rho_1, \dots, \rho_n \leq 4k-1} J_{\rho_1 \dots \rho_n}.$$

Dann gilt

$$\sum_{j=1}^k \phi(I_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n} \phi(J_{\rho_1 \dots \rho_n}^j) = \phi(I).$$

□

Wir formulieren die Ergebnisse aus Zerlegungslemma und Additionssatz noch einmal in einer "griffigen" Kurzform:

Lemma 7 (Zerlegungslemma, Version 2). Zu $I_1, \dots, I_k \in I(\mathbb{R}^n)$ gibt es paarweise disjunkte $J_1, \dots, J_r \in I(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

Für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ und Maße $\phi : I(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$I_j = \bigcup_{I_j \cap J_\rho \neq \emptyset} J_\rho \quad \text{und} \quad \phi(I_j) = \sum_{I_j \cap J_\rho \neq \emptyset} \phi(J_\rho).$$

Bemerkung. Für $I(\mathbb{R}^n)$ gilt

- (i) $\emptyset \in I(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) $I_1, I_2 \in I(\mathbb{R}^n) \implies I_1 \cap I_2 \in I(\mathbb{R}^n)$.
- (iii) Sind $I, J \in I(\mathbb{R}^n)$ mit $J \subset I$, so gibt es (nach dem Zerlegungslemma) paarweise disjunkte Menge $J_1, \dots, J_k \in I(\mathbb{R}^n)$ mit $I \setminus J = \bigcup_{i=1}^k J_k$.

In der Maßtheorie nennt man $I(\mathbb{R}^n)$ dann einen *Semiring* und fragt, unter welchen Voraussetzungen sich eine additive und monotone Funktion auf einem solchen fortsetzen lässt zu einem *Maß* auf der von dem Semiring *erzeugten* σ -*Algebra* - was auch immer das genau bedeuten mag. Vergleiche dazu den Abschnitt 5.

1.2 Treppenfunktionen. Nullmengen

- Die Definition für das Integral von Treppenfunktionen bezüglich eines gegebenen Maßes ist nun kanonisch.
- Mit den Nullmengen eines Maßes lernen wir einen zentralen Begriff der Lebesgueschen Integrationstheorie kennen.
- Wir beweisen ein erstes Lemma über die Integration monotoner Folgen.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Definition 8 (Charakteristische Funktion und Treppenfunktion).

- (i) Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

die *charakteristische Funktion* mit

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachten Sie:

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

und insbesondere

$$\chi_{A \dot{\cup} B} = \chi_A + \chi_B.$$

- (ii) Eine Funktion der Form

$$f = \sum_{\mu=1}^m a_\mu \chi_{I_\mu} \tag{3}$$

mit $a_\mu \in \mathbb{R}$, $I_\mu \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ heißt *Treppenfunktion*.

Bemerkungen:

- Die Darstellung ist nicht eindeutig!
- Nach dem Zerlegungslemma 6 gibt es immer eine Darstellung mit paarweise disjunkten I_μ .
- Treppenfunktionen sind beschränkt und haben kompakten Träger. (Der Träger einer reellwertigen Funktion ist die abgeschlossene Hülle der Punktmenge, auf der die Funktion $\neq 0$ ist.)

- (iii) Das ϕ -Integral von f wie in (3) definiert man als

$$\int f d\phi = \sum_{\mu=1}^m a_\mu \phi(I_\mu).$$

Unabhängigkeit von der Darstellung. Sei

$$f = \sum_{\mu=1}^m a_\mu \chi_{I_\mu} = \sum_{\nu=1}^n b_\nu \chi_{K_\nu}.$$

Nach dem Zerlegungslemma existiert eine Familie disjunkter Intervalle J_ρ , so dass

$$I_\mu = \bigcup_{J_\rho \cap I_\mu \neq \emptyset} J_\rho, \quad K_\nu = \bigcup_{J_\rho \cap K_\nu \neq \emptyset} J_\rho.$$

Es folgt

$$f = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu} \sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} \chi_{J_{\rho}} = \sum_{\rho} \left(\sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} a_{\mu} \right) \chi_{J_{\rho}} = \sum_{\rho} \left(\sum_{J_{\rho} \cap K_{\nu} \neq \emptyset} b_{\nu} \right) \chi_{J_{\rho}} \quad (4)$$

und nach Satz 5

$$\phi(I_{\mu}) = \sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} \phi(J_{\rho}), \quad \phi(K_{\nu}) = \sum_{J_{\rho} \cap K_{\nu} \neq \emptyset} \phi(J_{\rho}).$$

Weil die J_{ρ} paarweise disjunkt sind, sind die Koeffizienten von $\chi_{J_{\rho}}$ in den beiden letzten Termen von (4) gleich. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m a_{\mu} \phi(I_{\mu}) &= \sum_{\mu=1}^m a_{\mu} \sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} \phi(J_{\rho}) = \sum_{\rho} \left(\sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} a_{\mu} \right) \phi(J_{\rho}) \\ &= \sum_{\rho} \left(\sum_{J_{\rho} \cap K_{\nu} \neq \emptyset} b_{\nu} \right) \phi(J_{\rho}) = \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} \phi(K_{\nu}). \end{aligned}$$

□

Satz 9. Die Treppenfunktionen auf \mathbb{R}^n bilden einen Vektorraum $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$. Das Integral

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int f d\phi$$

ist linear und monoton: $\int f d\phi \leq \int g d\phi$, falls $f \leq g$.

Beweis. Die Vektorraumeigenschaft und die Linearität sind klar nach der Definition.

Zur Monotonie: Sind f und g zwei Treppenfunktionen, so gibt es nach dem Zerlegungssatz eine endliche Menge beschränkter, paarweise disjunkter(!) Intervalle I_1, \dots, I_m , so dass sich f und g schreiben lassen als

$$f = \sum_{i=0}^m \alpha_i \chi_{I_i}, \quad g = \sum_{i=0}^m \beta_i \chi_{I_i}.$$

aus $f \leq g$ folgt $\alpha_i \leq \beta_i$ für alle i und daraus $\int f d\phi \leq \int g d\phi$. □

Definition 10 (Nullmengen). $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt ϕ -Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge (I_k) in $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass

$$N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \phi(I_k) < \epsilon.$$

Bemerkung: Wegen der Regularitätseigenschaft gibt es dann auch immer eine solche Folge (I_k) von offenen Intervallen. (Beweis?)

Beispiele 11. (i) Einpunktige Mengen sind μ_n -Nullmengen.

(ii) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist eine δ -Nullmenge, aber $\{0\}$ ist keine δ -Nullmenge. □

Beispiel 12 (Cantormenge). Die Cantormenge C entsteht aus dem Intervall $[0, 1]$, indem man das mittlere Drittel $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ herausnimmt, aus jedem verbleibenden Intervall wieder das mittlere Drittel herausnimmt usw. Durch die Konstruktion ergeben sich endliche Folgen von Intervallen der Gesamtlänge

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ läßt sich C also sogar durch nur endlich viele Intervalle einer Gesamtlänge $= (\frac{2}{3})^k < \epsilon$ überdecken. Die Cantormenge ist daher eine μ_1 -Nullmenge. □

Satz 13. *Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.*

Beweis. Seien $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von ϕ -Nullmengen und $N = \bigcup N_i$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine Folge $(I_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$, für die $N_i \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_{ij}$ und

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi(I_{ij}) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}.$$

Wir bezeichnen mit $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die ‘‘Diagonalfolge’’

$$I_{00}, I_{10}, I_{01}, I_{20}, I_{11}, I_{02}, I_{30}, I_{21}, I_{12}, I_{03}, \dots$$

Dann ist

$$N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i \subset \bigcup_{i, j \in \mathbb{N}} I_{ij} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k.$$

Andrerseits ist

$$\sum_{k=0}^m \phi(J_k) \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \phi(I_{ij}) < \sum_{i=0}^m \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \epsilon.$$

Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} \phi(J_k) \leq \epsilon$. □

Beispiele 14. 1. Weil einpunktige Mengen μ_1 -Nullmengen sind, ist die abzählbare Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine μ_1 -Nullmenge.

2. Die Cantormenge ist eine überabzählbare μ_1 -Nullmenge. Stellt man nämlich die Zahlen in C im ‘‘Trialsystem‘‘ dar, so erhält man genau die Zahlen der Form $0.a_1a_2a_3 \dots$ mit $a_j \neq 1$ für alle j . Diese Menge ist aber offensichtlich gleichmächtig zur Menge $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ dargestellt im Dualsystem, also überabzählbar. □

Definition 15. Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

- (i) Zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißen ϕ -gleich, wenn es eine ϕ -Nullmenge N gibt, so dass

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus N} = g|_{\mathbb{R}^n \setminus N}.$$

Wir schreiben das als

$$f =_{\phi} g.$$

Analog definiert man $f \leq_{\phi} g$ etc.

- (ii) Eine Folge (f_i) von Funktionen heißt ϕ -konvergent gegen eine Funktion f , wenn es eine ϕ -Nullmenge N gibt, so dass $\lim f_i(x) = f(x)$ für alle $x \notin N$. Wir schreiben das als

$$\lim f_i =_{\phi} f.$$

- (iii) Man sagt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine ϕ -definierte Funktion, wenn f auf dem Komplement einer ϕ -Nullmenge N definiert ist, eigentlich also eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Wenn klar ist, von welchem Maß die Rede ist, sagt man auch einfach „ f und g sind fast-überall gleich“, (f_i) ist „fast-überall konvergent“, f ist „fast-überall definiert“ etc.

In unserem Aufbau der Lebesgueschen Integrationstheorie spielen *monotone* Funktionenfolgen eine wichtige Rolle. Eine einfache Situation beschreibt das folgende Lemma, dessen Beweis erstaunlich schwierig ist.

Lemma 16 (Monotone Nullfolgen von Treppenfunktionen). Sei $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit

- (i) $h_m \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$,
- (ii) $h_m(x) \geq h_{m+1}(x)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$,
- (iii) $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m =_{\phi} 0$.

Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m d\phi = 0.$$

Beweis. Wegen der Monotonie genügt es zu zeigen: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein m_0 mit

$$\int h_{m_0} d\phi < \epsilon.$$

Sei also $\epsilon > 0$. Wir wählen ein kompaktes Intervall $K \in I(\mathbb{R}^n)$, auf dessen Komplement h_0 und damit jedes h_m verschwinden, und ein $M > 0$ mit $h_0 \leq M\chi_K$.

Zu jedem h_m wählen wir endlich viele paarweise disjunkte Intervalle $J_{m\rho} \subset K$ ($1 \leq \rho \leq r_m$), so dass

$$h_m = \sum_{\rho=1}^{r_m} \alpha_{m\rho} \chi_{J_{m\rho}}$$

und $\bigcup_{\rho=1}^{r_m} J_{m\rho} = K$. Das ist möglich nach dem Zerlegungslemma angewendet auf K und die Konstanzintervalle von h_m .

Damit definieren wir

$$S := \{(m, \rho) \mid \alpha_{m\rho} < \epsilon\}.$$

Sei N eine ϕ -Nullmenge, auf deren Komplement $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0$ ist, und sei dazu $(\tilde{J}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge offener Intervalle mit

$$N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{J}_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \phi(\tilde{J}_k) < \epsilon.$$

Wir wollen auch die $J_{m\rho}$ durch offene Intervalle ersetzen, um die Kompaktheit von K ausnutzen zu können. Wir wählen dazu für jedes (m, ρ) eine Zahl $\epsilon_{m\rho} > 0$ mit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{r_m} \epsilon_{m\rho} < 1,$$

etwa $\epsilon_{m\rho} = \frac{1}{2^{m+\rho+1}}$, und ein *offenes* Intervall $\tilde{J}_{m\rho}$ mit

$$\tilde{J}_{m\rho} \supset J_{m\rho} \text{ und } \phi(\tilde{J}_{m\rho}) - \phi(J_{m\rho}) < \epsilon_{m\rho}\epsilon.$$

Ist $\lim h_m(x) = 0$, so gibt es ein m mit $h_m(x) < \epsilon$, d.h ein $(m, \rho) \in S$ mit $x \in J_{m\rho}$. Andernfalls ist $x \in N$, also enthalten in einem \tilde{J}_k . Daher ist

$$K \subset \left(\bigcup_S \tilde{J}_{m\rho} \right) \cup \left(\bigcup_{\mathbb{N}} \tilde{J}_k \right).$$

Weil K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $S_0 \supset S$ und ein $l \in \mathbb{N}$, so dass

$$K \subset \left(\bigcup_{S_0} \tilde{J}_{m\rho} \right) \cup \left(\bigcup_{k \leq l} \tilde{J}_k \right) = \left(\bigcup_{S_0} J_{m\rho} \right) \cup \left(\bigcup_{S_0} \tilde{J}_{m\rho} \setminus J_{m\rho} \right) \cup \left(\bigcup_{k \leq l} \tilde{J}_k \right). \quad (5)$$

Sei m_0 das größte der in S_0 vorkommenden m 's und sei $x \in K$.

- Gibt es $(m, \rho) \in S_0$ mit $x \in J_{m\rho}$, so ist $h_{m_0}(x) \leq h_m(x) = \alpha_{m\rho} < \epsilon$.
- Ist x in einer der beiden letzten Teilmengen von (5), so ist jedenfalls $h_{m_0}(x) \leq M$.

Also ist

$$h_{m_0} \leq \underbrace{\epsilon \sum_{S_0} \chi_{J_{m\rho}}}_{\leq \chi_K} + M \sum_{S_0} \chi_{\tilde{J}_{m\rho} \setminus J_{m\rho}} + M \sum_{k \leq l} \chi_{\tilde{J}_k}$$

Mit der Monotonie des Integrals erhalten wir

$$\int h_{m_0} d\phi \leq \epsilon \phi(K) + M(\sum \epsilon_{m\rho})\epsilon + M\epsilon < (\phi(K) + 2M)\epsilon.$$

□

Als Folgerung erhalten wir

Lemma 17. Für $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$I \text{ ist } \phi\text{-Nullmenge} \iff \phi(I) = 0.$$

Beweis. Zu (\Leftarrow). Trivial: Überdecke I durch sich selbst und eine Folge leerer Intervalle.

Zu (\Rightarrow). Die Folge $(h_m := \chi_I)_{m \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Folge nicht-negativer Treppenfunktionen, die für alle $x \notin I$ gegen 0 konvergiert. Nach Voraussetzung ist sie also ϕ -konvergent gegen 0. Daher gilt

$$\phi(I) = \int h_m d\phi \rightarrow 0.$$

□

Lemma 18. Sind $f, g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ mit $f =_\phi g$, so ist für jedes Maß ϕ

$$\int f d\phi = \int g d\phi.$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass

$$f = \sum_{\mu} a_{\mu} \chi_{I_{\mu}}, \quad g = \sum_{\mu} b_{\mu} \chi_{I_{\mu}}$$

mit denselben paarweise disjunkten Intervallen. Dann ist

$$\int f d\phi = \sum_{\mu} a_{\mu} \phi(I_{\mu}), \quad \int g d\phi = \sum_{\mu} b_{\mu} \phi(I_{\mu}).$$

Aus $a_{\mu} \neq b_{\mu}$ folgt nach Voraussetzung, dass I_{μ} eine ϕ -Nullmenge ist, nach dem vorstehenden Lemma also $\phi(I_{\mu}) = 0$ gilt. Damit folgt die Behauptung. □

Im Zusammenhang mit der Monotonie werden wir es im folgenden häufig zu tun haben mit dem Supremum von zwei (oder mehr) Funktionen:

Definition 19. Wir definieren

$$\sup(f, g)(x) := \sup(f(x), g(x)).$$

(Man könnte das auch das *Maximum* nennen, ist aber nicht üblich).

Machen Sie sich klar, dass für reelle Zahlen (folgen) gilt

$$a > 0 \quad \implies \quad \sup(a + b, 0) \leq a + \sup(b, 0), \tag{6}$$

$$\sup(a, b) \leq \sup(a, 0) + \sup(b, 0), \tag{7}$$

$$\lim a_i = a \text{ und } \lim b_i = b \quad \implies \quad \lim \sup(a_i, b_i) = \sup(a, b). \tag{8}$$

Lemma 20. Das Lemma 16 gilt auch ohne die Voraussetzung (i).

Beweis. Definiere $g_m := \sup(h_m, 0)$. Die Treppenfunktion g_m entsteht also aus der Treppenfunktion h_m , indem man auf den Konstanzintervallen mit negativem Funktionswert diesen durch 0 ersetzt. Ist $h_m < 0$ auf einem Intervall $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$, so konvergiert $h_m(x)$ wegen der Monotonie für kein $x \in I$ gegen Null. Weil aber $\lim h_m =_\phi 0$, ist I eine ϕ -Nullmenge, d.h.

$$g_m =_\phi h_m$$

und

$$\int g_m d\phi = \int h_m d\phi.$$

Dann erfüllt $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen (i)-(iii) des Lemma 16, und daher ist

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m d\phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m d\phi.$$

□

1.3 Das Integral auf $\mathcal{L}_+^1(\phi)$

- Wir erweitern nun den Integralbegriff auf Grenzwerte monoton wachsender Folgen von Treppenfunktionen. Weil die Integralfolge dann ebenfalls monoton wachsend ist, muss sie beschränkt sein um zu konvergieren.
- Die so erhaltene Klasse $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ von Funktionen ist sehr groß, sie umfasst insbesondere alle stetigen Funktionen mit kompaktem Träger und im Fall von $\phi = \mu_1$ alle Regelfunktionen.
- Wir untersuchen die elementaren Eigenschaften des Integrals auf der Klasse $\mathcal{L}_+^1(\phi)$.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Definition 21. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\begin{aligned} &\text{Es gibt eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen } (f_i)_{i \in \mathbb{N}} \\ &\text{mit beschränkter Integralfolge } (\int f_i d\phi)_{i \in \mathbb{N}}, \text{ so dass } \lim f_i =_\phi f. \end{aligned} \quad (9)$$

Wegen der Monotonie des Integrals auf Treppenfunktionen ist die beschränkte Folge $(\int f_i d\phi)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergent. Wir zeigen, dass der Limes nur von f abhängt und bezeichnen ihn mit

$$\int f d\phi.$$

Wir nennen der Einfachheit halber $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine *(integral)definierende Treppenfunktionsfolge* zu f .

Lemma 22. Seien $(f_i), (g_i)$ monoton wachsende, ϕ -konvergente Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralfolgen und

$$f := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i \leq_\phi \lim_{i \rightarrow \infty} g_i =: g.$$

Dann gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\phi \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \int g_i d\phi.$$

Steht links Gleichheit, so auch rechts, und daraus folgt die gewünschte Unabhängigkeit der Integraldefinition von der Wahl der definierenden Treppenfunktionsfolge.

Beweis. Wegen der Monotonie der Folgen ist

$$f_i \leq_\phi f, g_i \leq_\phi g,$$

Wir wählen $i \in \mathbb{N}$ und definieren

$$h_j = \sup(0, f_i - g_j).$$

Dann ist $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer Treppenfunktionen, und weil $f_i \leq_\phi f \leq_\phi g$, ist

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h_j =_\phi \sup(f_i - g, 0) =_\phi 0. \quad (10)$$

Nach Lemma 16 ist daher

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int h_j d\phi \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int (f_i - g_j) d\phi = \int f_i d\phi - \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j d\phi.$$

Also ist für alle i

$$\int f_i d\phi \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j d\phi.$$

Daraus folgt mit $i \rightarrow \infty$ die Behauptung. \square

Weiter gilt folgendes

Lemma 23. Ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $g =_\phi f$, so ist $g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und

$$\int g d\phi = \int f d\phi.$$

Beweis. Ist (f_i) eine definierende Treppenfunktionsfolge für f , so ist es auch eine solche für g . Daraus folgt die Behauptung. \square

Beispiel 24. Weil \mathbb{Q} eine μ_1 -Nullmenge ist, gilt für die charakteristische Funktion

$$f := \chi_{\mathbb{Q}} =_{\mu_1} 0 \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1).$$

Also ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1)$ und $\int f d\mu_1 = 0$. Dagegen ist $f|_{[0,1]}$ keine Regelfunktion und nicht Riemann-integrierbar. \square

Satz 25. Seien $f, g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $a \geq 0$. Dann gilt

(i) $f + g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $\int (f + g) d\phi = \int f d\phi + \int g d\phi$.

(ii) $af \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $\int af d\phi = a \int f d\phi$.

(iii) $f \leq_\phi g \implies \int f d\phi \leq \int g d\phi$.

(iv) $\sup(f, g) \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$.

Beweis. Zu (i) und (ii). Folgen sofort aus der Definition des Integrals für $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ und den entsprechenden Aussagen für Treppenfunktionen.

Zu (iii). Das ist Lemma 22.

Zu (iv). Sind $(f_i)_i$ und $(g_i)_i$ definierende Folgen von Treppenfunktionen zu f und g , so ist

$$\sup(f_0, g_0) \leq \sup(f_1, g_1) \leq \dots$$

eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen(!) mit

$$\lim_i (\sup(f_i, g_i)) =_\phi \sup(f, g).$$

Ist die Integralfolge beschränkt?

$$\begin{aligned} \sup(f_i, g_i) &\stackrel{(7)}{\leq} \sup(f_i, 0) + \sup(0, g_i) = \sup(\underbrace{f_i - f_0}_{\geq 0} + f_0, 0) + \sup(0, \underbrace{g_i - g_0}_{\geq 0} + g_0) \\ &\stackrel{(6)}{\leq} f_i - f_0 + \sup(f_0, 0) + g_i - g_0 + \sup(0, g_0) \\ &= f_i + g_i - \underbrace{(f_0 + g_0 - \sup(f_0, 0) - \sup(0, g_0))}_{=: h_0} = f_i + g_i - h_0. \end{aligned}$$

Daher gilt nach der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen

$$\int \sup(f_i, g_i) d\phi \leq \int f_i d\phi + \int g_i d\phi - \int h_0 d\phi,$$

und mit $(\int f_i d\phi)_i, (\int g_i d\phi)_i$ ist auch diese Integralfolge beschränkt. \square

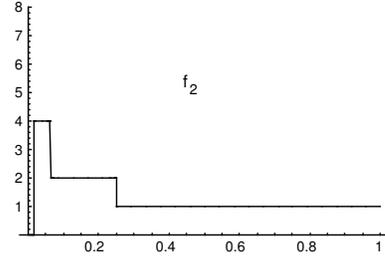
Beispiel 26. $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ ist kein Vektorraum:

Sei $I_j := [\frac{1}{4^{j+1}}, \frac{1}{4^j}[$. Dann definiert

$$f_k := \sum_{j=0}^k 2^j \chi_{I_j}$$

eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit beschränkter μ_1 -Integralfolge

$$\int f_k d\mu_1 = \sum_{j=0}^k 2^j \frac{3}{4^{j+1}} < \frac{3}{2}.$$



Also ist

$$f = \lim f_k = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \chi_{I_j} \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1).$$

Dagegen ist $-f \notin \mathcal{L}_+^1(\mu_1)$, weil jede Treppenfunktion nach unten beschränkt und deshalb auf einem Intervall $]0, \frac{1}{4^k}[$ größer als f ist. Daher gibt es keine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die μ_1 -fast-überall gegen f konvergiert. \square

Satz 27. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit kompaktem Träger². Ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine ϕ -Nullmenge, so ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$. Insbesondere sind stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ für jedes Maß ϕ .

Beweis. Sei $K = [-R, R]^n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ein kompakter Würfel, der den Träger von f enthält, und sei $\text{diam}(K)$ der Durchmesser von K .

Durch i -fache Halbierung in jeder Koordinatenrichtung erhält man 2^{ni} Intervalle vom Durchmesser

$$\left(\frac{1}{2}\right)^i \text{diam}(K),$$

die sich an den Rändern überlappen. Durch Anwendung des Zerlegungslemmas auf die Intervalle der i -ten Stufe erhält man paarweise disjunkte Intervalle

$$J_{i0}, \dots, J_{i r_i}$$

mit folgenden Eigenschaften

²Der Träger einer Funktion f ist die abgeschlossene Hülle der Punktmenge $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.

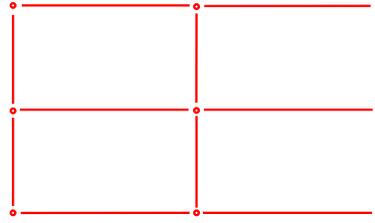
(i)

$$K = \bigcup_{j=0}^{r_i} J_{ij}$$

(ii) Für alle j ist

$$\text{diam } J_{ij} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^i \text{diam } K.$$

(iii) Jedes $J_{(i+1)j}$ ist enthalten in einem $J_{ij'}$.



Wir setzen

$$\alpha_{ij} := \inf \{f(x) \mid x \in J_{ij}\} \text{ und } f_i := \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} \chi_{J_{ij}}.$$

Dann ist (f_i) eine Folge von Treppenfunktionen. Wegen (i) und (iii) ist die Folge monoton wachsend. Weiter gilt für alle i

$$f_i \leq \sup_x f(x) \chi_K.$$

Deshalb ist die Integralfolge $(\int f_i d\phi)$ beschränkt durch $\sup_x f(x) \phi(K)$.

Aus der ϵ - δ -Definition der Stetigkeit folgt schließlich mit (i), (ii), dass $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x)$ in allen Stetigkeitspunkten x von f . Also ist nach Voraussetzung $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i =_\phi f$ und $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine definierende Treppenfunktionsfolge für f . \square

Beispiel 28. Der Rand eines Intervalls $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ist die Vereinigung von endlich vielen $(n-1)$ -dimensionalen Intervallen, also eine μ_n -Nullmenge. Ist daher $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, und setzt man

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in I \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist nach dem vorstehenden Satz $\tilde{f} \in \mathcal{L}_+^1(\mu_n)$.

In diesem Sinne sind also stetige Funktionen auf kompakten Intervallen in $\mathcal{L}_+^1(\mu_n)$. Vergleiche auch Beispiel 67. \square

Satz 29 (Regel- und Lebesgueintegral). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Wir setzen $f(x) := 0$ für $x \notin [a, b]$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1)$ und

$$\int f d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis. Sei $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge. Nach Definition der Regelfunktionen gibt es dazu eine Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, so dass

$$f_i - \epsilon_i \chi_{[a, b]} \leq f \leq f_i + \epsilon_i \chi_{[a, b]}.$$

Wir definieren Treppenfunktionen

$$g_i := f_i - \epsilon_i \chi_{[a, b]},$$
$$h_i := \sup(g_0, \dots, g_i).$$

Dann ist $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, und offenbar

$$g_i \leq h_i \leq f \leq \sup(|f|) \chi_{[a, b]}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim g_i(x) = \lim f_i(x) - \lim \epsilon_i \chi_{[a, b]} = f(x)$$

und daher

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i(x) = f(x).$$

Die Integralfolge der h_i ist durch $\sup(|f|)(b-a)$ beschränkt. Also ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1)$, und nach Definition des Regel- und des Lebesgueintegrals ist

$$\int f d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

□

1.4 Das Integral auf $\mathcal{L}^1(\phi)$

- Die Klasse $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ ist zwar sehr groß, aber noch nicht groß genug: Sie ist, wie das Beispiel 26 gezeigt hat, nicht abgeschlossen bezüglich Differenzbildung. Dieses Manko ist leicht zu beheben. Damit ist dann die Definition des Lebesgueintegrals abgeschlossen.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Definition 30. (i) Wir nennen

$$\mathcal{L}^1(\phi) := \{f - g \mid f, g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)\}$$

die Menge der bezüglich ϕ (Lebesgue-)integrierbaren Funktionen.

(ii) Für $h \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $f, g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit $h = f - g$ definieren wir das Integral von h als

$$\int h d\phi := \int f d\phi - \int g d\phi.$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von (f, g) ist:

Sind $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und gilt

$$f - \tilde{f} \leq_\phi g - \tilde{g},$$

so folgt $f + \tilde{g} \leq_\phi \tilde{f} + g$. Nach Satz 25 ist dann $\int f d\phi + \int \tilde{g} d\phi \leq \int \tilde{f} d\phi + \int g d\phi$ und daher

$$\int f d\phi - \int g d\phi \leq \int \tilde{f} d\phi - \int \tilde{g} d\phi.$$

ϕ -Gleichheit der Funktionen impliziert die Gleichheit der Integrale.

Satz 31. (i) $\mathcal{L}^1(\phi)$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum und

$$\int \dots d\phi : \mathcal{L}^1(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist linear.

(ii) Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ gilt

$$f \leq_\phi g \implies \int f d\phi \leq \int g d\phi.$$

(iii) Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ gilt

$$\sup(f, g), \inf(f, g) \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

(iv) Mit $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ ist auch $|f| \in \mathcal{L}^1(\phi)$, und es gilt

$$\left| \int f d\phi \right| \leq \int |f| d\phi.$$

Beweis. Zu (i). dass $\mathcal{L}^1(\phi)$ ein Vektorraum ist, ist klar. Die Linearität ergibt sich leicht aus Satz 25.

Zu (ii). Siehe oben

Zu (iii). Für $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ zeigt man durch Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von $f_1 - f_2$:

$$\sup(f, 0) = \underbrace{\sup(f_1, f_2)}_{\in \mathcal{L}_+^1(\phi)} - \underbrace{f_2}_{\in \mathcal{L}_+^1(\phi)} .$$

Also ist $\sup(f, 0) \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Daraus folgt für $f, g \in \mathcal{L}^1(\phi)$

$$\sup(f, g) = \underbrace{\sup(f - g, 0)}_{\in \mathcal{L}^1(\phi)} + \underbrace{g}_{\in \mathcal{L}^1(\phi)} \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Weiter folgt

$$\inf(f, g) = -\sup(-f, -g) \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Zu (iv). Aus (iii) und

$$|f| = \sup(f, 0) + \sup(-f, 0)$$

folgt $|f| \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Aber $-|f| \leq f \leq |f|$, und die Monotonie liefert

$$-\int |f| d\phi \leq \int f d\phi \leq \int |f| d\phi.$$

□

Korollar 32. Seien $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $g =_\phi f$. Dann gilt $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und

$$\int f d\phi = \int g d\phi.$$

Beweis. Sei $f = f_1 - f_2$ mit $f_i \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$. Dann folgt

$$\tilde{f}_1 := g + f_2 =_\phi f + f_2 = f_1.$$

Nach Lemma 23 ist $\tilde{f}_1 \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und daher

$$g = \tilde{f}_1 - f_2 \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Die Gleichheit der Integrale folgt dann aus Punkt (ii) im vorstehenden Satz.

□

2 Die Konvergenzsätze

Die meisten „in der Praxis“ vorkommenden Funktionen sind integrierbar bezüglich aller gängigen Integralbegriffe. Der Vorteil des Lebesgueschen Integrals gegenüber dem Riemannschen oder dem Regelintegral ist sein angenehmes Verhalten bei Grenzwertprozessen im Integranden. Das ist zum Beispiel wichtig, wenn es um die Konvergenz von Approximations- oder Iterationsverfahren geht.

2.1 Der Konvergenzsatz von Beppo Levi

- Der Satz von Beppo Levi über die Integration monotoner Funktionenfolgen ist die erste „Belohnung“ für die mühevollen Integraldefinition.
- Als Anwendungen erhalten wir ein Kriterium für Integrierbarkeit und den Beweis, dass alle Riemann-integrierbaren Funktionen auch Lebesgue-integrierbar sind.
- Das Lemma von Fatou ist ein Grenzwertsatz ohne Monotonievoraussetzung.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Das folgende Lemma besagt, dass $\mathcal{L}^1(\phi)$ und $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ „nicht so stark von einander abweichen“. Wir werden später beweisen, dass bezüglich einer sehr natürlichen Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^1(\phi)$ der Unterraum $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ dicht ist: die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ ist $\mathcal{L}^1(\phi)$. Im Augenblick benötigen wir das Lemma, um Eigenschaft von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ auf $\mathcal{L}^1(\phi)$ zu übertragen.

Lemma 33. *Seien $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es $g, h \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $f = g - h$,
- (ii) $h \geq 0$,
- (iii) $\int h d\phi < \epsilon$.

Beweis. Nach Definition von $\mathcal{L}^1(\phi)$ gibt es $g_1, h_1 \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit

$$f = g_1 - h_1.$$

Sei (s_i) eine definierende Folge von Treppenfunktionen zu h_1 und $k \in \mathbb{N}$, so dass für das im Lemma vorgegebene ϵ gilt:

$$0 \leq \int h_1 d\phi - \int s_k d\phi < \epsilon.$$

Dann gilt mit $h_2 = h_1 - s_k$, $g_2 = g_1 - s_k$:

$$h_2, g_2 \in \mathcal{L}_+^1(\phi), \quad f = g_2 - h_2, \quad \int h_2 d\phi < \epsilon.$$

Weil die Folge (s_i) monoton wachsend und $\lim s_i =_\phi h_1$, ist

$$h_2 \geq_\phi 0.$$

Das ist fast die Behauptung des Lemmas, nur ist h_2 möglicherweise auf einer ϕ -Nullmenge negativ. Wir setzen daher $h := \sup(h_2, 0) \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $g := f + h$. Da diese Funktionen nur

auf einer ϕ -Nullmenge von h_2 und g_2 abweichen, sind sie ebenfalls in $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ und erfüllen die Behauptung. \square

Satz 34 (von Beppo Levi über monotone Konvergenz). Sei

$$f_0 \leq_\phi f_1 \leq_\phi f_2 \leq_\phi \dots,$$

eine ϕ -monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}^1(\phi)$ mit beschränkter Integralfolge: Es gibt $A \in \mathbb{R}$ mit

$$\int f_i d\phi \leq A \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ mit

$$f =_\phi \lim_{i \rightarrow \infty} f_i,$$

$$\int f d\phi = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\phi.$$

Analoges gilt für ϕ -monoton fallende Folgen: Betrachte $(-f_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass

$$0 = f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

mit überall geltenden Ungleichungen. Die Folge

$$\tilde{f}_i := \sup(f_0 - f_0, f_1 - f_0, f_2 - f_0, \dots, f_i - f_0)$$

hat nämlich diese Eigenschaften, und es gilt $\tilde{f}_i =_\phi f_i - f_0$ für alle i .

Den Beweis führen wir entsprechend der Definition des Integrals in drei Schritten.

1. Schritt. Seien die f_i Treppenfunktionen. Weil monotone beschränkte Folgen konvergent sind, müssen wir nur zeigen:

$$N := \left\{ x \mid (f_i(x))_i \text{ unbeschränkt} \right\} \text{ ist eine } \phi\text{-Nullmenge.} \quad (11)$$

Dann ist $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ϕ -konvergent, und aus der Definition von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ folgt der Rest der Behauptung.

Sei $\epsilon > 0$. Wir suchen eine Intervallfolge (I_j) , die N überdeckt und für die $\sum_{j=0}^{\infty} \phi(I_j) < \epsilon$.

Mit der oberen Schranke A für die Integralfolge setzen wir

$$E_i := \left\{ x \mid f_i(x) > \frac{2A}{\epsilon} \right\}.$$

Weil $f_0 = 0$, ist $E_0 = \emptyset$. Wegen der Monotonie von (f_i) ist

$$E_i \subset E_{i+1},$$

und nach Definition von N ist

$$N \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i.$$

Nun ist f_i eine Treppenfunktionen, und E_i deshalb Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle. Also sind die χ_{E_i} und damit die Funktionen $\chi_{E_i \setminus E_{i-1}} = \chi_{E_i} - \chi_{E_{i-1}}$ Treppenfunktionen. Daher gibt es eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und eine

Folge paarweise disjunkter Intervalle $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $I(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\chi_{E_i \setminus E_{i-1}} = \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \chi_{I_j}.$$

Es folgt

$$E_i = \bigcup_{0 \leq j \leq r_i} I_j \quad \text{und} \quad N \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j.$$

Weil $f_i \geq 0$, ist nach Definition von E_i

$$f_i \geq \frac{2A}{\epsilon} \chi_{E_i} = \frac{2A}{\epsilon} \sum_{j=0}^{r_i} \chi_{I_j},$$

und daher

$$A \geq \int f_i d\phi \geq \frac{2A}{\epsilon} \sum_{j=0}^{r_i} \phi(I_j)$$

oder

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi(I_j) \leq A \frac{\epsilon}{2A} < \epsilon.$$

Damit ist (11) bewiesen.

2. Schritt. Seien nun die $f_i \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit $f_i \leq f_{i+1}$. Nach Definition von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ gibt es dann zu jedem i eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $(s_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_{ij} =_\phi f_i \quad \text{und} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int s_{ij} d\phi = \int f_i d\phi.$$

Die Funktionen

$$s_k := \sup_{i,j \leq k} s_{ij}.$$

sind Treppenfunktion. Offenbar gilt

$$s_k \leq s_{k+1}.$$

Aus der Monotonie und ϕ -Konvergenz von $(s_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ sowie der Monotonie von $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ folgt

$$s_{ij} \leq_\phi f_i \leq f_k \quad \text{für alle } i, j \leq k,$$

und daher

$$s_k \leq_\phi f_k \quad \text{und} \quad \int s_k d\phi \leq \int f_k d\phi \leq A. \quad (12)$$

Nach dem 1. Schritt ist die Folge (s_k) daher ϕ -konvergent gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $\lim \int s_k d\phi = \int f d\phi$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$f_k \leq_\phi f, \quad (13)$$

dann folgt aus (12) die Behauptung. Für $i \leq k$ ist

$$s_{ik} \leq s_k \leq_\phi f.$$

Für $k \rightarrow \infty$ geht die linke Seite aber fast überall gegen f_i , und damit folgt (13).

3. Schritt. Seien nun die $f_i \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Wir schreiben mit Hilfe von Lemma 33

$$f_i = \sum_{j=1}^i (f_j - f_{j-1}) = \sum_{j=1}^i (g_j - h_j) = \underbrace{\sum_{j=1}^i g_j}_{=: \tilde{g}_i} - \underbrace{\sum_{j=1}^i h_j}_{=: \tilde{h}_i}.$$

Dabei seien $g_j, h_j \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit

$$f_j - f_{j-1} = g_j - h_j, \quad h_j \geq 0, \quad \int h_j d\phi \leq \frac{1}{2^{j+1}}.$$

Weil die $f_j - f_{j-1}$ wegen der vorausgesetzten Monotonie nicht negativ sind, sind mit den h_j auch die $g_j \geq 0$. Dann sind aber $(\tilde{g}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ -Funktionen mit beschränkten Integralfolgen

$$\int \tilde{h}_i d\phi < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = 1, \quad \int \tilde{g}_i d\phi = \int \tilde{h}_i d\phi + \int f_i d\phi < 1 + A.$$

Nach dem 2. Schritt sind sie ϕ -konvergent gegen $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ bzw. $h \in \mathcal{L}^1(\phi)$, und die Integrale konvergieren gegen $\int g d\phi$ bzw. $\int h d\phi$.

Damit ist $f_i = \tilde{g}_i - \tilde{h}_i$ für $i \rightarrow \infty$ fast überall konvergent gegen $f := g - h \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und die Integrale konvergieren gegen $\int f d\phi$. \square

Korollar 35 (Integrierbarkeitskriterium). Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Intervallen mit folgenden Eigenschaften

(i) $f \geq_\phi 0$.

(ii) $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$ und $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j = \mathbb{R}^n$.

(iii) Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist

$$f \chi_{I_j} \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

(iv) Die Integralfolge $(\int f \chi_{I_j} d\phi)_{j \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und

$$\int f d\phi = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f \chi_{I_j} d\phi.$$

Zusatz: Ist die Integralfolge unbeschränkt, so ist $f \notin \mathcal{L}^1(\phi)$.

Beweis. Die Folge $(f \chi_{I_j})_{j \in \mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen des Beppo Levi, und sie konvergiert überall gegen f . Daraus folgt die Behauptung. Den Zusatz beweisen Sie selbst. \square

Beispiel 36. Konkret betrachten wir

$$f = \frac{1}{x^2} \chi_{[1, \infty[} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich $\phi = \mu_1$ und die Intervallfolge $I_j := [-j, j]$. Dann ist $f \chi_{I_j}$ eine Regelfunktion und nach Satz 29 ist

$$\int f \chi_{I_j} = \int_1^j \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^j = 1 - \frac{1}{j} < 1.$$

Es folgt $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$ und

$$\int f d\mu_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1.$$

\square

Korollar 37. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$, $f \geq_\phi 0$ und $\int f d\phi = 0$. Dann ist $f =_\phi 0$.

Beweis. Die Folge $(if)_i$ ist wegen $f \geq_\phi 0$ monoton wachsend und hat eine beschränkte Integralfolge: $\int (if) d\phi = i \int (f) d\phi = 0$. Also ist (if) fast-überall konvergent. Das ist aber nur der Fall, wenn $f =_\phi 0$. \square

Beispiel 38 (Lebesgueintegral und Riemannintegral). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zu jedem $\epsilon > 0$ gebe es Treppenfunktionen g, h , so dass

$$g \leq f \leq h \quad \text{und} \quad \int (h - g) d\mu_1 < \epsilon.$$

Dann hat f kompakten Träger in einem Intervall $[a, b]$, und die vorstehende Bedingung bedeutet gerade, dass f über $[a, b]$ im Sinne von Riemann integrierbar ist.

Man findet (mittels sup- und inf-Bildung) Folgen $(g_i), (h_i)$ von Treppenfunktionen mit

$$g_i \leq g_{i+1} \leq f \leq h_{i+1} \leq h_i \quad \text{und} \quad \int (h_i - g_i) d\mu_1 < \frac{1}{i}.$$

Diese sind nach dem Satz von B. Levi μ_1 -konvergent gegen $g, h \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$ mit

$$g \leq_{\mu_1} f \leq_{\mu_1} h \quad \text{und} \quad \int (h - g) d\mu_1 = 0.$$

Nach dem Korollar ist $g =_{\mu_1} h$, also $f =_{\mu_1} g$ und daher $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$. Weiter folgt

$$\int f d\mu_1 = \int g d\mu_1 = \lim \int g_i d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

Folgerung: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar im Sinne von Riemann, so ist die außerhalb von $[a, b]$ mit 0 fortgesetzte Funktion \tilde{f} integrierbar bezüglich μ_1 . Kurz: Riemann-integrierbare Funktionen sind Lebesgue-integrierbar und ihr Riemannsches Integral ist gleich dem Lebesgueschen.

Das gilt mit derselben Argumentation auch auf dem \mathbb{R}^n . \square

Aber das Grenzwertverhalten für Folgen integrierbarer Funktionen ist in der Lebesgueschen Theorie viel besser als beim Regel- oder Riemannintegral:

Beispiel 39. Wir betrachten die Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_i := \chi_{[0, 1] \cap \frac{1}{i}\mathbb{Z}}.$$

Also ist $f_i(x) = 1$, wenn $0 \leq x \leq 1$ und $i!x \in \mathbb{Z}$, und sonst = 0. Offenbar gilt

$$f_i \leq f_{i+1} \leq \chi_{[0, 1]}$$

und

$$f := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \chi_{[0, 1] \cap \mathbb{Q}}.$$

Die f_i sind Treppenfunktionen, insbesondere also Regel- und Riemann-integrierbar. Ihr Grenzwert f ist zwar beschränkt, aber keine Regelfunktion und nicht Riemann-integrierbar. Nach dem Satz von Beppo Levi (oder weil $f =_{\mu_1} 0$) ist f aber bezüglich μ_1 Lebesgue-integrierbar und $\int f d\mu_1 = \lim \int f_i d\mu_1 = 0$. \square

Wenn man im Satz von Beppo Levi auf die Voraussetzung der Monotonie verzichtet, wird die Behauptung falsch, wie das Beispiel der Folge $f_i = (-1)^i \chi_{[0, 1]} \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$ zeigt. Setzt man aber schon voraus, dass die Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{L}^1(\phi)$ -Funktionen fast überall gegen eine Funktion f konvergiert, so kann man fragen, unter welchen Voraussetzungen $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ ist und was man über $\int f d\phi$ weiß. Eine Antwort darauf gibt das folgende Lemma von Fatou, eine andere der Konvergenzsatz von Lebesgue im nächsten Abschnitt.

Um diesen Themenkreis aber wirklich gut zu verstehen, müßte man Beispiele haben, in denen die Grenzfunktion *nicht* integrierbar ist. Nichtintegrierbarkeit kann grob gesprochen drei Ursachen haben:

- Die Funktion ist “zu unbeschränkt”, ihre Werte werden zu groß.
- Die Funktionswerte für großes $\|x\|$ gehen nicht schnell genug gegen 0.
- Die Funktion ist zu “zappelig”, zu irregulär.

Die Folgen $(\frac{1}{x} \chi_{[\frac{1}{i+1}, 1]})_{i \in \mathbb{N}}$ oder $(\chi_{[-i, i]})_{i \in \mathbb{N}}$ liefern Grenzfunktionen, die aus dem ersten oder zweiten Grund nicht μ_1 -integrierbar sind. Nicht integrierbare Funktionen der dritten Art, also nicht integrierbare *beschränkte* reelle Funktionen *mit kompaktem Träger* sind außerordentlich schwierig zu finden. Vergleichen Sie dazu Beispiel 74.

Satz 40 (Lemma von Fatou). Sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge **nicht negativer** Funktionen in $\mathcal{L}^1(\phi)$ mit beschränkter Integralfolge

$$\int f_i d\phi \leq A.$$

Sie sei ϕ -konvergent gegen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und

$$\int f d\phi \leq \liminf \int f_i d\phi \leq A.$$

Beweis. Zunächst ist die Folge

$$g_i := \inf(f_0, f_1, \dots, f_i)$$

monoton fallend und $g_i \geq_\phi 0$. Also ist die Integralfolge beschränkt, und nach dem Satz von Beppo Levi ist die Folge ϕ -konvergent gegen die integrierbare Funktion

$$h_0 := \inf(f_0, f_1, \dots) \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Nach demselben Argument sind die Funktionen

$$h_i := \inf(f_i, f_{i+1}, \dots)$$

integrierbar, und sie bilden eine monoton wachsende Folge. Wegen $h_i \leq f_i$ ist die Integralfolge der h_i durch A nach oben beschränkt, und nach dem Satz von Beppo Levi ist h_i ϕ -konvergent gegen eine Funktion $h \in \mathcal{L}^1(\phi)$ mit $\int h d\phi \leq A$. Andererseits ist außerhalb einer ϕ -Nullmenge

$$f(x) = \lim f_i(x) = \liminf f_i(x) = h(x).$$

Also ist $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $\int f d\phi \leq A$.

Ist weiter $B := \liminf \int f_i d\phi$, so gibt es eine Teilfolge (f_{i_k}) , für die $B = \lim_k \int f_{i_k} d\phi$. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Teilfolge (f_{i_k}) mit $\int f_{i_k} d\phi \leq B + \epsilon$ für alle k . Weil auch $\lim_k f_{i_k} =_\phi f$, folgt nach dem oben Bewiesenen

$$\int f d\phi \leq B + \epsilon$$

für jedes $\epsilon > 0$ und daraus

$$\int f d\phi \leq B = \liminf \int f_i d\phi.$$

□

Beispiel 41. Betrachten Sie $(f_i = \chi_{[i, i+1]})_{i \in \mathbb{N}}$ bezüglich μ_1 .

□

2.2 Der Konvergenzsatz von Lebesgue

- Dieses ist neben Beppo Levi und Fatou der dritte wichtige Konvergenzsatz der Lebesgueschen Theorie.
- Als Anwendung erhalten wir einen oft benutzen Satz über die Differentiation von Integralen nach einem Parameter im Integranden. Wir untersuchen auch die Notwendigkeit der dabei gemachten Voraussetzungen.
- Eine Anwendung des Differentiationssatzes ist die “Glättung” stetiger Funktionen durch Faltung mit einer geeigneten “Kernfunktion”. (Gleitender Mittelwert)

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Satz 42 (von Lebesgue über dominierte Konvergenz). Sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\phi)$, die durch eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ dominiert wird:

$$|f_i| \leq_\phi g \quad \text{für alle } i.$$

Weiter sei die Folge ϕ -konvergent gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f =_\phi \lim_{i \rightarrow \infty} f_i.$$

Dann folgt

$$f \in \mathcal{L}^1(\phi) \quad \text{und} \quad \int f d\phi = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\phi.$$

Beweis. Die Folgen $(g + f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(g - f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\phi)$ erfüllen die Voraussetzungen des Lemmas 40 von Fatou (mit $A = 2 \int g d\phi$).

Nach dem Lemma ist $g \pm f \in \mathcal{L}^1(\phi)$, also auch $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$, und es gilt

$$\liminf \int (g + f_i) d\phi \geq \int (g + f) d\phi \quad \text{und} \quad \liminf \int (g - f_i) d\phi \geq \int (g - f) d\phi.$$

Daher ist

$$\liminf \int f_i d\phi \geq \int f d\phi \tag{14}$$

und

$$-\limsup \int f_i d\phi = \liminf \int (-f_i) d\phi \geq - \int f d\phi.$$

oder

$$\limsup \int f_i d\phi \leq \int f d\phi. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt

$$\lim \int f_i d\phi = \int f d\phi.$$

□

Auf die Majorante kann man nicht verzichten:

Beispiel 43. Die Funktionenfolge $((i + 1)^2 \chi_{]0, \frac{1}{i+1}[})_{i \in \mathbb{N}}$ von μ_1 -integrierbaren Funktionen konvergiert überall gegen 0, die Grenzfunktion ist integrierbar, aber die Integralfolge konvergiert nicht. Die Funktionenfolge ist nicht $\mathcal{L}^1(\mu_1)$ -dominiert.

□

Satz 44 (Differentiation unter dem Integral). Sei

$$f : \mathbb{R}^n \times]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x, t) =: f_t(x).$$

Es gelte:

- (i) Für alle $t \in]a, b[$ ist $f_t \in \mathcal{L}^1(\phi)$.
- (ii) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar.
- (iii) Es gibt $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$, so dass $|\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)| \leq_\phi g$ für alle $t \in]a, b[$.³

Dann ist

$$F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int f_t d\phi \quad \text{differenzierbar,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\phi) \quad \text{für jedes } t \in]a, b[$$

und

$$\frac{d}{dt} \int f_t d\phi = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) d\phi.$$

Beweis. Wir setzen

$$F(t) := \int f_t d\phi.$$

Sei (t_i) eine gegen t konvergente Folge in $]a, b[\setminus \{t\}$. Dann ist

$$\frac{1}{t_i - t} (F(t_i) - F(t)) = \int \underbrace{\frac{f_{t_i} - f_t}{t_i - t}}_{\in \mathcal{L}^1(\phi)} d\phi \tag{16}$$

Nun ist für fast alle x

$$\left| \frac{f_{t_i} - f_t}{t_i - t}(x) \right| = \left| \frac{f(x, t_i) - f(x, t)}{t_i - t} \right| \stackrel{MWS}{=} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_i^*) \right| \leq g(x).$$

Also ist nach dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f_{t_i} - f_t}{t_i - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\phi)$$

und

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \frac{f_{t_i} - f_t}{t_i - t} d\phi = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) d\phi.$$

□

Konvention. Wir schreiben

$$\int f \chi_{]a, b[} d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx,$$

falls die linke Seite existiert. Das ist sinnvoll, weil das Lebesgueintegral das Riemannintegral erweitert.

³Das ist zum Beispiel erfüllt, wenn $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq M \chi_K$ für ein $M \in \mathbb{R}$ und kompaktes $K \in I(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 45. Wichtige Beispiele, in denen die Differentiation nach einem Parameter unter dem Integral eine Rolle spielen, liefern

- die Gammafunktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$,
- die Laplacetransformation $F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$.

(Beachten Sie hier die (traditionelle) Namensgebung für die Variablen.)

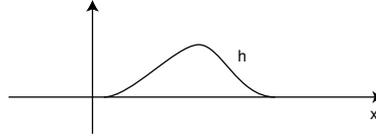
□

Aber nicht immer kann man die Ableitung nach einem Parameter in das Integral hineinziehen:

Beispiel 46 (Boris Springborn).

Wir betrachten eine stetig differenzierbare nicht negative Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $c := \int h d\mu_1 > 0$. Dazu betrachten wir die “von rechts kommende Welle”

$$f(x, t) := th\left(x - \frac{1}{t}\right), \quad f(x, 0) := 0.$$



Dann existieren

$$\int f(\cdot, t) d\mu_1 = tc \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \begin{cases} h\left(x - \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t} h'\left(x - \frac{1}{t}\right) & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Für den zweiten Fall beachte, dass

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} h\left(x - \frac{1}{t}\right) = 0,$$

weil h kompakten Träger hat. Die partielle Ableitung ist für alle t bezüglich x integrierbar, und es ist

$$\int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, 0) d\mu_1 = \int 0 d\mu_1 = 0 \neq c = \frac{d}{dt} \int f(\cdot, t) d\mu_1.$$

Also kann man die t -Ableitung nicht in das Integral hineinziehen.

□

Beispiel 47 (Glättungsoperator, Faltung). Sei $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-negativ, stetig differenzierbar mit Träger in einem (kleinen) Intervall $[-\delta, \delta]$ und $\int \rho d\mu_1 = 1$. (Vergleichen Sie den Abschnitt 4.3 im Skriptum zur Analysis I. Zum Beispiel kann man definieren

$$\rho(x) = \frac{\tau(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \tau d\mu_1}$$

wobei $\tau(x) := \exp\left(\frac{1}{x^2 - \delta^2}\right)$ für $x^2 < \delta^2$ und $\tau(x) = 0$ sonst.)

Der besseren Übersicht wegen benutzen wir im folgenden die oben gemachte Konvention

$$\int_a^b f(x) dx := \int f(x) \chi_{[a, b]} d\mu_1.$$

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$ definieren wir dann die *Faltung* mit ρ als

$$\tilde{f}(t) := f * \rho(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(t-x) dx = \int_{t-\delta}^{t+\delta} f(x)\rho(t-x) dx.$$

Wir erhalten also \tilde{f} aus f durch gleitende, gewichtete Mittelung der Funktionswerte um jede Stelle t .

Das setzt natürlich voraus, dass $x \mapsto f(x)\rho(t-x) \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$. Wir werden später sehen, dass das wahr ist, vgl. Beispiel 51 und Satz 54.

Offenbar ist $t \mapsto f(x)\rho(t-x)$ für jedes x differenzierbar und es gilt

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x)\rho(t-x) \right| \leq (\sup_{t \in \mathbb{R}} |\rho'(t)|) |f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mu_1).$$

Daher ist \tilde{f} nach dem Satz differenzierbar und

$$\tilde{f}'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho'(t-x) dx.$$

Bemerkung: Ist f gleichmäßig stetig und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(t)| < \epsilon$, falls $|t - x| < \delta$. Wähle zu δ ein entsprechendes ρ . Dann hat man für alle t

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t-x) dx = 1, \text{ also } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\rho(t-x) dx.$$

Weil $\rho(t-x) = 0$ für $|t-x| \geq \delta$ gilt weiter, dass

$$\begin{aligned} |f(t) - \tilde{f}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\rho(t-x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(t-x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(x)|\rho(t-x) dx \\ &\leq \int_{t-\delta}^{t+\delta} |f(t) - f(x)|\rho(t-x) dx \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Gleichmäßig stetige Funktionen lassen sich also gleichmäßig durch differenzierbare Funktionen approximieren. □

3 Messbare Funktionen

- Wir lernen mit den messbaren Funktionen eine Klasse von Funktionen kennen, die gegenüber algebraischen Operationen wie gegenüber der ϕ -Konvergenz abgeschlossen ist, in der man also erstaunlich sorglos rechnen kann, die andererseits aber ganz nah an der Klasse der integrierbaren Funktionen liegt:
- Die Nichtintegrierbarkeit einer Funktion kann zwei Gründe haben: Die Funktion ist "zu groß", so dass das "Integral" unendlich wird. Oder die Funktion ist so "zappelig", dass das "Integral" völlig sinnlos ist. Messbare Funktionen sind solche, die nur aus dem ersten Grund nicht integrierbar sind. Wenn man sie geeignet "kupiert", werden sie integrierbar, vgl. Satz 57.

Definition 48. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ϕ -messbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die ϕ -konvergent gegen f ist.

Beispiel 49. $\mathcal{L}^1(\phi)$ -Funktionen sind ϕ -messbar. □

Im Gegensatz zur Integrierbarkeit ist Messbarkeit eine „lokale“ Eigenschaft:

Satz 50. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f \text{ messbar} \iff \forall I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \ f \chi_I \text{ messbar.}$$

Beweis. Zu (\Rightarrow). Ist $\lim s_j =_\phi f$, so folgt $\lim s_j \chi_I =_\phi f \chi_I$ für jedes $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$.

Zu (\Leftarrow). Sei $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter beschränkter Intervalle mit $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=0}^\infty I_j$. Weil $f \chi_{I_j}$ messbar ist, gibt es eine Folge $(s_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen und eine ϕ -Nullmenge N_j mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{jk}(x) \chi_{I_j}(x) = f(x) \chi_{I_j}(x) \text{ für alle } x \notin N_j.$$

Definiere die ϕ -Nullmenge $N := \bigcup N_j$ und

$$s_k := \sum_{j=0}^k s_{jk} \chi_{I_j}.$$

Ist $x \in I_l \setminus N$ und $k \geq l$, so ist

$$s_k(x) = s_{lk}(x) \rightarrow f(x).$$

Damit ist f ϕ -meßbar. □

Beispiel 51. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Komplement einer ϕ -Nullmenge stetig, so ist f ϕ -messbar.

Beweis. Sei $W \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ein beschränktes Intervall vom Durchmesser A . Nach Satz 50 müssen wir nur zeigen, dass $f \chi_W$ ϕ -messbar ist. Wir zerlegen W durch sukzessive Seitenhalbierung und Anwendung des Zerlegungslemmas in paarweise disjunkte Intervalle I_{k1}, \dots, I_{kr_k} vom Durchmesser $< \frac{A}{2^k}$ und wählen $x_{kj} \in I_{kj}$. Dann definiert

$$f_k := \sum_{j=1}^{r_k} f(x_{kj}) \chi_{I_{kj}}$$

eine Folge von Treppenfunktionen, die in allen Stetigkeitspunkten von f gegen f konvergiert. □

Beispiel 52. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, so existieren in jedem Punkt der links- und der rechtsseitige Funktionslimes, d.h. alle Unstetigkeitsstellen sind Sprungstellen. In dem kompakten Intervall $[a, b]$ hat f höchstens n Sprungstellen mit Sprung $\geq \frac{|f(b)-f(a)|}{n}$, also in dem kompakten Intervall und dann auch auf ganz \mathbb{R} höchstens abzählbare viele Unstetigkeitsstellen. Also sind monotone Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich μ_1 messbar. □

Die folgenden Sätze 53 und 56 zeigen, dass der Begriff der *Messbarkeit* flexibler ist als der der *Integrierbarkeit*. Weil andererseits diese Begriff aber eng zusammenhängen (vgl. Sätze 54 und 57), sind die messbaren Funktionen ein hilfreiches Instrument in der Integrationstheorie.

Satz 53. (i) Die ϕ -messbaren Funktionen bilden einen \mathbb{R} -Vektorraum.

(ii) Der Raum der ϕ -messbaren Funktionen ist abgeschlossen bezüglich endlicher Produkte und endlicher inf- bzw. sup-Bildung.

(iii) Der Quotient von ϕ -messbaren Funktionen ist ϕ -messbar, wenn der Nenner nur auf einer ϕ -Nullmenge verschwindet.

(iv) Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ϕ -messbar und $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J mit $f(\mathbb{R}^n) \subset J$, so ist $h \circ f$ ebenfalls ϕ -messbar.

Beweis. Zu (i) und (ii). Es ist klar, dass die Treppenfunktionen einen gegen Multiplikation, inf und sup abgeschlossenen Vektorraum bilden. Daraus folgt unmittelbar dasselbe für die ϕ -messbaren Funktionen.

Zu (iii). Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fast-überall $\neq 0$. Sei (s_i) eine Folge von Treppenfunktionen, die fast-überall gegen f konvergiert. Definiere

$$t_i(x) := \begin{cases} \frac{1}{s_i(x)}, & \text{falls } s_i(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die fast-überall gegen $\frac{1}{f}$ konvergiert.

Zu (iv). Ich führe den Beweis nur für den Spezialfall

$$J = [a, b[\text{ mit } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Es ist dann klar, wie die anderen Fälle gehen. Sei also (s_i) eine Folge von Treppenfunktionen, die auf dem Komplement der ϕ -Nullmenge N gegen f konvergiert. Beachten Sie, dass zu jedem $x \notin N$ ein i_0 existiert, so dass $s_i(x) < b$ für alle $i \geq i_0$. Wir wählen ein $b' \in]a, b[$ und definieren

$$\tilde{s}_i(x) := \begin{cases} s_i(x), & \text{falls } s_i(x) \in J \\ b', & \text{falls } s_i(x) \geq b \\ a, & \text{falls } s_i(x) < a. \end{cases}$$

Das liefert eine Funktionsfolge, die ebenfalls auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ gegen f konvergiert, und deren Werte in J liegen. Die Funktionen $h \circ \tilde{s}_i$ konvergieren wegen der Stetigkeit von h dann auf dem Komplement von N gegen $h \circ f$, und sie sind „beinahe“ Treppenfunktionen, nur haben sie im allgemeinen keinen kompakten Träger. Aber die Funktionen

$$f_i := \chi_{[-i, i]^n} h \circ \tilde{s}_i$$

bilden eine Folge von *Treppenfunktionen*, die überall dort gegen $h \circ f$ konvergiert, wo $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen f konvergiert. \square

Satz 54 (Messbarkeit und Integrierbarkeit 1). Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. f sei ϕ -messbar und $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Dann gilt

$$(i) \quad |f| \leq_\phi g \implies f \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

$$(ii) \quad f \text{ beschränkt} \implies fg \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Beweis. Zu (i). Wir nehmen zunächst an, dass $f \geq 0$. Sei $f =_\phi \lim s_i$ für eine Folge von Treppenfunktionen (s_i) . Wir können o.E. annehmen, dass die $s_i \geq 0$. Dann ist

$$f =_\phi \lim(\inf(s_i, g)),$$

mit $\inf(s_i, g) \in \mathcal{L}^1(\phi)$, $0 \leq \inf(s_i, g) \leq g$. Also ist nach dem Satz von Lebesgue $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$.

Ist f beliebig, so gilt

$$f = \sup(f, 0) - \sup(-f, 0),$$

wobei beide Summanden durch g dominiert werden. Weil $\sup(f, 0)$, $\sup(-f, 0) \geq 0$ sind sie nach dem vorstehenden Beweis in $\mathcal{L}^1(\phi)$, also ist auch ihre Differenz ϕ -integrierbar.

Zu (ii). fg ist messbar und $|fg| \leq \underbrace{\sup |f|}_{< \infty} |g|$. Mit g ist auch $|g| \in \mathcal{L}^1(\phi)$, und deshalb folgt

die Behauptung aus Teil (i). \square

Beispiel 55. Die Aussage (ii) liefert ein hinreichendes Kriterium für die Integrierbarkeit des Produktes zweier integrierbarer Funktionen.

Beachten Sie dagegen, dass $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{]0, 1]} \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$, aber $f^2(x) = \frac{1}{x} \chi_{]0, 1]} \notin \mathcal{L}^1(\mu_1)$.

\square

Satz 56. Seien (f_i) eine Folge ϕ -messbarer Funktionen und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(i) \quad f =_\phi \lim f_i \implies f \text{ ist } \phi\text{-messbar.}$$

$$(ii) \quad f = \sup(f_0, f_1, \dots) \implies f \text{ ist } \phi\text{-messbar.}$$

$$(iii) \quad f = \inf(f_0, f_1, \dots) \implies f \text{ ist } \phi\text{-messbar.}$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung (i) zu beweisen, weil z.B.

$$\inf(f_0, f_1, \dots) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf(f_0, \dots, f_k)$$

Das Infimum endlich vieler messbarer Funktionen f_0, \dots, f_k ist aber nach Satz 53 messbar.

1. Fall: $|f_i| \leq 1$ für alle i . Wegen Satz 50 müssen wir nur zeigen, dass $f \chi_I$ für jedes $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ messbar ist.

Sei also $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 54 (ii) gilt für alle i

$$f_i \chi_I \in \mathcal{L}^1(\phi) \quad \text{und} \quad |f_i \chi_I| \leq \chi_I \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Nach dem Satz von Lebesgue ist daher

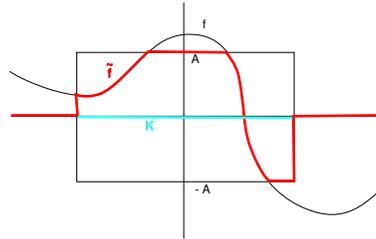
$$f \chi_I = \phi \lim_{i \rightarrow \infty} (f_i \chi_I) \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Insbesondere ist $f \chi_I$ messbar.

2.Fall: f_i beliebig. Nach Satz 53 ist $(\tanh f_i)$ eine Folge messbarer Funktionen, die ϕ -konvergent ist gegen $\tanh f$. Nach dem 1. Fall ist $\tanh f$ messbar. Dann ist aber auch $f = \tanh^{-1} \circ \tanh \circ f$ messbar. \square

Bemerkung. Langsam sehnt man sich nach einem Beispiel einer nicht messbaren Funktion. Solche sind sehr schwer anzugeben, vgl. Beispiel 74. Alle "halbwegs anständigen" Funktionen sind messbar.

Durch „vertikales und horizontales Stützen“ wird aus einer messbaren Funktion f eine integrierbare Funktion \tilde{f} , und das ist charakteristisch für messbare Funktionen:



Satz 57 (Messbarkeit und Integrierbarkeit 2). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ϕ -messbar, wenn für jedes $A > 0$ und jedes $K \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ die „gestutzte“ Funktion

$$\tilde{f} = \inf(\sup(f, -A\chi_K), +A\chi_K)$$

in $\mathcal{L}^1(\phi)$ ist.

Beweis. Zu (\Rightarrow). Nach Satz 53 ist \tilde{f} ϕ -messbar. Weiter gilt

$$|\tilde{f}| \leq A\chi_K \in \mathcal{L}^1(\phi),$$

und daher ist $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\phi)$ nach dem Satz 54.

Zu (\Leftarrow). Es gilt

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf(\sup(f, -k\chi_{[-k, k]^n}), +k\chi_{[-k, k]^n}).$$

Die Behauptung folgt daher aus Satz 56. \square

4 Sukzessive Integration: Fubini und Tonelli

- In diesem Abschnitt lernen wir, wie man mehrdimensionale Integrale auf niedrigerdimensionale reduzieren kann. Das ist insbesondere von Bedeutung für die Integration bezüglich des Lebesguemaßes $\mu_n = \mu_1 \times \dots \times \mu_1$.

Satz 58 (Fubini). Seien ϕ_1 und ϕ_2 Maße auf \mathbb{R}^{n_1} bzw. \mathbb{R}^{n_2} , und sei $\phi = \phi_1 \times \phi_2$ das Produktmaß auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$.

Dann gilt:

(i) Für ϕ_1 -fast alle x_1 ist $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$.

(ii) Die (für ϕ_1 -fast-alle x_1 definierte) Funktion

$$F : x_1 \mapsto \int f(x_1, \cdot) d\phi_2$$

ist in $\mathcal{L}^1(\phi_1)$ und

$$\int F d\phi_1 = \int f d\phi.$$

Die Rollen von ϕ_1 und ϕ_2 lassen sich dabei vertauschen.

Kurzform:

$$\int f d\phi = \int \left(\int f d\phi_2 \right) d\phi_1 = \int \left(\int f d\phi_1 \right) d\phi_2, \quad \text{falls die linke Seite existiert.}$$

Beweis. Vorbemerkung. Gilt der Satz für Funktionen f_1, \dots, f_k , so auch für deren Linearkombinationen. Das folgt unmittelbar aus der Linearität des Integrals.

Teil 1: Der Satz gilt für Treppenfunktionen.

Nach der Vorbemerkung können wir uns auf den Fall $f = \chi_I$ mit $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ beschränken. Sei $I = I_1 \times I_2$ die offensichtliche Zerlegung. Dann ist also für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$

$$f(x_1, x_2) = \chi_{I_1}(x_1) \chi_{I_2}(x_2).$$

Es folgt

$$f(x_1, \cdot) = \chi_{I_1}(x_1) \chi_{I_2} \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$$

und

$$F(x_1) = \int \chi_{I_1}(x_1) \chi_{I_2} d\phi_2 = \phi_2(I_2) \chi_{I_1}(x_1).$$

Damit ist F eine Treppenfunktion und $\in \mathcal{L}^1(\phi_1)$. Schließlich ist

$$\int F d\phi_1 = \phi_2(I_2) \int \chi_{I_1} d\phi_1 = \phi_2(I_2) \phi_1(I_1) = \phi(I) = \int f d\phi.$$

Teil 2: Ein Lemma. Zum weiteren Beweis brauchen wir das folgende

Lemma 59. Unter den Voraussetzungen des Satzes sei M eine ϕ -Nullmenge. Dann ist für ϕ_1 -fast alle x_1 die Menge

$$M_{x_1} = \{x_2 \mid (x_1, x_2) \in M\}$$

eine ϕ_2 -Nullmenge.

Beweis des Lemmas. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $(I_{kj})_j$ eine Folge von Intervallen mit

$$M \subset \cup_{j=0}^{\infty} I_{kj} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \phi(I_{kj}) < \frac{1}{2^{k+1}}. \quad (17)$$

Definiere

$$g_l := \sum_{k,j \leq l} \chi_{I_{kj}}.$$

Offenbar ist $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, und nach (17) ist die Integralfolge beschränkt:

$$\int g_l d\phi = \sum_{k,j \leq l} \phi(I_{kj}) \leq \sum_{k=0}^l \frac{1}{2^{k+1}} \leq 1.$$

Für $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ definieren wir

$$G_l(x_1) := \int g_l(x_1, \cdot) d\phi_2.$$

Dann ist $(G_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf dem \mathbb{R}^{n_1} , und nach dem Teil 1 unseres Beweises ist die Integralfolge beschränkt:

$$\int G_l d\phi_2 = \int g_l d\phi \leq 1.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi gibt es daher eine ϕ_1 -Nullmenge N_1 , so dass $(G_l(x_1))_{l \in \mathbb{N}}$ für alle $x_1 \notin N_1$ konvergiert. Wir wollen zeigen, dass M_{x_1} für $x_1 \notin N_1$ eine ϕ_2 -Nullmenge ist.

Sei also $x_1 \notin N_1$. Wir betrachten eine weitere monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, nämlich $(g_l(x_1, \cdot))_{l \in \mathbb{N}}$. Die zugehörige Integralfolge ist wegen

$$\int g_l(x_1, \cdot) d\phi_2 = G_l(x_1)$$

konvergent und damit beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi gibt es also eine ϕ_2 -Nullmenge N_2 , so dass $(g_l(x_1, x_2))_{l \in \mathbb{N}}$ für alle $x_2 \notin N_2$ konvergiert.

Aber: Für $(x_1, x_2) \in M$, d.h. für $x_2 \in M_{x_1}$, gibt es zu jedem k ein j mit $(x_1, x_2) \in I_{kj}$. Daher liegt (x_1, x_2) in unendlich vielen der I_{kj} und $(g_l(x_1, x_2))_{l \in \mathbb{N}}$ ist divergent. Ist also $x_1 \notin N_1$, so ist $M_{x_1} \subset N_2$ und damit eine ϕ_2 -Nullmenge. \square

Teil 3: Der Satz gilt für $f \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$. Für welche x_1 ist $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$?

Sei $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i =_{\phi} f, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int s_i d\phi = \int f d\phi.$$

Dann haben wir also eine ϕ -Nullmenge

$$M := \{(x_1, x_2) \mid (s_i(x_1, x_2))_{i \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht gegen } f(x_1, x_2)\}.$$

Nach dem Lemma aus Teil 2 gibt es eine ϕ_1 -Nullmenge N_1 , so dass M_{x_1} für alle $x_1 \notin N_1$ eine ϕ_2 -Nullmenge ist. Das heißt, für alle $x_1 \notin N_1$ gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i(x_1, \cdot) =_{\phi_2} f(x_1, \cdot).$$

Nun ist $(s_i(x_1, \cdot))_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Treppenfunktionsfolge. Wir untersuchen für $x_1 \notin N_1$ die Integralfolge

$$S_i(x_1) = \int s_i(x_1, \cdot) d\phi_2.$$

Das ist aber (für beliebiges $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$) eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, für die nach Teil 1

$$\int S_i d\phi_1 = \int s_i d\phi \rightarrow \int f d\phi. \quad (18)$$

Die $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bilden also eine “Beppo-Levi-Folge”: Es gibt eine ϕ_1 -Nullmenge \tilde{N}_1 , so dass $(S_i(x_1))_{i \in \mathbb{N}}$ für alle $x_1 \notin N_1 \cup \tilde{N}_1$ konvergiert, also beschränkt ist.

Dann ist auch $(s_i(x_1, \cdot))_{i \in \mathbb{N}}$ eine “Beppo Levi-Folge”, ihr ϕ_2 -Grenzwert ist ϕ_2 -integrierbar und die Integrale konvergieren:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i(x_1, \cdot) =_{\phi_2} f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$$

und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_i(x_1) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int s_i(x_1, \cdot) d\phi_2 = \int f(x_1, \cdot) = F(x_1).$$

Weiter liefert Beppo Levi für die Folge $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dass $F \in \mathcal{L}^1(\phi_1)$ und

$$\int F d\phi_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \int S_i d\phi_1 \stackrel{(18)}{=} \int f d\phi.$$

Teil 4: Schluss des Beweises: $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Die Behauptung folgt in diesem Falle aus Teil 3 und der Vorbemerkung. \square

Beispiel 60. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := (x^2 + y^2)\chi_{[0,1]^2}(x, y)$$

ist stetig auf einem kompakten Intervall, also nach Beispiel 28 μ_2 -integrierbar. Nach Fubini gilt

$$\int f d\mu_2 = \int \left(\int f(x, y) d\mu_1 \right) d\mu_1 = \int \left(\int (x^2 + y^2)\chi_{[0,1]}(y)\chi_{[0,1]}(x) d\mu_1 \right) d\mu_1.$$

Die μ_1 -Integrale sind aber nach Satz 29 dasselbe wie die entsprechenden Regelintegrale. Wir erhalten

$$\int f d\mu_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left(yx^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{2}{3}.$$

\square

Bemerkung. Oft ist es nicht so schwer, die Existenz eines oder beider iterierter Integrale $\int (\int f d\phi_1) d\phi_2$ und $\int (\int f d\phi_2) d\phi_1$ zu zeigen. Leider folgt daraus im allgemeinen aber nicht, dass $f \in \mathcal{L}^1(\phi_1 \times \phi_2)$, so dass man den Satz von Fubini nicht anwenden kann. (Ein Beispiel können Sie in den Übungen konstruieren.) Man muß dazu etwas mehr verlangen:

Satz 61 (Tonelli). Seien ϕ_1 und ϕ_2 Maße auf \mathbb{R}^{n_1} bzw. \mathbb{R}^{n_2} , und sei $\phi = \phi_1 \times \phi_2$ das Produktmaß auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Sei $f : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ ϕ -messbar. Ferner existiere eines der beiden folgenden Integrale:

$$\int \left(\int |f| d\phi_2 \right) d\phi_1 \quad \text{oder} \quad \int \left(\int |f| d\phi_1 \right) d\phi_2.$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$, also nach dem Satz von Fubini

$$\int f d\phi = \int \left(\int f d\phi_2 \right) d\phi_1 = \int \left(\int f d\phi_1 \right) d\phi_2.$$

Beweis. Sei $I_k := [-k, k]^n$ und

$$h_k := \inf(|f| \chi_{I_k}, k \chi_{I_k}).$$

Mit f sind nach Satz 53 auch $|f|$ und die h_k messbar. Die Funktion h_k wird durch die integrierbare Funktion $k \chi_{I_k}$ dominiert und ist deshalb nach Satz 54 integrierbar. Also können wir den Satz von Fubini darauf anwenden:

$$\int h_k d\phi = \int \left(\int h_k d\phi_2 \right) d\phi_1 = \int \left(\int h_k d\phi_1 \right) d\phi_2.$$

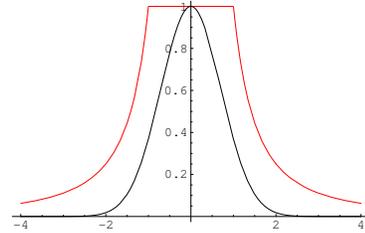
Wir nehmen o.E. an, dass $\int (|f| d\phi_2) d\phi_1$ existiert. Weil $0 \leq h_k(x_1, \cdot) \leq |f|(x_1, \cdot)$ und nach Voraussetzung $|f|(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$ für ϕ_1 -fast alle x_1 , erhalten wir

$$\int h_k d\phi \leq \int \left(\int |f| d\phi_2 \right) d\phi_1. \quad (19)$$

Die h_k bilden eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, die überall gegen $|f|$ konvergieren. Die Integralfolge ist nach (19) beschränkt. Also ist $|f|$ nach dem Satz von B. Levi integrierbar. Nach Satz 54 ist damit auch f integrierbar. \square

Beispiel 62.

Die Funktion $g := \inf(1, \frac{1}{x^2})$ ist μ_1 -integrierbar (Satz von Beppo Levi und Regelintegral mit Stammfunktion). Sie dominiert die stetige und deshalb μ_1 -messbare Funktion e^{-x^2} , die daher nach Satz 54 ebenfalls in $\mathcal{L}^1(\mu_1)$ liegt.



Daher existiert das iterierte Integral

$$\begin{aligned} \int \left(\int e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx &= \int \left(e^{-x^2} \int e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \left(\int e^{-y^2} dy \right) \left(\int e^{-x^2} dx \right) = \left(\int e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

(Wir haben dx und dy anstelle von $d\mu_1$ geschrieben um anzudeuten, auf welche Variable sich die Integration bezieht.) Weiter ist $e^{-(x^2+y^2)}$ stetig, also μ_2 -messbar. Damit folgt aus dem Satz von Tonelli, dass

$$e^{-(x^2+y^2)} \in \mathcal{L}^1(\mu_2)$$

und

$$\int e^{-(x^2+y^2)} d\mu_2 = \left(\int e^{-x^2} dx \right)^2$$

ist.

Wir werden später sehen, dass mit Hilfe mehrdimensionaler Integration die linke Seite leicht zu berechnen ist. Das gibt dann eine Auswertung des in der Wahrscheinlichkeitstheorie wichtigen und eindimensional nicht so leicht zu berechnenden Integrals $\int e^{-x^2} d\mu_1$.

\square

5 Messbare und integrierbare Mengen

- Wir betrachten messbare Mengen und ihr Maß, und damit ein fundamentales Problem der Geometrie: Was *ist* eigentlich der Flächeninhalt einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 , die “krummlinig begrenzt” oder noch komplizierter ist? Was das Volumen eines Körpers im \mathbb{R}^3 ? Und wie *berechnet* man das? (Beim axiomatischen Aufbau der Maß- und Integrationstheorie steht der Begriff *messbare Menge* ganz am Anfang.)
- Wir klären Zusammenhänge zwischen Messbarkeit und Topologie.
- Wir berechnen das Volumen der n -dimensionalen Vollkugel.
- Wir lernen ein Beispiel einer nicht-messbaren Menge kennen.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Definition 63. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$.

- (i) A heißt ϕ -messbar bzw. ϕ -integrierbar, wenn die charakteristische Funktion χ_A von A ϕ -messbar bzw. ϕ -integrierbar ist. Im letzteren Fall definiert man das Maß von A als

$$\phi(A) := \int \chi_A d\phi.$$

- (ii) Für $f : \mathbb{R}^n \supset B \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die triviale Erweiterung von f durch $\hat{f}(x) := 0$ für $x \notin B$.

Ist $A \subset B$ ϕ -messbar, so nennen wir f ϕ -messbar auf A bzw. ϕ -integrierbar über A , wenn $\hat{f}\chi_A$ ϕ -messbar bzw. ϕ -integrierbar ist. Im letzteren Fall schreibt man

$$f \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$$

und

$$\int_A f d\phi := \int \hat{f}\chi_A d\phi.$$

Beispiel 64. Jedes $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ist ϕ -integrierbar, und die neue Definition von $\phi(I)$ ist mit der Maß-Definition verträglich.

□

Satz 65 (Die σ -Algebra der messbaren Mengen).

- (i) Komplement, abzählbare Vereinigungen und abzählbare Durchschnitte messbarer Mengen sind messbar. Die messbaren Mengen bilden eine sogenannte σ -Algebra oder ein Borelsystem.
- (ii) (σ -Additivität) Ist $(A_i)_i$ eine Folge ϕ -integrierbarer, paarweise disjunkter Mengen, so gilt

$$A := \bigcup A_i \text{ ist } \phi\text{-integrierbar} \iff \sum_{i=0}^{\infty} \phi(A_i) < \infty.$$

In diesem Fall ist

$$\phi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi(A_i).$$

Beweis. Zu (i). Für das Komplement $CA := \mathbb{R}^n \setminus A$ ist $\chi_{CA} = 1 - \chi_A$. Die 1-Funktion ist ϕ -messbar. Deshalb ist CA mit A messbar.

Weiter hat man für $U := \bigcup A_i$, $D := \bigcap A_i$

$$\chi_U = \sup_i \chi_{A_i} \quad \chi_D = \inf_i \chi_{A_i}.$$

Weil \inf und \sup abzählbar vieler messbarer Funktionen messbar sind, sind mit den A_i auch U und D messbar.

Zu (ii). Sei $f_k := \sum_{i=0}^k \chi_{A_i}$. Dann ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}^1(\phi)$ mit

$$\lim f_k = \chi_A, \quad \int f_k d\phi = \sum_{j=0}^k \phi(A_j).$$

Ist $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\phi)$, so gilt wegen $|f_k| \leq \chi_A$ nach dem Satz von Lebesgue

$$\phi(A) = \int \chi_A d\phi = \lim \int f_k d\phi = \sum_{j=0}^{\infty} \phi(A_j).$$

Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so folgt aus dem Satz von Beppo Levi, dass $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\phi)$. \square

Beispiel 66 (Messbarkeit von Borelmengen). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Um zu zeigen, dass A bezüglich eines jeden Maßes ϕ messbar ist, genügt nach Satz 50 der Nachweis, dass $A \cap I$ für jedes $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ messbar ist. Durch fortgesetzte Halbierung in jeder Koordinatenrichtung erhält man zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Familie $(I_{kj})_{0 \leq j \leq 2^k}$ beschränkter Intervalle mit

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} I_{kj} = I, \quad \text{diam}(I_{kj}) = \frac{\text{diam}(I)}{2^k}.$$

Zu $x \in A \cap I$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{\text{diam} I}{2^k}}(x) \subset A$ und ein j mit $x \in I_{kj}$. Dann ist aber $I_{kj} \subset A$, und wir haben gezeigt, dass

$$A \cap I = \bigcup_{I_{kj} \subset A} I_{kj}$$

die Vereinigung von abzählbar vielen beschränkten Intervallen ist. Also ist A bezüglich eines jeden Maßes ϕ messbar. Das gilt dann auch für alle Mengen, die man aus den offenen durch Komplementbildung, abzählbare Vereinigung und abzählbare Durchschnitte erhält, also für die sogenannten *Borelmengen*. \square

Beispiel 67 (Kompakte Mengen). Kompakte Mengen sind integrierbar bezüglich eines jeden Maßes: Als abgeschlossene Mengen sind sie messbar, und ihre charakteristische Funktion wird dominiert durch eine Treppenfunktion.

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es nach einem Satz der Topologie (Tietzescher Erweiterungssatz) eine stetige und beschränkte Erweiterung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von f . Nach Satz 54 ist dann $\tilde{f}\chi_K \in \mathcal{L}^1(\phi)$, also $f \in \mathcal{L}^1(P, \phi)$ für jedes Maß ϕ , stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind integrierbar bezüglich eines jeden Maßes. \square

Satz 68. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ϕ -messbar. Dann sind die Mengen

$$A := \{x \mid f(x) > 0\}$$

und

$$B := \{x \mid f(x) \geq 0\}$$

ϕ -messbar.

Beweis. Zunächst ist $g := \sup(f, 0)$ messbar. Weiter sind die Funktionen

$$h_j(x) := \inf(jg(x), 1)$$

messbar und konvergent gegen χ_A . Also ist A messbar. Folglich ist auch die Menge

$$\{x \mid -f(x) > 0\}$$

messbar. Schließlich ist dann aber auch B als deren Komplement messbar. \square

Satz 69. Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine ϕ -Nullmenge, wenn sie ϕ -integrierbar und $\phi(N) = 0$ ist.

Beweis. Ist N eine ϕ -Nullmenge, so ist $\chi_N =_\phi 0$. Daher ist N nach dem Korollar 32 integrierbar und $\phi(N) = \int \chi_N d\phi = \int 0 d\phi = 0$.

Ist umgekehrt χ_N ϕ -integrierbar mit Integral = 0, so folgt aus dem Korollar 37 zum Satz von B. Levi, dass $\chi_N =_\phi 0$, also N eine ϕ -Nullmenge. \square

Satz 70. Für $i = 1, 2$ seien ϕ_i ein Maß auf \mathbb{R}^{n_i} und $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht negativ. Wir definieren $\phi := \phi_1 \times \phi_2$ und $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) := f_1(x_1)f_2(x_2).$$

Dann gilt

(i) Ist $f_i \in \mathcal{L}^1(\phi_i)$ für $i = 1, 2$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und

$$\int f d\phi = \int f_1 d\phi_1 \int f_2 d\phi_2.$$

(ii) Sind die f_i bezüglich ϕ_i messbar, so ist f bezüglich ϕ messbar.

Beweis. Vgl. Hausaufgaben. \square

Korollar 71. Seien ϕ_1, ϕ_2 und ϕ wie im Satz. Dann gilt

(i) Für ϕ_i -integrierbare Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ist $A_1 \times A_2$ ϕ -integrierbar und

$$\phi(A_1 \times A_2) = \phi_1(A_1)\phi_2(A_2).$$

(ii) Für ϕ_i -messbare Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ist $A_1 \times A_2$ ϕ -messbar.

(iii) Ist N_1 eine ϕ_1 -Nullmenge, so ist $N_1 \times \mathbb{R}^{n_2}$ eine ϕ -Nullmenge.

Beweis. Vgl. Hausaufgaben. □

Satz 72. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative integrierbare Funktion und

$$G := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

die Menge unter dem Graphen von f . Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu_n) \iff \chi_G \in \mathcal{L}^1(\mu_{n+1}).$$

In diesem Falle gilt

$$\mu_{n+1}(G) = \int f d\mu_n.$$

Beweis. Zwei Vorbemerkungen: Setzen wir

$$g(x_1, \dots, x_{n+1}) := x_{n+1}(f(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1})$$

so ist

$$G = \{x \mid g(x) \geq 0\}.$$

Nach den Sätzen 70 und 68 ist G daher messbar bezüglich $\mu_{n+1} = \mu_n \times \mu_1$.

Zum anderen ist

$$\begin{aligned} \chi_G(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \chi_{[0, f(x_1, \dots, x_n)]}(x_{n+1}) \end{aligned}$$

und

$$\int \chi_{[0, f(x_1, \dots, x_n)]} d\mu_1 = f(x_1, \dots, x_n).$$

Zu (\Leftarrow). Ist $\chi_G \in \mathcal{L}^1(\mu_{n+1})$, so liefert der Satz von Fubini

$$\mu_{n+1}(G) = \int \chi_G d\mu_{n+1} = \int \left(\int \chi_{[0, f(x_1, \dots, x_n)]}(x_{n+1}) d\mu_1 \right) d\mu_n = \int f d\mu_n. \quad (20)$$

Zu (\Rightarrow). Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, so existiert die rechte Seite von (20). Wir können den Satz von Tonelli anwenden und erhalten die Integrierbarkeit von χ_G . □

Beispiel 73 (Das Volumen der n-dimensionalen Vollkugel). Sei

$$D_r^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq r^2 \right\}.$$

die n -dimensionale Vollkugel vom Radius r . D_r^n ist als kompakte Menge μ_n -integrierbar. Der Fall $n = 1$ ist trivial:

$$\mu_1(D_r^1) = \mu_1([-r, +r]) = 2r.$$

Für höheres n versuchen wir nun,

$$V_n(r) := \mu_n(D_r^n)$$

mit dem Satz von Fubini zu berechnen, indem wir die Identität

$$\chi_{D_r^n}(x_1, \dots, x_n) = \chi_{D_{\sqrt{r^2 - x_n^2}}^{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \chi_{[-r, +r]}(x_n)$$

benutzen. Wir schreiben wieder

$$d\mu_n = d(\mu_{n-1} \times \mu_1), \quad d\mu_1 =: dx_n,$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} V_n(r) &= \int \chi_{D_r^n} d\mu_n \\ &= \int \chi_{[-r, r]}(x_n) \left(\int \chi_{D_{\sqrt{r^2 - x_n^2}}^{n-1}} d\mu_{n-1} \right) dx_n \\ &= \int \chi_{[-r, r]}(x_n) V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) dx_n. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, wir hätten schon gezeigt, dass das Volumen der $(n-1)$ -Kugel proportional zur $(n-1)$ -ten Potenz des Radius ist, also $V_{n-1}(r) = v_{n-1} r^{n-1}$ mit

$$v_k := V_k(1) \text{ für alle } k.$$

Für $n = 1$ stimmt das ja. Dann folgt weiter

$$\begin{aligned} V_n(r) &= \int \chi_{[-r, r]}(x_n) v_{n-1} \sqrt{r^2 - x_n^2}^{n-1} dx_n = v_{n-1} \int \chi_{[-r, r]}(x_n) \sqrt{r^2 - x_n^2}^{n-1} dx_n \\ &= v_{n-1} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - t^2}^{n-1} dt = v_{n-1} \int_{-r}^r r^{n-1} \sqrt{1 - (t/r)^2}^{n-1} dt \\ &= r^n v_{n-1} \int_{-r}^r \sqrt{1 - (t/r)^2}^{n-1} \frac{1}{r} dt = r^n v_{n-1} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \tau^2}^{n-1} d\tau. \end{aligned}$$

Also ist dann $V_n(r)$ proportional zu r^n

$$V_n(r) = v_n r^n.$$

Setzen wir

$$I_n := \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \tau^2}^{n-1} d\tau \stackrel{\text{Substitution}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt,$$

so haben wir weiter gefunden, dass

$$v_n = v_{n-1} I_n = v_{n-2} I_n I_{n-1}.$$

Durch partielle Integration folgt

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2,$$

mit $I_2 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 2$. Dann ist aber

$$\begin{aligned} I_n I_{n-1} &= \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} I_{n-2} I_{n-3} = \frac{n-2}{n} I_{n-2} I_{n-3} = \dots \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{n} I_2 I_1 & \text{für gerades } n \\ \frac{1}{n} I_1 I_0 & \text{für ungerades } n. \end{array} \right\} = \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$v_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad v_{2m+1} = \frac{2^{m+1} \pi^m}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m+1)}$$

Mit Hilfe der Gammafunktion (vgl. Beispiel 45) kann man das einheitlich so schreiben:

$$v_n = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Es ergeben sich die folgenden Volumina der Kugeln und daraus *durch Differentiation* die $(n-1)$ -dimensionalen Volumina der zugehörigen Sphären:

n	1	2	3	4	5	6	7
Volumen(D_r^n)	2r	πr^2	$\frac{4}{3} \pi r^3$	$\frac{1}{2} \pi^2 r^4$	$\frac{8}{15} \pi^2 r^5$	$\frac{1}{6} \pi^3 r^6$	$\frac{16}{105} \pi^3 r^7$
Oberfläche(D_r^n)		$2\pi r$	$4\pi r^2$	$2\pi^2 r^3$	$\frac{8}{3} \pi^2 r^4$	$\pi^3 r^5$	$\frac{16}{15} \pi^3 r^6$

□

Nicht-messbare Mengen sind außerordentlich schwer zu finden:

Beispiel 74 (Nicht-messbare Menge). Durch $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ wird auf $]0, 1[$ eine Äquivalenzrelation definiert. Sei $M \subset]0, 1[$ eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Dann ist M nicht μ_1 -messbar.

Beweis. Ist $x \in]0, 1[$, so gibt es ein dazu äquivalentes $y \in M$. Dann ist $r := x - y$ rational und liegt offenbar in $] - 1, 1[$. Also ist

$$]0, 1[\subset \hat{M} := \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]-1, 1[} (r + M) \subset]-1, 2[.$$

Weil M aus jeder Äquivalenzklasse nur ein Element enthält, sind die $r + M$ paarweise disjunkt.

Annahme: M ist μ_1 -messbar.

Wegen $0 \leq \chi_M \leq \chi_{]-1, 2[}$ ist M dann sogar μ_1 -integrierbar und (Beweis ?) auch $r + M$ für jedes $r \in \mathbb{Q} \cap]-1, 1[$ integrierbar mit

$$\mu_1(r + M) = \mu_1(M).$$

- Wäre $\mu_1(M) = 0$, d.h. M eine μ_1 -Nullmenge, so wäre auch die abzählbare Vereinigung \hat{M} eine μ_1 -Nullmenge im Widerspruch zu $]0, 1[\subset \hat{M}$.
- Wäre $\mu_1(M) > 0$, so wäre nach der σ -Additivität

$$\mu_1(] - 1, 2 [) \geq \mu_1(\hat{M}) = \sum_r \mu_n(r + M) = \infty.$$

Widerspruch!

Also war die Annahme der Messbarkeit falsch.

□

6 Der Transformationsatz

- Häufig hat man Integrationsprobleme mit gewissen Symmetrieeigenschaften des Integrationsbereiches. Dann sind andere als die Euklidischen Koordinaten sehr hilfreich. Wir lernen in den folgenden Abschnitten, wie man dafür die Integrale umschreibt. Der Kernpunkt ist die Volumenverzerrung durch die Koordinatenabbildung.

Wir betrachten in diesem Kapitel

das Lebesguemaß μ_n auf \mathbb{R}^n .

Integrierbarkeit, Messbarkeit und Nullmengen beziehen sich stets darauf. Wir wollen folgende Frage untersuchen:

Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar und $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wie verhalten sich $\mu_n(A)$ und $\mu_n(h(A))$ zueinander? Wie wird also das n -dimensionale Volumen einer Menge durch eine Abbildung h verzerrt?

6.1 Nullmengen und Verzerrung durch lineare Abbildungen

- Was passiert mit Nullmengen unter C^1 -Abbildungen?
- Lineare Abbildungen bilden Würfel oder Quader in Parallelotope ab. Die elementargeometrische Volumenverzerrung wird dabei durch die Determinante beschrieben. Wir lernen, dass das auch für die Volumenverzerrung messbarer Mengen zutrifft.

Zwei Vorbemerkungen:

1. Fast-disjunkte Intervalle. Der Rand eines Intervalls aus $I(\mathbb{R}^n)$ ist die Vereinigung von endlich vielen niedriger-dimensionalen Intervallen und deshalb eine μ_n -Nullmenge. Darum ist μ_n additiv (sogar σ -additiv) auch für nicht notwendig paarweise disjunkte Intervalle, wenn sie sich allenfalls an den Rändern überlappen. Das ist sehr angenehm zum Beispiel bei Argumenten mit Intervall-Halbierung. Wir geben dieser Situation der Einfachheit einen Namen:

Definition 75. Eine Familie $(I_j)_{j \in J}$ beschränkter Intervalle, die sich allenfalls am Rande überlappen, d.h. deren offene Kerne I_j^0 paarweise disjunkt sind, nennen wir *fast-disjunkt*.

Ist also $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine fast-disjunkte Folge in $I(\mathbb{R}^n)$ und $\bigcup I_j$ beschränkt, so gilt

$$\mu_n\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_n(I_j).$$

2. Würfel. Der Schrankensatz

$$\|h(y) - h(x)\| \leq (\sup \|Dh\|) \|y - x\|$$

gibt eine Abschätzung für die *lineare* Verzerrung und damit für die Verzerrung von Kugeln. Wenn wir

statt der üblichen Euklidischen Norm auf dem \mathbb{R}^n die sup-Norm $\|\cdot\|_\infty$ verwenden,

sind die Kugeln achsenparallele Würfel, d.h. spezielle beschränkte Intervalle in $I(\mathbb{R}^n)$. Die Methoden der Analysis II werden damit auch für unseren Aufbau der Integrationstheorie verfügbar.

Allerdings müssen wir uns erst noch klarmachen, dass es an vielen Stellen der Integrations-
theorie genügt, mit Würfeln statt mit Intervallen zu argumentieren. Dem ist ein Teil dieses
Abschnittes gewidmet.

Definition 76. Für $p \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ sei

$$W(p, r) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \|x - p\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - p_i| \leq r \right\}$$

die abgeschlossene Vollkugel um p vom Radius r in der sup-Norm.

Lemma 77 (Ausschöpfungslemma). Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $r > 0$. Dann gibt es eine
Folge fast-disjunkter, kompakter Würfel $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit Kantenlängen $\leq r$ und

$$G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i.$$

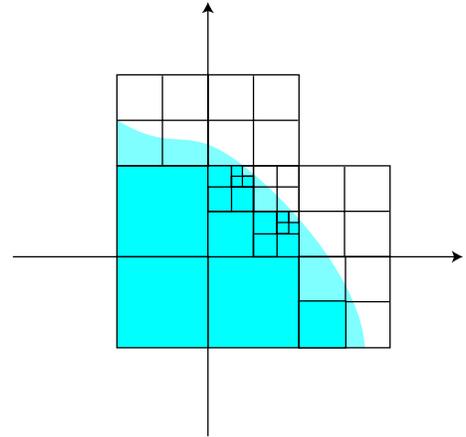
Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{W}_k = \left\{ W\left((x_1, \dots, x_n), \frac{r}{2^{k+1}}\right) \mid x_i = \frac{(2m_i + 1)r}{2^{k+1}} \text{ mit } m_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Würfel aus \mathcal{W}_k bilden dann eine Zerlegung des \mathbb{R}^n in fast-disjunkte Würfel der Kantenlänge $\frac{r}{2^k}$, und zu jedem $W \in \mathcal{W}_{k+1}$ gibt es ein $\tilde{W} \in \mathcal{W}_k$ mit $W \subset \tilde{W}$. Die Würfel von \mathcal{W}_{k+1} erhält man, wenn man die Würfel von \mathcal{W}_k in jeder Koordinatenrichtung halbiert.

Sei $\mathcal{W}_{-1}^G := \emptyset$ und sei \mathcal{W}_k^G für $k \in \mathbb{N}$ die Menge aller $W \in \mathcal{W}_k$, die ganz in G liegen und die nicht schon in einem Würfel aus \mathcal{W}_{k-1}^G enthalten sind.

Dann ist $\mathcal{W}^G := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{W}_k$ abzählbar, die $W \in \mathcal{W}^G$ sind fast-disjunkt und $\bigcup_{W \in \mathcal{W}^G} W = G$.



□

Lemma 78 (Nullmengen und Würfel). Seien $r > 0$ und $N \subset \mathbb{R}^n$.

N ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge $(W_i = W(p_i, r_i))_{i \in \mathbb{N}}$ von kompakten Würfeln gibt, so dass

$$N \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i, \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_n(W_i) < \epsilon, \quad \text{und für alle } i \quad r_i < r.$$

Beweis. Die Bedingung ist offenbar hinreichend.

Ist andererseits N eine μ_n -Nullmenge, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ offener Intervalle aus $I(\mathbb{R}^n)$, die N überdeckt, und für die

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_n(I_j) < \epsilon.$$

Zu jedem I_j gibt es nach Lemma 77 eine Folge fast-disjunkter kompakter Würfel $(W_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$ mit Kantenlängen $< r$ und Vereinigung I_j . Für diese gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_n(W_i^j) = \mu_n(I_j).$$

Die als Folge numerierten W_i^j überdecken dann N und haben ein Gesamtmaß $< \epsilon$. \square

Lemma 79 (C^1 -Bilder von Nullmengen). Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $N \subset G$ eine Nullmenge. Dann ist auch $h(N)$ eine Nullmenge.

Bemerkung. Das gilt nicht für stetige Abbildungen. Peano hat 1890 ein Beispiel für eine stetige Abbildung der Nullmenge $\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ in den \mathbb{R}^2 gegeben, deren Bild das Einheitsquadrat ist. Vgl. z.B. *Barner-Flohr, Analysis II, p. 40*.

Beweis. Nach dem Ausschöpfungslemma gibt es eine Folge kompakter Würfel $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} W_j$. Weil die abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist, genügt daher der Nachweis, dass $h(N \cap W)$ für jeden kompakten Würfel $W \subset G$ eine Nullmenge ist. Zu einem solchen $W = W(p, r)$ gibt es ein $R > r$ mit $\tilde{W} = W(p, R) \subset G$ (Beweis?). Weil f stetig auf dem kompakten \tilde{W} ist, existiert

$$M := \max \left\{ \|D_x h\| \mid x \in \tilde{W} \right\}.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Nach Lemma 78 gibt es eine Folge von Würfeln $W_i = W(p_i, r_i)$ der Kantenlänge $< R - r$ mit $N \cap W \subset \bigcup W_i$ und $\sum \mu_n(W_i) < \epsilon$. Wir können o.E. annehmen, dass $(N \cap W) \cap W_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann liegen alle W_i in \tilde{W} . Daher ist nach dem Schrankensatz

$$h(W_i) = h(W(p_i, r_i)) \subset W(h(p_i), Mr_i).$$

Damit ist

$$h(N \cap W) \subset \bigcup W(h(p_i), Mr_i) \quad \text{und} \quad \sum \mu_n(W(h(p_i), Mr_i)) = M^n \sum \mu_n(W_i) \leq M^n \epsilon.$$

Also ist $h(N \cap W)$ eine μ_n -Nullmenge. \square

Wir betrachten jetzt das oben angesprochene Problem der Volumenverzerrung zunächst für (lineare) Isomorphismen $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Nach linearer Algebra (vgl. Fischer, p.94, Satz 2.7.3) ist jeder Automorphismus von \mathbb{R}^n das Produkt endlich-vieler elementarer Automorphismen. Dabei heißt ein Automorphismus h elementar, wenn er von einem der folgenden drei Typen ist:

- h multipliziert eine Komponente mit $\lambda \neq 0$.
- h vertauscht zwei Komponenten
- $h(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$.

Lemma 80 (Verzerrung durch elementare Isomorphismen). Sei $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein elementarer Automorphismus und W ein kompakter Würfel. Dann ist $h(W)$ kompakt, also integrierbar, und es gilt

$$\mu_n(h(W)) = |\det h| \mu_n(W). \quad (21)$$

Beweis. Für die beiden ersten Typen elementarer Isomorphismen ist die Behauptung klar, weil $h(W)$ ein Intervall ist, dessen Volumen sich elementar errechnet.

Sei also h vom dritten Typ und

$$W = W_1 \times \dots \times W_n.$$

Dann gilt

$$\chi_{h(W)}(x_1, \dots, x_n) = \chi_{(x_2 + W_1)}(x_1) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n}(x_2, \dots, x_n).$$

Dabei bezeichnet $x_2 + W_1$ das um x_2 verschobene Intervall W_1 , für das offenbar

$$\mu_1(x_2 + W_1) = \mu_1(W_1).$$

Nach dem Satz von Fubini existiert

$$\begin{aligned} \int \chi_{(x_2 + W_1)}(\cdot) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n}(x_2, \dots, x_n) d\mu_1 &= \mu_1(x_2 + W_1) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n}(x_2, \dots, x_n) \\ &= \mu_1(W_1) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n}(x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \mu_n(h(W)) &= \int \chi_{h(W)} d\mu_n = \int \mu_1(W_1) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n} d\mu_{n-1} \\ &= \mu_1(W_1) \mu_{n-1}(W_2 \times \dots \times W_n) = \mu_n(W). \end{aligned}$$

Aus $\det(h) = 1$ folgt die Behauptung. □

Weil $\chi_{h(W)} \circ h = \chi_W$ ist, kann man die Formel (21) auch so schreiben:

$$\boxed{\int \chi_{h(W)} d\mu_n = \int (\chi_{h(W)} \circ h) |\det h| d\mu_n.} \quad (22)$$

Wir wollen diese Formel nun schrittweise verallgemeinern auf beliebige Automorphismen h und integrierbare Funktionen f anstelle von $\chi_{h(W)}$.

1. Schritt. Seien h ein elementarer Automorphismus und $f = \chi_A$ für eine offene und beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $h^{-1}(A)$ offen und nach dem Ausschöpfungslemma 77 die Vereinigung abzählbar vieler fast-disjunkter kompakter Würfel: $h^{-1}(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$. Weil h injektiv und nullmengentreu ist, ist dann $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} h(W_i)$ mit fast-disjunkten $h(W_i)$, also

$$\chi_A = \mu_n \sum_{i=0}^{\infty} \chi_{h(W_i)}.$$

Weil A beschränkt ist, ist $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, und wie im Beweis der σ -Additivität folgt mit (22)

$$\begin{aligned} \int \chi_A d\mu_n &= \sum_{i=0}^{\infty} \int \chi_{h(W_i)} d\mu_n = \sum_{i=0}^{\infty} \int (\chi_{h(W_i)} \circ h) |\det h| d\mu_n \\ &= \int (\chi_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} h(W_i)} \circ h) |\det h| d\mu_n = \int (\chi_A \circ h) |\det h| d\mu_n. \end{aligned}$$

2. Schritt. Sei h_1 ein beliebiger Automorphismus des \mathbb{R}^n , h_2 ein elementarer Automorphismus, $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und für $f = \chi_A$ gelte

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h_1) |\det h_1| d\mu_n.$$

Dann gilt nach dem 1. Schritt

$$\begin{aligned} \int f d\mu_n &= \int (f \circ h_1) |\det h_1| d\mu_n = \int \chi_{h_1^{-1}(A)} |\det h_1| d\mu_n = |\det h_1| \int \chi_{h_1^{-1}(A)} d\mu_n \\ &= |\det h_1| \int (\chi_{h_1^{-1}(A)} \circ h_2) |\det h_2| d\mu_n = \int (f \circ (h_1 \circ h_2)) |\det(h_1 \circ h_2)| d\mu_n. \end{aligned}$$

Weil aber jeder Automorphismus das endliche Produkt elementarer Automorphismen ist, erhalten wir mit den 1. Schritt: Ist $f = \chi_A$ für ein offenes und beschränktes $A \subset \mathbb{R}^n$, so gilt für jeden Automorphismus $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h) |\det h| d\mu_n. \quad (23)$$

3. Schritt. Ist $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$, so ist $f = \sum_{j=1}^k \lambda_j \chi_{I_j}$ mit *offenen* beschränkten Intervallen I_j . Wegen der Linearität des Integrals gilt (23) daher auch für Treppenfunktionen f .

4. Schritt. Ist $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Automorphismus, ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_n)$ und ist $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$, also $\int f d\mu_n = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\mu_n$, so ist $((f_i \circ h) |\det h|)_{i \in \mathbb{N}}$ nach dem 3. Schritt eine offenbar monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen mit beschränkter Integralfolge

$$\left(\int (f_i \circ h) |\det h| d\mu_n = \int f_i d\mu_n \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

Nach Beppo Levi ist $(f \circ h) |\det h| = \lim_{i \rightarrow \infty} (f_i \circ h) |\det h| \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ und (23) gilt auch für $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_n)$.

Schließlich gilt die Behauptung wegen der Linearität des Integrals dann auch für $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, und wir erhalten den folgenden Satz:

Satz 81 (Transformationssatz für lineare Isomorphismen). Seien $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Automorphismus und $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$. Dann ist auch $f \circ h \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ und es gilt

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h) |\det h| d\mu_n. \quad (24)$$

Beispiel 82 (Ellipsenfläche). Der Isomorphismus $h : (x, y) \mapsto (ax, by)$ mit $a, b > 0$ bildet den Einheitskreis D auf die Ellipse mit den Halbachsen a und b ab. Deren Fläche ist deshalb gleich der Fläche π des Einheitskreises mal $|\det h| = ab$:

$$F = \int \chi_{h(D)} d\mu_2 = \int (\chi_{h(D)} \circ h) ab d\mu_2 = ab \int \chi_D d\mu_2 = ab\pi.$$

□

Wenn h kein Automorphismus, sondern ein Diffeomorphismus, also eine stetig differenzierbare Abbildung mit stetig differenzierbarem Inversen ist, liefert die allgemeine Philosophie der

Differentialrechnung sofort eine Vermutung, wie man diese Formel verallgemeinern sollte: Statt der Determinante von h sollte wohl die Determinante der Ableitung von h auftreten:

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

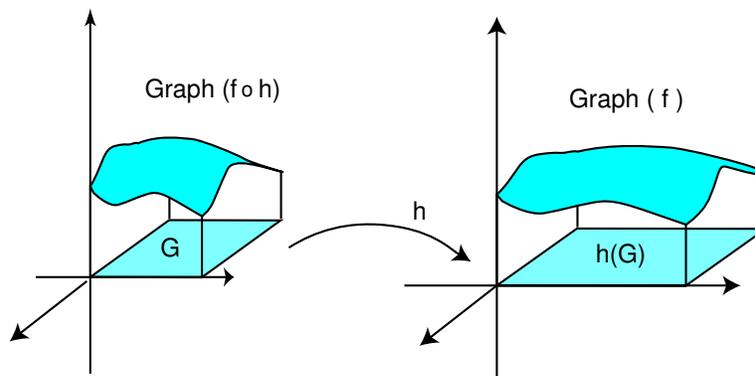
Der Beweis dieser Formel ist unser Ziel in den folgenden Abschnitten. Wenn wir f nur über einen Bereich $h(G)$ integrieren wollen, müssen wir f ersetzen durch $f\chi_{h(G)}$. Es ergibt sich

$$\int f\chi_{h(G)} d\mu_n = \int ((f\chi_{h(G)}) \circ h) |\det Dh| d\mu_n = \int (f \circ h)\chi_G |\det Dh| d\mu_n$$

oder, nach Seitenvertauschung,

$$\int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n = \int_{h(G)} f d\mu_n.$$

Für das Verständnis des Transformationssatzes ist es überaus hilfreich, sich diese Formel an der folgenden Skizze klarzumachen. Die Determinante liefert die Verzerrung der Grundfläche, während die Ordinaten, also die Funktionswerte, bei der Transformation $f \mapsto f \circ h$ unverändert bleiben.



6.2 Verzerrung durch C^1 -Diffeomorphismen

- Die infinitesimale Volumenverzerrung eines Diffeomorphismus wird durch lineare Approximation berechnet und ist deshalb gegeben durch die Determinante der Funktionalmatrix.
- Die globale Volumenverzerrung eines Diffeomorphismus ergibt sich durch Integration der infinitesimalen Verzerrung.

Die beiden folgenden Lemmata beschreiben infinitesimal und global die Volumenverzerrung von Würfeln durch C^1 -Diffeomorphismen⁴:

Lemma 83 (Infinitesimale Würfelverzerrung). *Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $p \in G$ und $D_p h$ bijektiv. Sei (W_i) eine Folge kompakter, nicht entarteter⁵ Würfel in G mit*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam } W_i = 0 \quad \text{und} \quad p \in \bigcap W_i.$$

Dann sind die $h(W_i)$ kompakt, also integrierbar, und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(h(W_i))}{\mu_n(W_i)} = |\det D_p h|.$$

Beweis. 1. Schritt. Wir können o.E. annehmen, dass $D_p h = \text{id}$.

Sonst setzen wir $g := (D_p h)^{-1}$. Dann ist

$$\frac{\mu_n(h(W_i))}{\mu_n(W_i)} = \frac{\mu_n(h(W_i))}{\mu_n(g \circ h(W_i))} \frac{\mu_n(g \circ h(W_i))}{\mu_n(W_i)} \stackrel{\text{Lemma 80}}{=} |\det D_p h| \frac{\mu_n(g \circ h(W_i))}{\mu_n(W_i)}$$

und $D_p(g \circ h) = \text{id}$.

2. Schritt. Sei also $D_p h = \text{id}$. Dann folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit und dem Schrankensatz, dass es zu jedem $\epsilon \in]0, 1[$ eine Umgebung U von p gibt, so dass für alle $q, q' \in U$

$$\|h(q) - h(q')\| \leq (1 + \epsilon)\|q - q'\|.$$

Mit dem Umkehrsatz erhält man ebenso eine Umgebung, auf der

$$\|q - q'\| \leq \frac{1}{1 - \epsilon}\|h(q) - h(q')\|.$$

Nach eventueller Verkleinerung von U erhalten wir für alle $q, q' \in U$

$$(1 - \epsilon)\|q - q'\| \leq \|h(q) - h(q')\| \leq (1 + \epsilon)\|q - q'\|.$$

Weil wir mit der Supremumsnorm arbeiten, bedeutet das aber für alle Würfel $W(q, r) \subset U$, dass

$$W(h(q), (1 - \epsilon)r) \subset h(W(q, r)) \subset W(h(q), (1 + \epsilon)r).$$

⁴ Zur Erinnerung: C^1 -Diffeomorphismen sind bijektive, stetig differenzierbare Abbildungen mit stetig differenzierbarem Inversen.

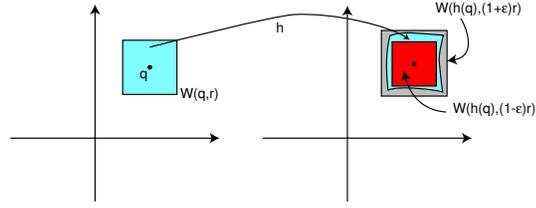
⁵D.h. mit positiver Kantenlänge, also $\mu_n(W_i) > 0$.

Also ist

$$(1-\epsilon)^n (2r)^n \leq \mu_n(h(W(q,r))) \leq (1+\epsilon)^n (2r)^n$$

und deshalb

$$(1-\epsilon)^n \leq \frac{\mu_n(h(W(p,r)))}{\mu_n(W(p,r))} \leq (1+\epsilon)^n.$$



Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 84 (Globale Würfelverzerrung). *Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Sei W ein kompakter Würfel in G . Dann ist $h(W)$ kompakt, also integrierbar, $|\det Dh| \in \mathcal{L}^1(W, \mu_n)$ und*

$$\mu_n(h(W)) = \int_W |\det Dh| d\mu_n. \quad (25)$$

Vergleichen Sie das mit Lemma 80.

Die Gleichung (25) können wir auch schreiben als

$$\boxed{\int_{h(G)} \chi_{h(W)} d\mu_n = \int_G (\chi_{h(W)} \circ h) |\det Dh| d\mu_n.} \quad (26)$$

Beweis von Lemma 84. Sei L die Kantenlänge von W . Wir unterteilen W durch fortgesetzte Halbierung. Zu jedem k erhalten wir so 2^{kn} kompakte fast-disjunkte Würfel $(W_{kj})_{1 \leq j \leq 2^{kn}}$ der Kantenlänge $L/2^k$, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$W = \bigcup_{j=1}^{2^{kn}} W_{kj} \quad \text{und} \quad \chi_W = \mu_n \sum_{j=1}^{2^{kn}} \chi_{W_{kj}}.$$

Weil h injektiv und nach Lemma 79 nullmengentreu ist, folgt

$$\chi_{h(W)} = \mu_n \sum_{j=1}^{2^{kn}} \chi_{h(W_{kj})}.$$

Wir definieren eine Folge von Treppenfunktionen

$$f_k := \sum_{j=1}^{2^{kn}} \frac{\mu_n(h(W_{kj}))}{\mu_n(W_{kj})} \chi_{W_{kj}}.$$

Zunächst wollen wir zeigen, dass diese Folge μ_n -konvergent ist. Die Vereinigung der Ränder aller W_{kj} bildet eine Nullmenge N . Für $x \in W \setminus N$ gibt es zu jedem k genau ein $j(k)$ mit $x \in W_{kj(k)}$. Dann ist also

$$f_k(x) = \frac{\mu_n(h(W_{kj(k)}))}{\mu_n(W_{kj(k)})}.$$

Für $x \in W \setminus N$ folgt aus Lemma 83, dass $\lim f_k(x) = |\det D_x h|$, also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \mu_n \chi_W |\det Dh|.$$

Weiter ist

$$\int f_k d\mu_n = \sum_{j=1}^{2^{kn}} \mu_n(h(W_{kj})) = \mu_n(h(W)) = \int \chi_{h(W)} d\mu_n.$$

Die Behauptung ergibt sich daher aus dem Satz von Lebesgue, falls die f_k von einer integrierbaren Funktion dominiert werden. Mit $M := \sup_{x \in W} \|D_x h\|$ liegt aber jedes $h(W_{kj})$ nach dem Schrankensatz in einem Würfel der M -fachen Kantenlänge, also des M^n -fachen Volumens, und es folgt

$$0 \leq f_k \leq M^n \chi_W \in \mathcal{L}^1(\mu_n).$$

□

Beispiel 85. Wie man einen Isomorphismus von \mathbb{R}^n auf einen Vektorraum deuten kann als ein *Koordinatensystem* in diesem Vektorraum, so kann man allgemeiner auch Diffeomorphismen als (sogenannte “krummlinige”) Koordinaten interpretieren. Wir betrachten ebene Polarkoordinaten.

Sei $h : \mathbb{R}^2 \supset]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ der Diffeomorphismus

$$h(\rho, \phi) := (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi).$$

ρ und ϕ heißen die *Polarkoordinaten* des Punktes $h(\rho, \phi)$. Die Funktionalmatrix im Punkt (ρ, ϕ) ist

$$h'(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix}$$

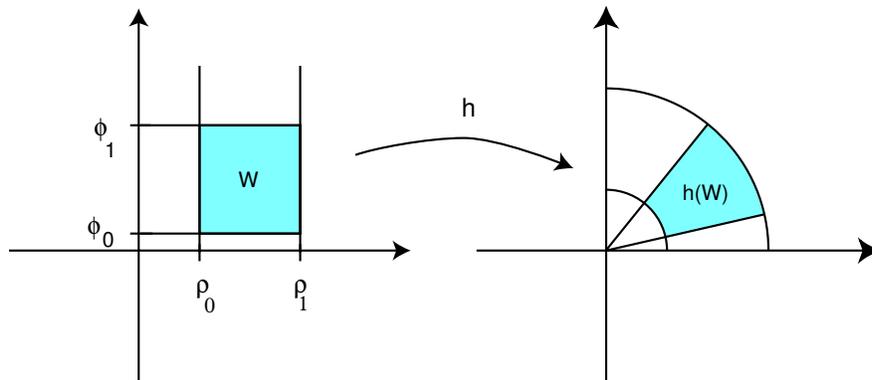
Die Funktionaldeterminante ist

$$|\det D_{(\rho, \phi)} h| = \det D_{(\rho, \phi)} h = \rho.$$

Nach Lemma 83 wird also ein kleines Quadrat an der Stelle (ρ, ϕ) durch h abgebildet auf eine Menge vom annähernd ρ -fachen Flächeninhalt.

Für große Quadrate erhält man die Flächenverzerrung nach Lemma 84 durch Integration, und mit dem Satz von Fubini ergibt sich für $0 < \rho_0 < \rho_1$ und $0 < \phi_0 < \phi_1 < 2\pi$

$$\mu_2(h([\rho_0, \rho_1] \times [\phi_0, \phi_1])) = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho d\rho d\phi = \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_0)(\rho_1^2 - \rho_0^2).$$



Schreibt man die linke Seite als μ_2 -Integral und (in Anlehnung an den Satz von Fubini) $d\mu_2 = dx dy$, so ergibt sich

$$\int_{h(W)} dx dy = \int_W \rho d\rho d\phi.$$

Das kodiert man gern in der Formel

$$dx dy = \rho d\rho d\phi.$$

Man sagt das *Flächenelement in Polarkoordinaten* sei $\rho d\rho d\phi$.

Beachten Sie: h ist *kein* Diffeomorphismus auf der abgeschlossenen Menge $[0, \infty[\times[0, 2\pi]$, und deshalb können wir nicht $\rho_0 = \phi_0 = 0$ und $\phi_1 = 2\pi$ setzen, um die Kreisfläche zu errechnen. Das ist ärgerlich und muss noch “repariert” werden. Vergleichen sie dazu den *Zusatz* in der folgenden endgültigen Version des Transformationsatzes und das Beispiel 88. □

Beispiel 86 (Allgemeine Kugelkoordinaten). Für die Funktionaldeterminante der verallgemeinerten Kugelkoordinaten

$$h_n : \mathbf{R}^n \supset [0, \infty[\times[0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

mit

$$\begin{aligned} h_2(r, \phi) &:= r(\cos \phi, \sin \phi), \\ h_3(r, \theta_1, \phi) &:= r(\cos \phi \sin \theta_1, \sin \phi \sin \theta_1, \cos \theta_1) \\ &= r(h_2(1, \phi) \sin \theta_1, \cos \theta_1), \\ h_{n+1}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \phi) &:= r(h_n(1, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi) \sin \theta_{n-1}, \cos \theta_{n-1}) \end{aligned}$$

gilt

$$|\det Dh_n| = r^{n-1}(\sin^1 \theta_1 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-2}).$$

Insbesondere gilt für die 3-dimensionalen Kugelkoordinaten $h_3(r, \theta, \phi)$

$$|\det Dh_3| = r^2 \sin \theta.$$

Beweis. Durch Induktion.

Induktionsanfang klar.

Induktionsschritt. Es ist

$$Dh_{n+1} = \begin{pmatrix} h_n(1, \dots) \sin \theta_{n-1} & r \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} \sin \theta_{n-1} & \dots & r \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_{n-2}} \sin \theta_{n-1} & r h_n(1, \dots) \cos \theta_{n-1} & r \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \sin \theta_{n-1} \\ \cos \theta_{n-1} & 0 & \dots & 0 & -r \sin \theta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass in der ersten Zeile n -reihige Vektoren stehen, so dass diese Matrix “ordnungsgemäß” vom Format $(n+1) \times (n+1)$ ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} |\det Dh_{n+1}| &= \pm r^n \sin^{n-1} \theta_{n-1} \left| \begin{array}{cccccc} h_n(1, \dots) \sin \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & h_n(1, \dots) \cos \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \\ \cos \theta_{n-1} & 0 & \dots & -\sin \theta_{n-1} & 0 \end{array} \right| \\ &= \pm \frac{r^n \sin^{n-2} \theta_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}} \left| \begin{array}{cccccc} h_n(1, \dots) \sin^2 \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & h_n(1, \dots) \cos^2 \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \\ \cos \theta_{n-1} \sin \theta_{n-1} & 0 & \dots & -\sin \theta_{n-1} \cos \theta_{n-1} & 0 \end{array} \right| \\ &= \pm \frac{r^n \sin^{n-1} \theta_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}} \left| \begin{array}{cccccc} h_n(1, \dots) \sin \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & h_n(1, \dots) & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \\ \cos \theta_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right| \\ &= \pm r^n \sin^{n-1} \theta_{n-1} \left| \begin{array}{cccc} h_n(1, \dots) & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_{n-2}} \\ \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_{n-2}} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \end{array} \right| \\ &= \pm r^n (\sin^{n-1} \theta_{n-1}) |\det Dh_n(1, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi)| \\ &= r^n (\sin^{n-1} \theta_{n-1}) \dots (\sin^1 \theta_1). \end{aligned}$$

□

6.3 Der Transformationssatz

- Wir haben früher die Volumenverzerrung durch lineare Isomorphismen berechnet und daraus den Transformationssatz 81 für Integrale gewonnen.
- Nachdem die Volumenverzerrung durch Diffeomorphismen geklärt ist, können wir daraus ebenso den Transformationssatz für Integrale gewinnen, also Integrale in andere Koordinatensysteme umschreiben.

Wir verallgemeinern (26) auf beliebige Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ anstelle von $\chi_{h(W)}$.

Satz 87 (Transformationssatz). Sei $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(i) $h(G)$ ist μ_n -messbar.

(ii) Ist $f \in \mathcal{L}^1(h(G), \mu_n)$, so ist $(f \circ h)|\det Dh| \in \mathcal{L}^1(G, \mu_n)$ und

$$\int_{h(G)} f d\mu_n = \int_G (f \circ h)|\det Dh| d\mu_n.$$

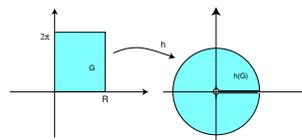
Zusatz: Die Injektivitätsforderung darf h auf einer Nullmenge auch verletzen: Ist h stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung der μ_n -messbaren (aber nicht notwendig offenen) Menge G , und ist $N \subset G$ eine μ_n -Nullmenge, so dass

$$G \setminus N \text{ offen und } h|_{G \setminus N} \text{ injektiv,}$$

so gelten ebenfalls die obigen Behauptungen.

Beispiel 88. Eine typische Situation, in der sich der Zusatz als nützlich erweist, sind die Polarkoordinaten, vgl. Beispiel 85:

$$\begin{aligned} h(\rho, \phi) &= (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \text{ für } (\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2, \\ G &= [0, R] \times [0, 2\pi] \\ N &= \partial G = G \setminus (]0, R[\times]0, 2\pi[). \end{aligned}$$



h ist auf dem Inneren von G ein Diffeomorphismus, nicht aber auf ganz G . Aber wenn man mit der Idee aus Beispiel 85 die Kreisfläche berechnen will, möchte man $\rho_0 = \phi_0 = 0$, $\rho_1 = R$ und $\phi_1 = 2\pi$ setzen. Darf man auch, weil die Injektivität nur auf einer Nullmenge, nämlich dem Rand ∂G , verletzt ist.

□

Der Beweis des Transformationssatzes gliedert sich entsprechend den Voraussetzungen über h in drei Teile

Teil A: h ist ein C^1 -Diffeomorphismus der offenen Menge G .

Teil B: h ist eine injektive C^1 -Abbildung der offenen Menge G .

Teil C: h ist wie im Zusatz.

Beweis des Transformationssatzes: Teil A. Sei also G offen und

$$h : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow h(G) \subset \mathbb{R}^n$$

ein C^1 -Diffeomorphismus. Wir stellen zunächst fest, dass dann $h(G)$ offen und damit μ_n -messbar ist.

A.1 Sei $f = \chi_A$ für ein beschränktes, offenes $A \subset h(G)$. Dann läßt sich die offene Menge $h^{-1}(A) \subset G$ schreiben als Vereinigung einer fast-disjunkten Folge kompakter Würfel W_j in G . Dann gilt also

$$\chi_{h^{-1}(A)} =_{\mu_n} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{W_j}$$

und, weil h nullmengentreu ist,

$$\chi_A =_{\mu_n} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{h(W_j)}.$$

Nach Lemma 84 gilt für die Partialsummen

$$\int \left(\sum_{j=0}^k \chi_{h(W_j)} \right) d\mu_n = \int \left(\sum_{j=0}^k (\chi_{h(W_j)} \circ h) |\det Dh| \right) d\mu_n,$$

und weil $\sum_{j=0}^k \chi_{h(W_j)} \leq \chi_A$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, ist diese Integralfolge beschränkt. Anwendung des Satzes von Beppo Levi auf beide Seiten liefert daher

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n,$$

und das ist dasselbe(!) wie

$$\int_{h(G)} f d\mu_n = \int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

A.2 Nun sei $f = \chi_{h(G)} g$ für eine Treppenfunktion $g = \sum_{i=0}^k c_i \chi_{I_i}$. Dann ist

$$f =_{\mu_n} \sum c_i \chi_{I_i^0 \cap h(G)}$$

und die Behauptung folgt aus A.1 und der Linearität des Integrals.

A.3 Sei $f = \chi_{h(G)} g$ mit $g \in \mathcal{L}_+^1(\mu_n)$, und sei $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit μ_n -Limes g . Dann ist $f =_{\mu_n} \lim \chi_{h(G)} g_j$, und wegen der Nullmengentreue von h^{-1} auch $f \circ h =_{\mu_n} \lim (\chi_{h(G)} g_j) \circ h$. Nach A.3 gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$\int \chi_{h(G)} g_j d\mu_n = \int ((\chi_{h(G)} g_j) \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

Weil $\chi_{h(G)} g_j \leq_{\mu_n} \chi_{h(G)} g \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, ist diese Integralfolge beschränkt, und nach Beppo Levi gilt

$$\int \chi_{h(G)} g d\mu_n = \int ((\chi_{h(G)} g) \circ h) |\det Dh| d\mu_n,$$

also

$$\int_{h(G)} f d\mu_n = \int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

A.4 Ist schließlich $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ beliebig, so folgt die Behauptung aus A.3 und der Linearität des Integrals. \square

Beweis des Transformationssatzes: Teil B. Wir verlangen nun nicht mehr, dass h ein Diffeomorphismus ist, sondern nur eine injektive C^1 -Abbildung. Sei

$$K := \{x \mid D_x h \text{ nicht bijektiv}\}.$$

K ist abgeschlossen, also $G \setminus K$ offen und damit messbar. Wir zeigen später im Satz 93 (Lemma von Sard), dass

$$h(K) \text{ eine } \mu_n\text{-Nullmenge}$$

ist. Wegen $h(G \setminus K) \subset h(G) \subset h(G \setminus K) \cup h(K)$ ist dann

$$\chi_{h(G \setminus K)} \stackrel{=}{=}_{\mu_n} \chi_{h(G)}.$$

Ist also $f \in \mathcal{L}^1(h(G), \mu_n)$, so auch $f \in \mathcal{L}^1(h(G \setminus K), \mu_n)$ und

$$\begin{aligned} \int_{h(G)} f d\mu_n &= \int_{h(G \setminus K)} f d\mu_n \\ &= \int_{G \setminus K} (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n \\ &= \int_{G \setminus K} (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n + \underbrace{\int_K (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n}_{=0} \\ &= \int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir verwendet, dass $\chi_{G \setminus K} + \chi_K = \chi_G$. \square

Beweis des Transformationssatzes: Teil C. Wir beweisen nun den Zusatz.

$G \setminus N$ ist offen, also messbar, und damit ist auch G messbar. Weiter ist

$$h(G \setminus N) \subset h(G) \subset h(G \setminus N) \cup h(N),$$

und $h(N)$ ist nach Lemma 79 eine Nullmenge. Nach Teil A und B ist $h(G \setminus N)$ messbar, also ist auch $h(G)$ messbar. Weiter ist

$$\int_{h(G)} f d\mu_n = \int_{h(G \setminus N)} f d\mu_n \stackrel{\text{Teil B}}{=} \int_{G \setminus N} (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n = \int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

\square

Beispiel 89. Für einen Diffeomorphismus $x : [a, b] \rightarrow x([a, b]) \subset \mathbb{R}$ und eine Regelfunktion $f : x([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ besagt die Substitutionsregel:

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \int_a^b f(x(t)) x'(t) dt.$$

Vergleichen Sie das mit dem Transformationssatz. Warum steht hier $x'(t)$ statt $|x'(t)|$? \square

Beispiel 90 (Bewegungsinvarianz). Translationen und orthogonale Abbildungen des \mathbb{R}^n sind Diffeomorphismen mit Funktionaldeterminante vom Absolutbetrag 1. Also erhalten sie das Lebesguemaß integrierbarer Mengen. Das Lebesguemaß ist *bewegungsinvariant*.

□

Beispiel 91 (Gaußsches Fehlerintegral). Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ ist stetig, und daher für jedes $R > 0$ integrierbar über den abgeschlossenen Kreis B_R vom Radius R . Anwendung des Transformationssatzes mit Polarkoordinaten liefert

$$\int_{B_R} f d\mu_2 = \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} e^{-\rho^2} \rho d\mu_2 = \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi.$$

Darauf wenden wir den Fubini an und schreiben die 1-dimensionalen Lebesgueintegrale in Regelintegrale um

$$\int_{B_R} f d\mu_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\phi = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-R^2}}{2} \right).$$

Wir betrachten nun den Fall $R = n \in \mathbb{N}$ und wenden auf die Folge $(\chi_{B_n} f)_{n \in \mathbb{N}}$ den Satz von Beppo Levi an. Er liefert

$$\int f d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi.$$

Andrerseits wissen wir aus Beispiel 62

$$\int f d\mu_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2$$

und finden

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Dies ist das in der Statistik sehr wichtige Integral der Gaußschen Verteilung. Es läßt sich „eindimensional“ nicht leicht finden, e^{-t^2} hat keine elementare Stammfunktion.

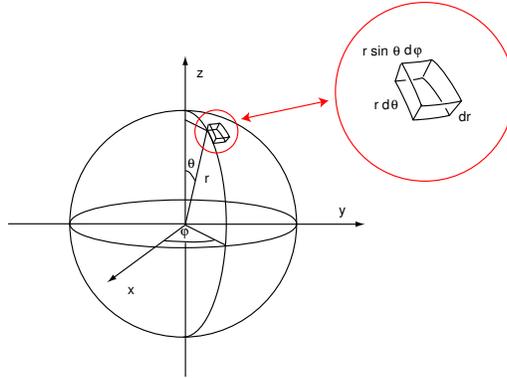


□

Beispiel 92 (Trägheitsmoment der homogenen Hohlkugel). Die Kugelkoordinaten oder sphärischen Polarkoordinaten $h : [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$h(r, \theta, \phi) := (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

sind ein Diffeomorphismus auf $]0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$, und die Funktionaldeterminante ist nach Beispiel 86 gegeben durch $r^2 \sin \theta$.



Wir berechnen damit das Trägheitsmoment einer homogenen Hohlkugel K mit Radien $a < b$ und der Massendichte m bezüglich der z -Achse durch den Mittelpunkt, welches definiert ist durch

$$\Theta = \int_K m(x^2 + y^2) d\mu_3.$$

Anwendung des Transformationssatzes auf sphärische Polarkoordinaten und Fubini ergibt:

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} m r^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} m r^4 \sin^3 \theta d\phi d\theta dr \\ &= 2\pi m \frac{b^5 - a^5}{5} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{8m\pi}{15} (b^5 - a^5). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Gesamtmasse $M = m \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)$ erhält man

$$\Theta = \frac{2}{5} M \frac{b^5 - a^5}{b^3 - a^3}.$$

Rollt die Kugel auf einer schiefen Ebene der Neigung α , und bezeichnet ψ den Rotationswinkel, so ergibt sich die Bewegungsgleichung aus dem Energieerhaltungssatz:

$$\frac{M}{2}(b\dot{\psi})^2 + \frac{\Theta}{2}\dot{\psi}^2 = Mgb\psi \sin \alpha \quad \implies \quad \psi(t) = \frac{Mgb \sin \alpha}{2(Mb^2 + \Theta)} t^2.$$

Die Laufzeit T für die Strecke $S = b\psi(T)$ erfüllt dann

$$T^2 = \frac{2S}{g \sin \alpha} \left(1 + \frac{\Theta}{Mb^2}\right).$$

Durch ein Laufzeit-Experiment lassen sich also das Trägheitsmoment Θ und damit der innere Radius a aus den leicht zu messenden Hohlkugel-Parametern M und b bestimmen.

□

6.4 Das Lemma von Sard

- Es scheint plausibel, dass Mengen, auf denen der Rang einer differenzierbaren Abbildung $< n$ ist, auf Mengen einer Dimension $< n$ abgebildet werden, aber es ist natürlich gar nicht klar, was das eigentlich bedeuten soll. Das Lemma von Sard gibt eine Präzisierung, die wir im Beweis zum Transformationssatz bereits benutzt haben.

Satz 93 (Lemma von Sard). Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei

$$K := \{x \mid \det D_x h = 0\}.$$

Dann ist die Menge der kritischen Werte $h(K)$ von h eine μ_n -Nullmenge.

Beweis. Wir verwenden die Euklidische Norm auf \mathbb{R}^n , weil wir die Bewegungsinvarianz von μ_n brauchen werden.

Weil die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen eine Nullmenge ist, genügt es nach dem Ausschöpfungslemma 77 zu zeigen, dass $h(K \cap W)$ für jeden kompakten Würfel $W \subset G$ eine μ_n -Nullmenge ist. Sei W also ein solcher Würfel, sei

$$M := \sup_{x \in W} \|D_x h\|,$$

und sei

$$\epsilon > 0.$$

Die Funktion $\|Dh\|$ ist stetig auf der kompakten Menge W , also gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu dem gegebenen ϵ eine Zerlegung von W in k^n kompakte Würfel $W_j, j \in \{1, \dots, k^n\}$, mit

$$W = \bigcup_{j=1}^{k^n} W_j, \quad \text{diam } W_j = \frac{\text{diam } W}{k},$$

so dass für alle j gilt

$$x, y \in W_j \implies \|D_y h - D_x h\| < \epsilon. \quad (27)$$

Für alle Komponentenfunktionen h_i von h , alle $j \in \{1, \dots, k^n\}$ und alle x, y in W_j gilt nach dem Schrankensatz

$$|h_i(y) - h_i(x)| \leq \|h(y) - h(x)\| \leq M \|y - x\| \leq M \frac{\text{diam } W}{k}. \quad (28)$$

Nun sei $x \in K \cap W_j$, also $D_x h(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^n$, und wir nehmen zunächst an, dass

$$D_x h(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \quad (29)$$

Dann gilt für die letzte Komponenten h_n und $y \in W_j$

$$\begin{aligned} |h_n(y) - h_n(x)| &= |h_n(y) - h_n(x) - \underbrace{D_x h_n(y-x)}_{=0}| \\ &\leq \|h(y) - h(x) - D_x h(y-x)\| \\ &= \|(h(y) - D_x h(y)) - (h(x) - D_x h(x))\|. \end{aligned}$$

Der Schrankensatz angewendet auf die Funktion $y \mapsto h(y) - D_x h(y)$ liefert dann

$$|h_n(y) - h_n(x)| \leq \sup_{q \in xy} \|D_q h - D_x h\| \|y - x\| \leq \epsilon \frac{\text{diam } W}{k}. \quad (30)$$

Nach (28) und (30) ist die kompakte Menge $h(W_j)$ also enthalten in einem Intervall vom Volumen

$$\left(M \frac{\text{diam } W}{k}\right)^{n-1} 2\epsilon \frac{\text{diam } W}{k} = 2\frac{\epsilon}{k^n} M^{n-1} (\text{diam } W)^n.$$

Ohne die Voraussetzung (29) ist $D_x h(\mathbb{R}^n)$ enthalten in einer anderen Hyperebene des \mathbb{R}^n , die man aus $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ durch eine Drehung erhalten kann. Wegen der Bewegungsinvarianz von μ_n , vergleiche Beispiel 90, gilt dann auch in diesem Fall

$$\mu_n(h(W_j)) \leq 2\frac{\epsilon}{k^n} M^{n-1} (\text{diam } W)^n.$$

Das gilt für alle j mit $K \cap W_j \neq \emptyset$, insgesamt aber für höchstens k^n Indizes.

Weil $h(K \cap W) \subset \bigcup_{K \cap W_j \neq \emptyset} h(W_j)$ und alle diese Mengen integrierbar sind, folgt

$$\mu_n(h(K \cap W)) \leq \mu_n\left(\bigcup_{K \cap W_j \neq \emptyset} h(W_j)\right) \leq 2\epsilon M^{n-1} (\text{diam } W)^n$$

für jedes $\epsilon > 0$. Also ist $\mu_n(h(K \cap W)) = 0$ und die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung. Für differenzierbare Abbildungen auch zwischen Räumen verschiedener Dimension

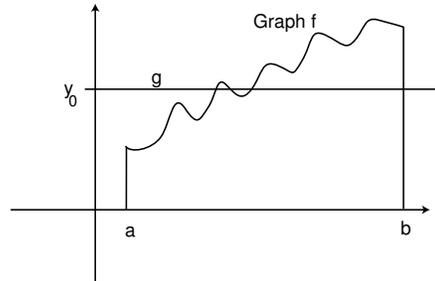
$$f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$$

heißen Punkte, in denen das Differential nicht surjektiv ist, *kritische Punkte* und ihre Bilder *kritische Werte*. Das Lemma von Sard (1942) in seiner vollen Form besagt, dass auch in diesem Fall die Menge der kritischen Werte eine Lebesgue-Nullmenge ist, wobei man (merkwürdiger Weise) voraussetzen muss, dass die Abbildung f mehr als $\max(0, n - m)$ -mal stetig differenzierbar ist. (Vgl. z.B. Bröcker/Jänich, Einführung in die Differentialtopologie, Springer-Verlag).

Es gibt ein Beispiel (von H. Whitney 1935) für eine C^1 -Funktion von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} , deren kritische Wertemenge ein nicht-degeneriertes Intervall enthält. Für C^2 -Funktionen ist das unmöglich.

Beispiel 94 (Transversalität). Das Lemma von Sard spielt im Zusammenhang mit dem Begriff der *Transversalität* eine wichtige Rolle in der Differentialtopologie. Wir geben dafür ein einfachstes Beispiel.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a) < f(b)$. Nach dem Lemma von Sard ist $f(K) = \{f(t) \mid f'(t) = 0\}$ eine μ_1 -Nullmenge in \mathbb{R} und deshalb ist $[f(a), f(b)] \setminus f(K) \neq \emptyset$. Liegt y_0 in dieser Menge, so schneidet die Gerade $y = y_0$ den Graphen von f transversal: In keinem Schnittpunkt ist die Gerade tangential an den Graphen. Das Lemma von Sard liefert also die Existenz transversaler (horizontaler) Geraden.



□

7 Räume integrierbarer Funktionen

- Wir machen einen Ausflug in die Funktionalanalysis.

7.1 Die L^p -Räume

- Konvergenz von Folgen hatten wir in der Analysis II mittels Metrik, Topologie oder Norm erklärt. Die in den Konvergenzsätzen benutzte punktweise Konvergenz fast überall ist von etwas anderer Natur, nur die gleichmäßige Konvergenz ließ sich als Konvergenz in der Supremumsnorm verstehen.
- Wir definieren deshalb auf verschiedenen Räumen integrierbarer Funktionen, die für die Praxis der numerischen Mathematik oder der partiellen Differentialgleichungen von großer Wichtigkeit sind, auch Normen und damit neue Konvergenzbegriffe.
- Wir werden diese Konvergenz im Zusammenhang mit den Fourierreihen im nächsten Kapitel noch benötigen.

Im folgenden sei ϕ wieder ein beliebiges Maß auf \mathbb{R}^n . Weiter seien $A \subset \mathbb{R}^n$ eine ϕ -messbare Menge und $p \geq 1$.

Definition 95. (i) Wir setzen

$$\mathcal{L}^p(A, \phi) := \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \phi\text{-messbar und } |f|^p \text{ ist } \phi\text{-integrierbar über } A\}.$$

(ii) Für $f \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$ definieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\phi \right)^{1/p}.$$

Die Definition stimmt für $p = 1$ mit der bisherigen überein: f ist genau dann integrierbar, wenn es messbar und $|f|$ integrierbar ist.

Die Menge $\mathcal{L}^p(A, \phi)$ ist ein Vektorunterraum vom Raum aller Abbildungen von A nach \mathbb{R} . Natürlich ist sie abgeschlossen unter der Multiplikation mit reellen Zahlen, also muss man nur zeigen, dass mit $f, g \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$ auch $f + g \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$. Aber $f + g$ und $|f + g|^p$ sind ϕ -messbar, und weil

$$|f + g|^p \leq (2 \sup(|f|, |g|))^p = 2^p \sup(|f|^p, |g|^p) \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$$

ist $|f + g|^p$ nach Satz 54 auch ϕ -integrierbar.

Wir erinnern an ein Resultat aus der Analysis I:

Für $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (31)$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung haben wir den folgenden Satz in einer diskreten Version bereits in der Analysis I bewiesen:

Satz 96 (Höldersche Ungleichung). Seien $p, q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Seien $f \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$ und $g \in \mathcal{L}^q(A, \phi)$. Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$ und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Beweis. Ist $\|f\|_p = 0$, so folgt $\int |f|^p d\phi = 0$, also $f =_\phi 0$. Entsprechend für g .

Also o.E. $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Für $x \in A$ gilt nach (31)

$$\underbrace{\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}}_{\phi\text{-messbar}} \leq \underbrace{\frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q}_{\phi\text{-integrierbar}}.$$

Nach Satz 54 folgt daraus $fg \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$. Durch Integration ergibt sich

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int |f|^p d\phi + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int |g|^q d\phi = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Satz 97 (Minkowskische Ungleichung). Für $p \geq 1$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$ gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis. Für $p = 1$ ist das trivial.

Sei also $p > 1$ und sei $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beachten Sie, dass dann $p-1 = \frac{p}{q}$.

Also gilt

$$f \in \mathcal{L}^p \implies |f|^{p-1} \in \mathcal{L}^q.$$

Für $f, g \in \mathcal{L}^p$ folgt

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq \underbrace{|f|}_{\in \mathcal{L}^p} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in \mathcal{L}^q} + \underbrace{|g|}_{\in \mathcal{L}^p} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in \mathcal{L}^q}$$

und nach der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_A |f + g|^p d\phi &\leq \|f\|_p \|(|f + g|^{p-1})\|_q + \|g\|_p \|(|f + g|^{p-1})\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_A |f + g|^p d\phi \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Falls $|f + g| =_\phi 0$ ist, ist die Behauptung trivial. Andernfalls folgt nach Division durch $\left(\int_A |f + g|^p d\phi \right)^{\frac{1}{q}}$ die Behauptung. □

Es sieht so aus, als sei $\|\dots\|_p$ für $p \geq 1$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^p(A, \phi)$. Offenbar gilt

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p,$$

und nach dem letzten Satz gilt die Dreiecksungleichung. Allerdings folgt aus $\|f\|_p = 0$ nach dem Korollar zum Satz von Beppo Levi nur $f =_\phi 0$ und nicht $f = 0$, wie sich das für eine Norm gehören würde. $\|\cdot\|_p$ ist also nur eine sogenannte *Halbnorm*.

Definition 98. Die Menge

$$\mathcal{N}(A, \phi) := \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f =_\phi 0\}$$

ist für jedes $p > 0$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(A, \phi)$. Wir bezeichnen den Quotientenvektorraum nach diesem Unterraum mit

$$L^p(A, \phi) := \mathcal{L}^p(A, \phi) / \mathcal{N}(A, \phi).$$

Für $p \geq 1$ induziert dann $\|\cdot\|_p$ auf $L^p(A, \phi)$ eine Norm.

Bemerkung. In der Praxis wird die Unterscheidung zwischen \mathcal{L}^p und L^p sehr großzügig gehandhabt. Man sagt oft „Sei $f \in L^p$ “ wenn man eigentlich meint „Sei $f \in \mathcal{L}^p$ “, wenn also f eine *Funktion* und nicht eine *Äquivalenzklasse von Funktionen* sein soll. Wir werden uns dieser (Un)sitte anschließen.

Beispiel 99 (Hilbertraum). Für $p = 2$ wird die Norm auf $\mathcal{L}^2(A, \phi)$ durch ein positiv definites Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int fg d\phi$$

geliefert. Der Raum $\mathcal{L}^2(A, \phi)$ heißt auch *der Hilbertraum der quadrat-integrierbaren Funktionen*.

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ ist in diesem Fall äquivalent zur Hölderschen Ungleichung.

Für $\phi = \delta_{\mathbb{N}}$ erhält man den Raum der quadrat-summierbaren Folgen, der üblicherweise mit l^2 bezeichnet und „Klein-l-zwei“ genannt wird.

□

Bemerkung zur Integration komplexwertiger Funktionen. Komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{C}$ sind Paare reellwertiger Funktionen:

$$f = u + iv \text{ mit } u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}.$$

Man definiert

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(A, \phi) = \{u + iv \mid u, v \in \mathcal{L}^1(A, \phi)\}$$

und für $f = u + iv \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(A, \phi)$

$$\int_A f d\phi := \int_A u d\phi + i \int_A v d\phi.$$

Dafür gelten die elementaren Rechenregeln der Integration. Insbesondere hat man für f wie oben

$$|f| \in \mathcal{L}^1(A, \phi) \quad \text{und} \quad \left| \int_A f d\phi \right| \leq \int_A |f| d\phi.$$

Beweis. Sind $u, v \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$, so ist $\sqrt{u^2 + v^2}$ messbar, und wegen

$$|f| = \sqrt{u^2 + v^2} \leq \sqrt{2} \sup(|u|, |v|) \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$$

sogar integrierbar. Sei nun $I := \int_A f d\phi \neq 0$. Dann folgt mit einem schon aus der Analysis 1 bekannten Trick

$$1 = \operatorname{Re} \frac{\int_A f d\phi}{I} = \int_A \operatorname{Re} \frac{f}{I} d\phi \leq \int_A \frac{|f|}{|I|} d\phi,$$

also $|I| \leq \int_A |f| d\phi$. □

Man definiert $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p$ als Menge der komplexwertigen Funktionen mit messbarem Real- und Imaginärteil, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Dazu definiert man analog $L_{\mathbb{C}}^p$ und insbesondere $L_{\mathbb{C}}^2$. Auf diesem Raum liefert

$$\langle f, g \rangle := \int f \bar{g} d\phi.$$

ein unitäres Skalarprodukt (=positiv definite Sesquilinearform).

7.2 Die Vollständigkeit der L^p -Räume

- Wir beweisen die Vollständigkeit der L^p -Räume.
- In diesem Zusammenhang beschäftigen wir uns noch einmal mit den verschiedenen Konvergenzbegriffen für Funktionenfolgen und mit den Unterschieden zwischen endlich-dimensionalen und unendlich-dimensionalen Banachräumen.

Im folgenden seien ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n und $A \subset \mathbb{R}^n$ eine ϕ -messbare Menge.

Satz 100 (Fischer-Riesz). Für $p \geq 1$ ist $(L^p(A, \phi), \|\dots\|_p)$ vollständig, also ein Banachraum.

Beweis. Ich schreibe \mathcal{L}^p statt $\mathcal{L}^p(A, \phi)$ und beschränke mich auf den Fall $p > 1$. Der Fall $p = 1$ geht sehr ähnlich, aber es ist eine gute Übung, sich die nötigen Änderungen klar zu machen.

Sei (f_k) eine Cauchyfolge in \mathcal{L}^p . Wir wollen zeigen, dass diese Folge konvergent ist, d.h. dass es eine Limesfunktion $f \in \mathcal{L}^p$ gibt, so dass

$$\lim \|f_k - f\| = 0.$$

1. Schritt. Wir konstruieren zunächst einen Kandidaten für f .

Wegen der Cauchy-Eigenschaft gibt es eine streng monoton wachsende Folge (m_k) mit

$$\|f_l - f_{m_k}\|_p < \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{für alle } l \geq m_k. \quad (32)$$

Wir wollen zeigen, dass $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ϕ -konvergent ist. Dazu schreiben wir

$$f_{m_k} = f_{m_0} + \sum_{j=1}^k (f_{m_j} - f_{m_{j-1}}).$$

Es genügt zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} (f_{m_j} - f_{m_{j-1}})$ fast überall absolut konvergent ist, es genügt sogar, das auf jedem beschränkten Intervall $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen. Dazu benutzen wir den Satz von Beppo Levi.

Weil $\chi_I \in \mathcal{L}^q$ für $q := \frac{p}{p-1}$ ist, ist nach der Hölderschen Ungleichung

$$|f_{m_j} - f_{m_{j-1}}| \chi_I \in \mathcal{L}^1.$$

und

$$\int \left(\sum_{j=1}^k |f_{m_j} - f_{m_{j-1}}| \chi_I \right) d\phi = \sum_{j=1}^k \int \| |f_{m_j} - f_{m_{j-1}}| \chi_I \|_1 \leq \sum_{j=1}^k \| |f_{m_j} - f_{m_{j-1}}| \|_p \| \chi_I \|_q \stackrel{(32)}{\leq} \| \chi_I \|_q.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi ist also die Reihe fast überall absolut konvergent, und $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen eine Funktion f .

2. Schritt. Wir zeigen nun, dass $f \in \mathcal{L}^p$.

Als Grenzwert messbarer Funktionen ist f messbar, und die Folge $(|f_{m_k}|^p)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast-überall gegen $|f|^p$. Wir wenden auf diese Folge das Lemma von Fatou (Lemma 40) an.

Zunächst ist offenbar $|f_{m_k}|^p \geq 0$. Weil $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, ist auch $(\|f_{m_k}\|_p)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} und damit konvergent. Also ist

$$\left(\int |f_{m_k}|^p d\phi\right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt.}$$

Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas von Fatou erfüllt, und es folgt

$$|f|^p =_\phi \lim_k |f_{m_k}|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Also ist $f \in \mathcal{L}^p$.

3. Schritt. Wir wissen nun, dass $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ fast-überall konvergent gegen ein $f \in \mathcal{L}^p$ ist. Wir zeigen, dass $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ auch bezüglich $\|\dots\|_p$ gegen f konvergiert.

Dazu sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Folge

$$(|f_{m_l} - f_{m_k}|^p)_{l \geq k}$$

und wenden wieder das Lemma von Fatou an. Es gilt

$$\begin{aligned} |f_{m_l} - f_{m_k}|^p &\geq 0, \\ \int |f_{m_l} - f_{m_k}|^p d\phi &= \|f_{m_l} - f_{m_k}\|_p^p \leq \frac{1}{2^{(k+1)p}}, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} |f_{m_l} - f_{m_k}|^p &=_\phi |f - f_{m_k}|. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Fatou folgt

$$\int |f - f_{m_k}|^p d\phi \leq \frac{1}{2^{(k+1)p}}.$$

Daraus folgt aber die Behauptung.

4. Schritt. Konvergiert eine Teilfolge einer Cauchyfolge, so konvergiert die ganze Folge gegen denselben Grenzwert. Darum konvergiert auch die Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ gegen f . \square

Bemerkung: Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen. Der vorstehende Beweis hat uns darauf aufmerksam gemacht, dass es für Funktionenfolgen sehr verschiedene Konvergenzbegriffe gibt:

- Gleichmäßige Konvergenz auf dem Definitionsbereich
- Punktweise Konvergenz
- Punktweise Konvergenz ϕ -fast überall
- Konvergenz im p -Mittel, d.h. $\lim \|f_k - f\|_p = 0$.

Die Beziehungen zwischen den drei ersten Begriffen sollten ziemlich klar sein, deren Beziehungen zum vierten sind allerdings nicht so einfach, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 101. Dass selbst gleichmäßige Konvergenz nicht die Konvergenz im p -Mittel impliziert, zeigt die Folge

$$(k^{-1/p} \chi_{[0, k]})_{k \in \mathbb{N}}$$

für $\phi = \mu_1$.

\square

Im Beweis des Fischer-Riesz haben wir gezeigt:

Satz 102. Eine im p -Mittel konvergente Folge in L^p besitzt eine fast-überall konvergente Teilfolge.

Die Folge selbst braucht aber nirgends punktweise konvergent zu sein:

Beispiel 103. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $n(k) \in \mathbb{N}$ die eindeutig bestimmte Zahl mit

$$2^{n(k)} \leq k < 2^{n(k)+1}.$$

Definiere

$$a_k := \frac{k - 2^{n(k)}}{2^{n(k)}}, \quad b_k := a_k + \frac{1}{2^{n(k)}}$$

und

$$f_k = \chi_{[a_k, b_k]}.$$

Läuft k von $2^{n(k)}$ bis $2^{n(k)+1} - 1$, so läuft a_k von 0 bis $1 - \frac{1}{2^{n(k)}}$ und

$$\mu_1([a_k, b_k]) = \frac{1}{2^{n(k)+1}}.$$

Die Folge $(f_k(x))$ konvergiert für kein $x \in [0, 1]$. Andererseits liegt sie in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu_1)$, und $\|f_k\|_1 = \frac{1}{2^{n(k)}}$, d.h. (f_k) konvergiert in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu_1)$ gegen 0.

□

Bemerkung. Die L^p -Räume sind (für die meisten Maße) unendlich-dimensionale Banachräume, die L^2 - und $L^2_{\mathbb{C}}$ -Räume vollständige Räume mit positiv-definitem Skalarprodukt, sog. *Hilberträume*. Für solche gelten natürlich alle Ergebnisse der linearen Algebra, die nicht auf die Dimension Bezug nehmen, und alle Aussagen über (vollständige) metrische Räume. Insbesondere kann man von (endlichen) Linearkombinationen sprechen, und im L^2 hat man die Begriffe *orthogonal*, *orthonormal* etc. Man kann z.B. das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren anwenden, wohingegen die Frage nach der Existenz von Orthonormalbasen auf die Dimension Bezug nimmt und deshalb nicht a priori klar ist.

Auch manche der Ihnen bisher bekannten topologischen Aussagen über Banachräume beziehen sich vor allem auf den endlich-dimensionalen Fall und übertragen sich nicht auf den unendlich-dimensionalen.

- Untervektorräume sind zum Beispiel nicht notwendig abgeschlossen.
So ist $C^0([0, 1]) \subset L^1([0, 1])$ ein echter Untervektorraum, aber, wie wir später sehen werden, dicht in L^1 , d.h. die abgeschlossene Hülle von $C^0([0, 1])$ ist $L^1([0, 1])$.
- Die abgeschlossenen Kugeln sind nicht länger kompakt, vgl. Beispiel 104.
- Lineare Abbildungen sind nicht unbedingt stetig.

Beispiel 104 (Nicht-kompakte Einheitskugel). Die Funktionen $f_k := \chi_{[k, k+1]}$ liegen für jedes $p \geq 1$ im $\mathcal{L}^p(\mu_1)$ und erfüllen $\|f_k\|_p = 1$. Sie liegen also in der Einheitskugel des $\mathcal{L}^p(\mu_1)$. Weiter rechnet man sofort nach, dass $\|f_k - f_l\|_p = \sqrt[p]{2}$ für $k \neq l$. Deshalb ist *keine* Teilfolge von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und erst recht keine Teilfolge konvergent. Darum ist die Einheitskugel im $L^p(\mu_1)$ nicht kompakt.

□

Beispiel 105. Der Raum l^2 aus dem Beispiel 99 der quadrat-summierbaren Folgen enthält den Unterraum E aller Folgen mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen Gliedern. Dieser wird aufgespannt von den Folgen $e_k := (\delta_{jk})_{j \in \mathbb{N}}$, die lauter Nullen und eine 1 haben. Durch

$$\alpha((x_j)_{j \in \mathbb{N}}) := \sum_{j=0}^{\infty} jx_j$$

wird eine lineare Abbildung $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die nicht stetig ist, weil

$$|\alpha(e_k)| = k = k\|e_k\|_2,$$

d.h. weil α nicht beschränkt ist. E ist ein dichter Teilraum von l^2 .

Eine unstetige lineare Funktion auf dem *ganzen* Banachraum l^2 findet man, indem man einen Unterraum $F \subset l^2$ wählt, so dass $l^2 = E \oplus F$ ist. Für den Beweis der Existenz eines solchen algebraischen Komplements benötigt man das Auswahlaxiom oder das Zornsche Lemma, also ein mengentheoretisches Argument. Dann definiert man eine Erweiterung $\tilde{\alpha} : l^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von α auf den ganzen Raum durch $\tilde{\alpha}(e + f) := \alpha(e)$ für $e \in E, f \in F$.

□

8 Fourierreihen

Fourierreihen sind *das* Mittel zur Analyse periodischer Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *T-periodisch*, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x).$$

In diesem Fall heißt $\omega := \frac{2\pi}{T}$ die zugehörige (*Kreis-*)*frequenz*.

Musterbeispiele sind die Funktionen $\cos(k\omega x)$ und $\sin(k\omega x)$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Ein Ziel der Fourierschen Theorie ist es, *beliebige* *T*-periodische Funktionen als (unendliche) Linearkombination von diesen Musterfunktionen zu schreiben, also zum Beispiel - für *gerade* *T*-periodische Funktionen -, eine Darstellung der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x)$$

zu finden. Die Amplituden a_k geben dann an, mit welchem Gewicht der Baustein $\cos(k\omega t)$ an $f(t)$ beteiligt ist. Wir untersuchen, für welche Funktionen f eine solche Darstellung existiert, in welchem Sinne die Konvergenz der unendlichen Reihe gemeint ist und wann die Koeffizienten a_k eindeutig sind. Die Abbildung

$$f \mapsto (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

bezeichnet man auch als *Fouriertransformation* oder *Spektralanalyse*. Sie analysiert, welche Frequenzen $k\omega$ mit welchem Gewicht an f beteiligt sind.

Im menschlichen Ohr sind die Haarzellen des Cortischen Organs jeweils für bestimmte Frequenzen empfindlich. Das Ohr übermittelt dem Gehirn also die Fouriertransformierten der von ihm aufgenommenen akustischen Signale.

Rauschunterdrückungs- oder Kompressionsverfahren (etwa für MP3) zerlegen Signale mit der Fouriertransformation in ihr Frequenzspektrum, filtern die unerwünschten oder überflüssigen Frequenzen heraus und setzen das Signal dann wieder zusammen.

Wesentliche Anwendungen der Fourieranalyse etwa auf Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen betreffen die Darstellung von Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf kompakten Intervallen, die also sicher nicht periodisch sind, durch trigonometrische Funktionen. Dazu setzt man f einfach mit der Periode $b - a$ auf ganz \mathbb{R} fort. (Das klappt natürlich nur wenn $f(a) = f(b)$. Wenn μ_1 -Nullmengen keine Rolle spielen, ist das kein Problem, andernfalls muss man sich was anderes einfallen lassen. Was, zum Beispiel?)

8.1 Lineare Algebra und Geometrie im Hilbertraum

- Wir beginnen mit abstrakter Hilbertraumtheorie. Dabei haben wir den L^2 als Beispiel im Hinterkopf, er wird für uns *das* Beispiel eines Hilbertraums werden. Aber in diesem Abschnitt geht es nur um lineare Algebra und Geometrie, nicht um Analysis und Integralrechnung.

Wir verwenden folgende Definitionen für den Begriff *Skalarprodukt*. Vergleichen Sie dazu das Lineare-Algebra-Skriptum von Mehrmann.

- Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine positiv-definite symmetrische Bilinearform. Ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt ein *Euklidischer Vektorraum*.
- Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{C} -Vektorraum V ist eine positiv-definite hermitesche Bilinearform. Ein \mathbb{C} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt ein *unitärer Vektorraum*.

Beispiele 106.

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &:= \sum_{k=1}^n v_k w_k \text{ auf } \mathbb{R}^n, & \langle f, g \rangle &:= \int_A f g d\phi \text{ auf } L^2(A, \phi), \\ \langle v, w \rangle &:= \sum_{k=1}^n v_k \bar{w}_k \text{ auf } \mathbb{C}^n. & \langle f, g \rangle &:= \int_A f \bar{g} d\phi \text{ auf } L^2_{\mathbb{C}}(A, \phi). \end{aligned}$$

□

Zur Erinnerung: Ist (e_0, \dots, e_n) eine Basis des (endlich-dimensionalen) Vektorraumes V , so läßt sich jeder Vektor $f \in V$ eindeutig schreiben als

$$f = \sum_{j=0}^n f_j e_j.$$

Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten f_j erfordert in der Regel das Lösen eines linearen Gleichungssystems und kann sehr aufwendig sein. Ist V aber ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und ist (e_0, \dots, e_n) eine *Orthonormalbasis*, so berechnen sich die Entwicklungskoeffizienten v_j ganz einfach als

$$f_j = \langle f, e_j \rangle.$$

Für die Norm von f gilt dann (nach Pythagoras)

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{j=0}^n |\langle f, e_j \rangle|^2.$$

Eine gebräuchliche Alternative bieten *orthogonale* Basen, für die also $c_j := \langle e_j, e_j \rangle$ nicht notwendig 1 ist. Dann gilt ebenfalls

$$f = \sum_{j=0}^n f_j e_j, \text{ jetzt aber mit } f_j = \frac{1}{c_j} \langle f, e_j \rangle. \quad (33)$$

Was passiert, wenn die e_j zwar orthonormal sind, aber keine Basis bilden?

Lemma 107. Seien e_0, \dots, e_n orthonormale Vektoren in einem reellen oder komplexen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Skalarprodukt und sei W der davon aufgespannte Untervektorraum. Definiere die Orthogonalprojektion auf W durch

$$P_W(f) := \sum_{j=0}^n \langle f, e_j \rangle e_j, \quad f \in V.$$

Dann gilt für alle $f \in V$

- (i) $f - P_W(f) \perp W$, d.h. $\langle f - P_W(f), g \rangle$ für alle $g \in W$.
- (ii) $\|f - P_W(f)\| = \min \{\|f - g\| \mid g \in W\}$ und $P_W(f)$ ist der einzige Punkt in W , in dem dieses Minimum angenommen wird.

Beweis. Zu (i). Das folgt unmittelbar aus $\langle f - \sum_{j=0}^n \langle f, e_j \rangle e_j, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle - \langle f, e_k \rangle = 0$.

Zu (ii). Für $g \in W$ gilt

$$f - g = \underbrace{f - P_W(f)}_{\in W^\perp} + \underbrace{P_W(f) - g}_{\in W}.$$

Also gilt

$$\|f - g\|^2 = \|f - P_W(f)\|^2 + \|P_W(f) - g\|^2.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beachten Sie, dass in diesem Lemma zwar die Endlichkeit von n nicht aber die der Dimension von V eine Rolle spielt.

Für den Rest dieses Abschnitts sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, d.h. ein Vektorraum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und davon induzierter Norm $\|\dots\|$, der bezüglich $d(x, y) := \|x - y\|$ vollständig ist.

Die Objekte unseres Interesses sind eigentlich die konkreten Hilberträume $L^2(A, \phi)$ und $L^2_{\mathbb{C}}(A, \phi)$ mit dem oben eingeführten Skalarprodukt. Aber die bei den Untersuchungen verwendete Sprache lehnt sich bewusst an die Situation im Euklidischen oder unitären Raum der linearen Algebra an, um die geometrische Anschauung (zum Beispiel den Begriff *Orthogonalprojektion*) zu provozieren und zu übertragen.

Definition 108. Seien J eine Indexmenge und $(e_j)_{j \in J}$ eine Familie in V . Die Familie heißt *orthonormal* oder ein *Orthonormalsystem*, wenn für alle $i, j \in J$ gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 109 (Gram-Schmidt). Wir betrachten in einem Hilbertraum eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ linear unabhängiger Vektoren. Dann zeigt man leicht, dass

$$g_0 := f_0, \quad g_k := f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle f_k, g_j \rangle}{\|g_j\|^2} g_j$$

eine Folge *orthogonaler* Vektoren definiert und dass daher $\{\tilde{g}_k := \frac{1}{\|g_k\|} g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem liefert.

Dieses Verfahren nennt man das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt. □

Konvention für Doppelreihen. Insbesondere im Hinblick auf den komplexen Hilbertraum $L^2_{\mathbb{C}}$ ist es nützlich, Orthonormalsysteme mit Indexmenge \mathbb{Z} zu betrachten, vgl. Beispiel 115 im nächsten Abschnitt. In diesem Zusammenhang treten unendliche Reihen der Form

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \quad (34)$$

auf, und man muss erklären, was das sein soll und vor allem, wann eine solche Reihe konvergent heißen soll. Eine übliche Bedingung ist, dass die Reihen

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} c_{-j}$$

beide konvergent sein sollen. Der Grenzwert der Reihe (34) ist dann die Summe der beiden Grenzwerte. Wir vereinbaren aber für unsere Untersuchungen der Fourierreihen, dass (34) einfach die Folge

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j := \left(\sum_{j=-n}^n c_j \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sein soll und nennen die Folgenglieder wie bei "normalen" unendlichen Reihen die *Partialsummen*. Konvergenz der *Reihe* heißt Konvergenz der *Folge der Partialsummen*. Für die in diesem Abschnitt untersuchte (*Norm-*)Konvergenz von Fourierreihen im Hilbertraum (später ist das *Konvergenz im quadratischen Mittel*) liefern beide Konventionen dasselbe, aber bei der *punktweisen Konvergenz* im Abschnitt 8.3 ist das nicht klar.

Definition 110 (Fourierreihe). Sei $(e_j)_{j \in J}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum V mit Indexmenge $J = \mathbb{N}$ bzw. $J = \mathbb{Z}$. Für $f \in V$ definiert man die *Fourierreihe* von f bezüglich $(e_j)_{j \in J}$ durch

$$\mathcal{F}(f) := \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Die $\langle f, e_j \rangle$ heißen die *Fourierkoeffizienten* von f . Im Falle der Konvergenz schreiben wir, wie bei unendlichen Reihen üblich, $\mathcal{F}(f)$ auch für den Grenzwert. Die Partialsummen bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_n(f)$.

Satz 111 (Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Gleichung). Seien $J \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ und $(e_j)_{j \in J}$ ein ON-System im Hilbertraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Für $f \in V$ gilt dann

(i) *Besselsche Ungleichung:*

$$\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

(ii) *Die Fourierreihe $\mathcal{F}(f) = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j$ ist in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ konvergent.*

(iii) *Die Parsevalsche Gleichung*

$$\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|f\|^2$$

gilt genau dann, wenn

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j = f,$$

d.h. wenn die Fourierreihe von f in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gegen f konvergiert.

Beweis. Zu (i). Das folgt aus Lemma 107: Ist nämlich $W = \text{Spann} \{e_j \mid j \in J, |j| \leq n\}$, so ist $P_W(f) = \mathcal{F}_n(f)$ und

$$\|f\|^2 = \|\mathcal{F}_n(f)\|^2 + \|f - \mathcal{F}_n(f)\|^2. \quad (35)$$

Daher ist für jedes n

$$\sum_{j \in J, |j| \leq n} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|\mathcal{F}_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Zu (ii). Nach (i) ist $\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2$ konvergent. Das Cauchy Kriterium liefert daher zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$

$$\epsilon > \sum_{m < |j| \leq n} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|\mathcal{F}_n(f) - \mathcal{F}_m(f)\|^2.$$

Die Partialsummen der Fourierreihe bilden also eine Cauchyfolge in V , und die ist wegen der Vollständigkeit des Hilbertraums konvergent.

Zu (iii). Folgt aus (35). □

Definition 112. Sei $(e_j)_{j \in J}$ ein Orthonormalsystem in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Nach Linearer Algebra ist

$$\text{Spann} \{e_j \mid j \in J\}$$

der Vektorunterraum bestehend aus allen endlichen(!) Linearkombinationen von Vektoren e_j . Das Orthonormalsystem heißt *vollständig* oder eine *ON-Basis* des Hilbertraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wenn dieser Raum dicht in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist, d.h. wenn seine abgeschlossene Hülle ganz V ist:

$$V = \overline{\text{Spann} \{e_j \mid j \in J\}}.$$

Das bedeutet, dass es zu jedem $f \in V$ und zu jedem $\epsilon > 0$ eine *endliche* Indexmenge $J_0 \subset J$ gibt, für die

$$\|f - \sum_{j \in J_0} \lambda_j e_j\| < \epsilon.$$

Satz 113. Ist $J \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ und ist $(e_i)_{i \in J}$ eine ON-Basis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so konvergiert für jedes $f \in V$ die Fourierreihe gegen f :

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Weil die e_j eine Basis bilden, gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und ein $g \in \text{Spann} \{e_j \mid j \in J, |j| \leq n\}$ mit $\|f - g\| < \epsilon$. Nach Lemma 107 folgt dann aber

$$\|f - \mathcal{F}_n(f)\| \leq \|f - g\| < \epsilon.$$

□

8.2 Orthonormalsysteme und Fourierreihen im L^2

- Wir kommen jetzt zur Analysis zurück und betrachten die L^2 -Räume als konkrete Beispiele von Hilberträumen.
- Wir geben darin drei Orthonormalsysteme an, von denen wir allerdings erst später zeigen können, dass sie sogar Orthonormalbasen sind.
- Und wir konkretisieren für diese Systeme die Berechnung der Fourierkoeffizienten.

Beispiel 114 (Legendrepolynome). Wir betrachten den Hilbertraum $L^2([-1, +1], \mu_1)$. Die auf $[-1, +1]$ eingeschränkten Monome $1, x, x^2, x^3, \dots$ sind linear unabhängig. Durch Orthonormalisieren erhält man die *normierten Legendrepolynome* $\tilde{P}_k(x)$. Die ersten dieser Polynome sind

$$\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2}x, \sqrt{5/8}(3x^2 - 1), \sqrt{7/8}(5x^3 - 3x).$$

In den Anwendungen (vor allem in der Theorie physikalisch wichtiger partieller Differentialgleichungen wie der Wellengleichung oder der Diffusionsgleichung) benutzt man gern die nicht normierten Legendrepolynome

$$P_k(x) := \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \tilde{P}_k(x).$$

Für sie gibt es eine Fülle von Identitäten. Zum Beispiel ist

$$P_k(x) := \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

Damit schreibt sich die sogenannte *Fourier-Legendre-Reihe* einer Funktion $f \in L^2([-1, +1], \mu_1)$ als

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k, \quad a_k := \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x) dx,$$

vergleiche (33). □

Beispiel 115 (Das komplexe trigonometrische System). Seien $T > 0$ und $\omega := \frac{2\pi}{T}$. Wir betrachten den komplexen Hilbertraum $L^2_{\mathbb{C}}([0, T], \frac{1}{T} \mu_1)$ mit dem unitären Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{[0, T]} f \bar{g} d\mu_1 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \bar{g}(x) dx.$$

und darin die Familie

$$(e^{ik\omega x})_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Wegen

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega x} e^{-il\omega x} dx = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(k-l)\omega x} dx = \begin{cases} \frac{e^{i(k-l)\omega T} - 1}{T i(k-l)\omega} \Big|_0^T = 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist dies ein orthonormales System, das *komplexe trigonometrische System zur Periode T*. Die Fourierreihe eines $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0, T], \frac{1}{T} \mu_1) = L^2_{\mathbb{C}}([0, T], \mu_1)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ik\omega x} dx.$$

□

Beispiel 116 (Das reelle trigonometrische Orthonormalsystem). Aus dem letzten Beispiel folgt für $k, l \geq 1$

$$\begin{aligned} \langle \sin k\omega x, \sin l\omega x \rangle &= \left\langle \frac{1}{2i}(e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}), \frac{1}{2i}(e^{il\omega x} - e^{-il\omega x}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{-2i} \langle e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}, e^{il\omega x} - e^{-il\omega x} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \begin{cases} \langle e^{ik\omega x}, e^{ik\omega x} \rangle + \langle e^{-ik\omega x}, e^{-ik\omega x} \rangle = 2 & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin k\omega x \sin l\omega x dx = \delta_{kl}.$$

Analoges findet man für den Cosinus, während gemischte Skalarprodukte von Sinus und Cosinus 0 ergeben. Zusammen erhält man für $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ im reellen Hilbertraum $L^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)g(x)dx$$

ein Orthonormalsystem

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \cos 3\omega x, \dots,$$

das man als das *reelle trigonometrische Orthonormalsystem zur Periode T* bezeichnet. Die zugehörige Fourierreihe von $f \in L^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ bezeichnet man auch als klassische Fourierreihe. Man notiert sie in der Form

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$

mit

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(k\omega x) dx.$$

Dabei betrachtet man also eigentlich nur die geraden Partialsummen der Fourierreihe, aber das macht keinen Unterschied, wie man mit Hilfe der Besselschen Ungleichung nachweisen kann.

Der Term $\frac{a_0}{2}$ kommt so zustande:

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{T} \int_0^T f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(0\omega x) dx \right).$$

□

Alle in den letzten drei Beispielen vorgestellten ONSysteme sind vollständig, d.h. die entsprechenden Fourierreihen $\mathcal{F}(f)$ konvergieren im quadratischen Mittel(!) gegen f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}_n(f) - f\|_2 = 0. \quad (36)$$

Das ist aber keine Aussage über punktweise Konvergenz, vergleichen Sie Beispiel 103.

Wenn man schreibt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

so suggeriert das diese Gleichung für alle oder doch fast alle x . Das ist aber nicht gemeint und im allgemeinen nicht richtig. Deshalb schreibt man (36) gern etwas nebulös als

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Periode T oder Periode 2π ? Häufig beschränkt man sich beim Studium klassischer Fourierreihen auf den Fall 2π -periodischer Funktionen, weil dann $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ ist und die Formeln etwas einfacher werden. Die Perioden lassen sich aber einfach umrechnen:

Mit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{T}{2\pi}x$ gilt

- Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodisch mit Periode T , so ist $\tilde{g} = g \circ h$ periodisch mit Periode 2π und umgekehrt. Insbesondere wird zum Beispiel aus $g = \cos k\omega x$ die Funktion $\tilde{g} = \cos kx$.
- Sind $f, g \in \mathcal{L}^2([0, T], \mu_1)$, so sind nach dem Transformationssatz $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi], \mu_1)$ und umgekehrt. Es gilt

$$\frac{2}{T} \int_0^T fg \, d\mu_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}\tilde{g} \, d\mu_1.$$

8.3 Punktweise Konvergenz

- Wir betrachten in diesem und dem folgenden Abschnitt die Frage nach der punktweisen Konvergenz der L^2 -Fourierreihen. Das ist eine völlig andere Fragestellung, als die nach der Konvergenz im quadratischen Mittel.
- Trotzdem werden gerade diese Untersuchungen letztlich auch den noch ausstehenden Beweis für die Vollständigkeit der im letzten Abschnitt betrachteten L^2 -Orthonormalsysteme ermöglichen.

Wir betrachten hier klassische reelle Fourierreihen für periodische Funktionen, wobei wir der Einfachheit halber den Fall $T = 2\pi$, also $\omega = 1$ wählen. Die Funktionen seien quadratintegrierbar in dem Sinne, dass ihre Einschränkungen in $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mu_1)$ liegen. Wir fragen nach punktweiser Konvergenz der Fourierreihe.

Wir bezeichnen die (geraden) Partialsummen der Fourierreihe mit

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

wobei die Fourierkoeffizienten a_k, b_k gegeben sind durch

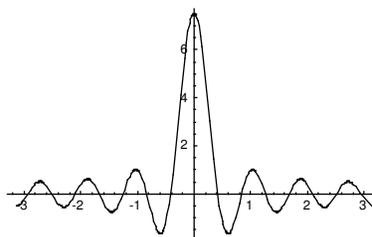
$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Lemma 117 (Dirichlet-Kern). Für den Dirichlet-Kern

$$D_n(x) = 1/2 + \sum_{k=1}^n \cos kx$$

gilt:

- (i) $D_n(x) = D_n(-x)$,
 $D_n(x + 2\pi) = D_n(x)$.
- (ii) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} D_n(x) dx = 1$.
- (iii) $D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$,
falls der Nenner $\neq 0$.



(Die Abbildung suggeriert vielleicht, dass D_n eine gedämpfte Schwingung ist. Aber D_n ist periodisch! In Wirklichkeit interessiert uns D_n auch nur auf $[-\pi, \pi]$, und da ist die Funktion „bei 0 konzentriert“.)

Beweis. (i) und (ii) sind trivial.

Zu (iii). Durch Induktion. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist ebenfalls trivial.

Für den Induktionsschritt verwendet man die Formel

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$$

Diese liefert

$$\frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin(n - \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \cos nx.$$

□

Lemma 118. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und quadrat-integrierbar. Dann gilt

(i)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt. \quad (37)$$

(ii) Sind $\eta, x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \eta \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \eta \right\} D_n(t) dt = 0.$$

Die Behauptung des Lemmas ist interessant: Bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten geht der Funktionsverlauf von f über die ganze Periode ein. Die Formel (37) zeigt zusammen mit einem Blick auf den Graphen von D_n , dass die (Partialsommen der) Fourierreihe in der Nähe von x im wesentlichen nur vom Verhalten von f in der Nähe von x abhängen.

Beweis. Zu (i).

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u) du \quad (\text{Integrand } 2\pi\text{-periodisch}). \end{aligned}$$

Das beweist die erste Gleichung. Mit der Substitution $t \rightarrow -t$ ergibt sich

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} D_n(-t) f(x-t) (-dt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt,$$

also auch

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt.$$

Zu (ii). Nach dem vorangehenden Lemma ist

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta D_n(t) dt$$

Damit folgt (ii) unmittelbar aus (i). □

Definition 119. Ist f eine reelle Funktion und existiert der rechtsseitige Limes

$$f(x_+) := \lim_{t \searrow 0} f(x+t),$$

so kann man

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}$$

betrachten. Wenn dieser Grenzwert existiert, heißt er die *rechtsseitige Ableitung* von f in x und wird mit $f'(x_+)$ bezeichnet.

Entsprechend definiert man die linksseitige Ableitung $f'(x_-)$.

Satz 120 (Punktweise Konvergenz). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -periodisch und auf $[0, T]$ quadrat-integrierbar. Sei $x \in \mathbb{R}$. Existieren der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert $f(x_+)$ bzw. $f(x_-)$ und die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von f an der Stelle x , so folgt

$$\lim s_n(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

Ist f in x außerdem stetig, so gilt also

$$\lim s_n(x) = f(x).$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $T = 2\pi$. Wir setzen

$$\eta := \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \quad \text{und} \quad \phi(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \eta$$

und wollen Lemma 118 anwenden. Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) D_n(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \left(\cos nt + \sin nt \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos nt dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt dt. \end{aligned} \quad (38)$$

Mit f ist auch $\phi \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \frac{1}{\pi} \mu_1)$, und das ist die einzige Eigenschaft von ϕ , die wir hier brauchen. Nach der Besselschen Ungleichung konvergieren dann die Fourierkoeffizienten $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos nt dt$ von ϕ gegen 0.

Dasselbe Argument gilt für das zweite Integral in (38), wenn wir gezeigt haben, dass

$$\psi(t) := \phi(t) \cot \frac{t}{2} \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \frac{1}{\pi} \mu_1). \quad (39)$$

Das Problem beim Nachweis von (39) ist der Pol von $\cot \frac{t}{2}$ in 0, und erst hier kommt die spezielle Definition von ϕ zum Tragen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\eta}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} \\ &= \frac{f(x+t) + f(x-t) - (f(x_+) + f(x_-))}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} \\ &= \left(\underbrace{\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}}_{\rightarrow f'(x_+)} + \underbrace{\frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}}_{\rightarrow f'(x_-)} \right) \underbrace{\frac{\frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}}_{\rightarrow 1} \\ &\rightarrow f'(x_+) + f'(x_-) \quad \text{für } t \searrow 0. \end{aligned}$$

Weil ψ eine ungerade Funktion ist, existiert auch $\psi(t_-)$. Also gibt es ein kompaktes Intervall $[-\delta, \delta] \subset [-\pi, +\pi]$, auf dem ψ messbar und beschränkt ist. Daher ist $\psi \chi_{[-\delta, \delta]} \in \mathcal{L}^2$. Andererseits ist mit ϕ auch ψ auf $[-\pi, +\pi] \setminus [-\delta, \delta]$ quadrat-integrierbar und (39) bewiesen. \square

Im Beweis haben wir gesehen, dass das Verhalten der Funktion ψ in der Nähe von 0, also das Verhalten von f in der Nähe von x entscheidend ist für das Konvergenzverhalten von $\mathcal{F}(f)(x)$. Das ergibt das

Korollar 121 (Riemannscher Lokalisationsatz). *Das (punktweise) Konvergenzverhalten und der Grenzwert der Fourierreihe einer quadrat-integrierbaren periodischen Funktion an der Stelle x hängt nur vom Verhalten von f auf einer beliebig kleinen Umgebung von x ab.*

Definition 122. Eine T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stückweise differenzierbar*, wenn es $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = T$ und differenzierbare Funktionen $f_k : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f|_{]x_{k-1}, x_k[} = f_k|_{]x_{k-1}, x_k[} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Korollar 123. *Ist f 2π -periodisch und stückweise differenzierbar, so gilt für alle x*

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

Bemerkungen.

1. Es gibt stetige 2π -periodische Funktionen, für die die Fourierreihe in überabzählbar vielen Punkten divergiert (Du Bois-Reymond 1873). Andererseits hat man bei quadrat-integrierbaren Funktionen μ_1 - fast-überall Konvergenz gegen f (Carleson 1966).
2. Ist f eine gerade Funktion, d.h. gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x , so gilt für alle k

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t \, dt,$$

$$b_k = 0.$$

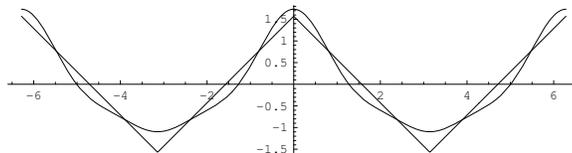
3. Ist f eine ungerade Funktion, so gilt für alle k

$$a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t \, dt.$$

Die Bemerkungen 2 und 3 vereinfachen in den folgenden Beispielen (und auch sonst gelegentlich) die Berechnung der Fourierkoeffizienten.

Beispiel 124. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch mit $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ für $-\pi \leq x \leq \pi$.



Dann ist f gerade, also treten nur Cosinusterme auf. Es gilt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(kx) dx = \dots = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}.$$

Die Fourierreihe konvergiert nach dem Satz punktweise gegen f . Also ist

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right\}.$$

Daraus folgt mit $x = 0$

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

In der Abbildung sind f und $\mathcal{F}_{10}(f)$ dargestellt.

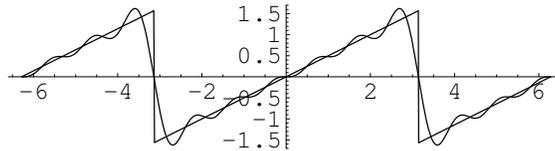
□

Beispiel 125. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch mit $f(x) = x/2$ für $-\pi < x \leq \pi$.

Dann gilt

$$f(x) = \left\{ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \dots \right\}$$

für $x \neq (2k+1)\pi$.



In der Abbildung sind f und $\mathcal{F}_6(f)$ dargestellt.

Für $x = \pi/2$ erhält man die Leibnizsche Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Durch gliedweise Differentiation obiger Fourierreihe erhält man die Reihe

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - + \dots$$

Die Glieder dieser Reihe gehen für kein x gegen 0. Ist nämlich $x = 2\pi \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$, so ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\cos(kqx) = \cos(2p\pi) = 1.$$

Ist andererseits $x = 2\pi y$ mit irrationalem y , so sind die Reste modulo 2π von $\{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in $[0, 2\pi]$ und die Folge $(\cos(2kx))_{k \in \mathbb{N}}$ divergent. Also ist die differenzierte Reihe für kein x konvergent. Fourierreihen darf man i.a. nicht gliedweise differenzieren.

□

Die Fourierentwicklung von Funktionen in einem Raum $L^2(A, \phi)$ betrifft zunächst Funktionen, die eben auf der Menge A definiert sind. Weil aber das trigonometrische Orthonormalsystem eine natürliche periodische Erweiterung auf ganz \mathbb{R} besitzt, taugt die Fourieranalyse im $L^2([0, 2\pi], \frac{1}{\pi}\mu_1)$ zur Behandlung periodischer Funktionen auf \mathbb{R} , und ist historisch daraus entstanden. Aber auch die Fourieranalyse von Funktionen, die nur auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ (oder einem anderen kompakten Intervall) sinnvoll gegeben sind, ist ein wichtiges Anwendungsgebiet. Das demonstrieren wir im folgenden Beispiel.

Beispiel 126. Die Bewegung einer schwingenden Saite der Länge π wird gegeben durch die Gleichung

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \{a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t\} \sin kx,$$

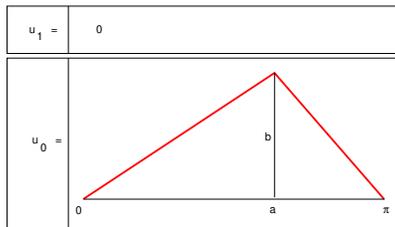
wobei $\omega_k = k\omega_1$ die k -te Oberschwingung ist. Beachten Sie, dass die Schwingung zwar in t periodisch ist, die Ortskoordinate x aber natürlich nur in dem Intervall $[0, \pi]$ eine sinnvolle Bedeutung hat! Die Grundschiwingung ω_1 wird durch die Physik der Saite bestimmt. Die Koeffizienten a_k, b_k hingegen sind durch die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$$

bestimmt:

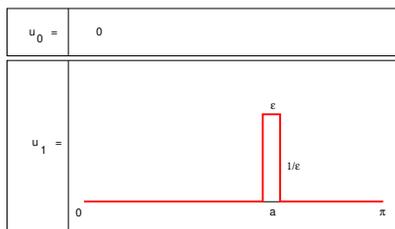
$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin kx \, dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi\omega_k} \int_0^{\pi} u_1(x) \sin kx \, dx.$$

Gezupfte Saite:



$$u(x, t) = \frac{2b}{a(\pi-a)} \sum \frac{\sin ka}{k^2} \cos \omega_k t \sin kx.$$

Angeschlagene Saite:



$$u(x, t) = \frac{2}{\pi\omega_1\epsilon} \sum \frac{\sin(ka)\sin(k\epsilon/2)}{k^2} \sin \omega_k t \sin kx.$$

Durch die Wahl der Stelle a kann man unerwünschte Obertöne minimieren, z.B. den 7. und 13. (Sexte+3/8 bzw. Sexte-1/4 Ton).

□

8.4 Cesàro-Konvergenz

- Die Fourierreihe selbst einer stetigen 2π -periodischen Funktion f ist im allgemeinen nicht punktweise gegen f konvergent⁶. Jetzt werden wir diesen Mißstand mit dem Cesàroschen Summierungsverfahren „reparieren“.
- Wir erhalten für die Cesàro-Mittel der Fourierreihe bei stetigen Funktionen sogar gleichmäßige Konvergenz und damit einen einfachen Beweis für den Weierstraßschen Approximationssatz: Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall läßt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren.
- Die Vollständigkeit trigonometrischer und anderer ON-Systeme ist eine einfache Folgerung.

Definition 127. Eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cesàro-konvergent gegen a* , wenn die Folge ihrer arithmetischen Mittel $(\frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

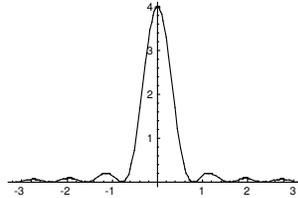
Ist $\lim a_k = a$, so ist die Folge auch Cesàro-konvergent gegen a , aber die Umkehrung gilt nicht, wie die Folge $a_n = (-1)^n$ zeigt.

Lemma 128. Für den Fejér-Kern

$$F_n(t) := \frac{D_0(t) + \dots + D_n(t)}{n+1}$$

gilt:

- (i) $F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\sin^2(n+1)t/2}{\sin^2 t/2}$,
- (ii) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$,
- (iii) $F_n(t) \leq \frac{1}{2(n+1) \sin^2(\delta/2)}$
für $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$.



Beweis. Zu (i). Es gilt

$$(2 \sin \frac{t}{2})^2 D_k(t) = 2 \sin(k + \frac{1}{2})t \sin \frac{t}{2} = \cos kt - \cos(k+1)t.$$

Aufsummieren liefert

$$(2 \sin \frac{t}{2})^2 F_n(t) = \frac{1}{n+1} (1 - \cos(n+1)t) = \frac{2}{n+1} \sin^2(n+1) \frac{t}{2}.$$

Zu (ii). Aus Lemma 117 folgt $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = 1$. Damit ergibt sich (ii).

Zu (iii). Das ist nach (i) trivial. □

⁶ Ein erstes Beispiel dafür stammt von du Bois-Reymond 1873

Satz 129 (Fejér). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und T -periodisch. Dann konvergieren die arithmetischen Mittel

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}$$

der Fourier-Partialsummen $s_k(x)$ von f gleichmäßig gegen f . Die Fourierreihe ist also insbesondere überall Cesàro-konvergent gegen f .

Beweis. Sei o.E. $T = 2\pi$. Zunächst ist die stetige Funktion f auf dem kompakten Intervall $[-\pi, \pi]$ beschränkt und gleichmäßig stetig. Wegen der Periodizität gibt es daher ein $M \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq M, \\ |x - y| < \delta &\implies |f(x) - f(y)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Sei o.E. $\delta < \pi$. Dann erhalten wir nach dem Lemma 118 und dem vorstehenden Lemma

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(x) - f(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{< \epsilon} F_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta < |t| < \pi} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\leq 2M} F_n(t) dt \\ &\leq \epsilon \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt}_{=1} + \frac{1}{\pi} 2M 2\pi \frac{1}{2(n+1)2 \sin^2(\delta/2)} < 2\epsilon \end{aligned}$$

für hinreichend große n . □

Als erste Konsequenz erhalten wir:

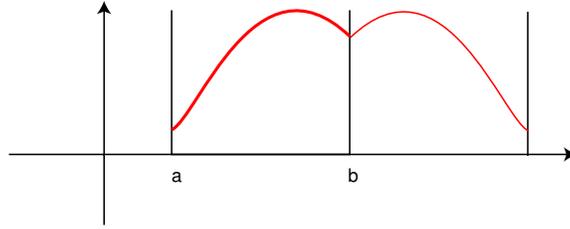
Satz 130 (Weierstraßscher Approximationssatz). Für jedes kompakte Intervall $[a, b]$ liegen die Polynome dicht in $(C^0[a, b], d^{sup})$.

Wir halten noch einmal fest: Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt *dicht* in X , wenn ihre abgeschlossene Hülle gleich X ist:

$$\bar{A} = X,$$

d.h. wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $x \in X$ ein $a \in A$ gibt, für das $d(x, a) < \epsilon$.

Beweis. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und sei $\epsilon > 0$. Wir suchen ein Polynom p mit $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ für alle $x \in [a, b]$. Wir setzen f auf ganz \mathbb{R} stetig mit Periode $T = 2(b - a)$ fort:



Die Cesàromittel der Fortsetzung seien mit σ_n bezeichnet. Dann gibt es nach dem Satz von Fejér ein n mit

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nun ist σ_n eine reelle Linearkombination von Termen $\cos k\omega x, \sin k\omega x$. Die Taylorreihen dieser Funktionen konvergieren auf $[0, T]$ gleichmäßig gegen $\cos k\omega x, \sin k\omega x$. Also gibt es ein Polynom p mit

$$|\sigma_n(x) - p(x)| < \epsilon/2 \text{ für alle } x \in [0, T].$$

Dann ist aber nach der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

für alle $x \in [0, \pi]$. □

Wo wir gerade bei dichten Teilräumen sind, beweisen wir noch einen Satz darüber:

Satz 131. Sei $p \geq 1$. Dann gilt:

(i) Ist ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n , so gibt es zu jedem $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \phi)$ und jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion s mit

$$\|f - s\|_p < \epsilon.$$

(ii) Zu jedem $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mu_n)$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

Mit anderen Worten:

- Die Treppenfunktionen sind dicht in $(L^p(\mathbb{R}^n, \phi), \|\dots\|_p)$ und
- die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger sind dicht in $(L^p(\mathbb{R}^n, \mu_n), \|\dots\|_p)$.

(Gemeint sind dabei natürlich die Mengen der Restklassen in L^p , welche wenigstens eine Treppenfunktion bzw. eine stetige Funktion mit kompaktem Träger enthalten.)

Beweis des Satzes. Zu (i). **A.** Wir betrachten zunächst den Fall, dass $|f|$ beschränkt durch $M \in \mathbb{R}$ ist, und sein Träger in einem kompakten Intervall K liegt.

Weil f messbar ist, gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j =_\phi f.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$|s_j| \leq M, \quad \text{Träger } s_j \subset K.$$

Dann gilt

$$|s_j - f|^p \leq (|s_j| + |f|)^p \leq (2M)^p \chi_K \in \mathcal{L}^1$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int |s_j - f|^p d\phi = 0.$$

Nach dem Satz von Lebesgue gilt daher

$$\|s_j - f\|_p^p = \int |s_j - f|^p d\phi \rightarrow 0.$$

Zu jedem beschränkten $f \in L^p$ mit kompakten Träger und jedem $\epsilon > 0$ gibt es also eine Treppenfunktion s mit $\|s - f\|_p < \epsilon$.

B. Nun sei $f \in \mathcal{L}^p$ beliebig. Zu $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_k := \inf(\sup(f, -k), +k) \chi_{[-k, +k]^n}.$$

Dann ist f_k messbar und beschränkt mit kompaktem Träger, also in \mathcal{L}^p . Weiter gilt

$$|f - f_k|^p \leq |f|^p \in \mathcal{L}^1$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f - f_k|^p d\phi = 0$$

Nach dem Satz von Lebesgue gilt daher

$$\|f - f_k\|_p^p = \int |f - f_k|^p d\phi \rightarrow 0.$$

Zu jeder \mathcal{L}^p -Funktion f und jedem $\epsilon > 0$ gibt es also eine beschränkte \mathcal{L}^p -Funktion g mit kompaktem Träger, so dass

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

Aus **A.** und **B.** folgt damit die Behauptung (i).

Zu (ii). Nach Teil (i) genügt es zu zeigen: Zu jeder Treppenfunktion s und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger, so dass $\|s - g\|_2 < \epsilon$ ist. Wegen der Dreiecksungleichung kann man sich dabei beschränken auf den Fall $s = \chi_I$ für ein $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$. Und weil Intervalle mit leeren Inneren μ_n -Nullmengen sind, kann man sich weiterhin auf den Fall $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$ beschränken.

Sei also $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ein solches Intervall und sei $\epsilon > 0$. Weil $\mu_n(I) = \mu_n(\bar{I})$ ist, gibt es nach dem Regularitätsaxiom ein offenes Intervall $J \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ mit $\bar{I} \subset J$ und

$$\mu_n(J) < \mu_n(I) + \epsilon.$$

Wir behaupten nun, dass es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$g|_I = 1, \quad g|_{\mathbb{R}^n \setminus J} = 0, \quad 0 \leq g - \chi_I \leq 1.$$

Für eine solche Funktion gilt

$$0 \leq g - \chi_I \leq \chi_J - \chi_I$$

und wegen $|g - \chi_I|^p \leq g - \chi_I$ dann

$$\|g - \chi_I\|_p^p \leq \int (\chi_J - \chi_I) \leq \epsilon,$$

und (ii) ist bewiesen.

Die Existenz einer Funktion g mit den angegebenen Eigenschaften sieht man vielleicht am einfachsten so ein: Man wählt eine lineare Transformation $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die \bar{I} auf den Würfel

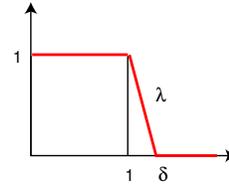
$$W := [-1, +1]^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{sup} \leq 1\}$$

abbildet. $F(J)$ ist dann eine offene Umgebung von W , und es gibt ein $\delta > 1$ mit

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{sup} \leq \delta\} \subset F(J).$$

Mit

$$\lambda(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - \frac{t-1}{\delta-1} & \text{für } 1 \leq t \leq \delta, \\ 0 & \text{für } t \geq \delta. \end{cases}$$



leistet dann

$$g(x) := \lambda(\|F(x)\|_{sup})$$

das Gewünschte. □

Damit können wir nun eine Lücke aus dem letzten Abschnitt schließen:

Satz 132 (Vollständigkeit des trigonometrischen ON-Systems). Seien $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann ist das Orthonormalsystem

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \dots$$

in $L^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ vollständig.

Beweis. Seien $f \in \mathcal{L}^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ und $\epsilon > 0$. Wir setzen $f(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [0, T]$ fort. Nach Satz 131 gibt es dann eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger, so dass

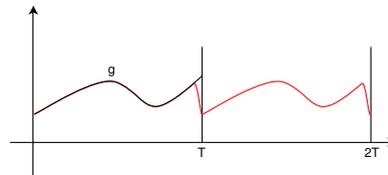
$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f - g|^2 d\mu_1} < \epsilon.$$

Durch Einschränkung erhalten wir eine stetige Funktion $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|f - g\|_2 < \epsilon. \tag{40}$$

wobei $\|\dots\|_2$ die Norm von $L^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ bezeichnet.

Wir können g stetig so abändern, dass sich die \mathcal{L}^2 -Norm nicht wesentlich ändert, also (40) erhalten bleibt, und zusätzlich $g(0) = g(T)$ gilt. Dann kann man g mit Periode T stetig fortsetzen.



Wir bezeichnen die Cesàromittel der Partialsummen von g mit σ_n . Nach dem Satz von Fejér gibt es ein n mit

$$|\sigma_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also ist

$$\|\sigma_n - g\|_2 = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T |\sigma_n - g|^2 d\mu_1} < \epsilon$$

und

$$\|f - \sigma_n\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - \sigma_n\|_2 < 2\epsilon.$$

Weil σ_n in dem vom trigonometrischen ONSystem aufgespannten Unterraum liegt, folgt die Behauptung. \square

Korollar 133. *Das Orthonormalsystem*

$$(e^{ik\omega x})_{k \in \mathbb{Z}}$$

ist in $L^2_{\mathbb{C}}([0, T], \frac{1}{T}\mu_1)$ vollständig.

Beweis. Die Orthonormalität haben wir früher schon gesehen. Sei $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([0, T], \frac{1}{T}\mu_1)$. Dann folgt

$$u = \operatorname{Re}(f) \in \mathcal{L}^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1), \quad v = \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{L}^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1).$$

Beachten Sie, dass der Faktor $\frac{1}{T}$ oder $\frac{2}{T}$ für die Integrierbarkeit keine Rolle spielt. Allerdings macht er sich bei der Norm bemerkbar. Zum Beispiel ist

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{2}\|u\|_{L^2_{\mathbb{C}}}.$$

Nach dem letzten Korollar gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Linearkombinationen σ und τ von $\cos(k\omega x)$, $\sin(k\omega x)$, so dass

$$\|u - \sigma\|_{L^2} < \epsilon, \quad \|v - \tau\|_{L^2} < \epsilon.$$

Dann ist

$$\|f - (\sigma + i\tau)\|_{L^2_{\mathbb{C}}} \leq \|u - \sigma\|_{L^2_{\mathbb{C}}} + \|v - \tau\|_{L^2_{\mathbb{C}}} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}.$$

Schließlich sind aber $\cos(k\omega x)$ und $\sin(k\omega x)$ Linearkombinationen von $e^{ik\omega x}$ und $e^{-ik\omega x}$. \square

Korollar 134. *Die Polynome liegen für jedes $p \geq 1$ dicht in $L^p([a, b], \mu_1)$. Insbesondere sind die normierten Legendrepolynome eine ON-Basis von $L^2([-1, +1], \mu_1)$.*

Beweis. Jedes $f \in \mathcal{L}^p([a, b], \mu_1)$ läßt sich bezüglich der L^p -Norm durch stetige Funktionen auf $[a, b]$ approximieren. Stetige Funktionen lassen sich nach dem Satz von Weierstraß durch Polynome bezüglich d^{sup} approximieren. Dann lassen sie sich aber auch bezüglich der L^p -Norm approximieren, denn für stetiges f und g ist

$$\|f - g\|_p = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq d^{sup}(f, g) \sqrt[p]{b - a}.$$

\square

8.5 Rückblick auf das Lebesgueintegral

- Wir untersuchen, in wieweit das Lebesgueintegral die einzig sinnvolle Erweiterung des Integrals für Treppenfunktionen ist.

Für Treppenfunktionen gibt es zu unserer Definition des Integrals wohl kaum vernünftige Alternativen. Von dieser Definition ausgehend haben wir durch Approximation mit monotonen Folgen etc. das Integral zu einer linearen Abbildung auf \mathcal{L}^1 erweitert. Weil

$$\left| \int f d\phi - \int g d\phi \right| \leq \int |f - g| d\phi = \|f - g\|_1,$$

ist die induzierte lineare Abbildung $\int : L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ auch stetig.

Nun gibt es (zum Beispiel im *Forster* oder *Barner/Flohr*) andere Konstruktionen für Integrale, die von den Autoren ebenfalls *Lebesgueintegral* genannt werden. Ist das Ergebnis mit dem unseren identisch?

Um das zu klären beweisen wir, dass sich ein normierter Vektorraum X

- e.g. der Raum $T(\mathbb{R}^n)$ der Restklassen von Treppenfunktionen mit der 1-Norm

auf höchstens *eine* Weise zu einem *vollständigen* normierten Vektorraum Y

- e.g. $(L^1, \|\dots\|_1)$

ergänzen läßt, in dem X dicht liegt. Genauer ist Y bis auf normtreue Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt eine *Vervollständigung* von X . Wir zeigen auch (und das zuerst), dass sich eine stetige lineare Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

- e.g. das Treppenfunktionsintegral

auf genau eine Weise zu einer stetigen linearen Abbildung $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen läßt. Also sind alle stetigen linearen Erweiterungen des Treppenfunktionsintegrals auf Vervollständigungen von $T(\mathbb{R}^n)$ eindeutig bis auf Isomorphie.

Satz 135. Seien $(Y, \|\dots\|_Y)$ und $(Z, \|\dots\|_Z)$ Banachräume und $X \subset Y$ ein dichter Unterraum. Sei $f : X \rightarrow Z$ linear und stetig. Dann gibt es genau eine lineare stetige Abbildung $F : Y \rightarrow Z$ mit $F|_X = f$.

Beweis. Einzigkeit von F . Ist $F : Y \rightarrow Z$ linear und stetig mit $F|_X = f$ und ist $y \in Y$, so gibt es wegen der Dichtheit von X eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim x_i = y$. Wegen der Stetigkeit folgt $F(y) = \lim F(x_i) = \lim f(x_i)$. Also ist $F(y)$ eindeutig bestimmt.

Konstruktion von F . Seien wieder $y \in Y$ und $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim x_i = y$. Dann ist

$$\lim \|x_k - y\|_Y = 0.$$

Also ist (x_k) eine Cauchyfolge in Y . Wegen $\|f(x_i) - f(x_j)\|_Z \leq \|f\| \|x_i - x_j\|_Z$ ist $(f(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ dann eine Cauchyfolge in Z und daher konvergent gegen ein $z \in Z$. Wir zeigen, dass z nicht von der Cauchyfolge (x_i) abhängt, und können dann definieren:

$$F(y) := z. \tag{41}$$

Ist nämlich $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine weitere gegen y konvergente Folge in $X \subset Y$, so definiert

$$\zeta_i := \begin{cases} x_i & \text{für } i \text{ gerade} \\ \xi_i & \text{für } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

ebenfalls eine gegen y konvergente Cauchyfolge. Und weil Teilfolgen einer konvergenten Folge denselben Limes haben wie die Originalfolge, ist $\lim f(\zeta_i) = \lim f(\xi_i) = \lim f(x_i)$.

Eigenschaften von F . Ist $y \in X$, so kann man für (x_k) die konstante Folge wählen. Also ist

$$F|_X = f.$$

Der Nachweis der Linearität ist einfach (selber machen!). Schließlich ist mit den obigen Bezeichnungen

$$\|F(y)\|_Z = \lim \|f(x_i)\|_Z \leq \lim \|f\| \|x_i\|_X = \|f\| \|y\|_Y$$

Daher ist F stetig und $\|F\| \leq \|f\|$. □

Definition 136. Seien $(X, \|\dots\|_X)$ ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $(Y, \|\dots\|_Y)$ ein Banachraum. Es gelte

- X ist Untervektorraum von Y ,
- $\|x\|_Y = \|x\|_X$ für alle $x \in X$,
- X ist dicht in Y .

Dann heißt $(Y, \|\dots\|_Y)$ eine *Vervollständigung* von $(X, \|\dots\|_X)$.

Bis auf normtreue Isomorphie gibt es zu gegebenem $(X, \|\dots\|)$ höchstens *eine* Vervollständigung:

Korollar 137. Seien $(Y_1, \|\dots\|_1)$ und $(Y_2, \|\dots\|_2)$ zwei Vervollständigungen von $(X, \|\dots\|_X)$. Dann gibt es genau einen stetigen Isomorphismus $F : Y_1 \rightarrow Y_2$ mit $F|_X = \text{id}$. Es gilt

$$\|F(y_1)\|_2 = \|y_1\|_1 \tag{42}$$

für alle $y_1 \in Y_1$.

Beweis. Der Beweis ist eine rein formale Konsequenz des Satzes 135. Wir wenden diesen Satz viermal an:

1. $Y = Y_1, Z = Y_2, f : X \rightarrow Z, x \mapsto x$.
Das liefert eine eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildung $F_1 : Y_1 \rightarrow Y_2$ mit $F_1|_X = \text{id}$.
2. $Y = Y_2, Z = Y_1, f : X \rightarrow Z, x \mapsto x$.
Das liefert eine eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildung $F_2 : Y_2 \rightarrow Y_1$ mit $F_2|_X = \text{id}$.
3. $Y = Y_1, Z = Y_1, f : X \rightarrow Z, x \mapsto x$.
Das liefert eine *eindeutig bestimmte* stetige lineare Abbildung $E : Y_1 \rightarrow Y_1$ mit

$$E|_X = \text{id}.$$

Wir kennen aber zwei Abbildungen, die dies leisten: $E = F_2 \circ F_1$ und $E = \text{id} : Y_1 \rightarrow Y_1$. Wegen der Eindeutigkeit ist also

$$F_2 \circ F_1 = \text{id}.$$

4. Analog finden wir $F_1 \circ F_2 = \text{id} : Y_2 \rightarrow Y_2$.

Damit erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit des stetigen Isomorphismus $F = F_1$. Aus $F|_X = \text{id}$ folgt mit der Stetigkeit auch (42). \square

Zu einem normierten \mathbb{R} -Vektorraum $(X, \|\dots\|)$ konstruiert man eine Vervollständigung ganz ähnlich, wie man die reellen Zahlen aus den rationalen konstruiert: Die Menge der Cauchyfolgen in X bildet einen Vektorraum \tilde{Y} . Der Quotient von \tilde{Y} nach den Nullfolgen ist ein Vektorraum Y , der X in Gestalt der konstanten Folgen enthält. Wird $y \in Y$ repräsentiert durch die Cauchyfolge (x_i) , so ist $(\|x_i\|)$ konvergent und man definiert $\|y\| := \lim \|x_i\|$. Das liefert dann eine Vervollständigung von $(X, \|\dots\|)$.

Diese Konstruktionsverfahren kann man natürlich konkret auf die Integration anwenden. Man beginnt mit dem Raum der Treppenfunktionen $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ und dem darauf definierten Integral. Dann zeigt man, dass

$$\|f\| := \int |f| d\phi$$

eine Norm definiert, wenn man den Raum der ϕ -fast überall verschwindenden Treppenfunktionen herausdividiert. Das liefert einen normierten Vektorraum $(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \|\dots\|)$. Den vervollständigt man durch Adjunktion der Cauchyfolgen und erhält $(L^1(\phi), \|\dots\|_1)$. Das klingt einfach, die Probleme kommen aber beim Umgang mit konkreten Funktionen. Wir haben zum Beispiel gesehen, dass L^1 -Konvergenz ziemlich kompliziert mit punktweiser Konvergenz zusammenhängt.

9 Der Satz von Stokes

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung sagt, dass für eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{[a,b]} f' d\mu_1 = f|_a^b.$$

Der Satz von Stokes ist eine in jeder Beziehung sehr starke Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes. An die Stelle des Intervalls und seiner Endpunkte treten eine k -dimensionale kompakte *Mannigfaltigkeit* M und ihr Rand ∂M , der eine $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Stellen Sie sich M als Fläche im \mathbb{R}^3 (zum Beispiel als Halbsphäre) und ∂M als deren Randkurve vor. Man bekommt also

$$\int_M ?' = \int_{\partial M} ?$$

Aber was wird da integriert? Die n -reihige Determinante dient in der Linearen Algebra zur Berechnung n -dimensionaler Volumina, sie ist so etwas wie ein n -dimensionales Maß. *Differentialformen von Grad k* sind Verallgemeinerungen der Determinante und so etwas wie k -dimensionale Maße. Sie sind die "natürlichen" Integranden auf k -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Für sie gibt es eine Verallgemeinerung der Ableitung, die sogenannte *Cartansche Ableitung*. Sie macht aus einer Differentialform ω vom Grad $k-1$ eine Differentialform $d\omega$ vom Grad k . Funktionen sind 0-Formen, die Cartansche Ableitung der Funktion f ist die Differentialform vom Grad 1 gegeben durch $Df = f'dx$.

Der Satz von Stokes besagt dann, dass

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dieser Satz hat viele Anwendungen und Facetten, deren wichtigste sicher seine Funktion als Bindeglied zwischen Analysis (Integration, Ableitung) und Geometrie (Mannigfaltigkeit, Rand) ist. In dieser Gestalt spielt der Satz eine zentrale Rolle für die Entwicklung der Differentialtopologie und der algebraischen Topologie.

Er hat aber auch viele physikalische Anwendungen: Er erklärt zum Beispiel das Phänomen der Induktion in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld. Oder er besagt, dass die Flussbilanz einer physikalischen Größe durch die Oberfläche eines Gebietes gerade das Integral über die Quelledichte dieser Größe im Inneren liefert. Damit spielt er unter verschiedenen Namen und in sehr verschiedenen Schreibweisen eine zentrale Rolle in der Elektrodynamik, in der Hydrodynamik, in der Wärmelehre, in der Verfahrenstechnik usw. usw.

Um den Satz richtig verstehen zu können, müssen wir mit berandeten Mannigfaltigkeiten und mit Differentialformen umgehen können. Wir beginnen mit den letzteren. Dazu bedarf es einer gewissen Vorbereitung in linearer Algebra, mit der wir jetzt anfangen.

9.1 Alternierende multilineare Algebra

- Wir definieren *alternierende k-Formen* in einem n -dimensionalen Vektorraum und lernen verschiedene Beispiele dafür kennen, die sich später als *die* typischen Beispiele herausstellen werden.
- Wir lernen, warum alternierende Formen so heißen.
- Wir bestimmen die Dimension des Raumes der k -Formen.
- Wir definieren das *Zurückholen* von Formen mit linearen Abbildungen und benutzen n -Formen im n -dimensionalen Raum zur Definition einer *Orientierung*.

Zur Bezeichnung: Wir werden häufiger Permutationen benötigen. Wir bezeichnen mit \mathcal{S}_n die *Gruppe der Permutationen von* $\{1, \dots, n\}$ und mit

$$\text{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

das *Signum* der Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und V^* sein Dualraum.

Definition 138. Sei $k \in \mathbb{N}$.

Eine *alternierende k-Form* auf V ist eine k -lineare Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = 0, \text{ falls zwei der } v_i \text{ gleich sind.}$$

Der Vektorraum der alternierenden k -Formen wird mit $\Lambda^k V^*$ bezeichnet. Wir setzen

$$\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}.$$

Das typische Beispiel einer alternierenden Form ist die Determinante.

Beispiel 139 (Determinantenform). Für $V = \mathbb{R}^n$ definiert

$$\omega(v_1, \dots, v_n) := \det(v_1, \dots, v_n)$$

eine alternierende n -Form, und Sie wissen aus der linearen Algebra, dass die Determinanten bis auf einen skalaren Faktor die einzige alternierende n -Form auf dem \mathbb{R}^n ist, d.h. $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* = 1$.

□

Beispiel 140 (1-Formen). Es gilt $\Lambda^1 V^* = V^*$. Alternierende 1-Formen sind also einfach *Linearformen*. In einem Euklidischen Vektorraum oder allgemeiner in einem reellen Vektorraum mit einem nicht degenerierten inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hat man einen Isomorphismus

$$V \rightarrow \Lambda^1 V^*, \quad v \mapsto \omega^v := \langle \cdot, v \rangle.$$

□

Satz 141. Für $\omega \in \Lambda^k V^*$ und jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gilt

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k).$$

Darum heißen die alternierenden Formen *alternierend*.

Beweis. Vgl. Determinantentheorie in der linearen Algebra. Die Idee ist diese:

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(v_1 + v_2, v_1 + v_2, v_3, \dots, v_k) \\ &= \underbrace{\omega(v_1, v_1, v_3, \dots, v_k)}_{=0} + \omega(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k) + \omega(v_2, v_1, v_3, \dots, v_k) + \underbrace{\omega(v_2, v_2, v_3, \dots, v_k)}_{=0} \\ &= \omega(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k) + \omega(v_2, v_1, v_3, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

Aus der Determinantenform auf dem \mathbb{R}^n kann man neue Formen gewinnen, wie wir in den beiden nächsten Beispielen zeigen:

Beispiel 142 (Flussform). Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$*\omega^v := \det(v, \dots)$$

eine alternierende $(n-1)$ -Form, und

$$V \rightarrow \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*, \quad v \mapsto *\omega^v$$

ist ein Isomorphismus. (Beweis?) Den Namen “Flussform” erklären wir später.

□

Beispiel 143. Seien $k \in \{1, \dots, n\}$ und $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Dann definiert

$$\omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k) := \det(e_1, \dots, \overset{i_1}{\downarrow} v_1, \dots, \overset{i_k}{\downarrow} v_k, \dots, e_n)$$

eine alternierende k -Form auf dem \mathbb{R}^n . Zum Beispiel ist $\omega^{2 \dots n} = *\omega^{e_1}$.

Anschaulich kann man sich $\omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k)$ so vorstellen: Die Vektoren v_1, \dots, v_k spannen im \mathbb{R}^n ein k -dimensionales Parallelotop Π auf. $\omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k)$ ist bis aufs Vorzeichen das k -dimensionale Volumen der orthogonalen Projektion von Π in den von e_{i_1}, \dots, e_{i_k} aufgespannten Unterraum.

Schreibt man $v_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} e_i$, so erhält man

$$\begin{aligned} \omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k) &= \det \left(e_1, \dots, \overset{i_1}{\downarrow} \sum_{m_1=1}^n v_{m_1 1}, \dots, \overset{i_k}{\downarrow} \sum_{m_k=1}^n v_{m_k k}, \dots, e_n \right) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_k=1}^n v_{m_1 1} \dots v_{m_k k} \det(e_1, \dots, \overset{i_1}{\downarrow} e_{m_1}, \dots, \overset{i_k}{\downarrow} e_{m_k}, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Nur die Summanden sind $\neq 0$, für die (m_1, \dots, m_k) eine Permutation von (i_1, \dots, i_k) ist. Für diese liefert die Determinante gerade das Signum der Permutation:

$$\omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) v_{i_{\sigma(1)} 1} \dots v_{i_{\sigma(k)} k}.$$

Wir halten fest, dass für $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ gilt

$$\omega^{i_1 \dots i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (j_1, \dots, j_k) = (i_1, \dots, i_k), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (43)$$

□

Die Rechnung aus dem vorstehenden Beispiel angewendet nicht auf $\omega^{i_1 \dots i_k}$, sondern auf ein beliebiges $\omega \in \Lambda^k V^*$, liefert mit Satz 141

Satz 144. Für $\omega \in \Lambda^k V^*$, eine Basis (e_1, \dots, e_n) von V und $v_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} e_i$ gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) v_{i_{\sigma(1)}} \dots v_{i_{\sigma(k)}}.$$

Inbesondere ist ω durch seine Werte auf den (monotonen k -tupeln von) Basisvektoren eindeutig bestimmt.

Satz 145. Sei $n := \dim V$. Dann ist

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}.$$

Beweis. Wir beweisen das zunächst nur für $V = \mathbb{R}^n$, den allgemeinen Fall erledigen wir im Anschluss an die Definition 147.

Für $k > n$ sind je k Vektoren im \mathbb{R}^n linear abhängig, und deshalb ist jede alternierende k -Form $\omega = 0$:

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = 0 = \binom{n}{k}, \quad \text{falls } k > n.$$

Sei nun $k \leq n$. Nach Beispiel 143 und Satz 144 gilt für jedes $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) v_{i_{\sigma(1)}} \dots v_{i_{\sigma(k)}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

also

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega^{i_1 \dots i_k}.$$

Nach (43) sind die $\omega^{i_1 \dots i_k}$ linear unabhängig, und daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 146. Mit dem Euklidischen Raum \mathbb{R}^n kommen zwei weitere Räume, die nach dem vorstehenden Satz auf kanonische Weise isomorph zu \mathbb{R}^n sind:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*, & u &\mapsto \omega^u := \langle \cdot, u \rangle, \\ \mathbb{R}^n &\rightarrow \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*, & u &\mapsto * \omega^u := \det(u, \dots). \end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, dass manche physikalische Größen (zum Beispiel *Impuls* oder *Magnetfeld*), die üblicherweise als Vektoren interpretiert werden, mathematisch besser zu „verstehen“ sind, wenn man sie als 1-Formen oder $(n-1)$ -Form interpretiert. Vgl. die Beispiele 159 und 255.

□

Definition 147 (Zurückholen von Formen). Ist $f : W \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und $\omega \in \Lambda^k V^*$, so definiert

$$f^* \omega(w_1, \dots, w_k) := \omega(f(w_1), \dots, f(w_k))$$

eine alternierende k -Form auf W , die mit f zurückgeholte Form. Die Abbildung

$$f^* : \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^k W^*, \quad \omega \mapsto f^* \omega$$

ist linear.

Das Zurückholen von Formen erfüllt offenbar

$$(h \circ f)^* = f^* \circ h^* \quad \text{und} \quad \text{id}^* = \text{id}.$$

Deshalb liefert ein Isomorphismus $f : V \rightarrow W$ für jedes k eine Isomorphie $\Lambda^k W^* \cong \Lambda^k V^*$.

Das beweist den Satz 145 für beliebiges V .

Satz 148. Für $f \in \text{End}(V)$ und $\mu \in \Lambda^n V^*$ mit $n = \dim V$ ist

$$f^* \mu = (\det f) \mu.$$

Beweis. Falls $\mu = 0$ ist nichts zu zeigen.

Andernfalls ist μ eine Basis des $\binom{n}{n} = 1$ -dimensionalen Vektorraums $\Lambda^n V^*$, und

$$f^* \mu = c \mu$$

für eine Konstante c , die wir nun bestimmen. Sei (e_i) eine Basis von V und $f(e_j) = \sum_i f_{ij} e_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} c \mu(e_1, \dots, e_n) &= f^* \mu(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} f_{i_1 1} \dots f_{i_n n} \mu(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f_{\sigma(1)1} \dots f_{\sigma(n)n} \mu(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sign}(\sigma) f_{\sigma(1)1} \dots f_{\sigma(n)n} \mu(e_1, \dots, e_n) \\ &= (\det f) \mu(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Weil $\mu(e_1, \dots, e_n) \neq 0$ folgt die Behauptung.

□

Definition 149 (Orientierung, Volumenform). Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.

- (i) $\Lambda^n V^*$ ist ein 1-dimensionaler Vektorraum, $\Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ besteht also aus zwei Zusammenhangskomponenten. Jede von diesen heißt *eine Orientierung* von V und V zusammen mit einer solchen *ein orientierter Vektorraum*. Eine Orientierung ist also gegeben durch eine alternierende n -Form $\mu \neq 0$, und $\lambda\mu$ mit $\lambda \neq 0$ liefert dieselbe Orientierung genau dann, wenn $\lambda > 0$.

Eine Basis (v_1, \dots, v_n) in einem orientierten Vektorraum V heißt *positiv orientiert*, wenn für ein und dann für alle μ aus der Orientierung

$$\mu(v_1, \dots, v_n) > 0.$$

Umgekehrt bestimmt jede Basis (v_1, \dots, v_n) eine Orientierung

$$\{\mu \in \Lambda^n V^* \mid \mu(v_1, \dots, v_n) > 0\}.$$

- (ii) Ist V ein orientierter *Euklidischer* Vektorraum, so gibt es in der Orientierung genau ein $\mu \in \Lambda^n V^*$, welches auf einer und nach Satz 148 dann auf jeder positiv orientierten Orthonormalbasis den Wert 1 annimmt. Dieses μ heißt die *Volumenform* des orientierten Euklidischen Vektorraums V .

Bemerkungen. 1. In der Linearen Algebra definiert man die Orientierung eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraumes häufig als eine Äquivalenzklasse von Basen, wobei zwei Basen äquivalent oder gleich-orientiert heißen, wenn sie durch einen Automorphismus mit positiver Determinante ineinander überführt werden. Überlegen Sie, dass das mit der obigen Definition übereinstimmt.

2. Für $V = \{0\}$ ist nach Definition $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$. Die beiden Komponenten von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lassen sich charakterisieren durch die Zahlen $+1$ und -1 , und unter einer Orientierung von $V = \{0\}$ versteht man die Wahl einer dieser Zahlen.

9.1.1 Äußeres Produkt

- Wir definieren ein assoziatives Produkt zwischen alternierenden Formen und benutzen dieses, um k -Formen mit Hilfe von 1-Formen darzustellen.

Multilinearformen, die nicht alternieren, kann man mit Gewalt dazu bringen:

Definition 150 (Alternierung). Ist $T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -lineare Abbildung, so ist $\text{Alt}(T)$ mit

$$\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

eine alternierende k -Form, die *Alternierung von T* .

Ist T bereits alternierend, so ist $\text{Alt}(T) = T$.

Beweis, dass $\text{Alt}(T)$ alternierend ist. Sei $\tau \in \mathcal{S}_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Alt}(T)(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(\tau(1))}, \dots, v_{\sigma(\tau(k))}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\rho\tau^{-1}) T(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) \\ &= \text{sign}(\tau) \text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

Wir benutzen das, um für alternierende Formen ein Produkt zu erklären.

Definition 151. Seien $\omega \in \Lambda^k V^*$, $\theta \in \Lambda^l V^*$.

- (i) Das *Tensorprodukt* $\omega \otimes \theta$ von ω und θ ist definiert durch

$$(\omega \otimes \theta)(v_1, \dots, v_{k+l}) := \omega(v_1, \dots, v_k) \theta(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

- (ii) Das *äußere Produkt* $\omega \wedge \theta \in \Lambda^{k+l} V^*$ von ω und θ ist definiert durch

$$\omega \wedge \theta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \theta).$$

Satz 152. Seien $\omega, \omega_i \in \Lambda^k V^*$, $\theta \in \Lambda^l V^*$, $\eta \in \Lambda^m V^*$ und $f : W \rightarrow V$ linear. Dann gelten folgende Regeln

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2) \wedge \theta &= \omega_1 \wedge \theta + \omega_2 \wedge \theta, \\ (a\omega) \wedge \theta &= a(\omega \wedge \theta), \\ f^*(\omega \wedge \theta) &= f^*\omega \wedge f^*\theta, \\ \omega \wedge \theta &= (-1)^{kl} \theta \wedge \omega, \\ (\omega \wedge \theta) \wedge \eta &= \omega \wedge (\theta \wedge \eta). \end{aligned}$$

Beweis. Bis auf die letzten zwei Aussagen ist das leicht zu beweisen. Für diese vgl. Spivak p. 80/81 oder Agricola/Friedrich p. 2. □

Beispiel 153. Für $\phi \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ und $\omega \in \Lambda^k V^*$ ist offenbar $\phi \otimes \omega = \phi\omega$, und weil das eine alternierende k -Form ist, folgt

$$\phi \wedge \omega = \phi\omega.$$

□

Beispiel 154. Für $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1 V^*$ und $v_1, v_2 \in V$ ist

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) &= \frac{2!}{1!1!} \frac{1}{2!} (\omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1)) \\ &= \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1). \end{aligned}$$

□

Beispiel 155. Vgl. Beispiel 146. Für $u, v \in \mathbb{R}^3$ findet man mit der Formel aus dem letzten Beispiel wegen $\omega^u(e_i) = \langle e_i, u \rangle = u_i$

$$(\omega^u \wedge \omega^v)(e_i, e_j) = u_i v_j - u_j v_i$$

Das sieht so aus, wie die Komponenten des Vektorproduktes $u \times v$. Zeigen Sie

$$\boxed{\omega^u \wedge \omega^v = * \omega^{u \times v}.}$$

Das Dachprodukt kann man also auffassen als eine Verallgemeinerung des Vektorproduktes auf beliebig-dimensionale Räume. Die spezielle Situation im dreidimensionalen kommt dadurch zustande, dass $1 + 1 = 3 - 1$ ist.

□

Lemma 156. Seien $\omega \in \Lambda^{k-1} V^*$, $\theta \in \Lambda^1 V^*$ und $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann gilt

$$\boxed{(\omega \wedge \theta)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k) \theta(v_j).} \quad (44)$$

Beweis. Nach Definition ist

$$(\omega \wedge \theta)(v_1, \dots, v_k) = \frac{k!}{(k-1)!1!} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k-1)}) \theta(v_{\sigma(k)}).$$

Ist $j := \sigma(k)$, so ist der ω -Term in der Summe

$$\pm \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k),$$

wobei \widehat{v}_j bedeutet, dass v_j ausgelassen wird.

Das Vorzeichen bestimmt sich durch die Permutation, die $v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k-1)}$ in die monotone Reihenfolge $v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k$ bringt:

$$(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k-1)}, v_{\sigma(k)}) \xrightarrow{\text{sign}(\sigma)} (v_1, \dots, v_j, \dots, v_k) \xrightarrow{(-1)^{k-j}} (v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k, v_j)$$

Also folgt

$$(\omega \wedge \theta)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_k \\ \sigma(k) = j}} \underbrace{\text{sign}(\sigma)^2}_{=1} (-1)^{k-j} \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k) \theta(v_j).$$

Weil es in \mathcal{S}_k gerade $(k-1)!$ Permutationen mit $\sigma(k) = j$ gibt, erhalten wir daraus (44). \square

Statt $(-1)^{k-j}$ kann man in (44) natürlich auch $(-1)^{k+j}$ schreiben. Dann hat die Formel (44) Ähnlichkeit mit dem Laplaceschen Determinantenentwicklungssatz. Das ist kein Zufall, wie der Beweis zum nächsten Satz zeigt.

Satz 157. Seien $v_1, \dots, v_k \in V$ und $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1 V^* = V^*$. Dann gilt

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega_i(v_j))_{i,j=1, \dots, k}. \quad (45)$$

Die Formel (45) ist der Grund für den merkwürdigen Koeffizienten bei der Definition von \wedge .

Beweis. Vollständige Induktion über k .

Der Fall $k = 1$ ist trivial.

$(k-1) \rightarrow k$.

$$\begin{aligned} & (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{k-1}) \wedge \omega_k(v_1, \dots, v_k) \\ & \stackrel{(44)}{=} \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{k-1}(v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_k) \omega_k(v_j) \\ & = \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \begin{bmatrix} \omega_1(v_1) & \dots & \widehat{\omega_1(v_j)} & \dots & \omega_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega_{k-1}(v_1) & \dots & \widehat{\omega_{k-1}(v_j)} & \dots & \omega_{k-1}(v_k) \end{bmatrix} \omega_k(v_j) \\ & = \det(\omega_i(v_j)), \end{aligned}$$

wobei der Entwicklungssatz von Laplace nach der letzten Zeile benutzt wurde. \square

Satz 158. Seien (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V und $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die duale Basis von V^* . Dann gilt für $\omega \in \Lambda^k V^*$:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}.$$

$(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ ist eine Basis für $\Lambda^k V^*$, und die $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in \mathbb{R}$ sind die Entwicklungskoeffizienten von ω bezüglich dieser Basis.

Dieser Satz erklärt die Notation $\Lambda^k V^*$: Das ist der Raum der von den k -fachen Produkten von Formen aus V^* erzeugt wird, die k -te "äußere Potenz" von V^* .

Beweis. Sei $j_1 < \dots < j_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\ & = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \underbrace{\det(\omega_{i_\alpha}(e_{j_\beta}))}_{=0, \text{ falls } (j_1, \dots, j_k) \neq (i_1, \dots, i_k)} \\ & = \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}). \end{aligned}$$

Aus dem Satz 144 folgt daher die Behauptung. \square

Beispiel 159 (Basisdarstellung in $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$). Sei $V = \mathbb{R}^n$. Die duale Basis zur Standardbasis bezeichnen wir mit x_1, \dots, x_n . Das sind gerade die Projektionen auf die Koordinatenachsen. Dann gilt also

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}.$$

In diesem Fall ist $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} = \omega^{i_1 \dots i_k}$, vgl. Beispiel 143. □

Beispiel 160. Seien etwa $\omega = \sum a_i x_i$, $\theta = \sum b_i x_i$. Dann ist

$$\omega \wedge \theta = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i) x_i \wedge x_j.$$

□

Bemerkung. Man bezeichnet die Räume $\Lambda^k V^*$ mit dem äußeren Produkt, oder, formal genauer, die direkte Vektorraumsumme

$$\Lambda^* V^* := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V^*$$

mit der darauf durch \wedge induzierten Multiplikation als die *Graßmannalgebra* von V^* .⁷

Hermann Graßmann (1809-1877) war nicht nur der Erfinder dieser Operation, man kann ihn als den Erfinder der abstrakten Linearen Algebra im heutigen Sinne ansehen. Er war seinen Zeitgenossen damit weit voraus, konnte sich aber als Autodidakt kaum verständlich machen und wurde deshalb lange Zeit seines Lebens von der etablierten Mathematik nicht gewürdigt, ja kaum wahrgenommen. Außer zur Mathematik hat er bedeutende Beiträge auch zur Physik und zur Sprachwissenschaft geleistet.

Zum Wirken und zur Person von Hermann Graßmann sei der entsprechende Abschnitt in Felix Kleins "Mathematik im 19. Jahrhundert" empfohlen.

⁷ Die Graßmannalgebra $\Lambda^k V$ des endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraumes V "selbst", also ohne Sternchen, kann man im Rahmen unserer Behandlung mit Hilfe der kanonischen Isomorphie $(V^*)^* \cong V$ definieren.

9.2 Differentialformen

- Ein *Vektorfeld* ist eine Abbildung

$$X : V \supset G \rightarrow V,$$

die jedem Punkt $p \in G$ einen Vektor $X(p)$ zuordnet.

Ebenso ist eine Differentialform vom Grad k ein *Feld* alternierender k -Formen, also eine Abbildung

$$\omega : V \supset G \rightarrow \Lambda^k V^*,$$

die jedem Punkt $p \in G$ eine alternierende k -Form ω_p zuordnet.

- Wir übertragen unsere Kenntnisse der alternierenden k -Formen auf k -Formenfelder.
- Insbesondere lernen wir die Basisdarstellung von Differentialformen kennen. Eine Klippe ist dabei die gängige Praxis, konstante Abbildungen mit demselben Symbol zu bezeichnen wie ihren Wert.

Seien V ein endlich-dimensionaler normierter \mathbb{R} -Vektorraum, $G \subset V$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}$.

Definition 161. Eine C^∞ -Abbildung

$$\omega : G \rightarrow \Lambda^k V^*, p \mapsto \omega_p.$$

heißt eine *Differentialform vom Grad (oder Rang) k auf G* .

Die Addition und Skalarmultiplikation sowie das Dachprodukt von alternierenden Multilinearformen übertragen sich „wertweise“ auf Differentialformen. Außerdem kann man Differentialformen wertweise mit reellwertigen C^∞ -Funktionen multiplizieren.

Auf diese Weise bilden die Differentialformen vom Grad k einen Modul

$$\Omega^k(G) := C^\infty(G, \Lambda^k V^*)$$

über dem Ring $C^\infty(G, \mathbb{R})$ der reellwertigen C^∞ -Funktionen.

Bemerkung. Natürlich kann man auch Differentialformen mit niedrigerer Differenzierbarkeitsordnung definieren. Aber bei der Differentiation von Differentialformen endlicher Differenzierbarkeitsordnung verliert man jeweils eine Ordnung. Das führt dazu, dass man neben dem Grad ständig auch noch die Differenzierbarkeitsordnung kontrollieren muss. Wir vermeiden dieses Problem, indem wir uns auf den C^∞ -Fall beschränken.

Beispiel 162. $\Omega^0(G) = C^\infty(G, \mathbb{R})$ sind die C^∞ -Funktionen auf G .

□

Beispiel 163. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion, so ist

$$Df : G \rightarrow L(V, \mathbb{R}) = V^* \in \Omega^1(G).$$

Im Zusammenhang mit Differentialformen schreiben wir meistens df statt Df , vgl. Abschnitt 9.3.

□

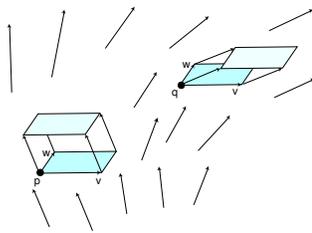
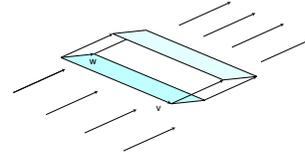
Beispiel 164. Alternierende k -Formen kann man als konstante Differentialformen auffassen. Dann ist also

$$\Lambda^k V^* \subset \Omega^k(V).$$

□

Beispiel 165 (Zur anschaulichen Vorstellung). Eine alternierende 2-Form $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ kann man sich als Strömung einer Flüssigkeit im \mathbb{R}^3 vorstellen: $\omega(v, w)$ gibt an, wieviel davon pro Zeiteinheit durch das von den Vektoren v und w aufgespannte Parallelogramm hindurchfließt.⁸

Dabei ist kommentarlos unterstellt, dass die Strömung stationär ist, d.h. dass es nicht darauf ankommt, wann die Zeiteinheit gewählt ist, und es ist unterstellt, dass die Strömung homogen ist, d.h. dass es nicht darauf ankommt, wo im \mathbb{R}^3 das Parallelogramm liegt (Translationsinvarianz).



Differentialformen ermöglichen es, wenigstens die zweite Spezialisierung aufzugeben, also eine stationäre inhomogene Strömung zu modellieren und zwar durch eine Differentialform $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Für (hinreichend kleine) Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ gibt

$$\omega_p(v, w)$$

an, wieviel Flüssigkeit pro Zeiteinheit durch das von v und w an der Stelle $p \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm fließt.

Genauer liefert

$$\omega_p(v, w) = \lim_{h \searrow 0} \frac{\text{Fluss durch das von } (hv, hw) \text{ aufgespannte Parallelogramm}}{h^2}$$

die Flussdichte durch das von v und w bestimmte infinitesimal kleine Parallelogramm im Punkte p .

□

Beispiel 166 (Die Flussform). Sei $F : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^∞ -Vektorfeld. Dann definiert

$$\boxed{* \omega_p^F(v_1, \dots, v_{n-1}) := \det(F(p), v_1, \dots, v_{n-1})} \quad (46)$$

eine Differentialform $*\omega^F \in \Omega^{n-1}(G)$, die den „Fluss“ des Vektorfeldes F durch die von $n-1$ Vektoren aufgespannten infinitesimalen Hyperflächenstücke misst, und die wir die Flussform zu F nennen.

Ist V nicht der \mathbb{R}^n , sondern ein orientierter Euklidischer Vektorraum und $\mu \in \Lambda^n V^*$ seine Volumenform, vgl. die Definition 149, so kann man auch in diesem Fall zu jedem Vektorfeld $F : V \supset G \rightarrow V$ eine Flussform

$$*\omega^F := \mu(F, \dots)$$

definieren.

□

Definition 167. Ist $h : G \rightarrow H \subset W$ eine C^∞ -Abbildung in die offene Teilmenge H des Vektorraumes W , und ist $\omega \in \Omega^k(H)$, so definiert

$$(h^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{h(p)}(D_p h(v_1), \dots, D_p h(v_k))$$

eine k -Form $h^* \omega \in \Omega^k(G)$, die mit h zurückgeholte Form.

⁸ Ist u der Geschwindigkeitsvektor der Strömung, so ist $\omega = *\omega^u$. Das ist ein Beispiel dafür, dass man Strömungen bequem durch 2-Formen modelliert.

Beispiel 168. Sind V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, $\mu \in \Omega^{n-1}(V)$ und $h : V \supset G \rightarrow V$ eine C^∞ -Abbildung, so gilt nach Satz 148

$$h^* \mu = \det(Dh) \mu.$$

□

Satz 169. Für die Komposition $f \circ g$ von C^∞ -Abbildungen gilt

$$(f \circ g)^* \omega = g^*(f^* \omega). \quad (47)$$

Beweis.

$$(g^*(f^* \omega))_p(v_1, \dots) = (f^* \omega)_{g(p)}(D_p g(v_1), \dots) = \omega_{f(g(p))}(D_{g(p)} f(D_p g(v_1)), \dots).$$

□

Die Formel (47) ist also im wesentlichen die Kettenregel. Direkt aus der Definition folgt

Satz 170. Es gilt

$$f^*(\omega \wedge \theta) = f^* \omega \wedge f^* \theta$$

und

$$f^*(\phi \omega) = (\phi \circ f) f^* \omega.$$

Basisdarstellung von Differentialformen. Für das weitere Verständnis ist es ungeheuer wichtig, dass Sie sich folgende Sachverhalte klarmachen:

1. Eine (beliebige) Abbildung $f : V \supset G \rightarrow W$ in einen Vektorraum W mit Basis (w_1, \dots, w_m) kann man nach dieser Basis entwickeln:

$$f = \sum_{i=1}^m f_i w_i.$$

Die f_i sind die Komponentenfunktionen.

Insbesondere ist $f \in C^\infty$ genau dann, wenn alle $f_i \in C^\infty$.

Die duale Basis $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ zu einer Basis (e_1, \dots, e_n) von V liefert eine Basis

$$(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$$

für den Vektorraum $\Lambda^k V^*$. Infolgedessen hat man für $\omega \in \Omega^k(G)$ eine Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \quad (48)$$

mit C^∞ -Funktionen $\phi_{i_1 \dots i_k}$. Für $p \in G$ ist

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k}(p) \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \in \Lambda^k V^*.$$

Nach Satz 158 sind die Funktionen $\phi_{i_1 \dots i_k}$ gegeben durch

$$\phi_{i_1 \dots i_k}(p) = \omega_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

2. Ist $V = \mathbb{R}^n$, $k = 1$ und $\omega = df$, so hat man in $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$ die kanonische duale Basis (x_1, \dots, x_n) und zum Beispiel

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i. \quad (49)$$

Aber so schreibt man das nicht. Stattdessen finden Sie

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (50)$$

Der Unterschied (besser: der fehlende Unterschied) zwischen beiden Notationen ist folgender. Sind f eine reellwertige Abbildung und g eine konstante Abbildung in den Vektorraum W mit Wert w , so beschreiben

$$f w : p \mapsto f(p)w$$

und

$$f g : p \mapsto f(p)g(p) = f(p)w$$

dieselbe Abbildung. Wegen der Linearität der x_i ist nun $dx_i : p \mapsto d_p x_i = x_i$ eine konstante Abbildung. Die rechte Seite von (50) ist also zu lesen als:

$$p \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) d_p x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) x_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*.$$

Die vorstehenden Überlegungen gelten nicht nur für 1-Formen und die kanonische Basis des \mathbb{R}^n , sondern ganz allgemein. Wir formulieren das noch einmal als Satz.

Satz 171. Sei $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die duale Basis zu (e_1, \dots, e_n) .

(i) Sind $\phi_{i_1 \dots i_k} : G \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene C^∞ -Funktionen, so ist

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k} \in \Omega^k(G).$$

(ii) Jedes $\omega \in \Omega^k(G)$ läßt sich eindeutig so darstellen, nämlich mit

$$\phi_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

(iii) Insbesondere ist jede Differentialform vom Grad k auf dem \mathbb{R}^n von der Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

mit C^∞ -Funktionen $\phi_{i_1 \dots i_k}$.

Beispiel 172. Für die Determinantenform des \mathbb{R}^n gilt

$$\det = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n).$$

Vergleiche Satz 157.

□

Beispiel 173. Für die Flussform $*\omega^F \in \Omega^{n-1}(G)$ zu einem $F : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$ findet man

$$\begin{aligned}
 *\omega^F &= \sum_{i=1}^n *\omega^F(\mathbf{e}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\
 &= \sum_{i=1}^n \det(F, \mathbf{e}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \det(\mathbf{e}_1, \dots, F, \dots, \mathbf{e}_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.
 \end{aligned}$$

□

9.3 Die Cartansche oder äußere Ableitung

- Eine Differentialform ω vom Grad k ist insbesondere eine differenzierbare Abbildung $\omega : V \supset G \rightarrow L^k(V, \mathbb{R})$. Ihre Ableitung an einer Stelle $p \in G$ ist deshalb eine lineare Abbildung in $L(V, L^k(V, \mathbb{R})) = L^{k+1}(V, \mathbb{R})$, die aber im allgemeinen nicht alternierend ist. Wir machen sie “mit Gewalt” alternierend und erhalten auf diese Weise die Cartansche Ableitung.
- Wir lernen Rechenregeln für die Cartansche Ableitung kennen. Weil nach dem Schwarzschen Lemma die höheren Ableitungen *symmetrisch* sind, überrascht es nicht sehr, dass die zweifache Cartansche Ableitung verschwindet: Man macht sie ja gerade antisymmetrisch.

Definition 174 (Cartansche oder äußere Ableitung). Sei $\omega \in \Omega^k(G)$. Für jedes $j \in \{1, \dots, k+1\}$ und für $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$ ist dann

$$p \mapsto \omega_p(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1})$$

eine C^∞ -Funktion auf G (der Vektor v_j ausgelassen). Die Richtungsableitung dieser Funktion nach v_j sei mit

$$p \mapsto \partial_{v_j} \omega(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1})|_p$$

bezeichnet. Dann definiert

$$d_p \omega(v_1, \dots, v_{k+1}) := \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \partial_{v_j} \omega(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1})|_p.$$

eine Differentialform $d\omega \in \Omega^{k+1}(G)$. Sie heißt die *Cartansche* oder *äußere Ableitung* von ω .

(Man schreibt $d_p \omega$ statt $(d\omega)_p$. Die Formeln gewinnen an Übersichtlichkeit, wenn man das Argument p überhaupt unterdrückt, wie in den folgenden Beispielen.)

Dass $d_p \omega$ wirklich alternierend ist, ergibt sich aus dem nachstehenden Lemma.

Für $\omega \in \Omega^k(G) = C^\infty(G, \Lambda^k V^*)$ und $p \in G$ ist $D_p \omega \in L(V, \Lambda^k V^*) \subset L^{k+1}(V, \mathbb{R})$ eine $(k+1)$ -Linearform auf V

$$D_p \omega(v_1, \dots, v_{k+1}) := D_p \omega(v_1)(v_2, \dots, v_{k+1}) = \partial_{v_1} \omega(v_2, \dots, v_{k+1})|_p.$$

Das ist wegen der asymmetrischen Rolle des ersten Arguments nicht alternierend. Aber wir können darauf die Alternierung aus Definition 150 anwenden und erhalten:

Lemma 175. Für $\omega \in \Omega^k(G)$ und $p \in G$ ist

$$d_p \omega = (k+1) \text{Alt } D_p \omega.$$

Beweis. Für $j \in \{1, \dots, k+1\}$ bezeichne $\tau_j \in \mathcal{S}_{k+1}$ die Transposition von 1 und j . Dann gilt für $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$

$$\begin{aligned}
(k+1) \text{ Alt } D_p \omega(v_1, \dots, v_{k+1}) &= \frac{k+1}{(k+1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1}} \text{sign}(\sigma) D_p \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+1)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1}} \text{sign}(\sigma) \partial_{v_{\sigma(1)}} \omega(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)})|_p \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \text{sign}(\tau_j \circ \sigma) \partial_{v_{\tau_j \circ \sigma(1)}} \omega(v_{\tau_j \circ \sigma(2)}, \dots, v_{\tau_j \circ \sigma(k+1)})|_p \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \text{sign}(\tau_j \circ \sigma) \partial_{v_j} \omega(v_{\tau_j \circ \sigma(2)}, \dots, v_{\tau_j \circ \sigma(k+1)})|_p \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \text{sign}(\tau_1 \circ \sigma) \partial_{v_1} \omega(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)})|_p \\
&\quad - \frac{1}{k!} \sum_{j=2}^{k+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \text{sign}(\sigma) \partial_{v_j} \omega(v_{\tau_j \circ \sigma(2)}, \dots, v_{\tau_j \circ \sigma(k+1)})|_p \\
&= \partial_{v_1} \omega(v_2, \dots, v_{k+1})|_p - \frac{1}{k!} \sum_{j=2}^{k+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \partial_{v_j} \omega(v_{\tau_j(2)}, \dots, v_{\tau_j(k+1)})|_p \\
&= \partial_{v_1} \omega(v_2, \dots, v_{k+1})|_p - \sum_{j=2}^{k+1} \partial_{v_j} \omega(v_2, \dots, v_{j-1}, v_1, v_{j+1}, \dots, v_{k+1})|_p \\
&= \partial_{v_1} \omega(v_2, \dots, v_{k+1})|_p - \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j-2} \partial_{v_j} \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1})|_p \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \partial_{v_j} \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1})|_p.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 176.

$$\omega \in \Omega^1(G) \implies d\omega(v, w) = \partial_v \omega(w) - \partial_w \omega(v).$$

□

Beispiel 177. Für die Flussform $*\omega^F = \det(F, \dots) \in \Omega^{n-1}(G)$ auf dem \mathbb{R}^n ergibt sich

$$d*\omega^F(e_1, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \partial_{e_j} \underbrace{\det(F, e_1, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n)}_{=(-1)^{j-1} F_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = \text{div } F.$$

Also

$$d*\omega^F = (\text{div } F) \det = (\text{div } F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

□

Lemma 178. Seien $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Abbildung auf der offenen Menge $G \subset V$ und $\omega_0 \in \Lambda^k V^*$. Dann gilt

$$d(\phi \omega_0) = d\phi \wedge \omega_0.$$

Beweis. Nach Lemma 156 und der vorletzten Formel aus Satz 152 gilt für $\theta \in \Lambda^1 V^*$, $\omega_0 \in \Lambda^k V^*$ und $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$

$$(\theta \wedge \omega_0)(v_1, \dots, v_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \theta(v_j) \omega_0(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1}).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} ((d\phi) \wedge \omega_0)(v_1, \dots, v_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} d\phi(v_j) \omega_0(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \partial_{v_j} \phi \omega_0(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1}) \\ &= d(\phi \omega_0)(v_1, \dots, v_{k+1}). \end{aligned}$$

□

Lemma 179. *Die Cartansche Ableitung*

$$d : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^{k+1}(G)$$

ist \mathbb{R} -linear.

Beweis. Trivial

□

Satz 180. *Mit den Bezeichnungen von Satz 171 sei*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k} \in \Omega^k(G).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\phi_{i_1 \dots i_k} \wedge d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \partial_{e_j} \phi_{i_1 \dots i_k} d\omega_j \wedge d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k}. \end{aligned}$$

Im Fall der kanonischen Basis des \mathbb{R}^n hat man für

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

also

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Beweis. Triviale Folge aus den Lemmas 178 und 179 in Verbindung mit

$$d\phi = \sum_j \partial_{e_j} \phi d\omega_j.$$

Beachten Sie, dass die $d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k}$ konstante Differentialformen sind.

□

Beispiel 181. Bezeichnen wir die Koordinatenfunktionen auf dem \mathbb{R}^2 mit x, y statt mit x_1, x_2 , so ist

$$\omega := x dy - y dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$$

und

$$d\omega = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2 dx \wedge dy.$$

□

Beispiel 182. Wir berechnen noch einmal, und zwar jetzt in Koordinaten, die Cartansche Ableitung der Flussform

$$*\omega^F = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Wir erhalten wie früher

$$\begin{aligned} d * \omega^F &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \underbrace{dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n}_{=0 \text{ für } j \neq i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = (\operatorname{div} F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

□

Satz 183. Für die Cartansche Ableitung gelten die folgenden Rechenregeln:

- (i) $d : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^{k+1}(G)$ ist \mathbb{R} -linear.
- (ii) $d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge (d\theta)$, wenn $\omega \in \Omega^k(G), \theta \in \Omega^l(G)$.
- (iii) $d(d\omega) = 0$.
- (iv) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, wenn $(f : V \supset G \rightarrow H \subset W) \in C^\infty(G, W)$ und $\omega \in \Omega^k(H)$.

Beweis. Zu (i). Das war Lemma 179.

Zu (ii). Weil d linear ist, können wir o.E. annehmen, dass

$$\omega = \phi \omega_0, \quad \theta = \psi \theta_0.$$

mit $\phi, \psi \in C^\infty(G, \mathbb{R})$ und $\omega_0 \in \Lambda^k V^*, \theta_0 \in \Lambda^l V^*$. Dann gilt

$$\omega \wedge \theta = \phi \psi \underbrace{\omega_0 \wedge \theta_0}_{\text{konstant}}$$

und nach Lemma 178 ist

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \theta) &= d(\phi \psi) \wedge (\omega_0 \wedge \theta_0) = (d\phi) \psi \wedge (\omega_0 \wedge \theta_0) + \phi (d\psi) \wedge \omega_0 \wedge \theta_0 \\ &= (d\phi \wedge \omega_0) \wedge \psi \theta_0 + (-1)^k (\phi \omega_0) \wedge (d\psi \wedge \theta_0) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Zu (iii). Wieder genügt es, den Fall

$$\omega = \phi \omega_0$$

mit ϕ und ω_0 wie oben zu betrachten. Dafür gilt $d\omega = d\phi \wedge \omega_0$ und nach (ii)

$$d^2\omega = (d^2\phi) \wedge \omega_0.$$

Also genügt es zu zeigen, dass $d^2\phi = 0$ für C^∞ -Funktionen ϕ . Aber

$$d(d\phi)(v, w) = \partial_v d\phi(w) - \partial_w d\phi(v) = \partial_v \partial_w \phi - \partial_w \partial_v \phi = 0$$

nach dem Satz von Schwarz.

Zu (iv). Für Funktionen $\phi \in C^\infty(H, \mathbb{R}) = \Omega^0(H)$ gilt

$$d(f^*\phi) = d(\phi \circ f) = d\phi \circ Df = f^*d\phi.$$

Für eine konstante 1-Form $\omega_0 \in \Lambda^1 W^*$ und $u, v \in V$ gilt

$$d(f^*\omega_0)(u, v) = \partial_u \omega_0(Df(v)) - \partial_v \omega_0(Df(u)) = \omega_0(\partial_u \partial_v f) - \omega_0(\partial_v \partial_u f) = 0$$

nach dem Satz von Schwarz. Nach (ii) ist dann aber auch

$$d(f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)) = 0$$

für beliebige $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1 W^*$, also ist

$$d(f^*\omega_0) = 0$$

für jede konstante k -Form $\omega_0 \in \Lambda^k W^*$.

Schließlich folgt für $\omega = \phi \omega_0$ mit $\phi \in C^\infty(H, \mathbb{R})$ und $\omega_0 \in \Lambda^k W^*$

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d(f^*(\phi\omega_0)) = d((f^*\phi)f^*\omega_0) = (d(f^*\phi)) \wedge (f^*\omega_0) \\ &= f^*(d\phi) \wedge (f^*\omega_0) = f^*(d(\phi\omega_0)) = f^*(d\omega). \end{aligned}$$

Mit der Linearität von d und f^* folgt daraus die Behauptung. \square

Ein Rätsel. Im obigen Beweis haben wir gezeigt, dass für C^∞ -Abbildungen $f : V \rightarrow W$ und $\omega_0 \in \Lambda^1 W^*$

$$d(f^*\omega_0) = 0.$$

Andrerseits ist für die lineare Abbildung $\omega_0 : W \rightarrow \mathbb{R}$ doch

$$d_p \omega_0 = \omega_0, \text{ für alle } p \in W,$$

und nach Teil (iv) des vorstehenden Satzes ist daher

$$d(f^*\omega_0) = f^*(d\omega_0) = f^*\omega_0.$$

Aber sicher ist das für "die meisten" Abbildungen f und $\omega_0 \in \Lambda^1 W^*$ nicht = 0.

Was ist da los?

9.4 Potentiale von Differentialformen

- Ein Potential einer Differentialform ω ist eine “Stammfunktion”, genauer eine Differentialform θ mit $\omega = d\theta$.
- Im Gegensatz zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besitzt aber nicht jede Differentialform ein Potential. $d\omega = 0$ ist eine offensichtlich notwendige Bedingung, und Sie finden leicht Formen, die das nicht erfüllen.
- Wir lernen, dass diese Bedingung im allgemeinen nicht hinreichend ist, und finden im Lemma von Poincaré eine hinreichende Zusatzbedingung.
- Das Lemma kann man in der Sprache der *Kohomologietheorie* formulieren, und wir lernen bei der Gelegenheit, was die Kohomologiegruppen einer offenen Mengen $G \subset V$ sind, und was man sich darunter vorstellen soll.

Sei G eine offene Teilmenge eines endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraums V .

Definition 184. Sei $\omega \in \Omega^k(G)$.

- (i) ω heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$.
- (ii) ω heißt *exakt*, wenn es ein $\theta \in \Omega^{k-1}(G)$ gibt, für das

$$d\theta = \omega.$$

Jedes solche θ heißt ein *Potential* für ω .

Beispiel 185. Im Fall $\omega \in \Omega^1(G)$ ist ein Potential also eine Funktion θ mit $d\theta = \omega$. Für $V = \mathbb{R}^n$ und $\omega = \sum_{i=1}^n \phi_i dx_i$ bedeutet das

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \phi_i.$$

In der Physik bezeichnet man üblicherweise $-\theta$ und nicht θ als das Potential von ϕ .

Eine 0-Form $\omega \in \Omega^0(G)$, d.h. eine Funktion $\omega \in C^\infty(G, \mathbb{R})$, kann zwar geschlossen sein (was bedeutet das?), sie kann aber nicht exakt sein, weil $\Omega^{-1}(G)$ nicht definiert ist.

□

Satz 186. *Notwendig für die Existenz eines Potentials zu $\omega \in \Omega^k(G)$ ist $d\omega = 0$. Nur geschlossene Formen können ein Potential besitzen.*

Müssen sie aber nicht. Wir zeigen gleich, dass die Geschlossenheit im allgemeinen nicht hinreichend ist. Zuvor betrachten wir noch kurz die Frage der **Eindeutigkeit** von Potentialen.

Wenn $\theta \in \Omega^{k-1}(G)$ ein Potential von $\omega \in \Omega^k(G)$ und $\theta_0 \in \Omega^{k-1}(G)$ ist, dann ist $\theta + \theta_0$ genau dann ebenfalls ein Potential von ω , wenn $d\theta_0 = 0$. Das ist sicher der Fall, wenn θ_0 selber ein Potential $\eta \in \Omega^{k-2}(G)$ besitzt, aber weil die Exaktheit von θ_0 im allgemeinen nicht notwendig für die Geschlossenheit ist, gibt es vielleicht noch mehr Potentiale zu ω .

Beispiel 187 (Wichtig: Sphärenvolumenform). Mit $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\sum x_i^2}$ definieren wir das Vektorfeld $X : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$X(x) = \frac{x}{r^n}$$

und betrachten die zugehörige Flussform $*\omega^X$. Diese Form, also

$$*\omega^X = \det\left(\frac{x}{\|x\|^n}, \dots\right) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

nennen wir aus später erläuterten Gründen *die Sphärenvolumenform* des \mathbb{R}^n .

Für sie gilt nach den Beispielen 177 und 182

$$d*\omega^X = \operatorname{div} X \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 0,$$

weil

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \partial_i \frac{x_i}{r^n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r^n} - x_i \frac{nx_i}{r^{n+2}} \right) = \frac{n}{r^n} - \frac{n \sum_i x_i^2}{r^{n+2}} = 0.$$

Also ist $*\omega^X$ geschlossen.

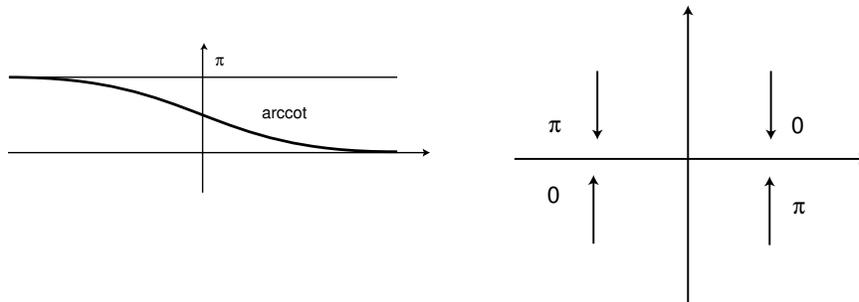
Für $n = 2$ ist

$$*\omega^X = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx.$$

Gibt es dazu ein Potential, also eine Funktion $\theta : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} ?$$

Offenbar hat $\operatorname{arccot} \frac{x}{y}$ die richtigen partiellen Ableitungen, ist aber nur auf dem Komplement der x -Achse definiert und nicht auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Das Grenzwertverhalten bei Annäherung an die Achse ist hier dargestellt:

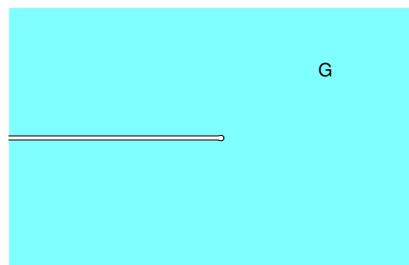


Die Winkelfunktion

$$\phi(x, y) := \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{x}{y} & \text{für } y > 0, \\ 0 & \text{für } x > 0 \text{ und } y = 0, \\ -\pi + \operatorname{arccot} \frac{x}{y} & \text{für } y < 0, \end{cases}$$

ist dann ein C^∞ -Funktion (Beweis?) auf dem „Schlitzgebiet“

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ oder } y \neq 0\},$$



also auf der Ebene ohne die nicht-positive x -Achse. Dort hat sie einen Sprung der Größe 2π . Gäbe es ein Potential θ für $*\omega^X$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so wäre auf dem Schlitzgebiet $d(\theta - \phi) = 0$, die Differenz also konstant. Dann wäre aber auch θ auf der negativen x -Achse unstetig. Widerspruch!

Daher besitzt die geschlossene 1-Form $*\omega^X$ kein Potential auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir werden später sehen, dass die Spärendvolumenform auch in höheren Dimensionen *kein* Potential besitzt.

Physikalisch läßt sich $*\omega^X$ für $n = 2$ interpretieren als zweidimensionaler Schnitt durch das Magnetfeld eines geraden Leiters oder für $n = 3$ als das elektrische Feld einer Punktladung. Formen mit $d\omega = 0$, die *kein* Potential besitzen, sind also *nicht* besonders exotisch.

□

Wir wollen nun zeigen:

Satz 188 (Poincarésches Lemma). Für $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist jede auf dem ganzen \mathbb{R}^n definierte geschlossene k -Form $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ exakt.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n .

Für $n = 1$ verschwindet jede k -Form mit $k > 1$, hat also $0 \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R})$ als Potential. Jede 1-Form ist von der Gestalt $\omega = \phi dx$ mit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und jede Stammfunktion von ϕ ist ein Potential von ω .

Der Induktionsschritt ergibt sich aus dem folgenden

Lemma 189. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren

$$\begin{aligned} \pi : G \times \mathbb{R} &\rightarrow G, (x, t) \mapsto x, \\ s : G &\rightarrow G \times \mathbb{R}, x \mapsto (x, 0). \end{aligned}$$

Dann gibt es eine Familie linearer Abbildung

$$(K_k : \Omega^k(G \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(G \times \mathbb{R}))_{k \geq 1},$$

so dass für alle $k \geq 1$ und $\omega \in \Omega^k(G \times \mathbb{R})$

$$\omega - \pi^* s^* \omega = (-1)^{k-1} (dK_k - K_{k+1} d) \omega. \quad (51)$$

(Wir lassen im weiteren den unteren Index bei K weg: Der Grad der eingesetzten Form definiert, um welches k es sich handelt.)

Ist der Satz nun schon bewiesen für den \mathbb{R}^n , so wenden wir das Lemma auf $G = \mathbb{R}^n$ an. Ist $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1})$ geschlossen, so ist $d(s^* \omega) = s^*(d\omega) = 0$, die Form $s^* \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ nach Induktionsvoraussetzung also exakt: $s^* \omega = d\theta$. Daher ist

$$\omega = \pi^* s^* \omega + (-1)^{k-1} (dK\omega - \underbrace{K d\omega}_{=0}) = \pi^* d\theta + (-1)^{k-1} dK\omega = d(\pi^* \theta + (-1)^{k-1} K\omega).$$

Also ist ω exakt, und der Satz bewiesen. □

Der schwierige Teil ist der

Beweis des Lemmas 189. Für die Konstruktion der K_k benutzen wir auf $G \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ die Koordinaten x_1, \dots, x_n, t und definieren die lineare Abbildung K_k auf den Basisformen der Typen

$$\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \tag{52}$$

$$\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt \tag{53}$$

mit $\phi \in C^\infty(G \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\phi = \phi(x, t)$ wie folgt:

$$K(\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := 0,$$

$$K(\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt) := \left(\int_0^t \phi(x, \tau) d\tau \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

Dafür müssen wir nun (51) nachrechnen.

Formen vom Typ (52).

Wegen $\pi^* s^* dx_i = (s \circ \pi)^* dx_i = d(x_i \circ s \circ \pi) = dx_i$ ergibt sich für $\omega = \phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$$\omega - \pi^* s^* \omega = (\phi(x, t) - \phi(x, 0)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Andrerseits ist

$$\begin{aligned} dK\omega - Kd\omega &= 0 - K(d\phi \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \\ &= 0 - K \left((-1)^k \frac{\partial \phi}{\partial t} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dt + \text{Terme ohne } dt \right) \\ &= (-1)^{k-1} (\phi(x, t) - \phi(x, 0)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Daraus folgt (51).

Formen vom Typ (53).

Wegen $\pi^* s^* dt = \pi^* 0 = 0$ gilt für $\omega = \phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt$

$$\pi^* s^* (\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt) = 0,$$

also

$$\omega - \pi^* s^* \omega = \omega.$$

Andrerseits ist

$$\begin{aligned} dK\omega - Kd\omega &= (-1)^{k-1} \phi(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\tau \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \\ &\quad - K \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt \right) \\ &= (-1)^{k-1} \phi(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt \\ &= (-1)^{k-1} \omega. \end{aligned}$$

Daraus folgt (51). □

Korollar 190. *Ist die offene Teilmenge $G \subset V$ im n -dimensionalen Vektorraum V zum \mathbb{R}^n C^∞ -diffeomorph und ist $k \geq 1$, so ist jedes geschlossene $\omega \in \Omega^k(G)$ exakt.*

Beweis. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow G \subset V$ ein C^∞ -Diffeomorphismus auf G und $d\omega = 0$ so ist $df^*\omega = f^*d\omega = 0$, also nach dem Lemma von Poincaré $f^*\omega = d\theta$ für ein $\theta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist aber

$$d(f^{-1})^*\theta = (f^{-1})^*d\theta = (f^{-1})^*f^*\omega = \omega.$$

□

Beispiel 191. Eine offene Menge im \mathbb{R}^n enthält um jeden ihrer Punkte p einen offenen Würfel $W = \{q \in \mathbb{R}^n \mid |q_i - p_i| < \epsilon\}$, der durch die Abbildung

$$q \mapsto \left(\tan \frac{\pi(q_1 - p_1)}{2\epsilon}, \dots, \tan \frac{\pi(q_n - p_n)}{2\epsilon} \right)$$

C^∞ -diffeomorph auf den \mathbb{R}^n abgebildet wird. Deshalb besitzt jede *geschlossene* k -Form um jeden Punkt ein *lokales Potential*.

□

Beispiel 192. Das Schlitzgebiet

$$G = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ oder } y \neq 0\}$$

aus Beispiel 187 ist diffeomorph zum \mathbb{R}^2 . Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ bildet nämlich die offene rechte Halbebene $x > 0$ diffeomorph auf G ab⁹, jene ist selbst aber diffeomorph zum \mathbb{R}^2 . Also besitzt jede geschlossene 1-Form auf G ein Potential.

□

Bemerkungen.

1. In vielen Analysisbüchern finden Sie das Lemma von Poincaré formuliert und bewiesen für sogenannte *Sterngebiete*, also offene Mengen, in denen man sämtliche Punkte mit einem festen sogenannten *Sternpunkt* verbinden kann. Das sieht, weil der \mathbb{R}^n natürlich ein Sterngebiet ist, auf den ersten Blick allgemeiner aus als unsere Version, ist es aber nicht, weil jedes Sterngebiete im \mathbb{R}^n zum ganzen \mathbb{R}^n diffeomorph ist. Diese Tatsache habe ich in der Literatur nicht gefunden, obwohl sie vermutlich bekannt ist. Einen Beweis von Stefan Born finden Sie im Anhang.
2. Das im Beweis benutzte Lemma 189 liefert mehr Information, als der übliche Beweis für sternförmige Mengen, vgl. Satz 196 unten.

Wenn ein mathematischer Satz notwendige Bedingungen für eine Aussage formuliert (z.B. "Notwendig für die Konvergenz von $\sum a_k$ ist $\lim a_k = 0$ "), so ist die Frage, warum diese Bedingung nicht auch hinreichend ist, oftmals mit einem Gegenbeispiel abgetan. Hier ist das nicht so. Im Gegenteil: Die Beobachtung, dass geschlossene Formen nicht immer exakt sind, bietet den Einstieg in einen der schönsten und reichhaltigsten Bereiche der Mathematik, in dem Analysis, Algebra und Geometrie auf wunderbare Weise ineinandergreifen. Ich möchte Ihnen im Rest dieses Abschnittes und der gesamten Vorlesung davon einen Eindruck vermitteln.

⁹Die Abbildung ist nämlich gegeben durch $r(\cos \phi, \sin \phi) \mapsto r^2(\cos 2\phi, \sin 2\phi)$.

Das Diffeomorphieproblem. Wann sind zwei offene Teilmengen von endlich-dimensionalen Banachräumen diffeomorph?

Ist $f : G \rightarrow H$ eine C^∞ -Abbildung zwischen offenen Mengen, so ist die „Zurückholung“

$$f^* : \Omega^k(H) \rightarrow \Omega^k(G)$$

eine lineare Abbildung von Vektorräumen. Ist f ein Diffeomorphismus, so ist f^* ein Isomorphismus. (Beweis?) Wenn also $\Omega^k(H)$ und $\Omega^k(G)$ als \mathbb{R} -Vektorräume nicht isomorph sind, sind G und H nicht diffeomorph.

Damit hat man ein geometrisches Problem auf eines der linearen Algebra zurückgeführt, indem man jedem G algebraische „Invarianten“, nämlich die Vektorräume $\Omega^k(G)$ zuordnet. Leider sind aber diese Vektorräume unendlich-dimensional, so dass sie für die Isomorphiefrage kaum brauchbare Antworten liefern. Deshalb muß man die hier skizzierte Idee noch etwas verfeinern:

Definition 193. In $\Omega^k(G)$ hat man zwei Vektorunterräume, gebildet von den geschlossenen bzw. exakten Differentialformen:

$$\begin{aligned} Z^k(G) &:= \{ \omega \mid d\omega = 0 \}, \\ B^k(G) &:= \{ d\theta \mid \theta \in \Omega^{k-1}(G) \}, \quad B^0(G) := \{0\}. \end{aligned}$$

Man nennt diese Räume auch die k -Kozykeln bzw. k -Koränder.

Wegen $d^2 = 0$ ist $B^k(G) \subset Z^k(G)$. Der Quotientenvektorraum

$$H^k(G) := Z^k(G)/B^k(G)$$

heißt die k -te De Rham'sche Kohomologiegruppe, wobei sich „Gruppe“ auf die additive Vektorraumstruktur bezieht.

Wegen $f^*d\omega = d(f^*\omega)$ bildet f^* Kozykeln in Kozykeln und Koränder in Koränder ab, induziert also für jedes k eine lineare Abbildung

$$f^* : H^k(H) \rightarrow H^k(G),$$

Beachten Sie:

- Ein Diffeomorphismus f liefert auch einen Isomorphismus der Kohomologiegruppen: Diffeomorphe offene Mengen haben isomorphe Kohomologiegruppen.
- $H^k(G) = 0$ bedeutet, jede geschlossene k -Form auf G besitzt ein Potential.

Die Kohomologiegruppen sind nun oft endlich-dimensionale Vektorräume und die Isomorphiefrage ist dann einfach durch die Dimension zu beantworten. Allerdings muß man sie erst einmal haben!

Hier ist ein triviales

Beispiel 194. Machen Sie sich klar, dass

$$H^0(G) = \mathbb{R}^{\text{Anzahl der Zusammenhangskomponenten von } G}.$$

Offene Mengen mit endlich- aber verschieden vielen Zusammenhangskomponenten sind deshalb nicht diffeomorph. Aber das sieht man auch ohne Kohomologie ...

□

Beispiel 195 (Die Kohomologiegruppen des \mathbb{R}^n). Weil \mathbb{R}^n zusammenhängend ist, ist $H^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$. Und nach dem Poincareschen Lemma ist

$$H^k(\mathbb{R}^n) = 0 \text{ für alle } k \geq 1.$$

Diese Formel ist *äquivalent* zum Lemma von Poincaré.

□

Das Lemma 189 liefert den

Satz 196. Für jedes offene $G \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ induziert die Projektion $\pi : G \times \mathbb{R} \rightarrow G$ einen Isomorphismus

$$\pi^* : H^k(G) \rightarrow H^k(G \times \mathbb{R}).$$

Beweis. Surjektivität: Für geschlossenes $\omega \in \Omega^k(G)$ ist $ds^*\omega = s^*d\omega = 0$ und

$$\omega = \pi^*(s^*\omega) + \underbrace{(-1)^{k-1}dK\omega}_{\text{Korand}}.$$

Also wird die Kohomologieklassse von $s^*\omega$ durch π^* auf die von ω abgebildet.

Injektivität: Ist $\omega \in \Omega^k(G)$ geschlossen und $\pi^*\omega$ in $H^k(G \times \mathbb{R})$ trivial, d.h. $\pi^*\omega = d\theta$ exakt, so ist

$$\omega = s^*\pi^*\omega = s^*d\theta = ds^*\theta.$$

Also ist ω ein Korand und repräsentiert $0 \in H^k(G)$.

□

Beispiel 197. Wir haben im Beispiel 187 gezeigt, dass

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0.$$

Nach dem Poincaréschen Lemma ist $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$, also sind \mathbb{R}^2 und $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht zueinander diffeomorph.

Man kann beweisen, dass allgemeiner für k verschiedene Punkte $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}) \cong \mathbb{R}^k.$$

Die $(n-1)$ -te Kohomologie misst also die Anzahl der „0-dimensionalen Löcher“.

Aus Satz 196 folgt durch Induktion für k verschiedene parallele r -dimensionale Ebenen $E_1, \dots, E_k \subset \mathbb{R}^n$, dass

$$H^{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{E_1, \dots, E_k\}) \cong H^{n-r-1}(\mathbb{R}^{n-r} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}) \cong \mathbb{R}^k.$$

Die $(n-r-1)$ -te Kohomologie misst also die Anzahl der „ r -dimensionalen Löcher“.

□

Definitionsgemäß ist $H^k(G)$ ein Objekt der **Analysis**. Nun stellt sich heraus, dass es eine Bedeutung für die **Geometrie** besitzt. Und tatsächlich befinden wir uns hier an einer der wichtigsten Schnittstellen zwischen diesen beiden Gebieten der Mathematik. Der Satz von Stokes vertieft die Kenntnis dieser Zusammenhänge noch weiter.

9.5 Integration von Differentialformen über Ketten

- Nach dem Studium der Differentialformen, also der natürlichen “ k -dimensionalen Integranden” wenden wir uns nun den Integrationsbereichen zu. Dafür gibt es zwei Varianten:
- Später werden wir die Integration von k -Formen über k -dimensionale Mannigfaltigkeiten wie zum Beispiel ($k = 2$) die Sphäre definieren.
- Zunächst aber betrachten wir die Integration von k -Formen über k -dimensionale Ketten. Damit kann man zum Beispiel 2-Formen über die Oberfläche eines Würfels integrieren, die wegen ihrer Ecken und Kanten keine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

In diesem Abschnitt seien V, W endlich-dimensionale Banachräume.

Vorbemerkung. Bei der Definition differenzierbarer Funktionen hatten wir stets einen offenen Definitionsbereich vorausgesetzt. Eine Abbildung $f : V \supset A \rightarrow W$ einer beliebigen Teilmenge $A \subset V$ heißt C^∞ -differenzierbar, wenn es eine offene Umgebung U von A in V und eine C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : U \rightarrow W$ gibt, für die $\tilde{f}|_A = f$ ist. Im allgemeinen ist die Fortsetzung \tilde{f} natürlich nicht eindeutig bestimmt, aber das Differential

$$p \mapsto D_p f$$

ist eine wohldefinierte C^∞ -Abbildung auf der abgeschlossenen Hülle des Inneren von A .

Im Sinne dieser Bemerkung bedeutet „ $\omega \in \Omega^k(A)$ “ für ein beliebiges $A \in V$, dass es eine offene Umgebung G von A und ein $\tilde{\omega} \in \Omega^k(G)$ gibt, so dass $\omega = \tilde{\omega}|_A$. Für die Definition des Integrals käme man natürlich mit viel weniger Regularität aus: *Stetiges* oder *lebesgue-integrierbares* $\omega : A \rightarrow \Lambda^k V^*$ wäre ausreichend. Wir bleiben trotzdem in der C^∞ -Kategorie.

Definition 198. Seien $A \subset \mathbb{R}^k$ μ_k -meßbar und $\omega \in \Omega^k(A)$. Dann definieren wir:

$$\int_A \omega := \int_A \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k,$$

falls das Integral existiert, falls also $\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \in \mathcal{L}^1(A, \mu_k)$.

Bemerkungen.

1. Beachten Sie, dass $\omega \in \Omega^k(A)$ auf dem $\mathbb{R}^k(!)$ von der Form $\phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ ist. Damit gilt also

$$\int_A \phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_A \phi d\mu_k.$$

2. Es kommen zwei Standardsituationen vor, in denen die Existenz des Integrals klar ist. In dieser Vorlesung werden wir es vor allem mit kompaktem A , nämlich mit kompakten Intervallen A , zu tun haben. Bei der Definition der Integration von Formen über Mannigfaltigkeiten (vgl. Anhang) ist hingegen A offen und der Träger von ω kompakt. In beiden Fällen hat man ein Lebesgueintegral einer stetigen Funktion über eine kompakte Menge.

Lemma 199 (Transformationsformel). Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ μ_k -messbar und sei $h : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^∞ -Abbildung. Der Rand ∂A sei eine μ_k -Nullmenge und h auf dem Inneren $\overset{\circ}{A}$ injektiv und

$$\det D_x h \geq 0 \text{ für alle } x \in \overset{\circ}{A}.$$

Existiert dann $\int_{h(A)} \omega$, so auch $\int_A h^* \omega$ und es gilt

$$\int_A h^* \omega = \int_{h(A)} \omega.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Transformationsatz:

$$\begin{aligned} \int_A h^* \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k &= \int_A \omega_h(Dh(\mathbf{e}_1), \dots, Dh(\mathbf{e}_k)) d\mu_k = \int_A \det(Dh) \omega_h(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k \\ &= \int_A (\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \circ h) |\det(Dh)| d\mu_k \\ &= \int_{h(A)} \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k. \end{aligned}$$

□

Für Differentialformen ist die Transformationsformel also besonders einfach, weil sie die Determinante schon „eingebaut“ haben.

Definition 200. Seien $G \subset V$ offen,

$$c: \mathbb{R}^k \supset A \rightarrow G$$

eine C^∞ -Abbildung einer μ_k -messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^k$ und $\omega \in \Omega^k(G)$. Für $k > 0$ definieren wir

$$\int_c \omega := \int_A c^* \omega = \int_A \omega_c(Dc(\mathbf{e}_1), \dots, Dc(\mathbf{e}_k)) d\mu_k = \int_A \omega_c(\partial_1 c, \dots, \partial_k c) d\mu_k, \quad (54)$$

falls die rechte Seite existiert.

Im Fall $k = 0$ ist $\mathbb{R}^k = \{0\}$ und $\omega \in \Omega^0(G)$ eine Funktion auf G . Für $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^0$, also für $A = \{0\}$, definieren wir $\int_c \omega$ als den Funktionswert von ω an der Stelle $c(0)$:

$$\int_c \omega := \omega_{c(0)}. \quad (55)$$

Beispiel 201 (Kurvenintegral). Mit $c: [a, b] \rightarrow G$ und $\omega \in \Omega^1(G)$ ist

$$\int_c \omega = \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt.$$

- Hat ω ein Potential θ , so ist nach der Kettenregel

$$\int_c \omega = \int_a^b d_{c(t)} \theta(\dot{c}(t)) dt = \int_a^b (\theta \circ c)' dt = \theta(c(b)) - \theta(c(a))$$

die Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten der Kurve.

- Ist $F: V \supset G \rightarrow V$ ein Vektorfeld und V euklidisch, so definiert man

$$\int_c \langle F, ds \rangle := \int_c \omega^F = \int_a^b \langle F(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt.$$

Integriert wird also die tangentielle Komponente des Feldes F . Interpretiert man F als Kraft, so nennt man dieses Integral auch das *Arbeitsintegral*.

□

Beispiel 202 (Argumentfunktion und Umlaufzahl). Sei

$$\omega = \frac{1}{x^2 + y^2}(x dy - y dx) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

die Sphärenvolumenform und sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine C^∞ -Kurve. Wir identifizieren \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} und halten schon mal fest, dass

$$\omega_c(\dot{c}) = \frac{1}{|c|^2}(c_x \dot{c}_y - c_y \dot{c}_x) = \frac{1}{|c|^2} \langle \dot{c}, ic \rangle. \quad (56)$$

Sei $\phi_0 \in \mathbb{R}$ eine der bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmten Zahlen mit

$$c(a) = |c(a)|e^{i\phi_0}. \quad (57)$$

Wir definieren eine Funktion $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi(t) := \phi_0 + \int_{c|_{[a,t]}} \omega = \phi_0 + \int_a^t \omega_{c(\tau)}(\dot{c}(\tau)) d\tau$$

und berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{|c|} e^{-i\phi} \right) &= \left(\frac{\dot{c}}{|c|} - \frac{\langle c, \dot{c} \rangle c}{|c|^3} \right) e^{-i\phi} + \frac{c}{|c|} (-i\dot{\phi}) e^{-i\phi} \\ &\stackrel{(56)}{=} \frac{e^{-i\phi}}{|c|} \left(\dot{c} - \frac{\langle c, \dot{c} \rangle c}{|c|^2} - ic\omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) \right) \\ &= \frac{e^{-i\phi}}{|c|} \left(\dot{c} - \left\langle \dot{c}, \frac{c}{|c|} \right\rangle \frac{c}{|c|} - \left\langle \dot{c}, \frac{ic}{|c|} \right\rangle \frac{ic}{|c|} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist die Funktion konstant, und die Konstante ist nach (57) gleich 1. Also ist

$$c(t) = |c(t)|e^{i\phi(t)} \text{ für alle } t.$$

Jede C^∞ -Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ besitzt also eine Polarkoordinatendarstellung mit einer Argumentfunktion ϕ die stetig, ja sogar C^∞ ist. Zeigen Sie, dass ϕ durch die Anfangsbedingung (57) eindeutig bestimmt ist.

Ist nun $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ geschlossen, so ist $e^{i\phi(b)} = e^{i\phi(a)}$, also

$$n(c, 0) := \frac{1}{2\pi}(\phi(b) - \phi(a))$$

eine ganze Zahl, die man die *Umlaufzahl von c um 0* nennt.

Ist schließlich $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschlossen und $p \in \mathbb{R}^2 \setminus c[a, b]$, so heißt

$$n(c, p) := n(c - p, 0)$$

die *Umlaufzahl von c um p* .

□

Beispiel 203 (Hyperflächenintegral, Flussintegral). Seien

- $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$,
- $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und
- $c : \mathbb{R}^{n-1} \supset A \rightarrow G$ eine C^∞ -Abbildung.

Man stellt sich vor, dass c eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n parametrisiert, und nennt

$$\int_c \langle F, dO \rangle := \int_c * \omega^F = \int_I \det(F \circ c, \partial_1 c, \dots, \partial_{n-1} c) d\mu_{n-1}.$$

das *Flussintegral von F über c* .

□

Beispiel 204 (Sphärenvolumen). Seien $r > 0$, $*\omega^X \in \Omega^2(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ die Sphärenvolumenform und

$$c : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

die Parametrisierung der Sphäre vom Radius r . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_c * \omega^X &= \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} * \omega_c^X \left(\frac{\partial c}{\partial \theta}, \frac{\partial c}{\partial \phi} \right) d\mu_2 \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \det \left(\frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\phi d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\phi d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

Das ist das Volumen (=die Oberfläche!) der Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 . Allgemein kann man zeigen, dass das Integral $\int_c * \omega^X$ das Volumen der Einheits(hyper)sphäre im \mathbb{R}^n liefert, wenn c eine (Hyper-)Sphäre um 0 im \mathbb{R}^n parametrisiert. Das Volumen der Sphäre vom Radius r ist dann $r^{n-1} \int_c * \omega^X$.

□

Beispiel 205. Wir betrachten die Sphärenvolumenform im $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, also

$$\omega_x := \det \left(\frac{x}{\|x\|^n}, \dots \right) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Wir wählen $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\epsilon \in \{0, +1\}$ und wollen ω integrieren über folgende Abbildung

$$c : [0, 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \left(x_1 - \frac{1}{2}, \dots, x_{i-1} - \frac{1}{2}, \epsilon - \frac{1}{2}, x_i - \frac{1}{2}, \dots, x_{n-1} - \frac{1}{2} \right).$$

Dafür ist

$$\partial_j c = \begin{cases} e_j & \text{für } j < i, \\ e_{j+1} & \text{für } j \geq i. \end{cases}$$

und

$$\omega_c(\partial_1 c, \dots, \partial_{n-1} c) = (-1)^{i-1} \det \left(e_1, \dots, \frac{\overset{i}{c}}{\|c\|^n}, \dots, e_n \right) = (-1)^{n-1} \frac{\epsilon - \frac{1}{2}}{\|c\|^n}.$$

Wir verzichten auf die schwierige Integration von $\|c\|^{-n}$ und halten nur fest, dass

$$(-1)^{i-1} \left(\epsilon - \frac{1}{2}\right) \int_c \omega > 0.$$

□

Satz 206 (Parameterinvarianz). Sei $h : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ wie im Lemma 199. Seien $G \subset V$ offen, $\omega \in \Omega^k(G)$ und $c : h(A) \rightarrow G$ eine C^∞ -Abbildung. Dann gilt

$$\int_{c \circ h} \omega = \int_c \omega.$$

Beweis.

$$\int_{c \circ h} \omega = \int_A (c \circ h)^* \omega = \int_A h^* c^* \omega = \int_{h(A)} c^* \omega = \int_c \omega.$$

□

Intermezzo: Volumina

Definition 207 (k -dimensionales Volumen). Seien V ein Euklidischer Vektorraum, $A \subset V$ kompakt und $c : A \rightarrow V$ eine C^∞ -Abbildung. Das *Volumen* von c ist

$$\text{vol}(c) := \int_A \sqrt{\det \langle \partial_i c, \partial_j c \rangle} d\mu_k.$$

Bemerkung. Sie wissen, dass $|\det f|$ für einen Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ die Volumenverzerrung durch f beschreibt. Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist aber

$$\begin{aligned} |\det f|^2 &= \det(\langle f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_k \rangle) \det(\langle \mathbf{e}_k, f(\mathbf{e}_j) \rangle) = \det(\langle \langle f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_k \rangle \rangle \langle \mathbf{e}_k, f(\mathbf{e}_j) \rangle \rangle) \\ &= \det \left(\sum_k \langle f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_k \rangle \langle \mathbf{e}_k, f(\mathbf{e}_j) \rangle \right) = \det(\langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j) \rangle). \end{aligned}$$

Weil es für lineare Abbildungen zwischen verschiedenen, insbesondere verschieden-dimensionalen Räumen keine Determinante gibt, benutzt man die *Gramsche Determinante*

$$\det \langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j) \rangle$$

zur Definition von niedriger-dimensionalen Volumina in Räumen größerer Dimension.

Beispiel 208. Für $c : [a, b] \rightarrow V$ ist

$$\text{vol}(c) = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} dt$$

die Länge der Kurve c .

□

Ende des Intermezzos

Notation. Von nun an bezeichnen wir mit I das Einheitsintervall:

$$I = [0, 1].$$

Wir setzen $I^0 := \{0\} = \mathbb{R}^0$. und betrachten für $k \geq 1$ den k -dimensionalen Einheitswürfel $I^k \subset \mathbb{R}^k$.

Definition 209 (k -Ketten und Integration über k -Ketten). Sei G eine offene Teilmenge des endlich-dimensionalen Banachraumes V und sei $k \in \mathbb{N}$

(i) Wir bezeichnen mit

$$I_k(G) := C^\infty(I^k, G)$$

die Menge der C^∞ -Abbildungen von I^k nach G . Diese Abbildungen bezeichnen wir auch als C^∞ -Intervalle in G . Anschaulich sind das mit I^k parametrisierte k -dimensionale "Flächenstücke" in G .

- (ii) Ein $c \in I_k(G)$ ($k > 0$) heißt *degeneriert*, wenn es nur von weniger als k Variablen abhängt, d.h. wenn $\partial_i c = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$.
- (iii) Die k -Kettengruppe in $G \subset V$ ist

$$C_k(G) := \{C : I_k(G) \rightarrow \mathbb{Z} \mid C(c) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } c\}.$$

Ihre Elemente heißen k -Ketten in G . Die Addition in \mathbb{Z} macht $C_k(G)$ zu einer abelschen Gruppe.

Man identifiziert $c \in I_k(G)$ mit der k -Kette, die auf c den Wert 1 und auf allen anderen den Wert 0 hat. Dann ist $I_k(G) \subset C_k(G)$ und

$$C = \sum_c C(c)c.$$

k -Ketten sind also „formale Linearkombinationen“ von k -dimensionalen C^∞ -Intervallen mit ganzzahligen Koeffizienten.

- (iv) Eine k -Kette $C \in C_k(G)$ heißt *degeneriert*, wenn alle an ihr beteiligten C^∞ -Intervalle degeneriert sind, d.h. wenn gilt

$$\forall c \in I_k(G) (C(c) \neq 0 \implies c \text{ degeneriert}).$$

- (v) Für $\omega \in \Omega^k(G)$ und $C \in C_k(G)$ sei

$$\int_C \omega := \sum_{C(c) \neq 0} C(c) \int_c \omega = \sum_{C(c) \neq 0} C(c) \int_{I^k} \omega_c(\partial_1 c, \dots, \partial_k c) d\mu_k. \quad (58)$$

Vergleiche (54). Im Fall $k = 0$ heißt das nach (55)

$$\int_C \omega := \sum_{C(c) \neq 0} C(c) \omega_{c(0)}.$$

ACHTUNG: Sind $c_1, c_2 : I^k \rightarrow G \subset V$ zwei verschiedene Abbildungen, so hat $c_1 + 5c_2$ jetzt *zwei Bedeutungen*, nämlich wie "früher" als wertweise gebildete neue Abbildung mit

$$(c_1 + 5c_2)(x) := c_1(x) + 5c_2(x),$$

die allerdings nicht notwendig mehr in G landet, oder eben als die formale Linearkombination der beiden C^∞ -Intervalle, d.h. als Abbildung von $I_k(V)$ nach \mathbb{Z} , die auf c_1 den Wert 1, auf

c_2 den Wert 5 und auf allen anderen C^∞ -Intervallen c Wert 0 annimmt. Ein Ausweg aus diesem Dilemma wären neue Rechenzeichen für die Kettengruppen, also etwa $c_1 \oplus (5 \otimes c_2)$. Das verwendet man aber nicht und muss deshalb aus dem jeweiligen Zusammenhang ablesen, welche Interpretation gemeint ist.

Konvention. Solange wir mit der genaueren Untersuchung der Kettengruppen beschäftigt sind, interpretieren wir $\sum \alpha_i c_i$ natürlich immer als (“formale”) Linearkombination in C_k . Später gilt diese Interpretation jedenfalls dann, wenn die Kette als Integrationsbereich unter einem Integral steht.

Beispiel 210. Für $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist

$$\int_{5c} \omega = 5 \int_c \omega$$

das Fünffache des Integrals von ω über den Einheitskreis, und eben nicht das Integral von ω über den Kreis vom Radius 5.

□

Lemma 211. Für festes $\omega \in \Omega^k(G)$ ist

$$\int \omega : C \mapsto \int_C \omega$$

ein Gruppenhomomorphismus von $C_k(G)$ in die additive Gruppe von \mathbb{R} .

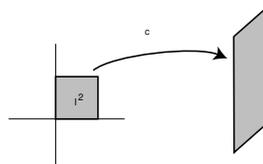
Der Beweis ist trivial.

Beispiel 212 (Zur Anschauung). Der letzte Teil der Ketten-Definition erklärt die vorgehenden: Man möchte über eine Familie aus mehreren k -dimensionalen Intervallen integrieren, wobei die Teilintegrale eventuell mehrfach gezählt werden. $C(c)$ gibt an, mit welcher Vielfachheit das Integral über c gezählt werden soll.

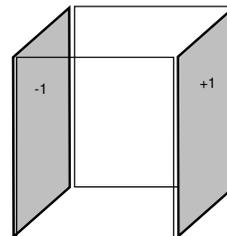
Wenn man den Fluss eines Vektorfeldes F durch das vom C^∞ -Intervall

$$c : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gegebene Rechteck ermitteln will, integriert man $*\omega^F$ über c .



Wenn man den Fluss durch die Oberfläche eines Quaders ermitteln will, werden die gegenüberliegenden Seitenwände bis auf eine Translation durch dasselbe c geliefert, aber die Integrale sind mit verschiedenem Vorzeichen zu versehen, weil der Fluss von links nach rechts einmal positiv, einmal negativ zu zählen ist. Das Vorzeichen kodiert in gewisser Weise die Orientierung der Flächen.



Konkret kann man betrachten:

$$\begin{aligned} c_1 : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & (x, y) &\mapsto (1, x, y), \\ c_0 : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & (x, y) &\mapsto (0, x, y). \end{aligned}$$

Dann ist $c_1 - c_0$ eine formale Linearkombination und

$$\int_{c_1 - c_0} = \int_{c_1} - \int_{c_0}.$$

$c_1 - c_0$ meint nicht die wertweise gebildete Differenz der Abbildungen, also nicht etwa

$$(x, y) \mapsto (1, 0, 0).$$

Vergleiche dazu die obige Konvention.

□

9.6 Der Satz von Stokes

- Wir lernen nun die “Ketten-Version” des Satzes von Stokes kennen.
- Dazu brauchen wir aber noch den Randoperator für Ketten, der zum Beispiel der 3-Kette im \mathbb{R}^3 , die aus einem einzigen singulären Intervall, nämlich der Inklusion $[0, 1]^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ des Einheitswürfels in den \mathbb{R}^3 besteht, die 2-Kette zuordnet, die von den 6 Seitenflächen des Würfels gebildet wird.

Sei G offen im n -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V und weiterhin $I = [0, 1]$.

Definition 213 (Randoperator).

- (i) Definiere für $i \in \{1, \dots, k\}$ die i -te untere und obere Seite

$$s_i, s^i : I^{k-1} \rightarrow I^k$$

von I^k durch

$$\begin{aligned} s_i(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1}), \\ s^i(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Bei s_k bzw. s^k steht also einfach am Schluss eine 0 oder 1.

- (ii) Der *Randoperator*

$$\partial : C_k(G) \rightarrow C_{k-1}(G)$$

ist der eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismus mit

$$\partial c := \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (c \circ s^i - c \circ s_i) \quad (59)$$

für jedes $c \in I_k(G)$.

Der Randoperator leistet also gerade das im Beispiel 212 erklärte Ziel, entgegengesetzte Seiten eines C^∞ -Intervalls für die Integration mit entgegengesetztem Vorzeichen zu versehen.

Beispiel 214. Seien $c_B \in I_3(\mathbb{R}^3)$, $c_S \in I_2(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} c_B(r, s, t) &:= (r \sin \pi s \cos 2\pi t, r \sin \pi s \sin 2\pi t, r \cos \pi s) \\ c_S(x, y) &:= c_B(1, x, y). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\partial c_B = c_S - \kappa_{(0,0,0)} - \{(x, y) \mapsto (0, 0, -x)\} + \{(x, y) \mapsto (0, 0, +x)\},$$

wo κ_a die konstante Abbildung mit Wert a ist. Beachte, dass in dieser Summe die letzten drei C^∞ -Intervalle degeneriert sind, vgl. Definition 209 (ii).

Beweis.

$$\begin{aligned} \partial c_B &= c_B(1, x, y) - c_B(0, x, y) - c_B(x, 1, y) + c_B(x, 0, y) + c_B(x, y, 1) - c_B(x, y, 0) \\ &= c_S(x, y) - \kappa_{(0,0,0)} - (0, 0, -x) + (0, 0, x) + (x \sin \pi y, 0, x \cos \pi y) - (x \sin \pi y, 0, x \cos \pi y). \end{aligned}$$

Beachte, dass die beiden letzten Terme dieselbe Abbildung mit verschiedenem Vorzeichen liefern, sie heben sich weg. Aber es gilt *nicht*, dass $-(0, 0, -x) + (0, 0, x) = (0, 0, 2x)$.

□

Bemerkung. In diesem Beispiel deutet sich an, dass das „Kettenkonzept“ nicht besonders gut geeignet ist, um Integrationen über Bereiche wie die Sphäre damit zu behandeln. Dazu braucht man einen geometrischeren Zugang, der durch die Integration von Differentialformen über Mannigfaltigkeiten geliefert wird. Wir gehen darauf im Kapitel 10.4 ein.

Beispiel 215. Wir berechnen spaßeshalber

$$\begin{aligned}
\partial^2 c_B(x) &= \partial c_S(x) \\
&\quad + \kappa_{(0,0,0)} - \kappa_{(0,0,0)} - \kappa_{(0,0,0)} + \kappa_{(0,0,0)} \\
&\quad - (0, 0, -1) + (0, 0, 0) + (0, 0, -x) - (0, 0, -x) \\
&\quad + (0, 0, +1) - (0, 0, 0) - (0, 0, x) + (0, 0, x) \\
&= \partial c_S(x) - (0, 0, -1) + (0, 0, +1) \\
&= c_S(1, x) - c_S(0, x) - c_S(x, 1) + c_S(x, 0) - (0, 0, -1) + (0, 0, +1) \\
&= (0, 0, -1) - (0, 0, 1) - (\sin \pi x, 0, \cos \pi x) + (\sin \pi x, 0, \cos \pi x) - (0, 0, -1) + (0, 0, +1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis gilt ganz allgemein:

Lemma 216.

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Wir zeigen zunächst:

Lemma 217. Für $i < j$ gilt

$$\begin{aligned}
s_j \circ s^i &= s^i \circ s_{j-1}, & s^j \circ s_i &= s_i \circ s^{j-1}, \\
s_j \circ s_i &= s_i \circ s_{j-1}, & s^j \circ s^i &= s^i \circ s^{j-1}.
\end{aligned}$$

Beweis von Lemma 217.

$$\begin{aligned}
s_j \circ s^i(x_1, \dots, x_{k-2}) &= s_j(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{k-2}) \\
&= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{k-2}) \\
s^i \circ s_{j-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) &= s^i(x_1, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{k-2}) \\
&= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{k-2}).
\end{aligned}$$

Das zeigt die erste Formel. Dabei kommt es nur darauf an, richtig abzuzählen, an welcher Stelle man 0 bzw. 1 einsetzen muss. Daher folgen die andere Formeln genauso. □

Beweis von Lemma 216. Wir müssen das wegen der Homomorphie von ∂ nur für C^∞ -Intervalle $c \in C_k$ zeigen.

$$\begin{aligned}
\partial(\partial c) &= \partial \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (c \circ s^j - c \circ s_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^k (-1)^{i+j} (c \circ s^j \circ s^i - c \circ s^j \circ s_i - c \circ s_j \circ s^i + c \circ s_j \circ s_i) \quad (60)
\end{aligned}$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^k (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i + \sum_{1 \leq j \leq i < k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} c \circ s^i \circ s^{j-1} + \sum_{1 \leq j \leq i < k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i \\
&\stackrel{j-1=\bar{j}}{=} \sum_{1 \leq i < \bar{j}+1 \leq k} (-1)^{i+\bar{j}+1} c \circ s^i \circ s^{\bar{j}} + \sum_{1 \leq j \leq i < k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i \\
&= - \sum_{1 \leq i \leq \bar{j} < k} (-1)^{i+\bar{j}} c \circ s^i \circ s^{\bar{j}} + \sum_{1 \leq j \leq i < k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ebenso verschwinden die drei anderen Terme. \square

Wegen $\partial^2 = 0$ haben die Kettengruppen und Randoperatoren $\partial : C_k(G) \rightarrow C_{k-1}$ viel Ähnlichkeit mit den Differentialformen und der Cartanschen Ableitung $d : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^{k+1}(G)$. Man kann „Zyklen“ $Z_k(G)$ und „Ränder“ $B_k(G)$ definieren, die hier wirklich anschaulich etwas mit Rändern und mit randlosen, also geschlossenen Ketten zu tun haben.

Die entsprechenden Quotienten $H_k^{\text{Würfel}}(G) = Z_k(G)/B_k(G)$ könnte man (*Würfel-*)*Homologiegruppen* nennen. Sie sind aber keine brauchbaren mathematische Objekte, die (etwa im Beispiel 214) auftretenden degenerierten Ketten erweisen sich als störend.¹⁰ Für eine brauchbare *Homologietheorie* muss man die Kettengruppen modulo der degenerierten Ketten betrachten, vgl. *Fulton, Algebraic Topology, Springer 1995, Chapter 23*.

Satz 218 (Stokes, um 1850). *Seien $G \subset V$ offen, $k \geq 1$, $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$ und $C \in C_k(G)$. Dann gilt*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

Die hier gegebene moderne Version beruht auf dem Differentialformenkalkül, den wir in den vorangehenden Abschnitten erklärt haben und der von Elie Cartan (1869-1951) entwickelt wurde.

Beweis. **1. Schritt.** Wir betrachten folgenden Spezialfall

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{R}^k, \\
c &= \iota : I^k \hookrightarrow \mathbb{R}^k, \\
\omega &= \phi dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k \in \Omega^{k-1}(G),
\end{aligned}$$

wobei G eine offenen Umgebung von I^k ist.

Wir berechnen zunächst

$$d\omega = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k = (-1)^{i-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Weil c eine k -Kette im \mathbb{R}^k ist, ist

$$\int_c d\omega = (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mu_k.$$

¹⁰Aus der Definition des Randoperators ∂ folgt, dass konstante C^∞ -Intervalle immer Zyklen, aber, weil Ränder immer aus einer geraden Anzahl von C^∞ -Intervallen bestehen, niemals Ränder sind. Sie liefern also in der Würfelhomologie immer eine nicht-triviale Homologiekategorie. Geometrisch ist das „unerwünscht“.

Mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt daraus

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i d\mu_{k-1} \\ &= (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} \left(\phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{1}, \dots, x_k) - \phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{0}, \dots, x_k) \right) d\mu_{k-1}. \end{aligned} \quad (61)$$

Wir berechnen nun die rechte Seite der Stokes-Formel.

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \omega &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left(\int_{s^j} \omega - \int_{s_j} \omega \right) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left(\int_{I^{k-1}} \omega_{s^j}(\partial_1 s^j, \dots, \partial_{k-1} s^j) d\mu_{k-1} - \int_{I^{k-1}} \omega_{s_j}(\partial_1 s_j, \dots, \partial_{k-1} s_j) d\mu_{k-1} \right) \end{aligned}$$

Wie sehen die Integranden aus? Wir erinnern an

$$\partial_m s^j = \begin{cases} \mathbf{e}_m & \text{für } m < j, \\ \mathbf{e}_{m+1} & \text{für } m \geq j. \end{cases} = \partial_m s_j$$

Die Argumente $\partial_1 s^j, \dots, \partial_{k-1} s^j$ enthalten also genau dann *nicht* \mathbf{e}_i , wenn $j = i$. In allen anderen Fällen ist $\omega(\partial_1 s^j, \dots, \partial_{k-1} s^j) = 0$, weil dann

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k) (\partial_1 s^j, \dots, \partial_{k-1} s^j) = 0.$$

Für $j = i$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_{s^i}(\partial_1 s^i, \dots, \partial_{k-1} s^i) &= (\phi \circ s^i) (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k) (\mathbf{e}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &= \phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{1}, \dots, x_k) \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für s_j . Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \omega &= (-1)^{i-1} \left(\int_{I^{k-1}} \omega_{s^i}(\partial_1 s^i, \dots, \partial_{k-1} s^i) d\mu_{k-1} - \int_{I^{k-1}} \omega_{s_i}(\partial_1 s_i, \dots, \partial_{k-1} s_i) d\mu_{k-1} \right) \\ &= (-1)^{i-1} \left(\int_{I^{k-1}} \phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{1}, \dots, x_k) - \phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{0}, \dots, x_k) \right) d\mu_{k-1} \end{aligned}$$

Damit und mit (61) ist der Satz im Spezialfall bewiesen. Der Kern des Beweises ist der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung zusammen mit dem Fubini. Alles weitere ist Einsetzen in die Definitionen.

2. Schritt. Weil das Integral linear und jedes $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$ eine Linearkombination von Formen der obigen Gestalt ist, gilt der Satz damit für beliebiges $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$.

3. Schritt. Seien nun $G \subset V$ offen, $c \in I_k(G)$ und $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$. Wir bezeichnen mit $\iota: I^k \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ die Inklusion. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int_{c \circ \iota} d\omega = \int_\iota c^* d\omega = \int_\iota dc^* \omega \stackrel{2. \text{ Schritt}}{=} \int_{\partial \iota} c^* \omega \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{s^i} c^* \omega - \int_{s_i} c^* \omega \right) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{c \circ s^i} \omega - \int_{c \circ s_i} \omega \right) = \int_{\partial c} \omega. \end{aligned}$$

Damit gilt der Satz für C^∞ -Intervalle. Weil aber das Integral und der Randoperator Homomorphismen auf der Kettengruppe $C_k(G)$ sind, gilt er dann auch für beliebige Ketten. \square

Beispiel 219 (Der Fall $k = 1$). Für $c : I \rightarrow G \in I_1(G)$ und $\omega = \phi : G \rightarrow \mathbb{R} \in \Omega^0(G)$ ist

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]} d\phi(c') d\mu_1 = \int_0^1 \phi'(x) dx = \phi(c(1)) - \phi(c(0)).$$

Andererseits ist nach (55)

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{c \circ s^1} \omega - \int_{c \circ s_1} \omega = \omega_{c(s^1(0))} - \omega_{c(s_1(0))} = \phi(c(1)) - \phi(c(0)).$$

In diesem Fall ist der Stokes also (bis auf eine Substitution) gerade der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. \square

9.7 Beispiele und Anwendungen

- Mit dem Satz von Stokes eröffnet sich eine schier unübersehbare Fülle von Anwendungen und weiteren Entwicklungen in den verschiedensten Gebieten der Mathematik.
- Eine kleine Auswahl bieten die Beispiele in den nächsten zwei Unterabschnitten.
- Weitere interessante Aspekte schreibe ich in einem Anhang auf, den wir in der Vorlesung nicht mehr schaffen, den ich Ihnen aber als Ferienlektüre wärmstens empfehle.

9.7.1 $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und der Fixpunktsatz von Brouwer

Damit eine k -Form ω auf einem Gebiet G ein Potential besitzt, muß sie notwendig geschlossen sein. Dann gibt es zumindest lokal ein Potential, nicht immer aber auch global, d.h. auf ganz G . Ob *alle* geschlossenen k -Formen ein globales Potential haben, ob also $H^k(G) = 0$, hängt mit der Topologie von G zusammen. Der Satz von Stokes liefert ein wichtiges notwendiges Kriterium für die Existenz eines globalen Potentials und, wenn dieses nicht erfüllt ist, topologische Informationen über G .

Lemma 220. *Notwendig für die Existenz eines Potentials zu $\omega \in \Omega^k(G)$ ist neben $d\omega = 0$, dass*

$$\int_C \omega = 0$$

für jedes $C \in C_k(G)$ mit degeneriertem Rand ∂C , insbesondere also, falls $\partial C = 0$.

Beweis. Aus $\omega = d\theta$ folgt nach der Definition 209 der Degeneriertheit

$$\int_C \omega = \int_C d\theta = \int_{\partial C} \theta = 0,$$

vergleiche (58). □

Satz 221. *Für $n \geq 1$ gilt*

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \neq 0.$$

Beweis. Die $(n-1)$ -Form $\omega := * \omega \frac{x}{\|x\|^n} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, die *Sphärenvolumenform*, ist nach Beispiel 187 geschlossen. Die Abbildung

$$w : I^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x - \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)$$

verschiebt den Einheitswürfel so, dass sein Zentrum im Nullpunkt liegt. Also ist

$$C := \partial w \in C_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

eine $(n-1)$ -Kette in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, die nach Lemma 216 geschlossen ist.

Mit (59) erhalten wir

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{w \circ s_i} \omega - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{w \circ s_i} \omega.$$

Die Seiten von w sind aber gerade die in Beispiel 205 betrachteten Abbildungen c , und aus jenem Beispiel folgt, dass alle Summanden positiv sind. Die geschlossene Form ω besitzt also kein Potential.

□

Bemerkungen. 1. Ist $C := \partial w$ wie im vorstehenden Beweis, so kann man zeigen, dass die Abbildung

$$\Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_C \omega$$

einen Isomorphismus $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$ induziert.

2. Im obigen Beweis kann man w ersetzen durch ϵw mit beliebigem $\epsilon > 0$. Das zeigt dann, dass auch die Einschränkung der Sphärenvolumenform auf das Komplement von 0 in einer beliebigen offenen Umgebung von 0 kein Potential besitzt.

Als Folgerung von Satz 221 beweisen wir:

Satz 222 (Brouwerscher Fixpunktsatz (1912)). *Jede C^∞ -Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ der Vollkugel $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ hat wenigstens einen Fixpunkt.*

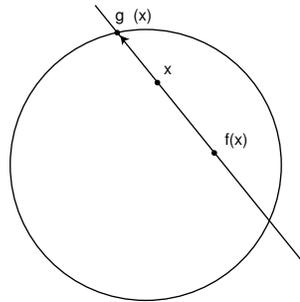
Beweis. Im Fall $n = 1$ ist $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, also $f(-1) - (-1) \geq 0$ und $f(1) - 1 \leq 0$. Daher hat $f(x) - x$ nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle, und f damit einen Fixpunkt.

Für $n \geq 2$ erfolgt der Beweis indirekt. Wir nehmen also an, es gäbe eine fixpunktfreie C^∞ -Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$. Wir definieren dann eine Abbildung $g : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie folgt:

Für jedes $x \in D^n$ schneidet die Gerade $\{x + t(x - f(x)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ durch x und $f(x)$ die Sphäre $S^{n-1} = \{x \mid \|x\| = 1\}$ in genau zwei Punkten, und wir bezeichnen mit

$$g(x) = x + t(x)(x - f(x))$$

den Schnittpunkt, der näher an x als an $f(x)$ liegt.



Löst man die quadratische Gleichung für die Schnittpunkte, so findet man

$$g(x) = x + \left(\sqrt{\left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle^2 + 1 - \|x\|^2} - \left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle \right) \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}. \quad (62)$$

Überlegen Sie, dass der Radikand stets positiv ist. Nach Definition der Differenzierbarkeit auf nicht-offenen Mengen gibt es eine offene Umgebung U von D^n und eine C^∞ -Fortsetzung von f auf U , die wir ebenfalls mit f bezeichnen wollen. Wir können o. E. annehmen, dass $f(x) \neq x$ auf U und dass der Radikand in (62) auf U positiv ist, so dass $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Wir können ferner annehmen, dass U eine offene Kreisscheibe $U_{1+\epsilon}(0)$ ist, weil die stetige Funktion $x \mapsto \|x\|$ auf der kompakten Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus U \mid \|x\| \leq 2\}$ ein Minimum > 1 annimmt, wenn diese Menge nicht überhaupt leer und daher $U_2(0) \subset U$ ist. Beachten Sie, dass $g(U) \subset S^{n-1}$, also

$$g : U \rightarrow U \setminus \{0\}.$$

Wir definieren

$$j : U \setminus \{0\} \rightarrow U, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

Nach der 2. Bemerkung zum Satz 221 ist die Einschränkung $\omega \in \Omega^{n-1}(U \setminus \{0\})$ der Sphärenvolumenform geschlossen ohne Potential auf $U \setminus \{0\}$. Weil aber

$$dg^*\omega = g^*d\omega = 0,$$

besitzt $g^*\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ nach dem Lemma von Poincaré ein Potential $\theta \in \Omega^{n-2}(U)$. Dafür gilt dann

$$d(j^*\theta) = j^*d\theta = j^*g^*\omega = \underbrace{(g \circ j)^*}_{=j} \omega = j^*\omega. \quad (63)$$

Nun ist aber

$$j^*\omega = \omega. \quad (64)$$

Beachten Sie dazu, dass $d_p j(v) = \frac{v}{\|p\|} + d_p \frac{1}{\|x\|}(v)p$. Daher ist

$$\begin{aligned} j^*\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \det \left(\frac{j(p)}{\|j(p)\|^n}, d_p j(v_1), \dots, d_p j(v_{n-1}) \right) \\ &= \det \left(\frac{p}{\|p\|}, \frac{v_1}{\|p\|}, \dots, \frac{v_{n-1}}{\|p\|} \right) \\ &= \omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}). \end{aligned}$$

Nach (63) und (64) ist $j^*\theta \in \Omega^{n-2}(U \setminus \{0\})$ also ein Potential von ω . Widerspruch!

Damit war die Annahme, es existiere eine fixpunktfreie C^∞ -Abbildung von D^n in sich, falsch. \square

Ein Ergebnis des Beweises ist: Es gibt keine C^∞ -Abbildung $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$, die auf S^{n-1} die Identität ist, also keine sogenannte *Retraktion* von D^n auf S^{n-1} .

Der originale Satz von Brouwer gilt sogar für *stetige* Abbildungen. Wir beweisen das, weil wir dabei Gelegenheit erhalten, einiges aus der Integrationstheorie zu wiederholen, und weil es eine substantielle Verschärfung des Satzes ist.

Zunächst eine Vorbemerkung über die Integration \mathbb{R}^m -wertiger Funktionen.

Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das Integral einfach komponentenweise:

$$\int f d\mu_n = \left(\int f_1 d\mu_n, \dots, \int f_m d\mu_n \right),$$

falls die rechte Seite existiert. Die meisten Rechenregeln übertragen sich unmittelbar. Wir brauchen aber eine nicht so evidente, nämlich

$$\left\| \int f d\mu_n \right\| \leq \int \|f\| d\mu_n \quad (65)$$

für die Standardnorm im \mathbb{R}^n . Zum Beweis sei $g := \int f d\mu_n$. Dann folgt mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\left\| \int f d\mu_n \right\|^2 = \left\langle \int f d\mu_n, g \right\rangle = \int \langle f, g \rangle d\mu_n \leq \int \|f\| \|g\| d\mu_n = \|g\| \int \|f\| d\mu_n$$

und daraus (65).

1. Schritt: Faltung mit C^∞ -Funktionen. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μ_n -integrierbar und beschränkt und hat $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ kompakten Träger, so ist $y \mapsto g(x-y) \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, also ist nach Satz 54 auch die Funktion $y \mapsto f(y)g(x-y)$ für jedes x integrierbar. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ sind stetig und haben kompakten Träger, sind also beschränkt $\leq M_i$, und dasselbe Argument zeigt, dass $y \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}(f(y)g(x-y)) \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Weiter ist $\left\| \frac{\partial}{\partial x_j}(f(y)g(x-y)) \right\| \leq M_i \|f\| \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, und nach Satz 44 ist also die Funktion

$$f * g : x \mapsto \int f(y)g(x-y)dy$$

nach allen x_j partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_j}(x) = \int f(y) \frac{\partial g(x-y)}{\partial x_j} dy.$$

Dabei soll $\int \dots dy$ das bezüglich y genommene μ_n -Integral sein. Durch vollständige Induktion folgt daraus unmittelbar, dass $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

2. Schritt: Glatte Approximation. Ist $f : D^n \rightarrow D^n$ stetig auf der kompakten Einheitskugel $D^n \subset \mathbb{R}^n$, so ist es gleichmäßig stetig. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon \text{ für alle } x, y \in D^n \text{ mit } \|x - y\| < \delta. \quad (66)$$

Zu δ wählen wir eine C^∞ -Funktion¹¹ $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} g &\geq 0, \\ g(x) = 0 &\iff \|x\| \geq \delta, \\ \int g d\mu_n &= 1. \end{aligned}$$

Wir setzen nun f auf den ganzen \mathbb{R}^n fort, indem wir definieren:

$$f(x) := \begin{cases} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{für } 1 < \|x\| \leq 2, \\ 0 & \text{für } \|x\| > 2. \end{cases}$$

Dann ist f μ_n -integrierbar und beschränkt und erfüllt (66) sogar für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|, \|y\| \leq 2$. Damit ist $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, und es gilt für alle $x \in D^n$

$$\begin{aligned} \|f * g(x) - f(x)\| &= \left\| \int f(y)g(x-y)dy - \int f(x)g(x-y)dy \right\| \\ &\leq \int \|f(y) - f(x)\| g(x-y)dy. \end{aligned}$$

Für alle $x, y \in D^n$ gilt: Ist $\|x - y\| \geq \delta$, so ist $g(x-y) = 0$, andernfalls ist $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$. Also folgt

$$\|f * g(x) - f(x)\| \leq \int \epsilon g(x-y)dy = \epsilon.$$

Wir haben also zu einer stetigen Funktion jedem $\epsilon > 0$ eine C^∞ -Funktion $f * g =: \tilde{f}$ konstruiert, für die

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \epsilon \text{ für alle } x \in D^n.$$

¹¹ Setzen wir $\tau(x) := \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - \delta^2}\right)$ für $\|x\| < \delta$ und $\tau(x) = 0$ sonst, so leistet $g(x) := \frac{\tau(x)}{\int \tau d\mu_n}$ das Gewünschte.

Aus (65) folgt weiter, dass

$$\|f * g\| \leq \int \|f(y)\|g(x-y)dy \leq \int g(y-x)dy = 1,$$

so dass $\tilde{f}(D^n) \subset D^n$.

3. Schritt. Ist $f : D^n \rightarrow D^n$ stetig, so ist $x \mapsto \|x - f(x)\|$ eine stetige Abbildung auf einer kompakten Menge, nimmt also ihr Minimum $=: 2\epsilon$ an. Hätte f keinen Fixpunkt, so wäre $\epsilon > 0$. Konstruieren wir dann wie oben eine approximierende C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : D^n \rightarrow D^n$ mit $\|f - \tilde{f}\| < \epsilon$, so ist für alle $x \in D$

$$\|x - \tilde{f}(x)\| \geq \|x - f(x)\| - \|f(x) - \tilde{f}(x)\| \geq \epsilon > 0.$$

Also hätte auch \tilde{f} keinen Fixpunkt im Widerspruch zur bewiesenen C^∞ -Version des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

Wir halten noch einmal fest:

Satz 223 (Brouwerscher Fixpunktsatz für stetige Abbildungen). *Jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ der Vollkugel $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ hat wenigstens einen Fixpunkt.*

Natürlich gilt das auch, wenn man D^n durch einen dazu homöomorphen metrischen Raum ersetzt.

Korollar 224 (Frobenius). *Jede quadratische Matrix mit nur nicht-negativen Einträgen hat einen nicht-negativen reellen Eigenwert.*

Beweis. Wir erinnern an die l^p -Normen auf dem \mathbb{R}^n :

$$\|x\|_p := \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} & \text{für } 1 < p < \infty, \\ \max_{i=1, \dots, n} |x_i| & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Wir setzen $D_p^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p \leq 1\}$. D_2^n ist also die "normale" Einheitskugel, und D_∞^n ist ein Würfel der Kantenlänge 2 um 0.

Sei nun A eine $(n \times n)$ -Matrix mit nur nicht-negativen Einträgen und o.E. A regulär, sonst ist 0 ein Eigenwert. Wir betrachten das Simplex $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1 \text{ und alle } x_i \geq 0\}$ und darauf die Abbildung

$$f : x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|_1}.$$

Nach den Voraussetzungen über A bildet f das Simplex Δ stetig in sich ab. Wir zeigen, dass Δ homöomorph zur $(n-1)$ -dimensionalen Vollkugel ist. Dann hat f nach dem Satz von Brouwer einen Fixpunkt $x \in \Delta$, und der ist ein Eigenvektor:

$$Ax = \|Ax\|_1 x.$$

Die Homöomorphie von Δ zur Kugel beweist man am einfachsten über eine (längere) Kette einfacher Homöomorphien:

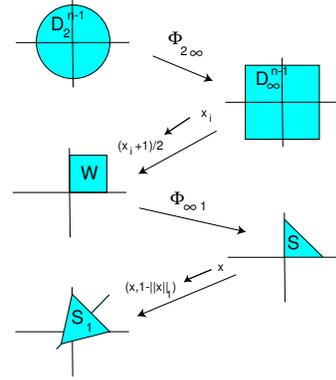
Weil die l^p -Normen stetig (bezüglich der Norm-unabhängigen Topologie des \mathbb{R}^{n-1}) sind, ist für beliebige $1 \leq p, q \leq \infty$ die Abbildung

$$\Phi_{pq} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\|x\|_p}{\|x\|_q} x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

jedenfalls in allen Punkten $x \neq 0$ stetig. Aber weil

$$\|\Phi_{pq}(x)\|_q = \|x\|_p \quad (67)$$

ist, gilt die Stetigkeit auch in 0. Offenbar ist Φ_{pq} auch bijektiv mit $\Phi_{pq}^{-1} = \Phi_{qp}$, und wegen (67) liefert Φ_{pq} einen Homöomorphismus von D_p auf D_q .



Insbesondere ist die Standardvollkugel D_2^{n-1} vermöge $\Phi_{2\infty}$ homöomorph zum Würfel D_∞^{n-1} . Mittels Translation und Homothetie mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ bildet man D_∞^{n-1} homöomorph ab auf den Würfel

$$W := D_\infty^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \text{alle } x_i \geq 0\}.$$

Weiter geht es mit $\Phi_{\infty 1}$ auf das $(n-1)$ -dimensionale Simplex

$$S := D_1^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \text{alle } x_i \geq 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq 1 \text{ und alle } x_i \geq 0 \right\}.$$

Das wird durch die Abbildung

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \left(x_1, \dots, x_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right)$$

homöomorph auf Δ abgebildet, und die Homöomorphie zwischen der $(n-1)$ -dimensionalen Vollkugel und Δ ist gezeigt. \square

9.7.2 Der Cauchysche Integralsatz

Wir bleiben dabei, dass unsere Abbildungen und Funktionen von der Klasse C^∞ sind. Die kanonischen Koordinatenfunktionen des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit x und y .

Definition 225 (Komplexes Kurvenintegral). Seien

$$\begin{aligned} G &\subset \mathbb{C} \text{ offen,} \\ C &\in C_1(G) \text{ und} \\ f &: G \rightarrow \mathbb{C} \text{ eine } C^\infty\text{-Funktion.} \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit reellen u, v und definieren

$$\int_C f(z) dz := \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy).$$

Für $C = c = c_1 + ic_2 : I \rightarrow G$ ist

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_0^1 c^*(u dx - v dy) + i \dots \\ &= \int_0^1 \{u \circ c(t) dx(\dot{c}(t)) - v \circ c(t) dy(\dot{c}(t))\} dt + i \dots \\ &= \int_0^1 \{u \circ c(t) \dot{c}_1(t) - v \circ c(t) \dot{c}_2(t)\} dt + i \dots \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} \{(u \circ c(t) + i v \circ c(t))(\dot{c}_1(t) + i \dot{c}_2(t))\} dt + i \dots \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} \{f(c(t))\dot{c}(t)\} dt + i \int_0^1 \operatorname{Im} \{f(c(t))\dot{c}(t)\} dt \\ &= \int_0^1 f(c(t)) \dot{c}(t) dt. \end{aligned}$$

Entsprechend definiert man allgemeiner das Kurvenintegral über Kurven $c : [a, b] \rightarrow G$ mit beliebigem Definitionsbereich $[a, b]$ durch

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt.$$

Beispiel 226. Sei $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$. Dann gilt

$$\int_c \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i.$$

Rechnet man dasselbe mit 1-Formen, so findet man

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} - i \underbrace{\frac{y}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

und

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_c \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \int_c \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \int_c d \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \int_c * \omega^X \\ &= i \int_c * \omega^X = i \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

□

Definition 227. $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph* auf G , wenn für alle $z \in G$ das Differential $d_z f = D_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ \mathbb{C} -linear ist.

Satz 228. Sei $f = u + iv : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ eine C^∞ -Abbildung mit reellen u und v . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist holomorph.

(ii) Es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(iii) In allen $z_0 \in G$ ist f komplex differenzierbar, d.h. es existiert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

In diesem Fall ist $D_{z_0} f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch die Multiplikation mit der komplexen Zahl $f'(z_0)$.

Natürlich ist (iii) ein sehr effektives Kriterium für Holomorphie, weil es aussieht wie im Reellen und daher die Differenzierbarkeitsbeweise aus dem Reellen sich unmittelbar übertragen. So sind Polynome oder Potenzreihen in z holomorph.

Dagegen ist die komplexe Konjugation $f(z) := \bar{z}$ nicht holomorph: Die Abbildung f ist reell linear, also $D_{z_0} f = f : z \mapsto \bar{z}$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Aber $z \mapsto \bar{z}$ ist eben nicht komplex-linear.

Beweis des Satzes. Vorbemerkung. Eine \mathbb{C} -lineare Abbildung von \mathbb{C} in sich ist von der Form

$$z = x + iy \mapsto (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y),$$

wo $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ in sich ist von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Vergleich der beiden Formeln zeigt, dass die letztere Abbildung genau dann sogar \mathbb{C} -linear ist, wenn

$$a = \alpha = d, \quad b = -\beta = -c$$

gilt. Die Matrix von Df ist aber gerade die Funktionalmatrix

$$Df \cong \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die reelle Ableitung $D_{z_0} f$ an einer Stelle z_0 aus G ist also genau dann komplex-linear, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.

Nun zum eigentlichen Beweis:

Zu (i) \implies (ii). Klar nach Vorbemerkung.

Zu (ii) \implies (iii). f ist reell-differenzierbar und $D_{z_0} f$ komplex-linear, nämlich Multiplikation mit $m := \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$. Nach Definition der reellen Differenzierbarkeit gilt daher

$$f(z) = f(z_0) + m(z - z_0) + R(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{\|z - z_0\|} = 0.$$

Offenbar ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{\|z - z_0\|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{|z - z_0|} = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0.$$

Also folgt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - m = \frac{R(z)}{z - z_0} \rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow z_0.$$

Das ist aber (iii) mit $f'(z_0) = m$.

Zu (iii) \implies (i). Aus (iii) folgt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z) \text{ mit } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0.$$

Also ist $D_{z_0}f$ die Multiplikation mit $f'(z_0)$ und \mathbb{C} -linear. □

Satz 229 (Integralsatz von Cauchy). *Ist f holomorph in G und $C \in C_2(G)$, so gilt*

$$\int_{\partial C} f(z) dz = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} f(z) dz &= \int_{\partial C} (u dx - v dy) + i \int_{\partial C} (v dx + u dy) \\ &= \int_C (du \wedge dx - dv \wedge dy) + i \int_C (dv \wedge dx + du \wedge dy) \\ &= - \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Beachten Sie, dass nach unserer Generalvoraussetzung holomorphe Funktionen C^∞ sind. In der Funktionentheorie setzt man für die holomorphen Funktionen nur die *einmalige* komplexe Differenzierbarkeit voraus, nicht einmal die Stetigkeit der Ableitung. Der Cauchysche Integralsatz gilt dann immer noch, der Beweis wird aber schwieriger und lässt sich nicht einfach auf den Stokes zurückführen.

Dieser unscheinbare Satz ist das Herz der komplexen Funktionentheorie mit phantastischen Folgen. Zum Beispiel dieser:

Satz 230 (Integralformel von Cauchy). *Ist f holomorph auf einer offenen Umgebung G des abgeschlossenen Kreises K und ist c der positiv durchlaufene Rand von K , so gilt für alle $z_0 \in K^\circ$*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Die Werte von f auf dem Rand des Kreises bestimmen also alle Funktionswerte im Inneren!

Beweis. Seien R der Radius und a der Mittelpunkt von K . Dann ist also

$$c : I \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + Re^{2\pi i t}$$

eine positiv orientierte Parametrisierung des Kreisrandes.

Sei weiter $0 < \epsilon < R - |z_0 - a|$.

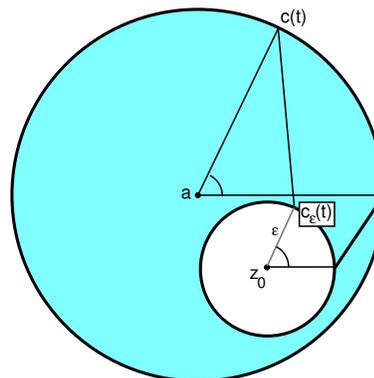
Der abgeschlossene ϵ -Kreis um z_0 liegt also in $\overset{\circ}{K}$.

Wir definieren nun ein zweidimensionales C^∞ -Intervall

$$C_\epsilon \in I_2(G \setminus \{z_0\})$$

durch

$$\begin{aligned} c_\epsilon(t) &:= z_0 + \epsilon e^{2\pi i t} \\ C_\epsilon(s, t) &:= (1-s)c_\epsilon(t) + s c(t). \end{aligned}$$



Überlegen Sie, dass nach Konstruktion z_0 nicht im Bild von C liegt!

Dafür gilt

$$\partial C_\epsilon = \underbrace{(a + R e^{2\pi i t})}_c - \underbrace{(z_0 + \epsilon e^{2\pi i t})}_{=: c_\epsilon}.$$

Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt daher

$$\int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{c_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

weil der Integrand in $G \setminus \{z_0\}$ holomorph ist.

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \int_{c_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_0^1 \frac{f(z_0 + \epsilon e^{2\pi i t})}{\epsilon e^{2\pi i t}} 2\pi i \epsilon e^{2\pi i t} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 f(z_0 + \epsilon e^{2\pi i t}) dt \rightarrow 2\pi i f(z_0) \text{ für } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Aus dem Satz 44 über die Differentiation unter dem Integral (trivial erweitert auf komplexwertige Funktionen) folgt, dass zum Beispiel für stetiges f die Funktion

$$z_0 \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

nach x und y beliebig oft partiell differenzierbar, also C^∞ , ist.

Im Beweis der Cauchyschen Integralformel haben wir neben dem Cauchyschen Integralsatz explizit nur die Stetigkeit von f verwendet. Wenn man den Integralsatz ohne die C^∞ -Voraussetzung bewiesen hat, folgt aus der Cauchyschen Integralformel also, dass Funktionen, die auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$ einmal komplex differenzierbar sind, immer beliebig oft differenzierbar sind. Ja sie besitzen lokal sogar immer eine konvergente Taylorreihe. Darum ist die Theorie komplex differenzierbarer Funktionen, die sogenannte *Funktionentheorie* oder *komplexe Analysis*, sehr anders als die reell differenzierbarer Funktionen.

Als Anwendung beweisen wir noch den

Satz 231 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat mindestens eine Nullstelle. (Mit Polynomdivision folgt daraus sogar die Existenz von n Nullstellen, wenn das Polynom vom Grad n ist.)*

Beweis. Sei $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. (O.E. kann man den höchsten Koeffizienten auf 1 normieren.) Dann gilt

$$|p(z)| = |z|^n \left| 1 + \underbrace{\frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}_{\rightarrow 0 \text{ für } |z| \rightarrow \infty} \right|.$$

Also gibt es ein $r_0 > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r_0$ gilt

$$|p(z)| \geq \frac{|z|^n}{2}.$$

Nun nehmen wir an, dass p keine Nullstelle hat. Dann ist $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ eine holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} . Aus der Cauchyschen Integralformel angewendet auf den Kreis c_r vom Radius $r > r_0$ folgt

$$\begin{aligned} |f(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r} \frac{f(z)}{z} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi i t})}{re^{2\pi i t}} 2\pi i r e^{2\pi i t} dt \right| \\ &\stackrel{(65)}{\leq} \int_0^1 |f(re^{2\pi i t})| dt \leq \int_0^1 \frac{2}{r^n} dt = \frac{2}{r^n}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $f(0) = \frac{1}{p(0)} = 0$. Widerspruch!

□

10 Anhang

10.1 Sternförmige Mengen

Bis auf die Vorbemerkungen stammt dieser Abschnitt von Stefan Born.

Das Lemma von Poincaré in der von uns bewiesenen Form besagt, dass in der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ jede geschlossene Differentialform ein Potential besitzt, **wenn G diffeomorph zum \mathbb{R}^n ist**. In der Literatur finden Sie diese Behauptung oft unter der Voraussetzung bewiesen, dass G **sternförmig** bezüglich eines Punktes $p \in G$ ist, was bedeutet, dass p mit jedem anderen Punkt von G durch eine Strecke in G verbunden ist. “Unser” Beweis, der dem Buch von Bott und Tu folgt, ist geringfügig einfacher zu formulieren als der Beweis für den sternförmigen Fall, liefert gleichzeitig aber die nützliche Information, dass $H^k(G) \cong H^k(G \times \mathbb{R})$. In den praktischen Anwendungen ist die Diffeomorphie zum \mathbb{R}^n genauso leicht zu zeigen, wie die Sternförmigkeit. Es bleibt jedoch die Frage, ob die Version für sternförmige Mengen allgemeiner ist, denn offenbar ist ja der \mathbb{R}^n sternförmig. Die Frage ist, ob umgekehrt jede sternförmige offene Menge des \mathbb{R}^n diffeomorph zum \mathbb{R}^n ist.

Beispiel 232. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich 0. Sei $U_\epsilon(0) \subset G$ und $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone C^∞ -Funktion mit

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 1 & \text{für } t \geq \epsilon. \end{cases}$$

Wir bezeichnen für $x \in G \setminus \{0\}$ mit $d(x)$ den “Randabstand” in Richtung von x , also

$$d(x) := \sup \left\{ t \mid t \frac{x}{\|x\|} \in G \right\}$$

und definieren $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$f(x) := \left(1 + \tan \left(\frac{\phi(\|x\|)\|x\|}{d(x)} \frac{\pi}{2} \right) \right) x.$$

Die Funktion ϕ dient vor allem dazu, die Singularität von $d(x)$ in 0 zu entschärfen. Wenn $d(x)$ auf $G \setminus \{0\}$ eine C^∞ -Funktion ist, so ist f ein Diffeomorphismus von G auf den \mathbb{R}^n , und wir haben unser Ziel erreicht. Sie finden aber leicht Beispiele, bei denen die Funktion d nicht einmal stetig ist, und dann schlägt diese Konstruktion fehl.

□

Dennoch ist es richtig, dass jede sternförmige offene Menge des \mathbb{R}^n diffeomorph zum \mathbb{R}^n ist, wie die folgenden Ausführungen von **Stefan Born** zeigen. Ich kenne dafür sonst keinen Beweis in der Literatur.

Definition 233 (Halbstetigkeit). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *von unten halbstetig*, wenn für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $y \in U_\delta$ gilt: $f(y) > f(x) - \epsilon$.

Lemma 234. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine von unten halbstetige, nach unten durch $s > 0$ beschränkte Funktion. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge stetiger, nach unten durch s beschränkter Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen f konvergiert.

Beweis. Definiere $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \inf \{ f(p) + nd(x, p) \mid p \in X \}.$$

Aus der Definition folgt unmittelbar $s \leq f_n \leq f$ und $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien nun $x, y \in X$, und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $p \in X$, so dass

$$f_n(x) \geq f(p) + nd(x, p) - \epsilon.$$

Außerdem gilt nach Definition

$$f_n(y) \leq f(p) + nd(y, p).$$

Somit

$$f_n(y) - f_n(x) \leq nd(y, p) - nd(x, p) + \epsilon \leq nd(x, y) + \epsilon.$$

Da das für jedes $\epsilon > 0$ und mit vertauschten Rollen von x und y gilt, folgt

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq nd(x, y).$$

Daher ist f_n Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante n und insbesondere stetig. (Die für normierte Räume gegebene Definition von Lipschitz-Stetigkeit erweitert sich ohne weiteres auf metrische Räume.)

Es bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Sei $x \in X, \epsilon > 0$. Dann gibt es, da f in x von unten halbstetig ist, ein $\delta > 0$, so dass

$$d(x, y) < \delta \implies f(y) \geq f(x) - \epsilon.$$

Wähle n so, dass $n\delta > f(x) - \epsilon$. Sei nun $p \in X$ beliebig. Falls $d(p, x) < \delta$, gilt

$$f(p) + nd(x, p) \geq f(p) > f(x) - \epsilon.$$

Für $d(p, x) \geq \delta$ gilt aber

$$f(p) + nd(x, p) \geq f(p) + n\delta \geq n\delta \geq f(x) - \epsilon.$$

Somit gilt also $f(x) \geq \dots \geq f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq f(x) - \epsilon$, d.h. f_n konvergiert punktweise gegen f . □

Bemerkung: Wir haben jetzt also für jeden metrischen Raum bewiesen, dass eine von unten halbstetige Funktion sich von unten monoton durch Lipschitz-stetige Funktionen f_n approximieren lässt, und zwar so, dass die Lipschitz-Konstante von f_n gerade n ist. Man kann sich das genauer ansehen und sieht, dass für eine Lipschitz-stetige Funktion f mit Lipschitz-Konstante L die Funktionen f_n mit f identisch sind, sobald $n > L$.

Lemma 235. *Sei M eine kompakte (möglicherweise berandete) (Unter-) Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine C^∞ -Funktion g mit $\|f(x) - g(x)\|_\infty < \epsilon$ für alle $x \in M$ (d.h. f lässt sich durch glatte Funktionen gleichmäßig approximieren.)*

Beweis. Für jedes $x \in M$ gibt es eine in M offene Umgebung U_x , so dass $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ für alle $y \in U_x$. Diese U_x überdecken M , und es gibt eine endliche Teilüberdeckung durch $U_{x_j}, j = 1, \dots, l$. Nach dem Satz über die Zerlegung der Eins gibt es eine subordinierte glatte Zerlegung der Eins $\lambda_i, i = 1, \dots, m$. Die λ_i sind also C^∞ , nichtnegativ, addieren sich zu Eins und $\text{supp}(\lambda_i) \subset U_{x_{j_i}}$. Nun liefert

$$g := \sum_{i=1}^m f(x_{j_i}) \lambda_i$$

das Gewünschte. □

Lemma 236. Sei M eine kompakte (möglicherweise berandete) (Unter-) Mannigfaltigkeit mit der (vom umgebenden Raum geerbten) Metrik d und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine von unten halbstetige, nach unten durch $s > 0$ beschränkte Funktion. Dann gibt es eine nach unten durch $s/2$ beschränkte, punktweise streng monoton wachsende Folge von C^∞ -Funktionen $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen f konvergiert, und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n(n+1)}$.

Beweis. Wir wissen schon, dass es eine monoton wachsende, nach unten durch s beschränkte, gegen f konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ gibt. Wir betrachten nun $g_n := f_n - 1/n$. Wählen wir $N > 4/s$, so können wir für alle $n \geq N$ feststellen $g_n > 3s/4$. Außerdem gilt

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Nun gibt es dem letzten Lemma zufolge für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine C^∞ -Funktion h_n mit

$$\|g_n - h_n\|_\infty < \frac{1}{4n(n+1)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &\geq g_{n+1}(x) - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} - g_n(x) + \frac{1}{4n(n+1)} \\ &\geq \frac{1}{n(n+1)} - 2 \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle $n \geq N$

$$h_n > \frac{3s}{4} - \frac{1}{4n(n+1)} > \frac{3s}{4} - \frac{1}{n} > \frac{3s}{4} - \frac{s}{4} = \frac{s}{2}.$$

Die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ benennen wir jetzt um in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Folge hat alle gewünschten Eigenschaften. \square

Satz 237. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine sternförmige offene Menge. Dann ist C diffeomorph zu \mathbb{R}^n .

Beweis. Der Beweis ist etwas länglich. Wir nehmen o.E. an, dass C sternförmig bezüglich 0 ist. Der Plan des Beweises sieht nun so aus:

1. Zunächst führen einen Vorbereitungsschritt durch, indem wir einen Diffeomorphismus von \mathbb{R}^n auf $U_1(0)$ angeben, der die Sternförmigkeit bezüglich 0 erhält. Wir können also im Weiteren davon ausgehen, dass $C \subset U_1(0)$, und es genügt, die Diffeomorphie von C zu $U_1(0)$ nachzuweisen.

2. Sei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Wir definieren eine „Radiusfunktion“

$$f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sup \{ \lambda > 0 \mid \lambda x \in C \}.$$

3. Diese Funktion f ist nach unten durch ein $s > 0$ beschränkt und von unten halbstetig. Sie lässt sich also durch eine punktweise streng monoton wachsende Folge von C^∞ -Funktionen $f_n > s/2$ approximieren. Ersetze f_N durch die konstante Funktion $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto s/2$. Das entspricht einer Ausschöpfung von C durch sternförmige offene Mengen

$$C_n := \{tx \mid x \in S^{n-1}, 0 \leq t \leq f_n(x)\}, \quad n \geq N$$

mit glatten Rändern.

4. Das Ziel sieht nun so aus: Bilde durch radiale Verzerrung $U_{1-1/N}(0)$ auf C_N ab und für $n \geq N$ den „Ring“ $U_{1-1/(n+1)} \setminus U_{1-1/n}$ auf $C_{n+1} \setminus C_n$, so dass sich alles zu einem Diffeomorphismus $\Phi : U_1(0) \rightarrow C$ zusammenfügt. Zur Angabe der radialen Verzerrung der Ringe wählen wir streng monotone Funktionen $[1 - 1/n, 1 - 1/(n + 1)] \rightarrow [f_n(x), f_{n+1}(x)]$, $x \in S^{n-1}$, die in einer Umgebung der Randpunkte linear mit Steigung $1/2$ sind. Indem wir diese Funktionen in einer Weise wählen, die C^∞ von den Randpunkten $1 - 1/n$, $1 - 1/(n + 1)$, $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$ abhängt, bekommen wir an den Rändern zusammenpassende C^∞ -Diffeomorphismen der „Ringe“. Mit einer Hilfsfunktion $[0, 1 - 1/N] \rightarrow [0, s/2]$, die bei Null linear mit Steigung 1 und bei $1 - 1/N$ linear mit Steigung $1/2$ ist, bildet man $U_{1-1/N}$ glatt auf C_N ab, so dass die Abbildung am Rand ebenfalls passt.

Jetzt also zur Durchführung dieses Planes:

1. Sei $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine C^∞ -Funktion, die auf einer Umgebung der Null gleich der Identität ist, deren Ableitung überall größer als Null ist, und die $\lim_{s \rightarrow \infty} h(s) = 1$ erfüllt. (Man bastelt sich leicht eine solche Funktion.) h ist streng monoton und besitzt eine C^∞ -Umkehrfunktion mit $\lim_{s \nearrow 1} h^{-1}(s) = \infty$. Die Abbildungen

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1(0), \quad x \mapsto x \frac{h(\|x\|)}{\|x\|}$$

und

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1(0), \quad x \mapsto x \frac{h^{-1}(\|x\|)}{\|x\|}$$

sind invers zueinander. Sie sind in einer Umgebung der 0 gleich der Identität. In allen anderen Stellen ist $x \mapsto \|x\|$ eine C^∞ -Funktion. Damit sind Φ und Ψ C^∞ -Diffeomorphismen. Die Abbildungen erhalten, da sie „radial“ sind, die Sternförmigkeit. Wir können also anstelle von C die Menge $\Phi(C)$ betrachten. Sei also im folgenden angenommen, dass $C \subset U_1(0)$.

2. Sei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Wir definieren eine „Radiusfunktion“

$$f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sup \{ \lambda > 0 \mid \lambda x \in C \}.$$

Wir stellen fest, dass $f(S^{n-1}) \subset [0, 1]$.

3. Da C offen ist, gibt es ein $s > 0$ so dass $U_s \subset C$, folglich ist $\inf f \geq s$. Weiter wird behauptet, dass f von unten halbstetig ist: Sei $x \in S^{n-1}$ und $\epsilon > 0$, dann gibt es ein $s > f(x) - \epsilon$, so dass $sx \in C$. Da C offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(sx) \subset C$. Ist nun $y \in S^{n-1}$ mit $\|x - y\| < \delta/s$, so gilt

$$\|sx - sy\| = s\|x - y\| < \frac{\delta}{s}s = \delta,$$

also $sy \in U_\delta(sx) \subset C$, daher $f(y) > s > f(x) - \epsilon$.

Nun wende ich das Lemma an und erhalte eine Folge glatter Funktionen f_n mit den dort angegebenen Eigenschaften. Wir ersetzen f_N durch die konstante Funktion $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto s/2$. Dann schöpfen die $C_n, n \geq N$ die Menge C durch glatt berandete sternförmige Mengen aus, und es gilt immer noch $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n(n+1)}$ für alle $n \geq N$.

4. Um nun den gewünschten Diffeomorphismus angeben zu können, brauchen wir zwei C^∞ -Hilfsfunktionen.

Die eine $g : [0, 1 - 1/N] \rightarrow [0, s/2]$ soll in einer Umgebung der 0 gleich der Identität sein, in einer Umgebung von $1 - 1/N$ gleich $x \mapsto 1/2(x - (1 - 1/N)) + s/2$ sein und eine überall positive Ableitung besitzen. Es ist klar, dass es so eine Funktion gibt.

Die zweite Hilfsfunktion ist mühsamer zu bekommen. Sei

$$M := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a < b, c < d, d - c > (b - a)/2\}.$$

Gesucht ist eine C^∞ Funktion $h : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- (a) $\partial_x h(x, a, b, c, d) > 0$
- (b) $h(\cdot, a, b, c, d)([a, b]) = [c, d]$
- (c) Zu jedem $a < b$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x < a + \delta$:

$$h(x, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(x - a) + c$$

und für $x > b - \delta$

$$h(x, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(x - b) + d.$$

Wir stellen zunächst fest, dass es eine C^∞ -Funktionen $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die monoton fällt, und für die gilt

$$\psi|_{]-\infty, \frac{1}{4}[} = 1, \quad \psi|_{] \frac{3}{4}, \infty]} = 0.$$

So eine Funktion kann man leicht angeben. Nun setzen wir

$$h(x, a, b, c, d) = \left(\frac{1}{2}(x - a) + c\right) \psi\left(\frac{x - a}{b - a}\right) + \left(\frac{1}{2}(x - b) + d\right) \left(1 - \psi\left(\frac{x - a}{b - a}\right)\right).$$

Die dritte Eigenschaft ist erfüllt für $\delta = \frac{b-a}{4}$. Außerdem gelten $h(a, a, b, c, d) = c$ und $h(b, a, b, c, d) = d$. Wenn wir die erste Eigenschaft und damit die Monotonie bewiesen haben, folgt die zweite. Wir müssen die erste für $x \in]a, b[$ zeigen:

$$\partial_x h(x, a, b, c, d) = \dots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}(b - a) - (d - c)\right) \frac{1}{b - a} \psi'\left(\frac{x - a}{b - a}\right).$$

Da $(a, b, c, d) \in M$, ist $1/2(b - a) - (d - c) \leq 0$. Außerdem ist $\psi' \leq 0$, so dass folgt $\partial_x h(x, a, b, c, d) \geq 1/2 > 0$. Jetzt sind wir endlich so weit, Φ definieren zu können.

Setze für $x \in U_{1-1/(n+1)} \setminus U_{1-1/n}$, $n \geq N$

$$\Phi(x) := \frac{x}{\|x\|} h\left(\|x\|, 1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}, f_n(x), f_{n+1}(x)\right)$$

und für $x \in U_{1-1/N}$ setze

$$\Phi(x) := \frac{x}{\|x\|} g(\|x\|).$$

Φ ist gleich der Identität in einer Umgebung der Null, also dort C^∞ und insbesondere differenzierbar mit umkehrbarem Differential. Im Inneren (d.h. im offenen Kern) der „Ringe“ $U_{1-1/(n+1)} \setminus U_{1-1/n}$ ist ΦC^∞ . In Polarkoordinaten (d.h. wenn wir $\Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi$ betrachten mit der Polarkoordinatenabbildung Ψ) sieht die Jacobimatrix so aus:

$$\begin{pmatrix} \partial_x h & * \\ * & E_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist regulär, da $\partial_x h > 0$. Bleiben noch die problematischen Mengen $\partial U_{1-1/n} =: S_{1-1/n}$. Für jedes $n \geq N$ gibt es eine offene Teilmenge U des \mathbb{R}^n , so dass $S_{1-1/n} \subset U$ und für alle $x \in U$ ist

$$\Phi(x) = \frac{x}{\|x\|} \left(\frac{1}{2} \left(\|x\| - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) + f_n(x) \right),$$

daher ist Φ auch dort C^∞ mit invertierbarer Ableitung (Jacobi-Matrix in Polarkoordinaten wie oben, nur mit $1/2$ als oberem linken Eintrag). Φ ist also überall C^∞ mit invertierbarer Ableitung.

Nach Konstruktion bildet die Abbildung Ursprungsgeraden in sich ab und ist dort injektiv, also ist sie überhaupt injektiv. Φ ist aber auch surjektiv, da

$$\bigcup_{x \in S^{n-1}} [0, f(x)[x = C$$

und $[0, f(x)[\subset \Phi(U_1(0))$.

Daher besitzt Φ eine Umkehrfunktion, die nach dem Umkehrsatz differenzierbar ist. Diese Umkehrfunktion ist sogar C^∞ .

□

10.2 Homotopie und Homologie von Wegen

Definition 238. Sei $G \subset V$ offen.

- (i) Zwei Wege $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow G$ mit gleichem Anfangspunkt $c_0(a) = c_1(a)$ und gleichem Endpunkt $c_0(b) = c_1(b)$ heißen *in G homotop*, wenn es eine Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$$

gibt, für die gilt:

- Für alle $t \in [a, b]$ ist

$$H(t, 0) = c_0(t), \quad H(t, 1) = c_1(t).$$

- Für alle $s \in [0, 1]$ ist $c_s := H(\cdot, s)$ ein Weg von $c_0(a)$ nach $c_0(b)$.

Die Abbildung H heißt in diesem Fall eine *Homotopie* zwischen c_0 und c_1 .

Bemerkung. Wir setzen alle Abbildungen c_0, c_1 und H als C^∞ -Abbildungen voraus. Oft finden Sie diese Definition auch für (nur) stetige Abbildungen.

- (ii) Ein geschlossener Weg $c : [a, b] \rightarrow G$ heißt *in G nullhomotop*, wenn es eine C^∞ -Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$ gibt, so dass gilt:

- H deformiert c in einen konstanten Weg:

$$H(\cdot, 0) = c, \quad H(\cdot, 1) \text{ konstant.}$$

- Die Wege $H(\cdot, s) = c_s$ sind alle geschlossen:

$$H(a, s) = H(b, s) \text{ für alle } s \in [0, 1].$$

Bemerkung. Wir bestehen nicht darauf, dass dabei der Punkt $H(a, s) = H(b, s)$ fest bleibt. Allerdings macht es keinen Unterschied, ob man das verlangt oder nicht.

- (iii) Zwei k -Ketten $C_0, C_1 \in C_k(G)$ heißen *in G homolog*, wenn gilt

$$\partial C_1 = \partial C_0 \text{ und} \tag{68}$$

$$\text{es gibt eine } (k+1)\text{-Kette } \underline{H} \in C_{k+1}(G) \text{ mit } \partial H = C_1 - C_0 + C_{deg}, \tag{69}$$

wobei C_{deg} eine degenerierte k -Kette ist, d.h. eine ganzzahlige formale Linearkombination von Intervallen $c : I^k \rightarrow G$, deren Differential nirgends injektiv ist. Beachte, dass das Integral jeder k -Form über eine degenerierte k -Kette verschwindet.

Bemerkung. Man kann diese Definition auch ohne " C_{deg} " machen und erhält dann einen *anderen* Homologiebegriff.

- (iv) Ketten, die homolog zu einem konstanten C^∞ -Intervall sind, heißen *nullhomolog*.

Beispiel 239. Wir betrachten zwei homotope Wege $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow G$ mit gleichem Anfangspunkt $c_0(a) = c_1(a)$ und gleichem Endpunkt $c_0(b) = c_1(b)$. Sei $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$ eine Homotopie zwischen ihnen.

Wir betrachten die umparametrisierten Wege

$$\tilde{c}_i(t) := c_i(a + t(b - a)), \quad t \in [0, 1]$$

und

$$\tilde{H}(t, s) = H(a + t(b - a), s), \quad (t, s) \in [0, 1]^2.$$

Dann ist $\tilde{H} \in C_2(G)$ und

$$\partial\tilde{H} = \tilde{H}(\cdot, 1) - \tilde{H}(\cdot, 0) - \tilde{H}(1, \cdot) + \tilde{H}(0, \cdot) = \tilde{c}_1 - \tilde{c}_0 - \kappa_{\tilde{c}_0(b)} + \kappa_{\tilde{c}_0(a)}.$$

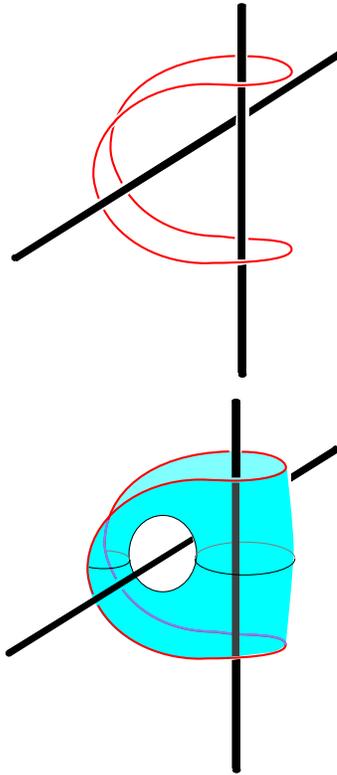
Also sind \tilde{c}_0 und \tilde{c}_1 in G homolog. In leichter Verallgemeinerung der obigen Definition nennen wir zwei Wege c_0 und c_1 auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten *homolog*, wenn die wie oben umparametrisierten Wege homolog sind. Dann kann man das Ergebnis dieses Beispiels formulieren als:

Homotope Wege sind homolog.

Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. □

Beispiel 240 (Zum Nachdenken). Hier skizziere ich ein Beispiel für einen Weg, der nullhomolog, aber nicht nullhomotop ist.

Im \mathbb{R}^3 betrachten wir das Komplement G von zwei Geraden und darin den skizzierten geschlossenen Weg. Nach etwas Probieren mit einem Gummiband ist man überzeugt, dass sich dieser Weg nicht in G auf einen Punkt zusammenziehen läßt, d.h. dass er nicht nullhomotop ist. Das ist aber schwer zu beweisen.



In diesen Weg kann man nun eine Fläche einspannen, die von dem Weg berandet wird. Allerdings ist diese Fläche keine Kreisscheibe, sondern ein Stück von einer Torusfläche. Es ist dann nicht so schwer, auf dieser Fläche eine 2-Kette zu konstruieren, deren Rand der “gestückelte” vorgegebene Weg ist. Schließlich überlegt man sich, dass der “gestückelte” Weg homolog zum Originalweg ist. □

Beispiel 241 (Homologe Wege und geschlossene Formen). Sind $c_0, c_1 : I \rightarrow G$ in G homologe Wege, so gibt es also ein $C_2(G)$ mit

$$c_1 - c_0 = \partial C - C_{deg}.$$

Weil die degenerierten Wege zum Integral nicht beitragen, gilt also für jede 1-Form ω

$$\int_{c_1} \omega - \int_{c_0} \omega = \int_{\partial C} \omega$$

und für jede *geschlossene* 1-Form ω

$$0 = \int_H d\omega = \int_{c_0} \omega - \int_{c_1} \omega,$$

also

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega.$$

Das gilt wegen der Parameterinvarianz der Integrale dann auch für homologe und erst recht für homotope Wege auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$.

Das Integral einer geschlossenen 1-Form ist eine *Homologieinvariante* und deshalb erst recht eine *Homotopieinvariante*.

Benutzen Sie das für einen exakten Beweis, dass der Kreis $c(t) := (\cos t, \sin t)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ sich in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

□

Potentiale von 1-Formen

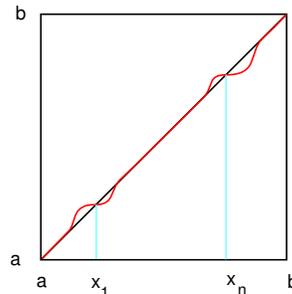
Definition 242. Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $\omega \in \Omega^1(G)$. Das Integral von ω heißt *wegunabhängig*, wenn gilt: Für je zwei C^∞ -Wege $c : [a, b] \rightarrow G$ und $\tilde{c} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow G$ mit

$$c(a) = \tilde{c}(\tilde{a}) \text{ und } c(b) = \tilde{c}(\tilde{b})$$

ist

$$\int_c \omega = \int_{\tilde{c}} \omega.$$

Bemerkung. Man kann jeden *stückweise* C^∞ -Weg zu einem C^∞ -Weg umparametrisieren, wobei sich das Integral wegen der Substitutionsregel nicht ändert. Für die Umparametrisierung benutzt man auf dem Intervall $[a, b]$ eine C^∞ -Parametertransformation $\rho : [a, b] \rightarrow [a, b]$, die in der Nähe eines jeden Stückelungspunktes x_i konstant ist. Ein solches ρ findet man mittels Buckelfunktionen, vgl. Analysis I.



Das hat zur Folge, dass Wegunabhängigkeit gegenüber stückweise C^∞ -Kurven gleichbedeutend mit Wegunabhängigkeit gegenüber "echten" C^∞ -Kurven ist.

Satz 243 (Konstruktion von Potentialen). Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, nicht-leere wegzusammenhängende Menge und $\omega \in \Omega^1(G)$. Das Integral von ω sei wegunabhängig. Sei p ein fester Punkt in G . Wähle zu jedem x einen stückweise C^∞ -Weg $c : [a, b] \rightarrow G$ von $p = c(a)$ nach $x = c(b)$ und definiere

$$\phi(x) := \int_c \omega.$$

Dann ist ϕ nach Voraussetzung wohldefiniert. Es ist eine C^∞ -Funktion und ein Potential von ω .

Beweis. Sei $x_0 \in G$ und $c : [a, b] \rightarrow G$ ein C^∞ -Weg von p nach x_0 . Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Setze $c(t) := x_0 + (t - b)\mathbf{e}_i$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $c(t) \in G$ für $b \leq t < b + \epsilon$ und

$$\phi(x_0 + (t - b)\mathbf{e}_i) = \int_{c_{[a, b+\epsilon]}} \omega = \int_{c_{[a, b]}} \omega + \int_{c_{[b, b+\epsilon]}} \omega = \phi(x_0) + \int_b^{b+\epsilon} \omega_{x_0 + (\tau - b)\mathbf{e}_i}(\mathbf{e}_i) d\tau.$$

Daher existiert

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_0) = \omega_{x_0}(\mathbf{e}_i)$$

und ist offenbar stetig. Also ist ϕ differenzierbar mit $d\phi = \omega$. Dann ist ϕ aber sogar C^∞ . \square

Beispiel 244. In der Praxis kann man die Bestimmung eines Potentials durch Integration oft im Kopf durchführen. Die Form

$$\omega = 2xy \, dx + (x^2 + 3z) \, dy + (3y + \cos z) \, dz$$

ist geschlossen auf dem \mathbb{R}^3 (nachrechnen!). Also besitzt sie nach dem Poincaréschen Lemma ein Potential, das man schrittweise so findet:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= x^2 y + \beta(y, z) \\ &= x^2 y + 3yz + \gamma(z) \\ &= x^2 y + 3yz + \sin z. \end{aligned}$$

\square

Korollar 245. Sei $\omega \in \Omega^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Das Integral von ω ist wegunabhängig.
- (ii) ω besitzt ein Potential.
- (iii) Für alle $C_1, C_2 \in C_1(G)$ gilt

$$\partial C_1 = \partial C_2 \implies \int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega.$$

- (iv) Für alle $C \in C_1(G)$ gilt

$$\partial C = 0 \implies \int_C \omega = 0.$$

- (v) Für jede geschlossene Kurve $c : [a, b] \rightarrow G$ gilt

$$\int_c \omega = 0.$$

Für das Integral über geschlossenes c schreibt man suggestiv auch $\oint_c \omega$.

Beweis. Selbst. \square

Definition 246. Eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Jeder geschlossene Weg in G ist in G nullhomotop.
- (ii) Je zwei Wege in G mit gleichen Anfangs- und gleichem Endpunkt sind in G homotop.

Die Implikation (i) \implies (ii) benutzt die C^∞ -Umparametrisierung des geschlossenen Weges, der von zwei Wegen mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt gebildet wird.

Korollar 247. Für alle $n \geq 3$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend. Daher besitzt jede geschlossene 1-Form ein Potential:

$$H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0 \text{ für } n \geq 3.$$

Nach Abschnitt 9.4 war hingegen $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$.

Beweis. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein geschlossener C^∞ -Weg. Der Doppelkegel

$$\{sc(t) \mid s \in \mathbb{R}, t \in [a, b]\}$$

hat eine „Dimension“ $2 < n$ und ist deshalb $\neq \mathbb{R}^n$.

Beweis: Das Differential der Abbildung

$$[a, b] \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, s_1, \dots, s_{n-1}) = s_1 c(t)$$

hat überall $\text{Rang} \leq 2 < n$. Deshalb ist ihr Bild gleich der Menge ihrer kritischen Werte und nach dem Lemma von Sard eine Nullmenge.

Wähle ein $p \in \mathbb{R}^n$, das nicht auf diesem Kegel liegt. Dann definiert

$$H(t, s) := (1 - s)c(t) + sp$$

eine Homotopie in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von c in die konstante Abbildung vom Wert p . □

10.3 Klassische Integralsätze

10.3.1 Der Hodge-*-Operator

Neben dem äußeren Produkt gibt es eine weitere wichtige algebraische Operation, die wir jetzt beschreiben wollen. Wir betrachten zunächst wieder alternierende k -Formen. Die Operation überträgt sich dann problemlos wertweise auf Differentialformen.

Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum.

Wegen $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ist

$$\Lambda^k V^{**} \cong \Lambda^{n-k} V^{**}.$$

Eine einfache Methode, einen solchen Isomorphismus explizit hinzuschreiben, ist die folgende. Man wähle eine Basis von V und die dazu duale Basis $(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Zum Basisvektor

$$\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

von $\Lambda^k V^{**}$ gibt es eindeutig bestimmte $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n$, so dass

$$\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}.$$

Wir definieren dann eine lineare Abbildung $h : \Lambda^k V^{**} \rightarrow \Lambda^{n-k} V^{**}$ durch

$$h(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}) := \pm \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-k}}.$$

Die Vorzeichen können wir beliebig wählen, zum Beispiel stets $+$. Wir wählen aber stattdessen

$$\epsilon_{i_1, \dots, i_k} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1, \dots, k, k+1, \dots, n \\ i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k} \end{pmatrix}$$

Diese Konstruktion hängt von der gewählten Basis von V ab. Andere Basen liefern in der Regel andere Isomorphismen h .

Ist aber $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein *orientierter Euklidischer Vektorraum*, und verwendet man nur *positiv-orientierte ON-Basen*, so hängt h nicht von der Basiswahl ab. Um das zu zeigen, geben wir zunächst eine andere Definition des Isomorphismus. Sei also $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wie angegeben.

Lemma 248 (und Definition). *Es gibt genau ein $\mu \in \Lambda^n V^{**}$ mit*

$$\mu(e_1, \dots, e_n) = 1$$

für jede positiv-orientierte ON-Basis. μ heißt die Volumenform von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Beweis. Ist (e_1, \dots, e_n) eine positiv orientierte ON-Basis, so gibt es, weil $\dim \Lambda^n V^{**} = 1$, genau ein $\mu \in \Lambda^n V^{**}$, welches die Gleichung für *diese* Basis erfüllt. Weil aber

$$\mu(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det(f) \mu(e_1, \dots, e_n)$$

ist, gilt die dann auch für alle andern positiv-orientierten ON-Basen. \square

Definition 249 (Hodgeoperator, *-Operator). Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein n -dimensionaler orientierter Euklidischer Vektorraum mit Volumenform μ . Für $v \in V$ sei $\omega^v := \langle \cdot, v \rangle$. Dann definieren wir für jedes k den Hodgeoperator

$$* : \Lambda^k V^{**} \rightarrow \Lambda^{n-k} V^{**}$$

durch

$$*\omega(v_1, \dots, v_{n-k})\mu := \omega \wedge \omega^{v_1} \wedge \dots \wedge \omega^{v_{n-k}}. \quad (70)$$

Insbesondere ist

$$*1 = \mu, \quad *\mu = 1.$$

Beachten Sie, dass wir für diese Definition zwar die Orientierung und das Skalarprodukt, aber keine Basis benötigt haben.¹²

Den Zusammenhang mit dem oben definierten Isomorphismus h gibt das folgende

Lemma 250. *Seien (e_1, \dots, e_n) eine positiv-orientierte Orthonormalbasis und $\omega_1, \dots, \omega_n$ die duale Basis. Seien $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ und $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n$ mit $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$. Dann gilt*

$$*(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}) = \epsilon_{i_1 \dots i_k} \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-k}}.$$

Dabei ist das Vorzeichen $\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \pm 1$ gegeben durch¹³

$$\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 \dots i_k & j_1 \dots j_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Bis auf das Vorzeichen ist also $*(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})$ gerade das äußere Produkt der komplementären Basisformen.

Beweis. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} *(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})(v_1, \dots, v_{n-k}) &= (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \wedge \omega^{v_1} \wedge \dots \wedge \omega^{v_{n-k}})(e_1, \dots, e_n) \\ &= \epsilon (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \wedge \omega^{v_1} \wedge \dots \wedge \omega^{v_{n-k}})(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}}) \end{aligned}$$

mit $\epsilon = \epsilon_{i_1 \dots i_k}$. Rechnet man die rechte Seite mit der Determinantenformel (45) aus Satz 157 aus, so erhält man

$$\begin{aligned} &*(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})(v_1, \dots, v_{n-k}) \\ &= \epsilon \det \begin{pmatrix} \omega_{i_1}(e_{i_1}) & \dots & \omega_{i_1}(e_{i_k}) & \omega_{i_1}(e_{j_1}) & \dots & \omega_{i_1}(e_{j_{n-k}}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{i_k}(e_{i_1}) & \dots & \omega_{i_k}(e_{i_k}) & \omega_{i_k}(e_{j_1}) & \dots & \omega_{i_k}(e_{j_{n-k}}) \\ \omega^{v_1}(e_{i_1}) & \dots & \omega^{v_1}(e_{i_k}) & \omega^{v_1}(e_{j_1}) & \dots & \omega^{v_1}(e_{j_{n-k}}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{v_{n-k}}(e_{i_1}) & \dots & \omega^{v_{n-k}}(e_{i_k}) & \omega^{v_{n-k}}(e_{j_1}) & \dots & \omega^{v_{n-k}}(e_{j_{n-k}}) \end{pmatrix} \\ &= \epsilon \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \omega^{v_1}(e_{i_1}) & \dots & \omega^{v_1}(e_{i_k}) & \omega^{v_1}(e_{j_1}) & \dots & \omega^{v_1}(e_{j_{n-k}}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{v_{n-k}}(e_{i_1}) & \dots & \omega^{v_{n-k}}(e_{i_k}) & \omega^{v_{n-k}}(e_{j_1}) & \dots & \omega^{v_{n-k}}(e_{j_{n-k}}) \end{pmatrix} \\ &= \epsilon \det(\omega^{v_\rho}(e_{j_\sigma})) \\ &= \epsilon \det(\langle v_\rho, e_{j_\sigma} \rangle) \\ &= \epsilon \det(\omega_{j_\sigma}(v_\rho)) \\ &= \epsilon_{i_1 \dots i_k} (\omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-k}})(v_1, \dots, v_{n-k}). \end{aligned}$$

¹²Allgemeiner braucht man zur Definition des *-Operators kein positiv-definites Skalarprodukt, es genügt ein nicht-ausgeartetes vom Index ι . Dann steht in der Formel (70) rechts noch ein Faktor $(-1)^\iota$.

¹³Im nicht-positiven Fall ist $\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 \dots i_k & j_1 \dots j_{n-k} \end{pmatrix} \langle e_{i_1}, e_{i_1} \rangle \dots \langle e_{i_k}, e_{i_k} \rangle$.

□

Wir verzichten auf die explizite Definition des Hodgeoperators für Differentialformen, weil sie so selbstverständlich ist. Wir geben nur eine Version des letzten Lemmas für Differentialformen im \mathbb{R}^n .

Lemma 251. *Im \mathbb{R}^n mit dem kanonischen Skalarprodukt gilt*

$$*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \epsilon_{i_1 \dots i_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-k}}.$$

Dabei ist das Vorzeichen $\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \pm 1$ gegeben durch

$$\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 252. Im \mathbb{R}^3 und $\omega^u = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3$ gilt

$$*\omega^u = u_1 dx_2 \wedge dx_3 - u_2 dx_1 \wedge dx_3 + u_3 dx_1 \wedge dx_2$$

□

In der Physik gibt es wichtige Anwendungen mit nicht positiv-definitem Skalarprodukt. In der Relativitätstheorie und Elektrodynamik stehen Minkowskische Vektorräume im Vordergrund, in der Hamiltonschen Mechanik sind es symplektische Skalarprodukte. Wir schließen mit einem kleinen Beispiel im Minkowskiraum.

Beispiel 253. Im \mathbb{R}^4 mit dem *Minkowski-(oder Lorentz-)produkt*

$$\langle x, y \rangle_L = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} *dx_1 &= dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4, \\ *dx_4 &= -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} *(dx_1 \wedge dx_2) &= dx_3 \wedge dx_4, \\ *(dx_3 \wedge dx_4) &= -dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Im Euklidischen \mathbb{R}^4 stehen hier überall $+$ -Zeichen.

□

10.3.2 Klassische Differentialoperatoren und Integralsätze

Seien G offen $\subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(G, \mathbb{R})$ eine Funktion und $F = (F_1, \dots, F_n) \in C^\infty(G, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld.

Unter den klassischen Differentialoperatoren verstehen wir die folgenden:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &:= (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) \\ \operatorname{div} F &:= \partial_1 F_1 + \dots + \partial_n F_n \\ \Delta f &:= \operatorname{div} \operatorname{grad} f \\ \operatorname{rot} F &:= (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1), \quad \text{falls } n = 3. \end{aligned}$$

Sie spielen in vielen Anwendungen der Analysis in Physik und Ingenieurwissenschaften eine wichtige Rolle. Wir zeigen in diesem Abschnitt, wie sie sich in das Konzept der Differentialformen einordnen lassen.

Satz 254. *Im Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:*

(i) $\omega^{\operatorname{grad} f} = df.$

(ii) $\operatorname{div} F = *d * \omega^F.$

(iii) $\Delta f = *d * df.$

(iv) Für $n = 3$ ist $\omega^{\operatorname{rot} F} = *d\omega^F$

Beweis. Die Beweise erfolgen durch Einsetzen der Definitionen. Wir zeigen nur eine Gleichung:

Zu (ii). Es ist

$$\begin{aligned} *d * \omega^F &= *d * \sum_{i=1}^n F_i dx_i \\ &= *d \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= * \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= * \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (-1)^{i-1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= * \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= * \operatorname{div} F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \operatorname{div} F. \end{aligned}$$

□

Beispiel 255. Die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E + \dot{B} &= 0 & \operatorname{rot} B - c^{-2} \dot{E} &= \mu_0 J \\ \operatorname{div} B &= 0 & \operatorname{div} E &= \rho \mu_0 c^2. \end{aligned} \quad (71)$$

Das sind Gleichungen für Vektorfelder E, B, J im \mathbb{R}^3 , die überdies aber von der Zeit t abhängen. Der Punkt bezeichnet die Ableitung nach der Zeit. Die Größen c, ρ und μ_0 sind Konstanten.

Wir betrachten nun den $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ mit dem Minkowskiprodukt, vgl. Beispiel 253. Wir fassen die Zeit als vierte Koordinate auf: $t = x_4$, und definieren die elektromagnetische Feldform und die Viererstromform

$$F := c * \omega^B + \omega^E \wedge dx_4, \quad \Gamma := \omega^J - c \rho dx_4,$$

wobei $*\omega^B$ etc. im \mathbb{R}^3 gebildet und in den \mathbb{R}^4 eingebettet werden. Dann schreiben sich die Maxwell'schen Gleichungen mit dem $*$ -Operator von $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ als

$$dF = 0, \quad *d*F + \mu_0 c \Gamma = 0.$$

Das ist nicht nur einfacher als (71), sondern auch offensichtlich relativistisch invariant: Lineare Abbildungen $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, die das obige Skalarprodukt und die Orientierung erhalten, heißen (eigentliche) Lorentztransformationen. Für sie gilt

$$*(T^*\omega) = T^*(*\omega).$$

Ist also F eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen, so ist auch T^*F eine solche zur transformierten Viererstromform $T^*\Gamma$.

□

Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein orientierter Vektorraum mit nicht-degeneriertem Skalarprodukt, so kann man unter Verwendung des Isomorphismus $v \mapsto \omega^v$ die klassischen Differentialoperatoren verallgemeinern.

Definition 256 (Nicht-Euklidische Vektorräume). Sind $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein orientierter Vektorraum mit nicht-degeneriertem Skalarprodukt vom Index ι und $G \subset V$ offen, so definieren wir

- (i) den Gradienten $\operatorname{grad} f$ von $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\omega^{\operatorname{grad} f} = df,$$

- (ii) die Divergenz von $F : G \rightarrow V$ durch

$$\operatorname{div} F = (-1)^\iota * d * \omega^F.$$

Weiter definiert man das Kodifferential $\delta : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^{k-1}(G)$ und den Laplaceoperator $\Delta : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^k(G)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta &:= (-1)^{\iota+n(k-1)} * d * : \Omega^k(G) \rightarrow \\ &OOk - 1G. \\ \Delta &:= d\delta + \delta d : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^k(G). \end{aligned}$$

Beispiel 257. Im Minkowskiraum aus Beispiel 255 heißt der Gradient der *Vierergradient*, die Divergenz die *Viererdivergenz* und der Laplaceoperator der *Wellenoperator*. Zum Beispiel ist

$$\square f := \Delta^{\text{Lorentz}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2}.$$

□

Für die hier eingeführten Differentialoperatoren ergeben sich nun unmittelbar die folgenden klassischen Versionen des Stokesschen Satzes. Vergleichen Sie für die Integraldefinitionen $\int \langle F, ds \rangle$ und $\int \langle F, dO \rangle$ die Beispiele 201, 203.

Satz 258 (Greenscher Satz). Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $p, q : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $C \in C_2(G)$. Dann gilt

$$\int_C \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial C} p dx + q dy.$$

Insbesondere folgt ($q = x$ oder $p = y$) für injektives $c \in I_2(\mathbb{R}^2)$ mit $\det Dc \geq 0$

$$\text{Fläche}(c(I^2)) = \int_c dx \wedge dy = \int_{\partial c} x dy = - \int_{\partial c} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial c} -y dx + x dy.$$

Ein Anwendungsbeispiel für die Flächenformel ist der Satz von Holditch, vgl. Abschnitt 10.4.8

Eine diskrete Variante davon gibt die in der Geodäsie unentbehrliche

Gaußsche Flächenformel. Seien $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ die Koordinaten der Eckpunkte eines (eingebetteten) n -Ecks. Die Numerierung laufe im mathematisch positiven Sinne. Dann gilt für die Fläche

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i \Delta_i x, \quad \Delta_i x = x_{i+1} - x_{i-1}.$$

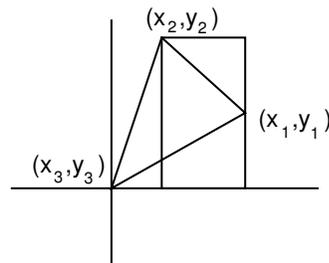
Dabei ist $x_0 = x_n, x_{n+1} = x_1$.

Beim Vergleich mit der Integralformel $F = - \int y dx$ beachte, dass $\Delta_i x = x_{i+1} - x_{i-1} = 2\Delta x_i$. Daher der Faktor $1/2$.

Beweis:

Wir betrachten zunächst ein Dreieck: Dafür ist

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} (y_2 x_2 + (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - y_1 x_1) \\ &= \frac{1}{2} (y_1(x_0 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 y_i \Delta_i x. \end{aligned}$$



Bei Vertauschung von 1 und 2 ergibt sich die negative Fläche. Die Flächenformel ist offenbar invariant unter Translationen, weil $\sum_{i=1}^n \Delta_i x = 0$. Daher folgt die allgemeine Formel aus der Dreiecksformel. □

Satz 259 (Klassischer Satz von Stokes). $G \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $C \in C_2(G)$ eine 2-Kette (Flächenstück) in G . Dann ist

$$\int_C \langle \operatorname{rot} F, dO \rangle = \int_{\partial C} \langle F, ds \rangle.$$

Satz 260 (Satz von Gauß, Divergenzsatz). $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld und $C \in C_n(G)$ eine n -Kette (Volumen) in G . Dann ist

$$\int_C \operatorname{div} F \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\partial C} \langle F, dO \rangle.$$

10.3.3 Harmonische Funktionen

Dieser Abschnitt erweitert den Abschnitt 9.7.2 über den Cauchyschen Integralsatz.

$u : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn $\Delta u = 0$, d.h. wenn $d * du = 0$.

Beispiel 261. Ist $f = u + iv : \mathbb{C} \subset G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so sind u und v harmonisch. □

Beispiel 262. Ist $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, so ist r^{n-2} für $n \geq 3$ harmonisch. □

Satz 263 (Integralsatz für harmonische Funktionen). *Ist $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, so gilt für jedes $C \in C_n(G)$*

$$\int_{\partial C} *du = 0.$$

Für $n = 2$ bedeutet das

$$\int_{\partial C} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = 0.$$

Beweis. Trivial □

Satz 264 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen). *Ist $u : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, und liegt die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius R um a in G , so gilt*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{i\phi}) d\phi. \tag{72}$$

Beweis. Für holomorphe Funktionen gilt nach der Cauchyschen Integralformel (Satz 230)

$$f(a) = \int_0^1 f(a + Re^{2\pi it}) dt = \int_{2\pi t=\phi}^{2\pi} f(a + Re^{i\phi} \frac{1}{2\pi}) d\phi.$$

Also gilt die Formel für holomorphe Funktionen. Damit gilt sie auch für den Realteil einer holomorphen Funktion. Wir zeigen nun, dass sich jedes auf G harmonische u lokal so darstellen läßt.

Auf einem offenen Kreis U , der den R -Kreis um a enthält und selbst in G liegt, ist

$$\omega := -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

geschlossen, weil u harmonisch ist. Daher besitzt ω ein Potential $v : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist aber $f := u + iv$ auf U holomorph. □

Satz 265 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen). *Nimmt eine harmonische Funktion auf einer offenen, zusammenhängenden Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ ihr Maximum an, so ist sie konstant.*

Beweis. Sei $a \in G$ ein Punkt, in dem die harmonische Funktion u ihr Maximum annimmt. Nach dem Mittelwertsatz ist $u(a)$ der Mittelwert von u über den Rand jeder abgeschlossenen Kreisscheibe um a , die in G liegt. Weil aber $u(a) \geq u$ bedeutet das, dass $u = u(a)$ auf jedem hinreichend kleinen Kreis um a . Also ist u lokal konstant. Aus dem Zusammenhang von G folgt die globale Konstanz. \square

Wir wollen nun die Mittelwertformel (72) für harmonische Funktionen auf dem Kreis so verallgemeinern, dass sie nicht nur den Wert im Mittelpunkt sondern möglichst in einem beliebigen Punkt liefert: wie die Cauchyformel. Sei z_0 ein innerer Punkt der Kreisscheibe D_R^2 von Radius R um 0. Die gebrochen-lineare Transformation

$$f(z) = R \frac{Rz + z_0}{R + z\bar{z}_0}$$

bildet die Einheitskreisscheibe auf die Kreisscheibe vom Radius R und den Punkt 0 auf z_0 ab.

Ist nun u harmonisch auf D_R^2 , so ist $u(f(z))$ harmonisch auf D_1^2 und nach der Mittelwertformel gilt

$$u(z_0) = u(f(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f(e^{it})) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(R \frac{Re^{it} + z_0}{R + \bar{z}_0 e^{it}}\right) dt$$

Wir möchten

$$e^{i\phi} = \frac{Re^{it} + z_0}{R + \bar{z}_0 e^{it}}$$

substituieren und berechnen dazu $\frac{dt}{d\phi}$. Wir lösen nach e^{it} auf und erhalten:

$$e^{it} = \frac{Re^{i\phi} - z_0}{R - e^{i\phi} \bar{z}_0}.$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach ϕ :

$$ie^{it} \frac{dt}{d\phi} = \frac{Rie^{i\phi}(R - e^{i\phi} \bar{z}_0) - (Re^{i\phi} - z_0)(-ie^{i\phi} \bar{z}_0)}{(R - e^{i\phi} \bar{z}_0)^2} = \frac{R^2 ie^{i\phi} - ie^{i\phi} z_0 \bar{z}_0}{(R - e^{i\phi} \bar{z}_0)^2}$$

und teilen durch ie^{it} :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\phi} &= \frac{R^2 e^{i\phi} - e^{i\phi} z_0 \bar{z}_0}{(R - e^{i\phi} \bar{z}_0)(Re^{i\phi} - z_0)} = \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{(Re^{-i\phi} - \bar{z}_0)(Re^{i\phi} - z_0)} \\ &= \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{(Re^{i\phi} - z_0)(Re^{i\phi} - z_0)} = \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{|Re^{i\phi} - z_0|^2} \end{aligned}$$

Anwendung der Substitutionsregel liefert nun

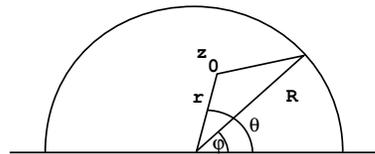
$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{|Re^{i\phi} - z_0|^2} d\phi.$$

Schließlich ergibt sich mit $z_0 = re^{i\theta}$ aus dem

Cosinussatz

$$|Re^{i\phi} - z_0|^2 = R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2$$

und damit



Satz 266 (Poissonsche Integralformel). Sei $u(z)$ harmonisch auf der abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius R um 0. Dann gilt für alle r mit $0 \leq r < R$:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi. \quad (73)$$

Für $r = 0$ bekommt man wieder die Mittelwertformel.

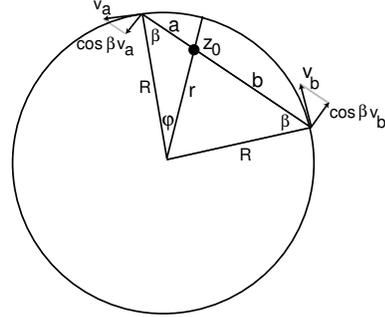
Es gibt für die Poisson-Formel eine sehr anschauliche geometrische Interpretation: Wir betrachten einen inneren Punkt z_0 im Kreis vom Radius R und lassen die Sekante durch diesen Punkt um ihn rotieren. Uns interessiert das Verhältnis der Geschwindigkeit der beiden Schnittpunkte der Sekante mit dem Kreis zueinander.

Nach dem Sekantensatz ist das Produkt ab der Sekantenabschnitte dabei konstant und zwar ist

$$ab = (R + r)(R - r) = R^2 - r^2,$$

wenn r der Abstand von z_0 vom Mittelpunkt ist. Diesen Wert erhält man nämlich, wenn die Sekante durch den Mittelpunkt geht. Das gesuchte Geschwindigkeitsverhältnis ist daher mit den Bezeichnungen der Abbildung

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{\cos \beta v_b}{\cos \beta v_a} = \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi}.$$



Das ist genau der Kern aus der Poisson-Formel. Er beschreibt also die Längenverzerrung, wenn man den Rand des Kreises durch z_0 auf die gegenüberliegende Seite des Kreises projiziert. Randstücke nah bei z_0 werden dabei gestreckt, Stücke fern von z_0 entsprechend gestaucht. Wenn man die Randwertverteilung von u zunächst auf diese Weise durch z_0 projiziert, und dann über den Einheitskreis mittelt, erhält man den Wert $u(z_0)$. Im Bild der Temperaturverteilung für die Kreisscheibe: Randwerte nah bei z_0 haben großen Einfluss auf die Temperatur in z_0 , Randwerte fern von z_0 haben geringen Einfluss.

Ist u harmonisch auf der abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius R , so liefert die Poissonformel also die Werte im Inneren berechnet aus den Randwerten. Aber man kann beweisen, dass man diese Formel auch zur Lösung der Randwertaufgabe benutzen kann:

Satz 267 (Existenzsatz für die 1. Randwertaufgabe). Sei u_0 eine stetige Funktion auf der Kreislinie vom Radius R um 0 . Dann definiert

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \quad (74)$$

eine auf der abgeschlossenen Kreisscheibe stetige und im Inneren harmonische Funktion u mit $u(Re^{i\phi}) = u_0(Re^{i\phi})$.

Das analoge Verfahren mit der Cauchyschen Integralformel liefert eine analytische Funktion im Innern, die aber i.a. keine stetige Fortsetzung der auf dem Rand vorgegebenen Funktion ist.

10.4 Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten

10.4.1 Mannigfaltigkeiten

Seien V, W endlich-dimensionale Banachräume.

Definition 268. Sei $A \in V$.

- (i) Eine Abbildung $f : V \supset A \rightarrow W$ heißt eine C^∞ -Abbildung, wenn sie sich zu einer C^∞ -Abbildung auf einer offenen Umgebung von A fortsetzen läßt, d.h. wenn es eine offene Umgebung U von A in V und eine Abbildung $\tilde{f} : V \supset U \rightarrow W$ gibt, für die gilt

- \tilde{f} ist beliebig oft differenzierbar,
- $\tilde{f}|_A = f$.

- (ii) Eine Abbildung $f : A \rightarrow W$ heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn f injektiv ist und sowohl f wie $f^{-1} : f(A) \rightarrow V$ C^∞ -Abbildungen sind.

Beispiel 269. Sei

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

die abgeschlossene Vollkugel im \mathbb{R}^n und sei

$$A := \{x \in D^n \mid x_n < 0\}.$$

Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f(x_1, \dots, x_n) := \left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)}\right).$$

Dann ist

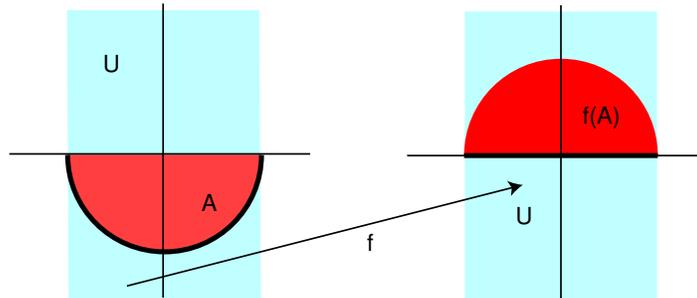
$$A \subset U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1\},$$

U offen und f setzt sich mit derselben Formel von selbst zu einer C^∞ -Abbildung auf U fort. Überzeugen Sie sich, dass f injektiv ist. Für $(x_1, \dots, x_n) \in A$ gilt

$$-\sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)} \leq x_n < 0,$$

und daher ist

$$f(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_n < \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)}\right\}.$$



Die Umkehrabbildung ist

$$f^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n - \sqrt{1 - (y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2)}\right).$$

Sie erweitert sich ebenfalls “von selbst” zu einer C^∞ -Abbildung auf derselben offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Also ist f ein Diffeomorphismus. □

Beispiel 270. Weil eine C^∞ -Abbildung $f : A \rightarrow W$ auf einer nicht-offenen Menge A im allgemeinen viele verschiedene Fortsetzungen auf offene Umgebungen besitzt, ist $d_x f : V \rightarrow W$ im allgemeinen nur in inneren Punkten von A eindeutig definiert. Zum Beispiel läßt sich die Nullabbildung auf der x -Achse des \mathbb{R}^2

$$f : \mathbb{R}^2 \supset \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0$$

fortsetzen zu $\tilde{f}(x, y) = 0$ oder zu $\tilde{f}(x, y) = y$ auf ganz \mathbb{R}^2 , und entsprechend sind die Differentiale verschieden.

□

Beispiel 271 (Der Halbraum H^k). Wir werden es im folgenden oft mit Abbildungen des abgeschlossenen oberen Halbraumes

$$f : H^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\} \rightarrow W$$

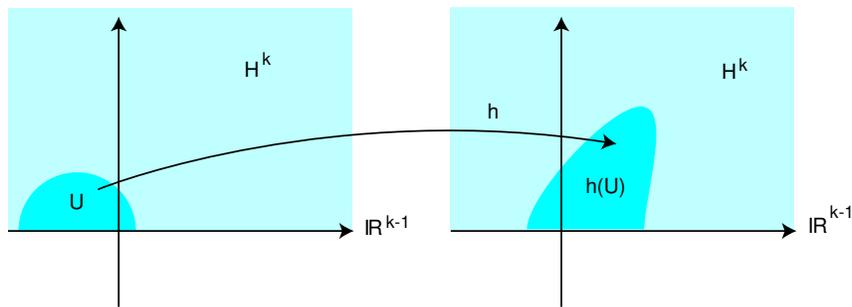
zu tun haben und gehen auf diese Situation hier etwas ausführlicher ein.

Wenn wir von *inneren* ($x_k > 0$) oder von *Randpunkten* ($x_k = 0$) von H^k sprechen, beziehen wir uns auf den umgebenden \mathbb{R}^k , und wir identifizieren den Rand von H^k mit \mathbb{R}^{k-1} .

Ist $f : H^k \supset U \rightarrow W$ eine C^∞ -Funktion auf einer offenen Teilmenge von H^k , so ist im Gegensatz zum letzten Beispiel das Differential $d_x f : \mathbb{R}^k \rightarrow W$ auch in Randpunkten durch f eindeutig bestimmt, weil sich die partiellen Ableitungen allein aus Funktionswerten von f berechnen, egal wie die Fortsetzung aussieht ...

Sei nun $h : H^k \supset U \rightarrow H^k$ ein Diffeomorphismus einer offenen Teilmenge $U \subset H^k$ auf eine offene Teilmenge $h(U)$ von H^k . Nach der Kettenregel angewendet auf $h \circ h^{-1}$ ist das Differential $d_x h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ in allen Punkten invertierbar. Nach dem Umkehrsatz bildet h deshalb innere Punkte von U auf innere Punkte ab. Und weil dasselbe Argument auch für h^{-1} gilt, bildet h Randpunkte in Randpunkte ab:

$$h|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}} : U \cap \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$$



Ist $x \in U \cap \mathbb{R}^{k-1}$ ein Randpunkt, so gilt also

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}^{k-1} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k-1\}$$

und $\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{h(x+t\mathbf{e}_k) - h(x)}{t}$ zeigt in den oberen Halbraum. Es ist also

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \lambda \mathbf{e}_k + v \text{ mit } \lambda > 0 \text{ und } v \in \mathbb{R}^{k-1}$$

und folglich

$$\det\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_k}\right) = \lambda \det\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_{k-1}}, \mathbf{e}_k\right).$$

Hat also $d_x h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ positive Determinante, so gilt dasselbe für die auf den Rand eingeschränkte Abbildung $d_x h|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}} : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$.

□

Wir halten die letzten Ergebnisse noch einmal fest:

Lemma 272. *Ist $h : H^k \supset U \rightarrow H^k$ ein Diffeomorphismus einer offenen Teilmenge $U \subset H^k$ auf eine offene Teilmenge $h(U)$ von H^k , so gilt*

$$h(U \cap \mathbb{R}^{k-1}) \subset \mathbb{R}^{k-1}$$

und $h|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}}$ ist ein Diffeomorphismus einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^{k-1} auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^{k-1} . Ist $\det dh > 0$ positiv auf U , so ist $\det d(h|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}})$ positiv auf $U \cap \mathbb{R}^{k-1}$.

Definition 273 (Berandete Mannigfaltigkeit). (i) Eine Teilmenge $M \subset V$ heißt eine k -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit (oder *Untermannigfaltigkeit*), wenn sie lokal diffeomorph zum abgeschlossenen Halbraum

$$H^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$$

ist, d.h. wenn gilt:

Zu jedem $p \in M$ gibt es eine (in M) offene Umgebung U und einen Diffeomorphismus $u : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ auf eine offene Teilmenge $u(U)$ von H^k .

- (ii) Jedes solche $u : U \rightarrow H^k$ heißt eine *Karte* für M und die Umkehrung $\phi := u^{-1} : H^k \supset u(U) \rightarrow M$ heißt eine *Parametrisierung* für M .
- (iii) Eine Familie von Karten, deren Definitionsbereiche ganz M überdecken, heißt ein *Atlas* für M .
- (iv) Sind $u_1 : U_1 \rightarrow H^k$ und $u_2 : U_2 \rightarrow H^k$ zwei Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, so ist

$$u_2 \circ u_1^{-1} : H^k \supset u_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow u_2(U_1 \cap U_2) \subset H^k$$

ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von H^k , der auch der *Kartenwechsel* der beiden Karten heißt.

Beispiel 274. Die abgeschlossene Vollkugel D^n ist eine n -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit. Die Abbildung f aus Beispiel 269 liefert eine Karte für jeden Punkt von M mit $x_n < 0$. Analog findet man Karten für die Punkte mit $x_n > 0$ oder $x_i < 0$ bzw. $x_i > 0$ für beliebiges i . Die Abbildung

$$u : \{x \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\} \rightarrow H^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + 1, x_2, \dots, x_n)$$

liefert eine Karte um jeden inneren Punkt von D^n . Ihr Bild liegt im offenen Halbraum $x_n > 0$.

□

Lemma 275 (und Definition: Randpunkte). *Seien M eine k -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit und*

$$u : U \rightarrow u(U), \quad \hat{u} : \hat{U} \rightarrow \hat{u}(U)$$

zwei Karten und $p \in U \cap \hat{U}$. Liegt dann $u(p)$ auf dem Rand von H^k , d.h. ist $u_k(p) = 0$, so ist auch $\hat{u}_k(p) = 0$. Punkte p , die von einer und dann also von jeder Karte in den Rand von H^k abgebildet werden, heißen *Randpunkte der Mannigfaltigkeit M* .

Die Menge der Randpunkte von M , der Rand von M , wird mit ∂M bezeichnet. Sie ist leer oder eine $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit leerem Rand.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Lemma 272. □

Bemerkungen.

1. Die Definition des Randes kollidiert ein wenig mit der topologischen Begriffsbildung: Eine abgeschlossene Kreisscheibe $B \subset \mathbb{R}^3$ im dreidimensionalen Raum ist eine 2-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit. Als Teilmenge des metrischen Raumes \mathbb{R}^3 sind *alle* ihre Punkte Randpunkte, im differentialgeometrischen Sinne aber nur die Punkte auf der Kreislinie.
2. Für berandete Mannigfaltigkeit M mit leerem Rand $\partial M = \emptyset$ wie etwa die offene Vollkugel klingt der Begriff “berandete Mannigfaltigkeit” unsinnig. Wir bezeichnen deshalb mit “Mannigfaltigkeit” in Zukunft sowohl “echt” berandete Mannigfaltigkeiten, wie unberandete Mannigfaltigkeiten ($\partial M = \emptyset$).
3. In der Analysis II hatten wir eine Teilmenge $M \subset V$ eines n -dimensionalen Banachraumes eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit genannt, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung \tilde{U} von p in V und einen Diffeomorphismus $\phi : V \supset \tilde{U} \rightarrow \phi(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge $\phi(\tilde{U})$ des \mathbb{R}^n gab, so dass mit der üblichen Identifikation $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ galt

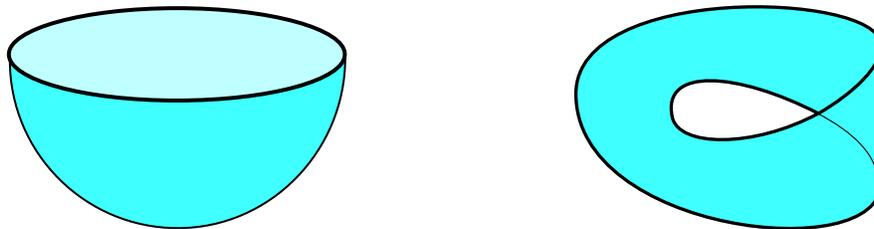
$$\phi(M \cap \tilde{U}) = \mathbb{R}^k \cap \phi(\tilde{U}).$$

Nach Verkleinerung von \tilde{U} können wir annehmen, dass $\mathbb{R}^k \cap \phi(\tilde{U})$ beschränkt ist. Wir setzen $U := M \cap \tilde{U}$. Offenbar ist dann $\phi|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein Diffeomorphismus von U auf die offene Teilmenge $\mathbb{R}^k \cap \phi(\tilde{U})$ des \mathbb{R}^k . Und weil $\mathbb{R}^k \cap \phi(\tilde{U})$ beschränkt ist, können wir ein $a \in \mathbb{R}^k$ so wählen, dass $u := a + \phi|_U$ im Inneren von H^k liegt. Also ist jede k -dimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne der Analysis II eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit mit leerem Rand im Sinne der neuen Definition.

Davon gilt auch die Umkehrung: Ein Diffeomorphismus $u : M \supset U \rightarrow u(U) \subset \mathbb{R}^k$ läßt sich nach Definition zu einer C^∞ -Abbildung $\phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ einer offenen Umgebung \tilde{U} von p in V nach $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ fortsetzen. Die Umkehrabbildung u^{-1} wird durch $u^{-1}(x_1, \dots, x_n) := u^{-1}(x_1, \dots, x_k)$ zu einer C^∞ -Abbildung auf der offenen Menge $u(U) \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ fortgesetzt.

Also sind die C^∞ -Mannigfaltigkeiten im Sinne der Analysis II genau die Mannigfaltigkeiten mit leerem Rand im Sinne der neuen Definition.

Beispiel 276 (Zur Veranschaulichung). Eine abgeschlossene Halbsphäre oder ein Möbiusband sind berandete 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3 .



Der Rand ist in beiden Fällen *eine* geschlossene Kurve. □

Beispiel 277 (Zum Nachdenken). Die Menge

$$M = \{x \in D^n \mid x_n < 0\}$$

ist eine berandete n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Was ist ihr Rand? □

10.4.2 Zerlegung der Eins

Sei V ein endlich-dimensionaler Banachraum.

Der folgende Satz ist ein technisches Hilfsmittel zur „Lokalisierung“ globaler Objekte auf einer Mannigfaltigkeit und umgekehrt zum „Verschmelzen“ lokaler Objekte zu globalen Objekten. Wir formulieren und beweisen ihn nur in einer sehr speziellen Situation für kompakte Mannigfaltigkeiten, weil wir ihn allgemeiner nicht benötigen und weil dadurch der Beweis viel einfacher wird.

Satz 278 (Zerlegung der Eins). *Seien $M \subset V$ eine kompakte berandete k -dimensionale Mannigfaltigkeit und $(u_\alpha : U_\alpha \rightarrow H^k)_{\alpha \in A}$ ein Atlas für M . Dann gibt es endlich-viele C^∞ -Funktionen*

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m : M \rightarrow [0, 1]$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) Zu jedem $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit

$$\text{supp } \lambda_i := \overline{\{x \mid \lambda_i(x) \neq 0\}} \subset U_\alpha.$$

$\text{supp } \lambda_i$ heißt der Träger von λ_i .

(ii) Für alle $x \in M$ ist

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(x) = 1.$$

Die Familie $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ nennt man auch eine zu $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ passende Zerlegung der Eins.

Beweis. Wähle zu jedem $x \in M$ eine Karte $u_x : U_x \rightarrow H^k$ aus dem gegebenen Atlas aus, für die $x \in U_x$. Dann ist $u_x(U_x)$ eine offene Teilmenge von H^k , und es gibt (vgl. Analysis I, 4.3) eine nicht negative C^∞ -Funktion $\psi_x : H^k \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \psi_x(u_x(x)) &= 1, \\ \text{supp } \psi_x &\subset u_x(U_x). \end{aligned}$$

Setze

$$\tilde{\lambda}_x(y) := \begin{cases} \psi_x(u_x(y)), & \text{falls } y \in U_x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{\lambda}_x$ eine C^∞ -Funktion auf M . Das ist nach der Kettenregel klar auf der offenen Menge U_x und erst recht klar auf der offenen Menge $M \setminus u_x^{-1}(\text{supp } \psi_x)$. Diese beiden offenen Mengen überdecken aber M , und daher ist $\tilde{\lambda}_x$ überall C^∞ .

$(V_x := \tilde{\lambda}_x^{-1}([0, \infty[))_{x \in M}$ ist eine offene Überdeckung der kompakten Mannigfaltigkeit M . Also genügen endlich viele dieser Mengen, um M zu überdecken:

$$M = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}.$$

Dann ist also

$$\sigma := \tilde{\lambda}_{x_1} + \dots + \tilde{\lambda}_{x_m} > 0$$

und für $\lambda_i := \tilde{\lambda}_{x_i} / \sigma$ gilt $\sum \lambda_i = 1$. Der Träger von λ_i liegt in U_{x_i} . Aber $U_{x_i} = U_\alpha$ für ein $\alpha \in A$, und damit folgt die Behauptung. \square

10.4.3 Orientierung

Definition 279. Sei M eine berandete k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von V .

- (i) Eine *Differentialform vom Grad m auf M* ist eine C^∞ -Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \Lambda^m V^*.$$

Beachten Sie, dass sich ω nach Definition zu einer C^∞ -Abbildung auf einer offenen Umgebung G von M in V erweitern läßt.

Den Vektorraum der Differentialform vom Grad m auf M bezeichnen wir mit $\Omega^m(M)$.

Ist $\phi : \mathbb{R}^k \supset \tilde{U} \rightarrow M$ eine (lokale) Parametrisierung für M , so ist $\phi^*\omega \in \Omega^m(\tilde{U})$.

- (ii) $p \in M$ heißt eine *Nullstelle* von $\omega \in \Omega^m(M)$, wenn für eine Parametrisierung ϕ für M um p

$$(\phi^*\omega)_{\phi^{-1}(p)} = 0. \quad (75)$$

Hat man zwei Parametrisierungen ϕ_i um p , so gilt

$$\phi_1^*\omega = \underbrace{(u_2 \circ u_1^{-1})}_{\text{Diffeo}}^* \phi_2^*\omega. \quad (76)$$

Also gilt (75) für alle Parametrisierungen, wenn es für eine gilt.

- (iii) Eine Form $\eta \in \Omega^m(M) = \Omega^{\dim M}(M)$ ohne Nullstelle heißt eine *Determinantenform* auf M . M heißt *orientierbar*, wenn es auf M eine Determinantenform gibt.
- (iv) Zwei Determinantenformen η_1, η_2 auf M heißen äquivalent, wenn

$$\frac{\phi^*\eta_1(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)}{\phi^*\eta_2(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)} > 0$$

für jede Parametrisierung ϕ . Das definiert eine Äquivalenzrelation, und jede Äquivalenzklasse heißt eine *Orientierung von M* . Jede Determinantenform auf M definiert also eine Orientierung von M . Ein Mannigfaltigkeit mit einer Orientierung heißt eine *orientierte Mannigfaltigkeit* und die Determinantenformen aus der Orientierung dann *positive* Determinantenformen.

Bemerkungen.

1. Im \mathbb{R}^k ist eine Basis *positiv orientiert*, wenn sie *genauso orientiert ist, wie die Standardbasis*, das heißt, wenn die Basistransformation zwischen den beiden eine positive Determinante hat.
2. Stattdessen kann man auch sagen, eine Basis im \mathbb{R}^k ist positiv orientiert, wenn die Determinante mit den Vektoren der Basis als Argumenten positiv ist.
3. Ein k -dimensionaler reeller Vektorraum hat im Gegensatz zum \mathbb{R}^k keine ausgezeichnete Orientierung. Aber man kann eine auszeichnen, indem man irgendeine Basis als *positiv orientiert* deklariert.
4. Auf den k -tupeln von Vektoren in einem k -dimensionalen Vektorraum hat man im Gegensatz zum \mathbb{R}^k keine ausgezeichnete Determinante. Aber man kann eine wählen, indem man irgendeine alternierende k -Form $\neq 0$ auszeichnet. Das liefert dann gleichzeitig wie in der 2. Bemerkung eine Orientierung für den Vektorraum.

5. Eine Orientierung für eine Mannigfaltigkeit ist anschaulich eine “kohärente” Orientierung für deren Tangentialräume. Machen Sie sich das am Zylinder, am (nicht orientierbaren) Möbiusband und an der 2-Sphäre klar.
6. Wie in der 4. Bemerkung kann man eine Orientierung auf einer Mannigfaltigkeit auszeichnen, indem man (in “kohärenter” Weise) in jedem Tangentialraum eine alternierende k -Form $\neq 0$ vorgibt, eben eine *Determinantenform*.
7. Wir verzichten hier der Einfachheit halber auf die Einführung des Tangentialraums. Daher “akzeptieren” unsere oben definierten Differentialformen in ihren multilinearen Argumenten beliebige Argumente aus dem umgebenden Vektorraum V , und nicht nur Tangentialvektoren an M . Diesen ungewollten Effekt beseitigen wir dadurch, dass wir im wesentlichen die zurückgeholten Formen $\phi^*\omega = (u^{-1})^*\omega$ betrachten. Beachten Sie die definierende Gleichung

$$\phi^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega_{\phi}(\underbrace{d\phi(v_1), \dots, d\phi(v_k)}_{\text{tangential an } M}).$$

Beispiel 280. Auf \mathbb{R}^k oder H^k ist $\eta = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \det$ eine Determinantenform, die also eine Orientierung definiert. Diese bezeichnen wir als die *Standardorientierung* von \mathbb{R}^k bzw. H^k

□

Beispiel 281. Sei $*\omega^X \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ wie im Beispiel 187 und $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten $*\omega^X$ als Element von $\Omega^{n-1}(S^{n-1})$. Ist $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \supset \tilde{U} \rightarrow S^{n-1}$ eine Parametrisierung, so sind also $\partial_1\phi, \dots, \partial_{n-1}\phi$ überall linear unabhängig. Aus $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ folgt durch Differenzieren $\langle \phi, \partial_i\phi \rangle = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Also sind auch $\phi, \partial_1\phi, \dots, \partial_{n-1}\phi$ überall linear unabhängig. Daher ist

$$\phi^*(\omega^X)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) = \det(\phi, \partial_1\phi, \dots, \partial_{n-1}\phi)$$

niemals 0 und $*\omega^X$ ist eine Determinantenform auf S^{n-1} . Die zugehörige Orientierung nennen wir die *Standardorientierung* von S^{n-1} .

Das gilt natürlich auch für Sphären von beliebigem Radius $r > 0$.

□

Definition 282. (i) Zwei Karten für eine Mannigfaltigkeit heißen *gleichorientiert*, wenn ihr Kartenwechsel überall positive Funktionaldeterminante hat.

- (ii) Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit. Eine Karte $u : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ für M heißt *positiv orientiert*, wenn

$$(u^{-1})^*\eta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) > 0$$

für eine (und dann für jede) positive Determinantenform $\eta \in \Omega^k(M)$. Entsprechend definiert man *negativ orientierte Karten*

Lemma 283. Sei M eine k -dimensionale kompakte berandete Untermannigfaltigkeit von V . Dann gilt:

- (i) Ist M orientiert, so sind die Kartenwechsel zwischen positiv orientierten Karten gleichorientiert. M besitzt einen Atlas aus gleichorientierten Karten.
- (ii) Besitzt M einen Atlas aus gleichorientierten Karten, so gibt es genau eine Orientierung für M bezüglich der alle Karten aus dem Atlas positiv orientiert sind.

Beweis. Zu (i). Die erste Behauptung ist klar nach (76).

Wir wählen nun für M eine Atlas mit zusammenhängenden Kartengebieten und eine positive Determinantenform η . Dann wechselt $(u^{-1})^*\eta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ nicht das Vorzeichen. Ist es negativ, so ersetzen wir die erste Komponente u_1 von u durch $-u_1$ und erhalten so eine positiv orientierte Karte mit demselben Kartengebiet. Das tun wir mit jeder Karte und erhalten eine Atlas aus positiv und daher gleichorientierten Karten.

Zu (ii). Es ist klar, dass es nur eine solche Orientierung geben kann.

Sei \mathcal{A} ein Atlas wie in (ii). Wir wählen dazu eine Zerlegung der Eins $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ und zu jedem i eine Karte $(u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k) \in \mathcal{A}$ mit

$$\text{supp } \lambda_i \subset U_i.$$

Wir setzen

$$(\eta_i)_x := \begin{cases} (u_i^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)_x & \text{für } x \in U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachten Sie, dass die η_i im allgemeinen nicht C^∞ sind, wohl aber die $\lambda_i \eta_i \in \Omega^k(M)$. Wir definieren

$$\eta = \sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i \in \Omega^k(M).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (u_j^{-1})^*\eta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) &= \sum_i (\lambda_i \circ u_j^{-1}) ((u_j^{-1})^* u_i^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &= \sum_i (\lambda_i \circ u_j^{-1}) \det(D(u_i u_j^{-1}))(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Nach Definition der Zerlegung der Eins bilden die $\text{supp } \lambda_j$ und deshalb die Kartengebiete U_j eine Überdeckung von M und η ist eine Determinantenform, bezüglich der alle Karten aus dem konstruierten Atlas positiv orientiert sind. \square

Übungsaufgabe. Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit besitzt keine oder genau zwei Orientierungen.

Wir erinnern nun an Lemma 272: Ist $u : U \rightarrow H^k$ eine Karte für M mit $U \cap \partial M \neq \emptyset$, so ist

$$u|_{U \cap \partial M} : U \cap \partial M \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$$

eine Karte für ∂M . Gleichorientierte Karten für M liefern auf diese Weise gleichorientierte Karten für ∂M , und ein Atlas für M mit gleichorientierten Karten induziert einen solchen für ∂M . Deshalb folgt aus dem letzten Lemma:

Satz 284 (und Definition: Randorientierung). Sei $M \subset V$ eine orientierte kompakte k -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand. Dann gibt es auf ∂M genau eine Orientierung mit folgender Eigenschaft:

- Ist $\dim M$ gerade, so induziert jeder Atlas aus positiv orientierten Karten für M einen Atlas aus positiv orientierten Karten für ∂M .
- Ist $\dim M$ ungerade, so induziert jeder Atlas aus positiv orientierten Karten für M einen Atlas aus negativ orientierten Karten für ∂M .

Diese Orientierung heißt die induzierte Randorientierung.

Beispiel 285. Auf der Einheitsvollkugel D^n definiert die Determinantenform

$$\det = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$$

eine Orientierung und nach Beispiel 269 ist

$$u(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_n + \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)} \right)$$

eine Karte für D^n . Das Orientierungsverhalten dieser Karte ist gegeben durch das Vorzeichen von

$$(u^{-1})^* \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det \left(\frac{\partial u^{-1}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u^{-1}}{\partial y_n} \right) = 1,$$

weil u^{-1} fast so aussieht wie u , vgl. Beispiel 269. u ist also eine positiv orientierte Karte für die berandete Mannigfaltigkeit D^n . Es liefert in geraden Dimensionen n eine positive, in ungeraden Dimensionen eine negativ orientierte Karte bezüglich der Randorientierung von $S^{n-1} = \partial D^n$.

Wie verhält sich diese Randorientierung zur Standardorientierung, vgl. Beispiel 281?

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} ((u|_{S^{n-1}})^{-1})^* * \omega^X(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) &= (u^{-1}|_{\mathbb{R}^{n-1}})^* * \omega^X(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) \\ &= \det \left(\frac{u^{-1}(y)}{\|u^{-1}(y)\|}, \frac{\partial u^{-1}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u^{-1}}{\partial y_{n-1}} \right) \\ &= \det(u^{-1}(y), \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) \\ &= (-1)^{n-1} \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, u^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Weil $u^{-1}(y)$ negative n -te Koordinate hat, vgl. die Abbildung in Beispiel 269, hat der letzte Ausdruck also Vorzeichen $(-1)^n$. Die Orientierung von S^{n-1} als Rand der kanonisch orientierten Vollkugel D^n ist also die Standardorientierung von S^{n-1} . Das mag mit der Fallunterscheidung in der Definition im Satz 284 versöhnen.

□

Bemerkung. Die Aussagen von Lemma 283 und damit der Satz 284 gelten auch für nicht-kompaktes M . Den Beweis muss man nicht ändern, man braucht nur eine allgemeinere Version des Satzes von der Zerlegung der Eins. Da wir im folgenden Abschnitt ohnehin aber nur kompakte berandete Mannigfaltigkeiten betrachten, reicht unsere ‘Sparversion’.

10.4.4 Integration über Mannigfaltigkeiten

Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum.

Definition 286. Seien M eine k -dimensionale kompakte, orientierte berandete Untermannigfaltigkeit von V und $\omega \in \Omega^k(M)$. Nach dem Satz 278 von der Zerlegung der Eins, insbesondere nach der letzten Bemerkung dort, gibt es einen Atlas $(u_i : U_i \rightarrow H^k)_{1 \leq i \leq k}$ mit positiv orientierten Karten und dazu eine Zerlegung der Eins $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ mit $\text{supp } \lambda_i \subset U_i$. Wir bezeichnen mit $\phi_i = u_i^{-1}$ die zugehörigen Parametrisierungen und definieren:

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \lambda_i \omega := \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} \phi_i^*(\lambda_i \omega) := \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} \phi_i^*(\lambda_i \omega)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k.$$

Beachten Sie, daß $\text{supp } \lambda_i$ abgeschlossen, also kompakt ist. Daher ist auch

$$x \mapsto \phi_i^*(\lambda_i \omega)_x(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$$

eine C^∞ -Funktion mit kompaktem Träger $u_i(\text{supp } \lambda_j)$ und die μ_k -Integrale existieren.

Wir müssen zeigen, dass diese Definition unabhängig von den gemachten Wahlen ist. Das liegt im wesentlichen an diesem

Lemma 287. Seien $u_i : U_j \rightarrow H^k$ für $i = 1, 2$ zwei gleich-orientierte Karten für M mit Parametrisierungen $\phi_i := u_i^{-1}$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ mit kompaktem Träger

$$S := \text{supp } \omega \subset U_1 \cap U_2.$$

Dann gilt

$$\int_{u_1(S)} \phi_1^* \omega = \int_{u_2(S)} \phi_2^* \omega. \quad (77)$$

Beweis. Nach der Transformationsformel Lemma 199 gilt

$$\int_{u_1(S)} \phi_1^* \omega = \int_{u_1(S)} (u_2 \circ u_1^{-1})^* \phi_2^* \omega = \int_{u_2 \circ u_1^{-1}(u_1(S))} \phi_2^* \omega = \int_{u_2(S)} \phi_2^* \omega.$$

□

Nun zum eigentlichen

Beweis der Unabhängigkeit. Sei $(\tilde{u}_j : \tilde{U}_j \rightarrow \mathbb{R}^k)_{1 \leq j \leq \tilde{m}}$ ein weiterer Atlas wie in der Definition und $(\tilde{\lambda}_j)$ dazu eine Zerlegung der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} \phi_i^*(\lambda_i \omega) &= \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} \phi_i^* \left(\sum_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{\lambda}_j \lambda_i \omega \right) \\ &= \sum_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1, \dots, \tilde{m}} \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i \cap \text{supp } \tilde{\lambda}_j)} \phi_i^*(\tilde{\lambda}_j \lambda_i \omega) \\ &\stackrel{(77)}{=} \sum_{j=1, \dots, \tilde{m}} \sum_{i=1, \dots, m} \int_{\tilde{u}_j(\text{supp } \tilde{\lambda}_i \cap \text{supp } \tilde{\lambda}_j)} \tilde{\phi}_j^*(\tilde{\lambda}_j \lambda_i \omega) \\ &= \sum_{j=1, \dots, \tilde{m}} \int_{\tilde{u}_j(\text{supp } \tilde{\lambda}_j)} \tilde{\phi}_j^*(\tilde{\lambda}_j \omega). \end{aligned}$$

□

So elegant die Methode der Zerlegung der Eins für die Definition von $\int_M \omega$ auch ist, niemand würde sie benutzen, um konkrete Integrale zu berechnen. Dafür ist das folgende Lemma hilfreich:

Lemma 288. Seien M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^k(M)$, $k = \dim M$, und

$$\phi : \mathbb{R}^k \supset G \rightarrow M$$

eine C^∞ -Abbildung einer kompakten Menge $G \subset \mathbb{R}^k$ mit folgenden Eigenschaften:

(i)

$$\text{supp } \omega \subset \phi(G).$$

(ii) Es gibt eine μ_k -Nullmenge $N \subset G$, so dass $G \setminus N$ offen in H^k und

$$\phi|_{G \setminus N} : G \setminus N \rightarrow M$$

eine positiv orientierte Parametrisierung von M , d.h. das Inverse einer positiv orientierten Karte für M ist.

Dann ist

$$\int_M \omega = \int_G \phi^* \omega.$$

Beweis. Es genügt, den Beweis zu führen für den Fall, dass $\text{supp } \omega$ enthalten ist im Definitionsbereich einer positiv orientierten Karte $u : U \rightarrow H^k$. Dann ist

$$\int_M \omega = \int_{u(\text{supp } \omega)} (u^{-1})^* \omega.$$

Sei $G' := \{x \in G \mid \phi(x) \in U\}$. Dann ist

$$h := u \circ \phi|_{G'} : G' \rightarrow \mathbb{R}^k$$

auf der offenen Menge $G' \setminus N$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von H^k , die $u(\text{supp } \omega)$ enthält. Daher gilt

$$\begin{aligned} \int_{u(\text{supp } \omega)} (u^{-1})^* \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k &= \int_{h(G')} (u^{-1})^* \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k \\ &= \int_{G'} (u^{-1})^* \omega_h(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \underbrace{\det(Dh)}_{>0} d\mu_k \\ &= \int_{G'} h^* (u^{-1})^* \omega_h(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k \\ &= \int_{G'} \phi^* u^* (u^{-1})^* \omega = \int_{G'} \phi^* \omega = \int_G \phi^* \omega. \end{aligned}$$

□

Beispiel 289. Die Kugelkoordinaten

$$[0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow S^2, (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

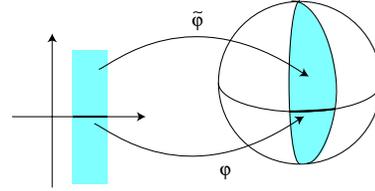
erfüllen die Voraussetzungen des Lemmas, wenn man S^2 mit der Standardorientierung versieht. Darum ist

$$\begin{aligned} \int_{S^2} * \omega^X &= \int_{[0, \pi]} \int_{[0, 2\pi]} \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} d\phi d\theta \\ &= \int_{[0, \pi]} \int_{[0, 2\pi]} \sin \theta d\phi d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

□

Beispiel 290.

Bildet $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \supset G \rightarrow S^{n-1}$ die kompakte Menge G surjektiv auf die Sphäre S^{n-1} ab und ist auf dem offenen Komplement einer Nullmenge ein orientierungstreuer Diffeomorphismus, so leistet



$$\tilde{\phi} : G \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow S^n, (x, t) \mapsto (\phi(x) \cos t, \sin t)$$

dasselbe für S^n .

Wir berechnen die Zurückholung $\tilde{\phi}^*(\ast\omega^X)$ der Flussform $\ast\omega^X \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $X = \frac{x}{\|x\|^{n+1}}$.

Dabei beachten wir, dass $\|\phi\| = \|\tilde{\phi}\| = 1$.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^*(\ast\omega^X)_{(x,t)}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) &= \det\left(\tilde{\phi}, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}\right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \phi(x) \cos t & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \cos t & -\phi(x) \sin t \\ \sin t & 0 & \cos t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos t \sin t} \det \begin{bmatrix} \phi(x) \cos t \sin t & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \cos t & -\phi(x) \sin t \cos t \\ \sin^2 t & 0 & \cos^2 t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos t \sin t} \det \begin{bmatrix} \phi(x) \cos t \sin t & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \cos t & 0 \\ \sin^2 t & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos t \sin t} \det \begin{bmatrix} \phi(x) \cos t \sin t & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \cos t \\ \sin^2 t & 0 \end{bmatrix} \\ &= \cos^{n-1} t \det \begin{bmatrix} \phi(x) & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \end{bmatrix} \\ &= \cos^{n-1} t \phi^*(\ast\omega^X)_x(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Flussform auf dem \mathbb{R}^n steht. Durch Induktion ergibt sich daraus, dass

$$\int_{S^n} \ast\omega^X = \text{Volumen}(S^n),$$

vgl. Beispiel 73.

□

10.4.5 Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten

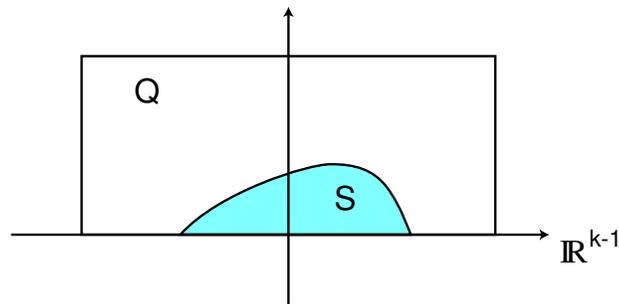
Sei V ein endlich-dimensionaler Banachraum.

Lemma 291. Sei $\omega \in \Omega^{k-1}(H^k)$ mit kompaktem Träger $S \subset H^k$. Wir betrachten \mathbb{R}^{k-1} als Teilmenge $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ von \mathbb{R}^k . Dann gilt

$$\int_S d\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k = (-1)^k \int_{S \cap \mathbb{R}^{k-1}} \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}) d\mu_{k-1}.$$

Beweis. Sei $r > 0$ so gewählt, dass

$$S \subset]-r, r[^{k-1} \times [0, r[\subset [-r, r]^{k-1} \times [0, r] =: Q.$$



Definiere

$$c: I^k \rightarrow Q, \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto (r(2x_1 - 1), \dots, r(2x_{k-1} - 1), rx_k).$$

Dann gilt nach der Transformationsformel Lemma 199 und dem Satz von Stokes für Ketten

$$\int_S d\omega = \int_Q d\omega = \int_{c(I^k)} d\omega = \int_{I^k} c^* d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{\cos^i} \omega - \int_{\cos_i} \omega \right).$$

Aber allenfalls die untere k -te Seite von c trifft den Träger von ω . Wir erhalten

$$\int_S d\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k = (-1)^k \int_{\cos_k} \omega = (-1)^k \int_{S \cap \mathbb{R}^{k-1}} \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}) d\mu_{k-1}.$$

□

Beachten Sie, dass die Identität eine positiv orientierte Karte von H^k ist. Ihre Einschränkung auf \mathbb{R}^{k-1} ist ebenfalls positiv orientiert bezüglich der *Standardorientierung* von \mathbb{R}^{k-1} . Aber die *Randorientierung* von ∂H^k stimmt damit nur bei geradem k überein. Deshalb kann man die Formel der Lemmas auch schreiben als

$$\int_{H^k} d\omega = \int_{\partial H^k} \omega.$$

Das ist die einfachste Version des Satzes von Stokes für Mannigfaltigkeiten, den wir aber nur für kompakte Mannigfaltigkeiten beweisen:

Satz 292 (Stokes). Seien M eine k -dimensionale kompakte, orientierte berandete Untermannigfaltigkeit von V und $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$. Der Rand ∂M trage die induzierte Randorientierung. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Ist insbesondere $\partial M = \emptyset$, so gilt

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis. Seien $(u_i : U_i \rightarrow H^k)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ ein Atlas mit positiv orientierten Karten und sei $(\lambda_i : U_i \rightarrow \mathbb{R})_{i \in \{1, \dots, m\}}$ eine Zerlegung der Eins dazu. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \omega\right) = \sum_{i=1}^m \int_M d(\lambda_i \omega) \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} (u_i^{-1})^* d(\lambda_i \omega)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} d((u_i^{-1})^* \lambda_i \omega)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &\stackrel{\text{(Lemma 291)}}{=} (-1)^k \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i) \cap \mathbb{R}^{k-1}} (u_i^{-1})^* \lambda_i \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}) \\ &= \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

□

Beispiel 293. Für $0 < R \neq 1$ ist $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (1 - \|x\|)(R - \|x\|) \leq 0\}$ eine $(n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M deren Rand die beiden Sphären S_R^n und S^n vom Radius R bzw. 1 mit entgegengesetzten Orientierungen bilden. Sei $*\omega^X$ wie im Beispiel 290. Weil $d*\omega^X = 0$ folgt aus dem Satz von Stokes

$$0 = \int_M d*\omega^X = \pm \left(\int_{S_R^n} *\omega^X - \int_{S^n} *\omega^X \right).$$

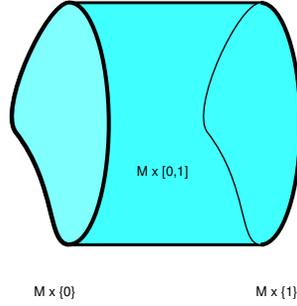
Es folgt also

$$\int_{S_R^n} *\omega^X = \int_{S^n} *\omega^X = \text{Volumen}(S^n).$$

Allgemeiner gilt das für jede kompakte Hyperfläche $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die gemeinsam mit einer Sphäre S_R^n eine kompakte Untermannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^{n+1} berandet.

□

Beispiel 294. Ist M eine kompakte unberandete k -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit, so ist $M \times [0, 1] \subset V \times \mathbb{R}$ eine kompakte berandete $(k+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.



Ein Atlas $(u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k)_{i \in J}$ mit positiv orientierten Karten liefert einen Atlas für $M \times [0, 1]$ mit folgenden Karten:

$$u_i^+ : U_i \times [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^{k+1}, (x, t) \mapsto \begin{pmatrix} u_{i1}(x) \\ u_{i2}(x) \\ \vdots \\ u_{ik}(x) \\ t \end{pmatrix},$$

$$u_i^- : U_i \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}, (x, t) \mapsto \begin{pmatrix} -u_{i1}(x) \\ u_{i2}(x) \\ \vdots \\ u_{ik}(x) \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nach, dass diese Karten gleich-orientiert sind. Wenn man die Randkomponenten $M \times \{0\}$ und $M \times \{1\}$ auf die offensichtliche Weise mit M identifiziert, stimmt bei geradem $k + 1$ die Randorientierung auf $M \times \{0\}$ mit der ursprünglichen Orientierung von M überein, auf $M \times \{1\}$ erhält man die entgegengesetzte Orientierung. Bei ungeradem $k + 1$ kehrt sich das um.

Sei nun N eine weitere k -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^k(N)$. Seien

$$f_0, f_1 : M \rightarrow N$$

zwei homotope Abbildungen, d.h. es gibt eine C^∞ -Abbildung $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ mit

$$F(\cdot, 0) = f_0, \quad F(\cdot, 1) = f_1.$$

Weil ω vom Grad $k = \dim N$ ist, ist $d\omega = 0$. Also ist auch

$$0 = \int_{M \times [0, 1]} F^* d\omega = \int_{M \times [0, 1]} d(F^* \omega) = \int_{\partial M} F^* \omega = \pm \left(\int_M f_0^* \omega - \int_M f_1^* \omega \right).$$

Für homotope Abbildungen $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ gilt also

$$\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega.$$

□

Beispiel 295. Wir wenden das an auf den Fall $M = N = S^k$ und die *Antipodenabbildung*

$$\alpha : S^k \rightarrow S^k, x \mapsto -x.$$

Weil die Form $\eta := *\omega^X \in \Omega^k(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\})$ die Orientierung von S^k definiert, ist

$$\int_{S^k} \eta > 0.$$

Nun ist aber

$$(\alpha^*\eta)_p(v_1, \dots, v_k) = \eta_{-p}(-v_1, \dots, -v_k) = \det(-p, -v_1, \dots, -v_k) = (-1)^{k+1} \eta_p(v_1, \dots, v_k).$$

Für gerades k ist also

$$\int_{S^k} \alpha^*\eta < 0$$

und die Antipodenabbildung damit *nicht* homotop zur Identität $\text{id} : S^k \rightarrow S^k$.

Sei nun $T : S^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ eine C^∞ -Abbildung mit

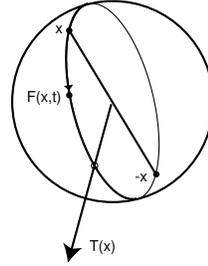
$$\langle x, T(x) \rangle = 0$$

für alle $x \in S^k$. Dann nennt man T auch ein tangentes Vektorfeld auf der Sphäre S^k .

Hat T keine Nullstelle, so liefert

$$F(x, t) := \cos(\pi t) x + \sin(\pi t) \frac{T(x)}{\|T(x)\|}$$

eine Homotopie $F : S^k \times [0, 1] \rightarrow S^k$ zwischen der Identität und der Antipodenabbildung.



Solche Abbildungen können also nur für ungerades k existieren. (Tun sie auch!) Für gerades k , insbesondere für $k = 2$ hat hingegen jedes tangentes Vektorfeld auf der k -Sphäre mindestens eine Nullstelle:

Jeder glatt gekämmte Igel hat mindestens einen Glatzpunkt.

□

10.4.6 Der Abbildungsgrad

In diesem Abschnitt skizzieren wir die Definition einer Homotopieinvarianten für Selbstabbildungen der $(n - 1)$ -dimensionalen Einheitskugel

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Lemma 296. *Seien $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zusammenhängender kompakter k -Mannigfaltigkeiten und $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann gilt*

$$\int_M f^* \omega = \pm \int_N \omega.$$

Wir verzichten auf den Beweis. Er benutzt die Definition des Integrals über Mannigfaltigkeiten und das Lemma 199.

Sei wieder $X := \frac{x}{\|x\|^n}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir versehen S^{n-1} mit der von $*\omega^X$ induzierten Orientierung. Dann ist

$$c_{n-1} := \int_{S^{n-1}} \omega_{n-1} > 0.$$

$$\omega_{n-1} := *\omega^X \in \Omega(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

(Tatsächlich ist dies das Volumen der Kugel.) Wir setzen im folgenden

$$\omega_{n-1} := \frac{1}{c_{n-1}} *\omega^X.$$

Dann ist also $\int_{S^{n-1}} \omega_{n-1} = 1$.

Satz 297 (Abbildungsgrad). *Sei $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ eine C^∞ -Abbildung. Dann ist*

$$\deg(f) := \int_{S^{n-1}} f^* \omega_{n-1}$$

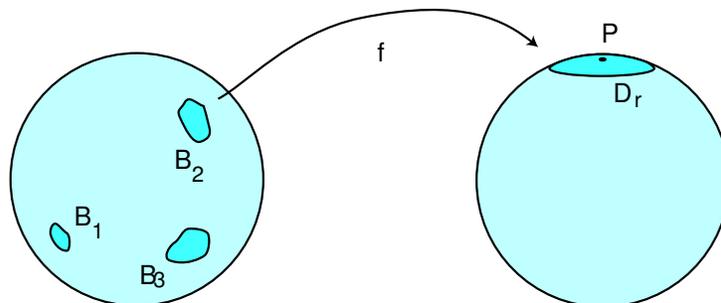
eine ganze Zahl, der sogenannte Abbildungsgrad von f .

Bemerkung. Nach Beispiel 294 ist $\deg(f_0) = \deg(f_1)$, wenn f_0 und f_1 homotop sind.

Beweis. Sei $P := e_n$ der „Nordpol“ von S^{n-1} und für $r > 0$

$$D_r := \{x \in S^{n-1} \mid \|P - x\| \leq r\}$$

die „Polkappe“ vom Radius r .



Wir nehmen zunächst folgendes an:

Es gibt ein $r > 0$, so dass $f^{-1}(D_r)$ die Vereinigung von endlich vielen disjunkten Mengen $B_1, \dots, B_k \subset S^{n-1}$ ist, die jeweils durch f diffeomorph auf D_r abgebildet werden. (*)

Dann ist

$$\int_{S^{n-1}} f^* \omega_{n-1} = \int_{S^{n-1} \setminus \bigcup B_i} f^* \omega_{n-1} + \sum_{i=1}^k \int_{B_i} f^* \omega_{n-1}. \quad (78)$$

Wir betrachten das erste Integral rechts. Nach dem Lemma von Poincaré besitzt ω_{n-1} auf dem sternförmigen Komplement der Halbachse $\{\lambda P \mid \lambda \geq 0\}$ ein Potential θ_{n-2} . Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1} \setminus \bigcup B_i} f^* d\theta_{n-2} &= \int_{S^{n-1} \setminus \bigcup B_i} df^* \theta_{n-2} = \int_{\partial(S^{n-1} \setminus \bigcup B_i)} f^* \theta_{n-2} \\ &= - \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_i} f^* \theta_{n-2} \stackrel{\text{Lemma 296}}{=} - \sum_{i=1}^k \pm \int_{\partial D_r} \theta_{n-2} \\ &= \sum_{i=1}^k \pm \int_{\partial(S^{n-1} \setminus D_r)} \theta_{n-2} = \sum_{i=1}^k \pm \int_{S^{n-1} \setminus D_r} d\theta_{n-2} \\ &= \sum_{i=1}^k \pm \int_{S^{n-1} \setminus D_r} \omega_{n-1} = m \int_{S^{n-1} \setminus D_r} \omega_{n-1} \end{aligned}$$

für ein ganzzahliges m .

Für $r \rightarrow 0$ geht dies gegen $m \int_{S^{n-1}} \omega_{n-1} = m$, während die B_i jeweils auf einen Punkt schrumpfen. Die B_i -Integrale in (78) gehen daher gegen 0 und aus (78) folgt die Behauptung.

Wir skizzieren nun noch, warum man ohne Einschränkung die Annahme (*) machen kann. Wir setzen f durch $\tilde{f}(x) := \|x\| f(\frac{x}{\|x\|})$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fort und wenden darauf das Lemma von Sard an. Man rechnet nach, dass $Q \in \mathbb{R}^n$ genau dann ein regulärer Wert von \tilde{f} ist, wenn dasselbe für $Q/\|Q\|$ gilt. Wir können also o.E. annehmen, dass $P = \mathbf{e}_n$ ein regulärer Wert ist. Nach dem Umkehrsatz bildet f dann eine Umgebung eines jeden Punktes $\in f^{-1}(\{p\})$ diffeomorph ab. Weil S^{n-1} kompakt ist, ist $f^{-1}(\{p\}) = \{p_1, \dots, p_k\}$ endlich und eine Umgebung U_i von p_i wird diffeomorph auf eine offene Umgebung von P abgebildet. Wir können annehmen, dass die U_i disjunkt sind. Wählt man $r > 0$ so klein, dass

$$D_r \subset \left(\bigcap_{i=1}^k f(U_i) \right) \setminus f(S^{n-1} \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i),$$

so folgt (*). □

Bemerkungen.

1. Der Beweis liefert eine anschauliche Interpretation des Abbildungsgrades: Dieser zählt einfach die Urbilder eines regulären Wertes von f mit Vielfachheiten ± 1 abhängig davon, ob f in diesen Punkten die Orientierung erhält oder umkehrt.
2. Eine Standardanwendung des Abbildungsgrades ist diese: Gegeben sei eine Abbildung $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und ein $y \in \mathbb{R}^n$. Man möchte wissen, ob

$$f(x) = y$$

eine Lösung besitzt. Wenn $y \in f(S^{n-1})$ ist das klar. Andernfalls betrachtet man die Abbildungen

$$g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - y}{\|f(x) - y\|}.$$

Wenn $\deg(g) \neq 0$, besitzt die Gleichung eine Lösung.

Andernfalls wäre nämlich $f((1-s)x) \neq y$ für alle $s \in [0, 1]$ und

$$G(x, s) : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{f((1-s)x) - y}{\|f((1-s)x) - y\|}$$

eine Homotopie zwischen g und einer konstanten Abbildung, also $\deg(g) = 0$.

3. In der Funktionentheorie spielt die Umlaufzahl eines geschlossenen Weges $c : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ bezüglich eines Punktes $z_0 \notin c(S^1)$ eine wichtige Rolle. Sie wird definiert als

$$n(c, z_0) := \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{1}{z - z_0} dz$$

Diese Umlaufzahl ist gerade der Abbildungsgrad von

$$g(x) := \frac{c(x) - z_0}{|c(x) - z_0|}.$$

Das beweist man mittels der Identität

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} dz &= \frac{1}{x + iy} (dx + idy) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} (dx + idy) \\ &= \frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) + i \left(\frac{xdy}{x^2 + y^2} + \frac{-ydx}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

10.4.7 Der Antipodensatz

Satz 298 (Antipodensatz von Borsuk-Ulam (1933)). Sei $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ eine ungerade C^∞ -Abbildung, d.h. es gelte

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \in S^{n-1}.$$

Dann ist der Abbildungsgrad von f ungerade, insbesondere also $\neq 0$.

Beweis. Der Beweis benutzt vollständige Induktion über n . Die topologischen Argumente sind ähnlich denen in Beweis von Satz 297.

Wir bezeichnen

$$S := S^{n-1}, \quad S_0 := S^{n-2} \subset S, \quad S_+ := \text{abgeschlossene obere Hemisphäre.}$$

n=1. Dann ist $f(-1) = -f(1)$, also f bijektiv und der Abbildungsgrad daher $= \pm 1$.

n=2. Wir wählen in $S \setminus (f(S_0) \cup S_0)$ einen regulären Wert N von f . Dann ist auch $-N$ ein regulärer Wert. Wir bezeichnen mit $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ die Projektion entlang der Geraden $\mathbb{R}N$ und definieren

$$G : S_+ \setminus f^{-1}(\{N, -N\}) \rightarrow S_0, x \mapsto \frac{\pi \circ f(x)}{\|\pi \circ f(x)\|}.$$

Sei $f^{-1}(\{N, -N\}) \cap S_+ = \{p_1, \dots, p_r\}$ mit paarweise verschiedenen p_i . Das Komplement von $\{p_1, \dots, p_r\}$ in $S_+ \setminus S_0$ besteht aus $r + 1$ Intervallen, die durch G jeweils in einen der zwei Punkte von S_0 abgebildet werden. Weil f in den p_i regulär ist, werden aufeinander folgende Intervalle in verschiedene Punkte von S_0 abgebildet. Weil $G|_{S_0}$ wieder ungerade ist, werden die Punkte von S_0 , also auch die daran angrenzenden Intervalle (das „erste“ und das „letzte“) in verschiedene Punkte von S_0 abgebildet. Damit ist r ungerade, und weil f eine ungerade Abbildung ist, erhalten wir

$$1 \equiv r = \#(f^{-1}(\{N, S\}) \cap S_+) = \frac{1}{2} \#(f^{-1}(\{N, S\})) = \#(f^{-1}(\{N\})) \equiv \deg(f). \quad (79)$$

$(n-1) \rightarrow n, n \geq 3$. Nach dem Satz von Sard ist $f(S_0) \neq S$. Weil $f(S_0)$ überdies kompakt ist, gibt es wieder nach dem Satz von Sard einen regulären Wert N von f im Komplement von $f(S_0) \cup S_0$. Nach der Voraussetzung über f ist dann auch $-N$ ein regulärer Wert von f im Komplement von $f(S_0)$.

Sei $f^{-1}(\{N, -N\}) \cap S_+ = \{p_1, \dots, p_r\}$. Seien $U_1, \dots, U_r \subset S_+ \setminus S_0$ paarweise disjunkte offene Umgebungen um die p_i , die durch f diffeomorph auf eine kleine offene Kugel um N bzw. $-N$ abgebildet werden, vgl. den Beweis zu Satz 297. Wir bezeichnen mit

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

die Projektion entlang der Achse $\mathbb{R}N$ und betrachten die Abbildungen

$$G : S_+ \setminus \left(\bigcup B_i \right) \rightarrow S_0, x \mapsto \frac{\pi \circ f(x)}{\|\pi \circ f(x)\|}, \quad g := G|_{S_0}.$$

Dann ist g wieder ungerade, hat nach Induktionsvoraussetzung also ungeraden Abbildungsgrad. Sei $\omega_{n-2} \in \Omega(\mathbb{R}^{n-1})$ wie im Abschnitt 10.4.6. Dann gilt

$$\int_{\partial(S_+ \setminus (\bigcup B_i))} G^* \omega_{n-2} = \int_{S_+ \setminus (\bigcup B_i)} G^* d\omega_{n-2} = 0. \quad (80)$$

Andrerseits ist aber nach Lemma 296

$$\int_{\partial \bar{U}_i} G^* \omega_{n-2} = \pm \int_{S_0} \omega_{n-2} = \pm 1$$

und daher

$$\int_{\partial(S_+ \setminus (\cup B_i))} G^* \omega_{n-2} = - \int_{S_0} g^* \omega_{n-2} - \sum \left(\int_{\partial \bar{U}_i} G^* \omega \right) = - \deg(g) - \sum_1^r \pm 1. \quad (81)$$

Nach (80), (81) ist also r ungerade. Aus (79) folgt die Behauptung. \square

Korollar 299. Für jede stetige Abbildung $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es ein $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

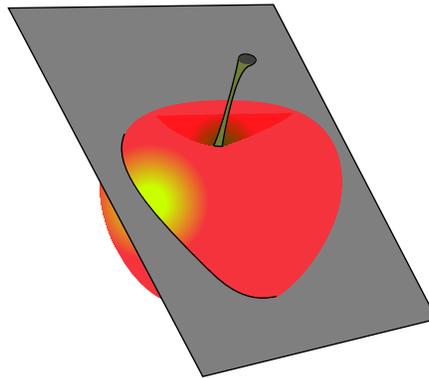
Beweis. Andernfalls wäre $\min_{x \in S^n} \|f(x) - f(-x)\| =: \epsilon > 0$, und man könnte wie im Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer f approximieren durch eine C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\min_{x \in S^n} \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)\| > \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist

$$g(x) := \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)}{\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)\|}$$

eine ungerade C^∞ -Abbildung $g : S^n \rightarrow S^{n-1} \subset S^n$

Offenbar ist $g(S^n) \neq S^n$ und deshalb ist $\deg(g) = 0$ im Widerspruch zum Antipodensatz. \square

Korollar 300. Man kann einen Apfel durch einen ebenen Schnitt so teilen, dass beide Teile dieselbe Menge an Kalorien, Vitaminen und Schadstoffen enthalten.



Beweis. Wir betrachten den \mathbb{R}^3 als eingebettet in den \mathbb{R}^4 . Seien $k, v, s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Dichteverteilungen der Kalorien, Vitamine bzw. Schadstoffe. Für $x \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$ setzen wir

$$M(x) := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y \rangle \geq \langle x, e_4 \rangle\} = \{y \mid x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \geq x_4\}.$$

Das ist also ein Halbraum im \mathbb{R}^3 . Wir definieren $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x) := \left(\int_{M(x)} k \, d\mu_3, \int_{M(x)} v \, d\mu_3, \int_{M(x)} s \, d\mu_3 \right)$$

und setzen voraus, dass $f \in C^\infty$. Dann gibt es ein x mit $f(x) = f(-x)$, d.h. von allen drei Ingredienzien liegt genauso viel im Halbraum $M(x)$ wie in seinem Komplement. \square

Korollar 301. Für $m \neq n$ ist \mathbb{R}^m nicht homöomorph zu \mathbb{R}^n .

Beweis. Sei $m < n$. Dann ist die Inklusion $j : S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^n$ eine injektive Abbildung. Gäbe es einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so wäre $h \circ j : S^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ebenfalls injektiv im Widerspruch zu Korollar 299.

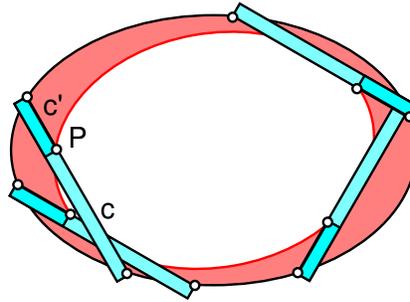
□

Derselbe Beweis liefert: Für $m \neq n$ sind \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n nicht einmal lokal homöomorph. Ist $G \subset \mathbb{R}^m$ offen, nicht leer und homöomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n , so folgt $m = n$.

10.4.8 Der Satz von Holditch

Wir schließen mit einer ebenso „harmlosen“ wie hübschen Anwendung des Satzes von Stokes und der Umlaufzahl auf ein geometrisches Problem in der Ebene.

Satz 302 (Holditch). *A rod CC' of a given length has its two ends in the curve of an ellipse and moved round, having a tracing point P , at the distances c and c' from its ends, tracing a curve. The area contained between the curve and the ellipse $= \pi cc'$, and is therefore independent of the ellipse.*



Der Satz wurde von einem in der Mathematik weiter nicht bekannten Herrn Holditch unter dem Pseudonym „Petrarch“ als „Prize quest XV“ in „The Lady’s and Gentleman’s Diary for the Year of Our Lord 1857“ publiziert. Im nächsten Jahrgang findet man eine „General solution“ des ebenfalls weiter nicht bekannten W.S.B. Woolhouse, mit folgendem Ergebnis:

Let C, C' and P denote the areas of the curves described by those points respectively. Then

$$P = \frac{c'C + cC'}{c + c'} - cc'\pi.$$

In obtaining this remarkable general formula we have assumed the curves to return into themselves and the angle the rod makes with the x -axis to revolve through 2π , but in all other respects the reasoning obviously holds good absolutely. It is not even necessary that the curves described by C, C' should have any algebraic equation. They may, indeed, be any lines drawn at random.

Ich gebe eine moderne Formulierung dieses hübschen Satzes. Siehe auch A. Broman, Holditch’s Theorem, Mathematics Magazine **54**, 1981.

Definition 303. Seien $c, c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschlossene C^∞ -Kurven.

- (i) Setze $\tilde{c}(s, t) := sc_1(t) + (1 - s)c_2(t)$ für $(s, t) \in I^2$ und definiere

$$A(c_1, c_2) := \int_{\tilde{c}} dx \wedge dy.$$

Ist \tilde{c} im wesentlichen injektiv und orientierungstreu, so gibt $A(c_1, c_2)$ die Fläche von $\tilde{c}(I^2)$ an. Deshalb nennt man \tilde{c} die *algebraische Fläche zwischen c_1 und c_2* .

- (ii) Setze

$$A(c) := \int_c x dy = \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx.$$

Ist $c : [0, 1] \rightarrow S^1$, so ist also $A(c) = \frac{1}{2} \int_c * \omega^X$.

Lemma 304.

$$A(c_1, c_2) = A(c_1) - A(c_2).$$

Ist insbesondere c_2 konstant, so gilt $A(c_1) = A(c_1, c_2)$, und das ist die von c eingeschlossene algebraische Fläche.

Lemma 305. Definiert man $(c_1 + c_2)(t) := c_1(t) + c_2(t)$, so gilt

$$\begin{aligned} B(c_1, c_2) &:= A(c_1 + c_2) - A(c_1) - A(c_2) \\ &= \int_0^1 (x \circ c_1)(t)(y \circ c_2)'(t) dt + \int_0^1 (x \circ c_2)(t)(y \circ c_1)'(t) dt \end{aligned}$$

Insbesondere ist B in jedem Argument homogen:

$$B(\lambda c_1, c_2) = \lambda B(c_1, c_2) = B(c_1, \lambda c_2).$$

Satz 306 (Holditch/Woolhouse). Seien $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschlossene C^∞ -Kurven und $\|c_2 - c_1\| = l > 0$ konstant. Seien $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ mit $l_1 + l_2 = l$ und sei

$$c_3 := c_1 + \frac{l_1}{l}(c_2 - c_1).$$

Dann gilt

$$\frac{l_1 A(c_2) + l_2 A(c_1)}{l} = A(c_3) + n(\gamma, 0)\pi l_1 l_2,$$

wobei $n(\gamma, 0)$ die Umlaufzahl der Kurve

$$\gamma := \frac{c_2 - c_1}{l}$$

(also der „Stabesrichtung“ um 0 ist.

Ist insbesondere $A(c_1) = A(c_2)$, z.B. weil c_1, c_2 (wie bei der ersten Formulierung von Herrn Holditch) bis auf eine Parameterverschiebung dieselbe Kurve sind, so folgt

$$A(c_1, c_3) = A(c_1) - A(c_3) = n(\gamma)\pi l_1 l_2.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} A(c_2) &= A(c_3 + \frac{l_2}{l}(c_2 - c_1)) \\ &= A(c_3) + A(\frac{l_2}{l}(c_2 - c_1)) + B(c_3, \frac{l_2}{l}(c_2 - c_1)) \\ &= A(c_3) + l_2^2 A(\gamma) + l_2 B(c_3, \gamma) \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned} A(c_1) &= A(c_3 - \frac{l_1}{l}(c_2 - c_1)) \\ &= A(c_3) + l_1^2 A(\gamma) - l_1 B(c_3, \gamma), \end{aligned}$$

und daraus folgt durch Elimination von B die Behauptung. □