

Universität Karlsruhe (TH)

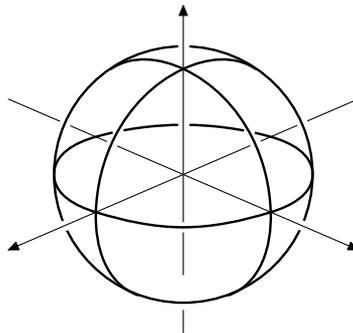
Fakultät für Mathematik

Mathematisches Institut II

Prof. Dr. Enrico Leuzinger

SKRIPT ZUR VORLESUNG

DIFFERENTIAL- GEOMETRIE



Sommersemester 2005

Inhaltsverzeichnis

I	Kurven	1
1	Euklidische Geometrie	1
1.1	Der \mathbb{R}^n als euklidischer Raum	1
1.2	Ableitung von Skalarprodukt und Vektorprodukt	2
2	Parametrisierte Kurven in \mathbb{R}^n	2
2.1	Ein Definitionsversuch	2
2.2	Differenzierbare Kurven	3
2.3	Tangentialvektoren	3
3	Länge und Bogenlängeparameter	4
3.1	Die Länge einer Kurve	4
3.2	Parametertransformationen	6
3.3	Reguläre Kurven und Bogenlänge	7
4	Krümmung von Kurven	8
4.1	Motivation und Definition	8
4.2	Die orientierte Krümmung für ebene Kurven	10
5	Frenet-Formeln und Hauptsatz	11
5.1	Frenet-Formeln für ebene Kurven	11
5.2	Frenet-Formeln für Raumkurven	14
6	Ausblick auf die globale Kurventheorie	18
6.1	Totalkrümmung, Umlaufsatz von Hopf	18
6.2	Konvexe Kurven	22
II	Flächen	23
7	Reguläre Flächen im \mathbb{R}^3	23
7.1	Die Tangentialabbildung	23
7.2	Reguläre Flächen	24
7.3	Tangentialebenen einer Fläche	26
8	Beispiele	28
8.1	Affine Ebenen	28
8.2	Graphen von Funktionen	29
8.3	Die 2-Sphäre	30
8.4	Implizit definierte Flächen	31
8.5	Rotationsflächen	33

9 Die 1. Fundamentalform	34
9.1 Definition	34
9.2 Länge von Flächenkurven	35
9.3 Winkel zwischen Parameterlinien	36
9.4 Verhalten von I bei Koordinatenwechsel	36
III Krümmung von Flächen	38
10 Gauß- und Weingarten-Abbildung	38
10.1 Differenzierbare Abbildungen	38
10.2 Das Tangentialbündel	39
10.3 Normalenfelder	40
10.4 Gauß- und Weingarten-Abbildung	42
11 Gauß-Krümmung und mittlere Krümmung	47
11.1 Die Normalschnittkrümmung	47
11.2 Hauptkrümmungen	50
11.3 Die Gauß-Krümmung	50
11.4 Formeln für K und H in lokalen Koordinaten	51
12 Rotationsflächen mit konstanter Gauß-Krümmung	55
13 Minimalflächen	56
IV Innere Geometrie von Flächen	61
14 Lokale Isometrien	61
14.1 Ein Beispiel	61
14.2 Isometrien	62
15 Christoffel-Symbole und Theorema egregium	64
16 Kovariante Ableitung und Geodätische	67
16.1 Die kovariante Ableitung	67
16.2 Geodätische	69
16.3 Die Differentialgleichung für Geodätische	71
17 Geodätische auf Rotationsflächen	72
18 Kürzeste Kurven sind Geodätische	74
19 Geodätische Parallelkoordinaten	77

20	Parallelverschiebung und geodätische Krümmung	83
20.1	Parallele Vektorfelder	83
20.2	Parallelverschiebung	85
20.3	Parallelverschiebung und Krümmung	86
V	Der Satz von Gauß-Bonnet und Folgerungen	92
21	Umlaufsatz und Satz von Gauß-Bonnet	92
21.1	Der Umlaufsatz für Flächenkurven	92
21.2	Satz von Gauß-Bonnet (lokale Version)	95
21.3	Folgerungen	97
22	Mannigfaltigkeiten (light)	98
22.1	Definition	98
22.2	Beispiele	101
23	Klassifikationssatz für kompakte 2-Mannigfaltigkeiten	102
23.1	Chirurgie	102
23.2	Der Klassifikationssatz	105
24	Satz von Gauß-Bonnet (Globale Version)	106
24.1	Triangulierungen	106
24.2	Der Satz von Gauß-Bonnet	107
	Anhang	109
A	Einige Grundbegriffe der Topologie	109
B	Fragen zur Lernkontrolle	111
C	Historische Anmerkungen	113
D	Literatúrauswahl	115

Teil I

Kurven

1 Euklidische Geometrie

1.1 Der \mathbb{R}^n als euklidischer Raum

Ein *euklidischer Vektorraum* ist ein reeller Vektorraum E versehen mit einem Skalarprodukt. Wir betrachten den Spezialfall $E = \mathbb{R}^n$ mit dem *Standard-Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

für $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Mittels $\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}$ erhält man eine *Norm* auf \mathbb{R}^n und durch $d(a, b) := \|a - b\|$ eine *Metrik*. Der *Winkel* $\angle(a, b)$ zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren a und b wird durch

$$\cos \angle(a, b) := \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$

definiert. Eine *euklidische Isometrie* oder eine *Bewegung* ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y).$$

Nach Definition von d ist diese Bedingung äquivalent zu $\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Beispiele von Isometrien sind Translationen, Spiegelungen und Rotationen. Ist $a \in \mathbb{R}^n$, so bezeichnet $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die *Translation* $x \mapsto x + a$. Sei A eine orthogonale Abbildung, d. h. A ist linear und $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Eine orthogonale Abbildung ist dadurch charakterisiert, dass ihre Darstellungsmatrix M bezüglich der Standardbasis orthogonal ist, also $M \in O(n)$. Für $z \in \mathbb{R}^n$ ist

$$R_{A,z} := T_z \circ A \circ T_{-z}$$

eine *Rotation* (oder Drehung) um z . Der Punkt z ist ein Fixpunkt von R und jede Rotation um z ist von obiger Form (für ein geeignetes A). Die Rotation heißt eigentlich, falls $\det A > 0$ (die entsprechende Abbildungsmatrix ist dann in der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(n)$).

Die Isometrien des \mathbb{R}^n bilden bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe. Aus der linearen Algebra ist folgender Satz bekannt (vgl. E.G. Rees, Notes on Geometry, Part I, Thm. 5).

Satz 1. *Jede euklidische Isometrie ist als Verknüpfung einer Rotation mit einer Translation darstellbar.*

1.2 Ableitung von Skalarprodukt und Vektorprodukt

Wir wollen als Vorbereitung noch die „Ableitung“ des Skalarprodukts und des Vektorprodukts bestimmen. Dazu seien $s \mapsto a(s)$ und $s \mapsto b(s)$ zwei differenzierbare Abbildungen von einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nach \mathbb{R}^n . Dann ist

$$s \mapsto \langle a(s), b(s) \rangle = \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(s)$$

eine differenzierbare Funktion und es gilt die Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle a(s), b(s) \rangle &= \frac{d}{ds} \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(s) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i'(s)b_i(s) + a_i(s)b_i'(s)) \\ &= \langle a'(s), b(s) \rangle + \langle a(s), b'(s) \rangle. \end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir das Vektorprodukt $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Definitionsgemäß gilt für $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

Sind $s \mapsto a(s)$ und $s \mapsto b(s)$ differenzierbare Abbildungen von $I \subseteq \mathbb{R}$ nach \mathbb{R}^3 , so rechnet man leicht nach, dass ebenfalls eine Produktregel gilt

$$\frac{d}{ds} (a(s) \wedge b(s)) = a'(s) \wedge b(s) + a(s) \wedge b'(s).$$

2 Parametrisierte Kurven in \mathbb{R}^n

2.1 Ein Definitionsversuch

Die naheliegende Definition einer Kurve ist folgende: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine „Kurve“ in \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diese Definition läßt dann aber Spezialfälle zu, die man nicht unbedingt als Kurven bezeichnen möchte. So gibt es zum Beispiel eine stetige, surjektive Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$. Gemäß obiger Definition wäre also das Einheitsquadrat in \mathbb{R}^2 das Bild einer Kurve. Wir wollen das Konstruktionsprinzip einer solchen *Peano-Kurve* skizzieren, vgl. Abb. 2.1. Man betrachtet das Einheitsquadrat und die wie in (a) eingezeichnete Kurve. Eine Skalierung mit dem Faktor $1/2$, Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn um den eingezeichneten Punkt und Verschiebung um den Vektor $(0, 1/2)$ führt auf die Abbildung (b). Wir spiegeln an der in (c) eingezeichneten Achse, verschieben um den Vektor $(1/2, 0)$ und verbinden die Endpunkte der vier Kurven wie in

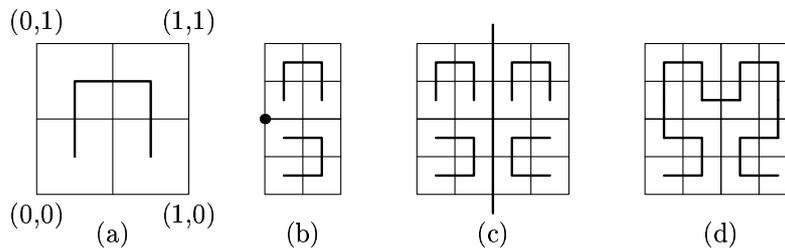


Abbildung 2.1: Konstruktion einer Peano-Kurve

(d). Ausgehend von (d) wiederholt man jetzt diese Schritte. Im Grenzfall erhält man schließlich eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ auf das Einheitsquadrat (vgl. z.B. Königsberger, Analysis 1, S. 282).

2.2 Differenzierbare Kurven

Um Phänomene wie im letzten Abschnitt, also z.B. raumfüllende Kurven, auszu-schließen, muss die Definition entsprechend eingeschränkt werden. Zunächst noch eine technische Vorbemerkung: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so heißt c differenzierbar, wenn es ein offenes Intervall $I^* \supseteq I$ und eine differenzierbare Abbildung c^* gibt mit $c^*|_I = c$.

Definition 1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine parametrisierte Kurve ist eine C^∞ -Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$, d.h. die Ableitungen

$$x_i^{(k)}(t) := \frac{d^k x_i}{dt^k}(t)$$

existieren für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, n$. Im Fall $n = 2$ (bzw. $n = 3$) nennt man c ebene Kurve (bzw. Raumkurve).

Bemerkung (a) Oft fordert man nur, dass c eine C^k -Abbildung ist (also k mal stetig differenzierbar für ein festes $k \in \mathbb{N}$).

(b) Eine parametrisierte Kurve ist eine Abbildung und nicht mit der Bildmenge $c(I) \subset \mathbb{R}^n$ zu verwechseln. Die Menge $c(I)$ nennt man manchmal auch die *Spur* von c . Da Intervalle zusammenhängend und differenzierbare Kurven insbesondere auch stetig sind, ist die Spur einer parametrisierten Kurve ebenfalls zusammenhängend.

2.3 Tangentialvektoren

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Der *Tangentialraum* von \mathbb{R}^n im Punkt x ist die Menge

$$T_x \mathbb{R}^n := \{x\} \times \mathbb{R}^n = \{(x, a) \mid a \in \mathbb{R}^n\}.$$

Mittels der Bijektion $T_x \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, a) \mapsto a$ versehen wir $T_x \mathbb{R}^n$ mit der Struktur eines reellen Vektorraums. Damit wird diese Bijektion zu einem Vektorraum-Isomorphismus. Die Elemente des Tangentialraums $T_x \mathbb{R}^n$ heißen *Tangentialvektoren*.

Den Punkt x bezeichnet man als Fußpunkt von $v = (x, a) \in T_x \mathbb{R}$. Einen Tangentialvektor kann man sich als einen im Punkt x angehefteten Vektor a vorstellen. Den *Tangentialvektor an eine parametrisierte Kurve* c im Punkt $c(t)$ definieren wir als $(c(t), c'(t)) \in T_{c(t)} \mathbb{R}^n$, wobei

$$c'(t) := \frac{dc}{dt}(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)).$$

Vermöge der obigen Bijektion schreiben wir für $(c(t), c'(t))$ oft nur $c'(t)$. Auch wenn wir den Fußpunkt in der Schreibweise nicht explizit aufführen, muss man sich im Klaren sein, dass $c'(t)$ einen eindeutig bestimmten Fußpunkt hat, der aus dem Kontext immer ersichtlich sein sollte. Die *Tangente* an c im Punkt $c(t)$ ist die affine Gerade $s \mapsto c(t) + sc'(t)$, vgl. Abb. 2.2. Diese Definition ist natürlich nur sinnvoll, wenn $c'(t)$ nicht verschwindet.

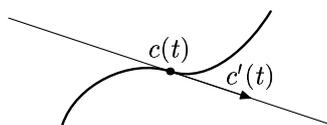


Abbildung 2.2: Tangente und Tangentialvektor

Beispiele (a) Gerade: Wir betrachten die affine Gerade $c(t) = a + tb$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $c'(t) = b = \text{konstant}$.

(b) Kreis: Sei

$$c_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r \cos(\alpha t), r \sin(\alpha t)).$$

Die Spur von c_α ist ein Kreis mit Zentrum 0 und Radius $r > 0$. Für den Tangentialvektor im Punkt $c_\alpha(t)$ erhalten wir

$$c'_\alpha(t) = (-r\alpha \sin(\alpha t), r\alpha \cos(\alpha t)).$$

Dieser Vektor steht stets senkrecht auf dem Vektor $c_\alpha(t)$, vgl. Abb. 2.3.

(c) Helix: Die Kurve

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto (\alpha \cos(t), \alpha \sin(t), \beta t), \quad (\alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}),$$

heißt *Helix* oder *Schraubenlinie*, vgl. Abb. 2.3. Für $\alpha = 0$ erhält man eine Gerade, für $\beta = 0$ einen Kreis in der Ebene $z = 0$.

3 Länge und Bogenlängeparameter

3.1 Die Länge einer Kurve

Definition 2. Die Länge $L(c)$ einer parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$L(c) := \int_I \|c'(t)\| dt.$$

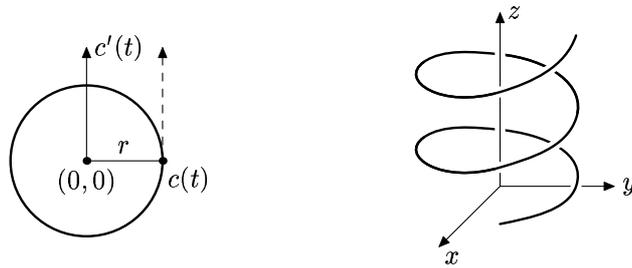


Abbildung 2.3: Tangentialvektor an einen Kreis und eine Helix

Beispiele (a) Die Kurve $c : I = [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto e^{-t}(\cos t, \sin t)$ heißt *Logarithmische Spirale*. Es ist

$$c'(t) = -e^{-t}(\cos t, \sin t) + e^{-t}(-\sin t, \cos t)$$

und $\|c'(t)\|^2 = 2e^{-2t}$. Daraus folgt

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| dt = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \sqrt{2}.$$

(b) Die Spur der Kurve $c : I = [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\alpha \cos t, \beta \sin t)$, $\alpha \geq \beta > 0$, ist eine Ellipse. Wegen $c'(t) = (-\alpha \sin t, \beta \cos t)$ folgt

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 \sin^2 t + \beta^2 \cos^2 t} dt.$$

Das ist ein sogenanntes elliptisches Integral; es ist nicht elementar darstellbar.

Satz 2. Die Länge von Kurven ist invariant unter Isometrien, d.h. ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und ϕ eine Isometrie, so gilt $L(\phi \circ c) = L(c)$.

Beweis. Wegen Satz 1 genügt es die Behauptung für Translationen und Rotationen zu zeigen. Da diese differenzierbar sind, ist $\phi \circ c$ selbst wieder eine parametrisierte Kurve. Sei also zunächst $\phi = T_a$, $a \in \mathbb{R}^n$, eine Translation. Dann ist

$$(\phi \circ c)(t) = c(t) + a \quad \text{und} \quad (\phi \circ c)'(t) = c'(t).$$

Damit folgt unmittelbar aus der Definition der Länge, daß $L(\phi \circ c) = L(c)$. Sei schliesslich $\phi = R_{A,z}$ eine Rotation. Aus der Definition von $R_{A,z}$ folgt

$$(\phi \circ c)'(t) = Ac'(t).$$

Da A eine orthogonale Abbildung ist, gilt $\|Ac'\| = \|c'\|$ und damit auch in diesem Fall $L(\phi \circ c) = L(c)$. \square

3.2 Parametertransformationen

Es sei $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine gegebene parametrisierte Kurve und I ein weiteres Intervall. Eine *Parametertransformation* ist ein Diffeomorphismus $\varphi : I \rightarrow \tilde{I}$, d.h. φ ist bijektiv, differenzierbar (d.h. hier also C^∞) und die inverse Abbildung $\varphi^{-1} : \tilde{I} \rightarrow I$ ist ebenfalls differenzierbar. Man sagt, daß die Kurve $c := \tilde{c} \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ aus \tilde{c} durch die Parametertransformation φ entsteht:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{I} & \xrightarrow{\tilde{c}} & \mathbb{R}^n \\ \varphi \uparrow & \nearrow c & \\ I & & \end{array} .$$

Satz 3. *Die Länge von parametrisierten Kurven ist invariant unter Parametertransformationen: Entsteht c aus \tilde{c} durch Parametertransformation, so gilt $L(c) = L(\tilde{c})$.*

Beweis. Es sei $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r \mapsto \tilde{c}(r)$, eine parametrisierte Kurve und $\varphi : I \rightarrow \tilde{I}$, $t \mapsto r = \varphi(t)$ eine Parametertransformation. Für $c := \tilde{c} \circ \varphi$ gilt dann

$$L(c) = \int_I \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt = \int_I \left\| \frac{d(\tilde{c} \circ \varphi)}{dt}(t) \right\| dt.$$

Mit Kettenregel und Substitutionsregel folgt weiter

$$\int_I \left\| \frac{d(\tilde{c} \circ \varphi)}{dt}(t) \right\| dt = \int_I \left\| \frac{d\tilde{c}}{dr}(\varphi(t)) \right\| |\varphi'(t)| dt = \int_{\tilde{I}} \left\| \frac{d\tilde{c}}{dr}(r) \right\| dr = L(\tilde{c})$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung (a) Die Sätze 2 und 3 lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Hat man ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} \tilde{I} & \xrightarrow{\tilde{c}} & \mathbb{R}^n \\ \varphi \uparrow & & \downarrow \phi \\ I & \xrightarrow{c} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

mit einem Diffeomorphismus $\varphi : I \rightarrow \tilde{I}$ und einer Isometrie ϕ , so gilt

$$L(c) = L(\phi \circ \tilde{c} \circ \varphi) = L(\tilde{c}).$$

(b) Parametertransformationen definieren auf der Menge aller parametrisierten Kurven eine Äquivalenzrelation: zwei Kurven c_1, c_2 sind äquivalent, falls es eine Parametertransformation φ gibt mit $c_2 = c_1 \circ \varphi$. Eine entsprechende Äquivalenzklasse heißt auch *unparametrisierte (oder geometrische) Kurve*.

3.3 Reguläre Kurven und Bogenlänge

Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Die Tangente an c im Punkt $c(t)$ ist die affine Gerade $s \mapsto c(t) + sc'(t)$. Für gewisse geometrische Konzepte, die wir im Folgenden einführen werden, muss man voraussetzen, dass in jedem Kurvenpunkt von c die Tangente existiert (der entsprechende Tangentialvektor $c'(t)$ also nicht der Nullvektor ist). Das führt auf folgende

Definition 3. Die Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt regulär, wenn für alle $t \in I$ gilt $c'(t) \neq 0$.

Beispiel. Wir betrachten die Kurven $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t^2)$ und $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, t^6)$. Es ist $c'(t) = (1, 2t)$ und c ist regulär. Wegen $\tilde{c}'(t) = (3t^2, 6t^5)$ ist \tilde{c} nicht regulär. Man beachte aber, dass $c(\mathbb{R}) = \tilde{c}(\mathbb{R})$ eine Parabel ist. Die Eigenschaft "regulär" ist demnach keine Eigenschaft der Spur einer Kurve.

Es sei $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Setzt man

$$s(t) := \int_{\alpha}^t \|c'(\tau)\| d\tau,$$

so ist $s(t)$ die Länge des Kurvenstücks zwischen $c(\alpha)$ und $c(t)$, vgl. Abb. 3.1. Damit ist $s : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, L(c)]$ nach Konstruktion streng monoton wachsend und

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\| \neq 0,$$

da c regulär ist. Daraus folgt, dass s ein Diffeomorphismus von $[\alpha, \beta]$ auf $[0, L(c)]$ ist (vgl. z.B. Heuser, Analysis I, 47.3) und somit eine Parametertransformation definiert.

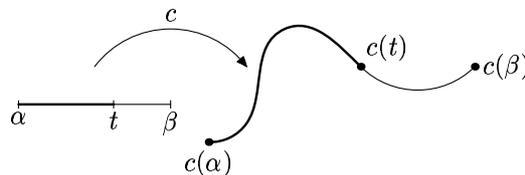


Abbildung 3.1: Länge eines Kurvenstücks

Definition 4. Der Diffeomorphismus $s : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, L(c)]$ heißt Bogenlänge oder auch Bogenlängeparameter.

Ist $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto c(t)$, mit Bogenlänge parametrisiert, d.h. $s(t) = t - \alpha$, so ist

$$\|c'(t)\| = \frac{ds}{dt}(t) = 1.$$

Die Kurve c wird also mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen. Ist umgekehrt $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$, so ist $s(t) = t - \alpha$ und c ist nach Bogenlänge parametrisiert. Damit folgt unmittelbar

Lemma 1. Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto c(t)$ ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ gilt. \square

Bemerkung (a) Die Parametrisierung nach Bogenlänge ist bis auf Verschiebung $s \mapsto s + s_0$ und Richtungsumkehr $s \mapsto -s$ eindeutig bestimmt.

(b) Eine mit Bogenlänge parametrisierte Kurve ist insbesondere regulär.

Es gilt nun folgender, für die Theorie wichtige, Satz:

Satz 4. Jede reguläre, parametrisierte Kurve $\tilde{c} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \tilde{c}(t)$ mit Länge l kann nach Bogenlänge parametrisiert werden, d.h. es gibt eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \mapsto c(s)$, die aus \tilde{c} durch Parametertransformation entsteht.

Beweis. Wir setzen

$$\varphi(t) := \int_{\alpha}^t \left\| \frac{d\tilde{c}}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau.$$

Damit ist $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, l]$, $t \mapsto \varphi(t) =: s(t)$ eine streng monoton wachsende, differenzierbare Abbildung mit

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) \equiv \frac{ds}{dt}(t) = \left\| \frac{d\tilde{c}}{dt}(t) \right\| \neq 0.$$

Also hat φ eine differenzierbare Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : [0, l] \rightarrow [\alpha, \beta]$, $s \mapsto t$. Die Kurve $c(s) := (\tilde{c} \circ \varphi^{-1})(s)$ ist demnach ebenfalls differenzierbar und wegen

$$\left\| \frac{dc}{ds}(s) \right\| = \left\| \frac{d(\tilde{c} \circ \varphi^{-1})}{ds}(s) \right\| = \left\| \frac{d\tilde{c}}{dt}(\varphi^{-1}(s)) \right\| \cdot \left| \frac{d\varphi^{-1}}{ds}(s) \right| = \left\| \frac{d\tilde{c}}{dt}(t) \right\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| = 1$$

ist sie nach Bogenlänge parametrisiert. \square

Beispiel. Wir betrachten die Kurve $\tilde{c} : \tilde{I} := [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$. Die Spur von \tilde{c} ist ein Kreis vom Radius r . Es gilt $\tilde{c}'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, also $\|\tilde{c}'(t)\| = r$. Für die Bogenlänge s ergibt sich

$$s(t) = \int_0^t r d\tau = rt.$$

Damit erhält man $t = t(s) = \frac{s}{r}$. Weiter gilt $L(\tilde{c}) = 2\pi r$. Die Umparametrisierung $c : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ von \tilde{c} nach Bogenlänge hat demnach die Gestalt

$$c(s) := \tilde{c}(t(s)) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right).$$

4 Krümmung von Kurven

4.1 Motivation und Definition

Wir wollen in diesem Abschnitt den zentralen Begriff der „Krümmung“ definieren. Anschaulich ist klar, dass eine Gerade oder ein Geradenstück nicht „gekrümmt“

ist, also „Krümmung“ 0 haben sollte. Betrachtet man Kreise mit immer grösser werdendem Radius, so nähern sich diese immer mehr einer Geraden an. Es ist deshalb plausibel, dass die „Krümmung“ eines Kreises vom Radius r proportional zu $1/r$ sein sollte. Die folgende Definition misst die Änderung der Tangenten.

Definition 5. *Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \mapsto c(s)$ eine mit Bogenlänge parametrisierte Kurve. Die Krümmung von c im Punkt $c(s)$ ist definiert als*

$$\kappa(c(s)) \equiv \kappa(s) := \|c''(s)\| = \left\| \frac{d^2c}{ds^2}(s) \right\| \geq 0.$$

Wir wollen nachprüfen, ob diese Definition obiger Heuristik entspricht. Dazu betrachten wir zunächst eine Gerade $c : s \mapsto a + sb$. Diese ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn $\|b\| = 1$ gilt. Da $c'(s) = b$ konstant ist, hat dies auf die zweite Ableitung $c''(s) = 0$ in diesem Fall keinen Einfluss. Nach obiger Definition haben wir also jedenfalls $\kappa(s) = 0$ für alle s .

Als zweiten Test betrachten wir einen mit Bogenlänge parametrisierten Kreis vom Radius r , also

$$c(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right).$$

Dann ist $c'(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r))$ und

$$c''(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} c(s).$$

Es folgt also $\kappa(s) = \|c''(s)\| = 1/r$.

Bemerkung (a) Falls κ identisch gleich Null ist, so ist $c''(s) = 0$ für alle $s \in I$. Durch Integration folgt, dass $c'(s) = b = \text{konstant}$ und $c(s) = a + sb$ gelten muss. Eine mit Bogenlänge parametrisierte Kurve mit verschwindender Krümmung ist also stets ein Geradenstück. Da auch die Umkehrung hiervon gilt, sind Geraden(stücke) genau die mit Bogenlänge parametrisierten Kurven mit konstanter Krümmung 0.

(b) Falls κ konstant ungleich Null ist, so erhält man im Falle *ebener* Kurven Kreisstücke. In höheren Dimensionen gibt es noch andere Kurven mit konstanter Krümmung (z.B. die Helix). Wir werden darauf später eingehen (vgl. Satz 6 und Abschnitt 5.2).

Da sich reguläre Kurven stets nach Bogenlänge parametrisieren lassen, liegt es nahe die Definition der Krümmung folgendermaßen zu erweitern:

Definition 6. *Es sei $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \tilde{c}(t)$ eine reguläre, parametrisierte Kurve. Wir definieren die Krümmung $\kappa(\tilde{c}(t)) \equiv \kappa(t)$ von \tilde{c} im Punkt $\tilde{c}(t)$ durch*

$$\kappa(\tilde{c}(t)) := \kappa((\tilde{c} \circ \varphi^{-1})(s)) = \kappa(c(s)),$$

wobei $c := \tilde{c} \circ \varphi^{-1}$ die Umparametrisierung von \tilde{c} nach Bogenlänge ist.

Damit ist per Definition die Krümmung einer Kurve invariant unter Parametertransformationen. Ist ϕ eine Bewegung des \mathbb{R}^n , so ist

$$\|(\phi \circ c)''(s)\| = \|c''(s)\|.$$

Diese Formel gilt nämlich für Translationen und Rotationen und damit nach Satz 1 für beliebige Isometrien. Die Krümmung einer Kurve ist damit - wie die Länge - invariant unter Isometrien.

Wir fügen noch eine wichtige Beobachtung an. Falls $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \mapsto c(s)$ mit Bogenlänge parametrisiert ist, so gilt $\langle c'(s), c'(s) \rangle = \|c'(s)\|^2 = 1$. Ableiten (vgl. Abschnitt 1.2) ergibt $2\langle c'(s), c''(s) \rangle = 0$, also ist $c'(s)$ orthogonal zu $c''(s)$, in Zeichen $c'(s) \perp c''(s)$.

4.2 Die orientierte Krümmung für ebene Kurven

Für die im letzten Abschnitt definierte Krümmung einer parametrisierten Kurve in \mathbb{R}^n gilt $\kappa \geq 0$. Für ebene Kurven, d.h. für $n = 2$, können wir die Krümmung zusätzlich mit einem Vorzeichen versehen. Wir wählen dazu eine Orientierung von \mathbb{R}^2 , d. h. wir betrachten die Menge \mathfrak{B} aller geordneten Basen von \mathbb{R}^2 und definieren auf \mathfrak{B} folgende Äquivalenzrelation: Zwei geordnete Basen $B = (b_1, b_2)$ und $B' = (b'_1, b'_2)$ sind äquivalent, wenn die Matrix $M_{BB'}$, die den Basiswechsel von B nach B' beschreibt positive Determinante hat. Diese Äquivalenzrelation zerlegt die Menge \mathfrak{B} in zwei Klassen. Man wählt eine dieser beiden Klassen aus und bezeichnet eine Basis als positiv orientiert, wenn sie dieser Klasse angehört. Wir wollen eine Basis als positiv orientiert bezeichnen, wenn sie zur Klasse der Standard-Basis $E = (e_1, e_2)$ gehört. Die Basiswechsellmatrix M_{BE} ist gerade

$$M_{BE} = (b_1|b_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

wenn $(b_1|b_2)$ die Matrix bezeichnet, die als Spalten die Vektoren b_1, b_2 hat. Eine Basis $B = (b_1, b_2)$ ist also genau dann positiv orientiert, wenn $\det(b_1|b_2) > 0$ gilt.

Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto c(s)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Für den Tangentialvektor an c im Punkt $c(s)$ setzen wir $T(s) := c'(s)$. Da c mit Bogenlänge parametrisiert ist, ist $T(s)$ ein Einheitsvektor. Wir wählen in jedem Punkt $c(s)$ einen Einheitsnormalenvektor $N(s)$, so dass $(T(s), N(s))$ positiv orientiert ist, vgl. Abb. 4.1. Damit folgt insbesondere, dass $N(s)$ parallel zu $c''(s)$ ist.

Definition 7. Der Vektor $N(s)$ heißt Normalenvektor von c im Punkt $c(s)$. Die Abbildung $\kappa^* : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$c''(s) = \kappa^*(s)N(s)$$

heißt orientierte Krümmung von c .

Geometrisch läßt die orientierte Krümmung folgende Deutung zu: Ist $\kappa^*(s) < 0$, so dreht die Tangente im Uhrzeigersinn; ist $\kappa^*(s) > 0$, so dreht die Tangente im Gegenuhrzeigersinn, vgl. Abb. 4.2. Geht man zur anderen Orientierung von \mathbb{R}^2 über, so sind die Folgerungen zu vertauschen.

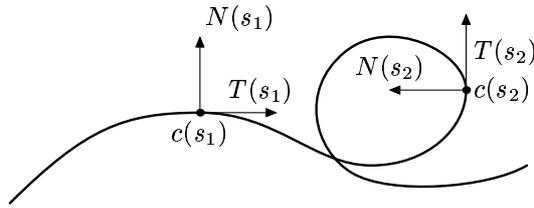


Abbildung 4.1: Normalenvektor

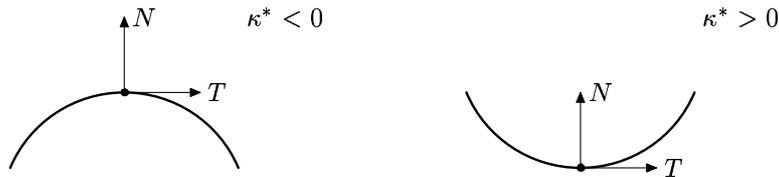


Abbildung 4.2: Orientierte Krümmung

Bemerkung (a) Da $s \mapsto T(s)$ differenzierbar ist, sind sowohl $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ als auch $\kappa^* : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Abbildungen.

(b) Das Vorzeichen der orientierten Krümmung ändert sich, wenn man die Kurve rückwärts durchläuft, d. h. anstelle von $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachtet man $c^- : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto c(\alpha + \beta - s)$.

(c) Es gilt stets $\kappa(s) = |\kappa^*(s)|$.

(d) Die orientierte Krümmung ist invariant unter eigentlichen Bewegungen des \mathbb{R}^2 . Sei dazu $\tilde{c} := A \cdot c$ mit $A \in \text{SO}(2)$. Dann gilt

$$\tilde{c}'(s) = \frac{d(A \cdot c)}{ds}(s) = A \cdot c'(s) \quad \text{und} \quad \tilde{c}''(s) = \frac{d^2(A \cdot c)}{ds^2}(s) = A \cdot c''(s).$$

Da A eine eigentliche Bewegung ist, gilt $\tilde{N}(s) = AN(s)$. Nach Definition gilt

$$A \cdot \kappa^*(s)N(s) = A \cdot c''(s) = \tilde{c}''(s) = \tilde{\kappa}^*(s)\tilde{N}(s) = \tilde{\kappa}^*(s)AN(s) = A \cdot \tilde{\kappa}^*(s)N(s).$$

Nach Multiplikation mit A^{-1} folgt $\kappa^*(s) = \tilde{\kappa}^*(s)$. Man mache sich klar, dass diese Aussage für beliebige Bewegungen im Allgemeinen falsch ist (z.B. Spiegelungen).

5 Frenet-Formeln und Hauptsatz

5.1 Frenet-Formeln für ebene Kurven

Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto c(s)$ eine mit Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, so haben wir nach Abschnitt 4.2 für jedes $s \in I$ eine Orthonormalbasis $(T(s), N(s))$ der Tangentialebene $T_{c(s)}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$. Diese nennt man auch ein *begleitendes 2-Bein*.

Nach Definition der Krümmung gilt $T'(s) = \kappa^*(s)N(s)$. Wir wollen untersuchen, wie sich $N'(s)$ in der Basis $(T(s), N(s))$ darstellen lässt. Für alle $s \in I$ gilt

$$0 = \langle T'(s), N(s) \rangle \quad (5.1)$$

$$1 = \langle N(s), N(s) \rangle \quad (5.2)$$

Ableiten dieser Gleichungen führt auf

$$0 = \langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle \quad (5.3)$$

$$0 = 2\langle N'(s), N(s) \rangle \quad (5.4)$$

Da wir Vektoren in \mathbb{R}^2 betrachten, folgt aus (5.1) und (5.4), dass $N'(s)$ proportional zu $T(s)$ ist. Demnach gibt es zu jedem $s \in I$ ein $\lambda(s)$ mit $N'(s) = \lambda(s)T(s)$. Wir wollen $\lambda(s)$ bestimmen. Wegen $\langle T(s), T(s) \rangle = \|T(s)\|^2 = 1$ gilt

$$\lambda(s) = \lambda(s)\langle T(s), T(s) \rangle = \langle \lambda(s)T(s), T(s) \rangle = \langle N'(s), T(s) \rangle$$

und wegen (5.3) und $\|N(s)\| = 1$

$$\lambda(s) = -\langle N(s), T'(s) \rangle = -\langle N(s), \kappa^*(s)N(s) \rangle = -\kappa^*(s).$$

Zusammenfassend erhalten wir folgenden

Satz 5 (Frenet-Formeln für ebene Kurven). *Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto c(s)$ eine mit Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann gelten für $s \in I$ die Ableitungsgleichungen von Frenet:*

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa^*(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa^*(s)T(s) \end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^*(s) \\ -\kappa^*(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \end{pmatrix}.$$

□

Wir wissen bereits, dass Kreisstücke konstante Krümmung $\kappa > 0$ haben. Mithilfe der Frenet-Formeln lässt sich diese Aussage in der Ebene umkehren.

Satz 6. *Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c \mapsto c(s)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa^* = \kappa > 0$. Dann ist die Spur von c ein Segment eines Kreises vom Radius $1/\kappa$.*

Beweis. Wir betrachten die parametrisierte Kurve $\gamma(s) := c(s) + \frac{1}{\kappa}N(s)$. Dann gilt $\gamma'(s) = c'(s) + \frac{1}{\kappa}N'(s)$, und aus Satz 5 folgt

$$\gamma'(s) = T(s) + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T(s)) = 0,$$

d.h. $\gamma(s) = \text{konstant} = a \in \mathbb{R}^2$. Damit gilt

$$\|c(s) - a\| = \left\| \frac{1}{\kappa} N(s) \right\| = \frac{1}{\kappa},$$

d.h. $c(I)$ liegt auf einem Kreis mit Zentrum a und Radius $\frac{1}{\kappa}$. \square

Satz 7 (Hauptsatz über ebene Kurven). *Es sei $\kappa^* : I \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \kappa^*(s)$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt*

- (a) *Es gibt eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto c(s)$, so dass $\kappa^*(s)$ die orientierte Krümmung von c ist.*
- (b) *Jede andere ebene Kurve \tilde{c} , die den Bedingungen aus (a) genügt, unterscheidet sich von c nur durch eine eigentliche euklidische Bewegung der Ebene. Genauer: Es gibt eine Matrix $D \in \text{SO}(2)$ und einen Vektor a , so dass $\tilde{c}(s) = Dc(s) + a$ gilt.*

Beweis. Die gesuchte Kurve c soll nach Bogenlänge parametrisiert sein, d.h. $\|c'(s)\| = \|T(s)\| = 1$. Deshalb machen wir den Einheitsvektor-Ansatz $T(s) := (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$ für eine zu bestimmende Funktion $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$. Es gilt dann notwendigerweise

$$N(s) = (-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)).$$

Wegen den Frenet-Formeln gilt weiter $\kappa^*(s)N(s) = T'(s) = \alpha'(s)N(s)$. Damit folgt $\alpha'(s) = \kappa^*(s)$. Wir wählen jetzt Anfangsbedingungen, d.h. für $s_0 \in I$ geben wir $c(s_0)$ und $T(s_0)$ vor. Es sei $c(s_0) = (0, 0)$ und $T(s_0) = (1, 0)$, insbesondere also $\alpha(s_0) = 0$. Aufgrund der obigen Überlegungen setzen wir

$$\alpha(s) := \int_{s_0}^s \kappa^*(t) dt.$$

Für die gesuchte Kurve $c(s) = (x_1(s), x_2(s))$ mit $c'(s) = T(s) = (x_1'(s), x_2'(s))$ ist

$$x_1(s) = \int_{s_0}^s \cos \alpha(\sigma) d\sigma \quad \text{und} \quad x_2(s) = \int_{s_0}^s \sin \alpha(\sigma) d\sigma.$$

Man rechnet leicht nach, dass c die Eigenschaften aus (a) hat. Es sei \tilde{c} eine weitere Kurve, die den Bedingungen in (a) genügt. Da $(\tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0))$ positiv orientiert ist, gibt es eine eigentliche Drehung ϕ , die das 2-Bein $(\tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0))$ in $\tilde{c}(s_0)$ auf das 2-Bein $(T(s_0), N(s_0))$ in $c(s_0)$ abbildet. Wir betrachten die Kurve $\bar{c} := \phi \circ \tilde{c}$. Da die orientierte Krümmung unter eigentlichen Bewegungen invariant bleibt, gilt

$$\bar{T}'(s) = \kappa^*(s)\bar{N}(s) \quad \text{und} \quad \bar{N}'(s) = -\kappa^*(s)\bar{T}(s).$$

Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$f(s) := \|T(s) - \bar{T}(s)\|^2 + \|N(s) - \bar{N}(s)\|^2.$$

Mit den Frenet-Formeln aus Satz 5 folgt $\frac{df}{ds}(s) = 0$, d.h. f muss konstant sein. Da weiter $\bar{T}(s_0) = \phi(\tilde{T}(s_0)) = T(s_0)$ und $\bar{N}(s_0) = \phi(\tilde{N}(s_0)) = N(s_0)$ ist, folgt

$f(s_0) = 0$ und damit $f = 0$. Insbesondere ist also $T(s) = \bar{T}(s)$ für alle $s \in I$. Damit folgt

$$\frac{d(c - \bar{c})}{ds}(s) = T(s) - \bar{T}(s) = 0$$

für alle $s \in I$, d.h. $c(s) - \bar{c}(s) = k = \text{konstant}$. Weil aber nach Definition $c(s_0) = \bar{c}(s_0)$ folgt schliesslich $k = 0$, d.h. $c = \bar{c} = \phi \circ \tilde{c}$. \square

5.2 Frenet-Formeln für Raumkurven

Am Ende von Abschnitt 4.1 hatten wir überlegt, dass für eine mit Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \mapsto c(s)$ gilt $c'(s) \perp c''(s)$.

Falls nun $\kappa(s) = \|c''(s)\| \neq 0$ für alle $s \in I$ gilt, so ist

$$H(s) := \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}$$

ein Einheitsvektor, der senkrecht auf dem *Tangentenvektor* $T(s) := c'(s)$ steht, vgl. Abb. 5.1. $H(s)$ heisst *Hauptnormale* zu $c'(s)$ im Punkt $c(s)$. Mit Definition 5 gilt $T'(s) = c''(s) = \kappa(s)H(s)$.

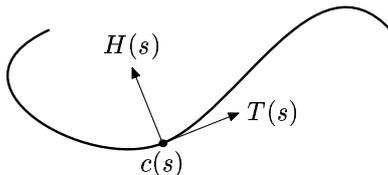


Abbildung 5.1: Hauptnormale

Es sei jetzt $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c \mapsto c(s)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte *Raumkurve*. Wir machen die *Annahme*, dass $\kappa(s) = \|c''(s)\| \neq 0$ für alle $s \in I$. Dann existiert in jedem Punkt $c(s)$ die Hauptnormale $H(s)$. Die durch den Tangentenvektor $T(s)$ und $H(s)$ aufgespannte Ebene heisst *Schmiegebene* von c im Punkt $c(s)$. Der Vektor $B(s) := T(s) \wedge H(s)$ heisst *Binormale* von c im Punkt $c(s)$. Für ebene Kurven ist die Schmiegebene die Ebene \mathbb{R}^2 selbst und die Binormale ist konstant.

Bemerkung. Für die Binormale $B(s)$ gilt $\|B(s)\| = 1$ und $B(s)$ steht nach Definition senkrecht auf der Schmiegebene. Somit bilden die Vektoren $T(s)$, $H(s)$ und $B(s)$ für jedes $s \in I$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraumes $T_{c(s)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$. Für Raumkurven haben wir also ein begleitendes 3-Bein, das *Frenet-Bein*, vgl. Abb. 5.2.

Wir wollen die Ableitungen $T'(s)$, $H'(s)$ und $B'(s)$ in der Basis $\{T(s), H(s), B(s)\}$ darstellen, d.h. die Änderung des Frenet-Beines bestimmen. Wegen $\langle B(s), B(s) \rangle = 1$ folgt durch Ableiten

$$2\langle B'(s), B(s) \rangle = 0 \tag{5.5}$$

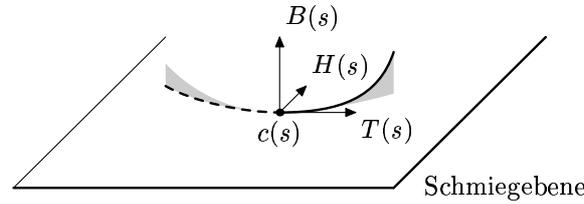


Abbildung 5.2: Das begleitende 3-Bein

d.h. $B'(s)$ steht senkrecht auf $B(s)$. Nach Definition von $B(s)$ ist

$$\begin{aligned} B'(s) &= \frac{d}{ds}(c'(s) \wedge H(s)) \\ &= c''(s) \wedge H(s) + c'(s) \wedge H'(s) \\ &= \kappa(s)H(s) \wedge H(s) + T(s) \wedge H'(s) = T(s) \wedge H'(s), \end{aligned}$$

also steht $B'(s)$ senkrecht auf $T(s)$. Zusammen mit (5.5) folgt, dass $B'(s)$ proportional zu $H(s)$ ist. Wir machen folgende

Definition 8. Die Abbildung $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, die für jedes $s \in I$ der Gleichung

$$B'(s) = -\tau(s)H(s)$$

genügt, heißt Torsion (oder Windung) von c .

Geometrisch misst τ die Änderung der Schmiegebene, da B eine Normale der Schmiegebene ist. Für ebene Kurven ist $B = \text{konstant}$ und damit $\tau = 0$.

Bemerkung. Ist $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \tilde{c}(t)$ eine (nicht unbedingt mit Bogenlänge parametrisierte) reguläre Kurve mit $\kappa(t) \neq 0$, so definiert man die Torsion $\tau(t)$ von \tilde{c} im Punkt $\tilde{c}(t)$ durch

$$\tau(t) := \tau((\tilde{c} \circ \varphi^{-1})(s)) \equiv \tau(s),$$

wobei $c := \tilde{c} \circ \varphi^{-1}$ die Umparametrisierung von \tilde{c} nach Bogenlänge ist.

Beispiel. Wir wollen Krümmung und Torsion für die Helix bestimmen. Nach Definition ist $\tilde{c} : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta t)$ mit $\alpha \geq 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Wegen $\tilde{c}'(t) = (-\alpha \sin t, \alpha \cos t, \beta)$ folgt $\|\tilde{c}'(t)\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Wir parametrisieren \tilde{c} zunächst nach Bogenlänge (von 0 aus), also $s(t) = t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Damit ist $t = t(s) = s/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und mit $\gamma := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ist

$$c(s) := \tilde{c}(t(s)) = \left(\alpha \cos \frac{s}{\gamma}, \alpha \sin \frac{s}{\gamma}, \beta \frac{s}{\gamma} \right)$$

die Umparametrisierung von \tilde{c} nach Bogenlänge. Weiter ist

$$T(s) = c'(s) = \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \sin \frac{s}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma} \cos \frac{s}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma} \right).$$

Setzt man $e_3 := (0, 0, 1)$, so folgt aus dieser Gleichung $\langle T(s), e_3 \rangle = \beta/\gamma$. $T(s)$ schliesst also mit der z -Achse einen konstanten Winkel ein. Für die zweite Ableitung von c erhält man $c''(s) = (-\alpha\gamma^{-2} \cos(s\gamma^{-1}), -\alpha\gamma^{-2} \sin(s\gamma^{-1}), 0)$. Es folgt also

$$\kappa(s) = \|c''(s)\| = \frac{\alpha}{\gamma^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = \text{konstant} \geq 0.$$

Damit ist

$$H(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} = \left(-\cos \frac{s}{\gamma}, -\sin \frac{s}{\gamma}, 0 \right)$$

und nach Definition von B

$$B(s) = T(s) \wedge H(s) = \left(\frac{\beta}{\gamma} \sin \frac{s}{\gamma}, -\frac{\beta}{\gamma} \cos \frac{s}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma} \right).$$

Nach Definition erhält man τ aus der Gleichung

$$B'(s) = \left(\frac{\beta}{\gamma^2} \cos \frac{s}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma^2} \sin \frac{s}{\gamma}, 0 \right) = -\tau(s)H(s),$$

also ist

$$\tau(s) = \frac{\beta}{\gamma^2} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \text{konstant}.$$

Wir wollen uns jetzt wieder der Darstellung von $T'(s)$, $H'(s)$ und $B'(s)$ im begleitenden Dreibein $T(s)$, $H(s)$, $B(s)$ zuwenden. Wir wissen schon, dass

$$T'(s) = \kappa(s)H(s) \tag{5.6}$$

$$B'(s) = -\tau(s)H(s). \tag{5.7}$$

Wir müssen also noch $H'(s)$ bestimmen. Nach allgemeinen Eigenschaften des Vektorprodukts gilt mit $B(s) = T(s) \wedge H(s)$ auch $T(s) = H(s) \wedge B(s) = -B(s) \wedge H(s)$ und $H(s) = B(s) \wedge T(s)$. Durch Ableiten ergibt sich dann

$$H'(s) = B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s)$$

und wegen (5.6) und (5.7)

$$\begin{aligned} H'(s) &= -\tau(s)H(s) \wedge T(s) + \kappa(s)B(s) \wedge H(s) \\ &= \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s). \end{aligned}$$

Man erhält also folgenden

Satz 8 (Frenet-Formeln für Raumkurven). *Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Dann gelten folgende Ableitungsgleichungen:*

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ H'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ H(s) \\ B(s) \end{pmatrix}.$$

□

Die Verteilung der Vorzeichen in dieser Matrix erklärt die Wahl des Vorzeichens in der Definition von τ .

Mithilfe der Frenet-Formeln erhält man einen zu Satz 7 analogen Hauptsatz für Raumkurven: Eine mit Bogenlänge parametrisierte Raumkurve ist durch ihre Krümmung und Torsion bis auf eine euklidische Bewegung von \mathbb{R}^3 eindeutig festgelegt. Genauer gilt

Satz 9 (Hauptsatz über Raumkurven). *Es seien $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $s \mapsto \kappa(s)$ und $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \tau(s)$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

- (a) *Es gibt eine mit Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto c(s)$, so dass κ die Krümmung und τ die Torsion von c ist.*
- (b) *Jede andere mit Bogenlänge parametrisierte Raumkurve $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften aus (a) unterscheidet sich von c nur durch eine eigentliche Bewegung des \mathbb{R}^3 , d.h. es gibt eine orthogonale Abbildung A mit $\det A = 1$ und einen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$, so dass $\tilde{c}(s) = (A \circ c)(s) + a$ gilt.*

Beweis-Skizze. Die Frenet-Formeln beschreiben ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Dazu setzen wir $T =: (x_1, x_2, x_3)$, $H =: (x_4, x_5, x_6)$ und $B =: (x_7, x_8, x_9)$. Die Formeln von Frenet liefern das System

$$\begin{aligned} x_1' &= \kappa x_4 \\ &\vdots \\ x_9' &= -\tau x_6 \end{aligned}$$

Ein solches lineares System hat zu gegebenen Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} T(s_0) \\ H(s_0) \\ B(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(s_0) & x_2(s_0) & x_3(s_0) \\ x_4(s_0) & x_5(s_0) & x_6(s_0) \\ x_7(s_0) & x_8(s_0) & x_9(s_0) \end{pmatrix}$$

genau eine auf ganz I definierte Lösung (vgl. z.B. W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 132). Damit erhält man $T(s) = c'(s)$ und durch Integration $c(s)$. Beim Beweis der Eindeutigkeit geht man ähnlich vor wie im Hauptsatz über ebene Kurven (Übung!). \square

Bemerkung. Für die Dimensionen $n \geq 4$ kann man analoge Betrachtungen anstellen. Man geht aus von den höheren Ableitungen $c'(s), c''(s), \dots, c^{(n-1)}(s)$ und fordert, dass in jedem Punkt $s \in I$ diese $n - 1$ Vektoren linear unabhängig sind. Kurven, die diese Bedingung erfüllen nennt man *Frenet-Kurven*. Für $n = 2$ sind Frenet-Kurven gerade reguläre Kurven und für $n = 3$ sind Frenet-Kurven reguläre Kurven mit nicht verschwindender Krümmung. Man konstruiert aus diesen $n - 1$ Vektoren mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens für jedes $s \in I$ $n - 1$ orthonormierte Vektoren und ergänzt diese dann zu einer Orthonormalbasis von $T_{c(s)}\mathbb{R}^n$ (ein begleitendes n -Bein). Damit beweist man dann analoge Frenet-Formeln und Hauptsätze.

6 Ausblick auf die globale Kurventheorie

Nach dem Hauptsatz versteht man die lokale Gestalt einer Raumkurve vollständig, sobald man ihre Krümmung und Torsion kennt. Technisch kann man - mindestens im Prinzip - alles auf die Frenet-Formeln zurückführen. Die Untersuchung von globalen Eigenschaften ist viel schwieriger, da man zusätzlich die topologische Gestalt der Kurve im Großen berücksichtigen muss. Im Folgenden diskutieren wir einige Sätze aus der globalen Kurventheorie. Fehlende Beweise findet man z.B. in den Büchern von Klingenberg und Spivak.

6.1 Totalkrümmung, Umlaufsatz von Hopf

Eine reguläre Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (*differenzierbar*) *geschlossen*, wenn es eine reguläre Kurve $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit $\tilde{c}|_{[a,b]} = c$ und $\tilde{c}(t+(b-a)) = \tilde{c}(t)$. Insbesondere gilt also

$$c(b) = \tilde{c}(b) = \tilde{c}(a+b-a) = \tilde{c}(a) = c(a) \quad \text{und} \quad c'(b) = \tilde{c}'(b) = \tilde{c}'(a) = c'(a).$$

Eine geschlossene Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *einfach geschlossen*, wenn die Einschränkung $c|_{[a,b]}$ von c auf $[a, b]$ injektiv ist.

Satz 10 (Polarwinkel und Windungszahl). *Es sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $t \mapsto c(t)$, eine parametrisierte Kurve. Dann gilt*

(a) *Es gibt eine differenzierbare Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass*

$$c(t) = \|c(t)\| (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)))$$

für alle $t \in [a, b]$ ist.

(b) *Ist $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit den Eigenschaften von φ aus (a), so ist $\psi = \varphi + 2\pi k$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist die Differenz $\varphi(b) - \varphi(a)$ nicht von φ abhängig. Die Funktion φ heißt Polarwinkel-Funktion.*

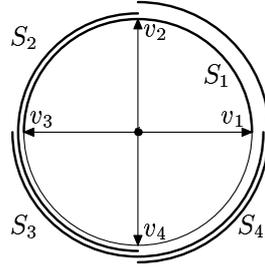
(c) *Falls c geschlossen ist, so ist*

$$W(c) := \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a)) \in \mathbb{Z}.$$

$W(c)$ heißt Windungszahl von c .

Beweis. (a) Da die Abbildung $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $t \mapsto c(t)/\|c(t)\|$ wohldefiniert und differenzierbar ist, genügt es die Behauptung in (a) für Kurven c mit $c([a, b]) \subseteq S^1$ zu zeigen. Es sei $t \in [a, b]$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von c eine relativ offene, zusammenhängende Umgebung I_t von t (also ein Intervall der Form $[a, \varepsilon)$, $(\delta, b]$ oder (ε, δ) , das t enthält und in $[a, b]$ enthalten ist), so dass $c(I_t)$ in einem der folgenden offenen Halbkreise von S^1 enthalten ist:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in S^1, y > 0\} \\
S_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in S^1, x < 0\} \\
S_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in S^1, y < 0\} \\
S_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in S^1, x > 0\}
\end{aligned}$$



Die Abbildung $h : [a, b] \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sei so gewählt, dass $c(I_t) \subset S_{h(t)}$ gilt. Weiter seien $v_1 := (1, 0)$, $v_2 := (0, 1)$, $v_3 := (-1, 0)$, $v_4 := (0, -1)$. Für $t \in [a, b]$ definieren wir $\theta_t : I_t \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$s \mapsto \arccos(\langle c(s), v_{h(t)} \rangle) + \frac{\pi}{2}(h(t) - 1).$$

Da $\langle c(s), v_{h(t)} \rangle \in (-1, 1)$, ist $\theta_t : I_t \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Nach Definition gilt $c(s) = (\cos \theta_t(s), \sin \theta_t(s))$ für $s \in I_t$. Da $[a, b]$ kompakt und die $I_t, t \in [a, b]$, eine relativ offene Überdeckung von $[a, b]$ bilden, gibt es endlich viele t_1, \dots, t_n , so dass die $I_{t_j}, j = 1, \dots, n$, das Intervall $[a, b]$ überdecken. Ohne Einschränkung gelte $I_{t_j} \subset I_{t_l}$ nur für $j = l$. Es bezeichne a_j den Anfangs- und b_j den Endpunkt des Intervalls I_{t_j} . Ohne Einschränkung seien die I_{t_j} nach aufsteigenden Anfangspunkten sortiert, also $a_i < a_j$ für $i < j$. Wir definieren jetzt $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei $\varphi|_{[a_1, b_1]} := \theta_{t_1}$. Da die I_{t_j} eine Überdeckung bilden, gilt $[a_1, b_1] \cap (a_2, b_2) \neq \emptyset$. Nach Konstruktion müssen θ_{t_2} und $\theta_{t_1} = \varphi|_{[a_1, b_1]}$ auf der offenen Menge $[a_1, b_1] \cap (a_2, b_2)$ modulo 2π übereinstimmen. Damit kann man $\varphi|_{[a_1, b_1]}$ eindeutig auf $[a_1, b_2)$ fortsetzen. Nach endlich vielen Schritten erhält man eine differenzierbare Abbildung φ mit den geforderten Eigenschaften.

(b) Ist ψ eine weitere solche Abbildung, so gilt notwendigerweise $\psi(t) - \varphi(t) = 2\pi k(t)$ für jedes $t \in [a, b]$ mit einer Funktion $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{Z}$. Da k stetig und auf einer zusammenhängenden Menge definiert ist, folgt $k(t) = c \in \mathbb{Z}$ für alle $t \in [a, b]$.

(c) Für geschlossene Kurven gilt nach Definition von φ stets $\varphi(a) = \varphi(b) + 2\pi k$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. \square

Definition 9. Es sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre geschlossene Kurve. Die Umlaufzahl $U(c)$ von c ist definiert als die Windungszahl von $c'(t)$,

$$U(c) := W(c') \in \mathbb{Z}.$$

Dabei wird $c' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als differenzierbare Kurve aufgefaßt.

Beispiele. In Abb. 6.1 sind die Bilder einiger geschlossener Kurven und ihre Umlaufzahlen angegeben. Alle Kurven werden einmal in Pfeilrichtung durchlaufen.

Der folgende Satz bestimmt globale topologische Informationen über eine ebene Kurve (Umlaufzahl) aus lokalen Größen (Krümmung).

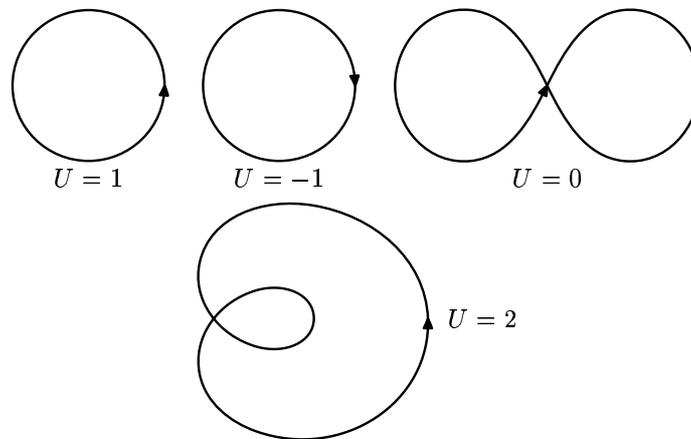


Abbildung 6.1: Die Umlaufzahl

Satz 11. *Es sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto c(s)$, eine mit Bogenlänge parametrisierte, geschlossene ebene Kurve. Die Umlaufzahl von c ist gleich der Totalkrümmung von c dividiert durch 2π :*

$$U(c) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa^*(s) ds.$$

Beweis. Wir wenden Satz 10 auf die Kurve c' an. Es gibt also eine differenzierbare Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$T(s) = c'(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)).$$

Weiter ist dann $N(s) = (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s))$. Mit den Frenet-Formeln folgt

$$\varphi'(s)N(s) = T'(s) = \kappa^*(s)N(s).$$

Da $N(s) \neq 0$ haben wir also $\kappa^*(s) = \varphi'(s)$ und

$$\int_a^b \kappa^*(s) ds = \int_a^b \varphi'(s) ds = \varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi U(c).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung (a) Da κ^* invariant ist unter eigentlichen Bewegungen (vgl. 4.2), zeigt Satz 11, dass $U(c)$ (im Gegensatz zu $W(c)$) nicht von der Lage des Bildes von c in \mathbb{R}^2 relativ zum Ursprung $(0, 0)$ abhängt.

(b) Durchläuft man die Kurve rückwärts, so ändert sich das Vorzeichen von κ^* und von $U(c)$.

Lemma 2. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ sternförmig bezüglich $x_0 \in A$, d.h. für jedes $x \in A$ ist die Strecke $\overline{x_0 x}$ ganz in A enthalten. Ist $e : A \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine stetige Abbildung, dann gibt es eine stetige Polarwinkelfunktion $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $e(x) = \|e(x)\|(\cos(\varphi(x)), \sin(\varphi(x)))$.*

Beweis. Wir setzen $\varphi(x_0) = 0$. Dann ist die Einschränkung von e auf die Strecke $x_0 + t(x - x_0)$ eine stetige Kurve mit Parameter $t \in [0, 1]$. Nach Satz 10 ist φ dann eindeutig definiert längs der Strecke $\overline{x_0 x}$. Da A sternförmig ist, ist damit eine Funktion φ auf ganz A eindeutig definiert und ebenfalls stetig. \square

Satz 12 (Hopfscher Umlaufsatz). Für eine einfach geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa^*(s) ds = \pm 1.$$

Beweis. Nach Wahl geeigneter Koordinatenachsen können wir annehmen, dass $c(t) = (x(t), y(t))$ mit $y(a) = y(b) = 0$ und $y(t) \geq 0$ für alle t gilt. Wir betrachten dann die Menge

$$A := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq s \leq t \leq b\}$$

und die Abbildung $e : A \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert durch

$$e(s, t) := \begin{cases} \frac{c(t) - c(s)}{\|c(t) - c(s)\|}, & \text{falls } s \neq t \text{ und } (s, t) \neq (a, b); \\ c'(t), & \text{falls } s = t; \\ -c'(a), & \text{falls } (s, t) = (a, b). \end{cases}$$

Weil die Kurve c einfach geschlossen ist, gilt $c(t) \neq c(s)$ für alle $t \neq s$ außer $(s, t) = (a, b)$ und somit ist e wohldefiniert. Die Stetigkeit von e folgt durch Übergang von Sekanten zu Tangenten. Weiter ist $e(t, t) = c'(t)$, die Tangente der (mit Bogenlänge parametrisierten) Kurve c im Punkt $c(t)$. Nach Lemma 2 existiert dann eine Polarwinkelfunktion $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $e(s, t) = (\cos(\varphi(x)), \sin(\varphi(x)))$ und $\varphi(a, a) = 0$. Die Funktion $\varphi(t) := \varphi(t, t)$ ist dann die Polarwinkelfunktion längs der Kurve c , und nach Satz 11 (und dessen Beweis) gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \varphi'(t) dt = \frac{1}{2\pi} (\varphi(b, b) - \varphi(a, a)).$$

Andererseits ist $\varphi(a, b) - \varphi(a, a) = \pi$, falls $x'(a) > 0$ (sonst $= -\pi$), sowie $\varphi(b, b) - \varphi(a, b) = \pi$, falls $x'(a) > 0$ (sonst $= -\pi$). Insgesamt ist also $\varphi(b, b) - \varphi(a, a)$ entweder gleich $+2\pi$ oder -2π . \square

Der nächste Satz hat Beziehungen zur Knotentheorie.

Satz 13 (Fary-Milnor). Sei $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto c(s)$ eine geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Ist c ein Knoten, so gilt

$$\int_0^L \kappa(s) ds \geq 4\pi.$$

\square

6.2 Konvexe Kurven

Definition 10. Eine reguläre ebene Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto c(t)$ heißt konvex, falls für alle $t \in I$ das Bild $c(I)$ der Kurve ganz in einer der durch die Tangente an c in $c(t)$ definierten Halbebenen liegt, vgl. Abb. 6.2.

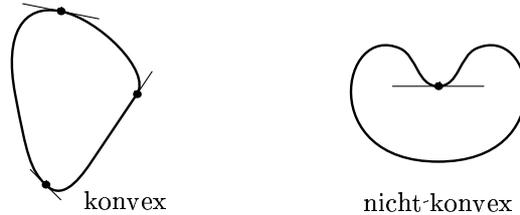


Abbildung 6.2: Konvexität

Satz 14 (Charakterisierung konvexer Kurven). Eine einfach geschlossene, reguläre ebene Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto c(s)$ ist genau dann konvex, falls entweder $\kappa^*(s) \geq 0$ für alle $s \in I$ oder $\kappa^*(s) \leq 0$ für alle $s \in I$ gilt. \square

Satz 15 (4-Scheitelsatz). Eine einfach geschlossene, konvexe ebene Kurve hat mindestens 4 Scheitelpunkte, d.h. Punkte mit $\kappa'(s) = 0$. \square

Der nächste Satz liefert die Lösung einer beliebigen "Denksport-Aufgabe": Ein Seil wird am Äquator um die Erdkugel gespannt(!). Wieviel länger muß das Seil sein, wenn es überall einen Meter Abstand vom Boden haben soll?

Satz 16 (Parallelkurve). Sei $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto c(s)$ eine einfach geschlossene, konvexe, nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit $\kappa^*(s) \geq 0$. Die Parallelkurve \bar{c} von c im Abstand $d > 0$, d.h. also

$$\bar{c}(s) := c(s) - dN(s),$$

hat die Länge $L(\bar{c}) = L(c) + 2\pi d$.

Beweis. Nach Definition gilt $\bar{c}'(s) = c'(s) - dN'(s)$ und mit den Frenet-Formeln ist

$$\bar{c}'(s) = c'(s) + d\kappa^*(s)T(s) = c'(s)(1 + d\kappa^*(s)).$$

Damit gilt

$$L(\bar{c}) = \int_0^l \|\bar{c}'(s)\| ds = \int_0^l |1 + d\kappa^*(s)| ds$$

und wegen $\kappa^*(s) \geq 0$ und dem Hopfschen Umlaufsatz

$$L(\bar{c}) = l + d \int_0^l \kappa^*(s) ds = L(c) + 2\pi d.$$

\square

Teil II

Flächen

7 Reguläre Flächen im \mathbb{R}^3

7.1 Die Tangentialabbildung

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge. Weiter sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung¹. Die *Tangentialabbildung* oder das *Differential* von f im Punkt $a \in U$ ist die lineare Abbildung

$$df_a : T_a \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(a)} \mathbb{R}^n; \quad df_a(X) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tX) - f(a)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(a + tX) \right|_{t=0}.$$

Andere gebräuchliche Schreibweisen für df_a sind f_{*a} oder $T_a f$. Aus der Analysis sollten folgende Tatsachen bekannt sein: (i) Für $X = e_i$ (= i -ter Standardbasisvektor) ist $df_a(e_i) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv f_{x_i}(a)$ die i -te partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt a , (ii) bezüglich der Standardbasen von $T_a \mathbb{R}^m$ und $T_{f(a)} \mathbb{R}^n$ hat df_a die Jacobi-Matrix $D_a f$ von f als Darstellungsmatrix:

$$D_a f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}.$$

Für eine geometrische Interpretation der Wirkungsweise von df_a betrachten wir den Fall $U = \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten (u, v) , $n = 3$ und $X = e_1$ (vgl. Abb. 7.1).

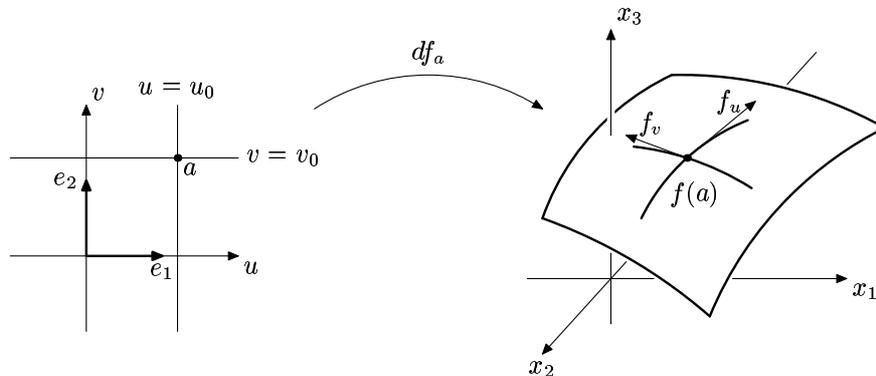


Abbildung 7.1: Die Tangentialabbildung

Die Tangentialabbildung df_a bildet den Tangentialvektor der Geraden $t \mapsto a + te_1$ im Punkt a auf den Tangentialvektor der Raumkurve $t \mapsto f(a + te_1)$ im Punkt $f(a)$

¹Wenn nichts anderes vorausgesetzt wird, verstehen wir unter einer differenzierbaren Abbildung immer eine C^∞ -Abbildung.

ab. Da df_a linear ist, wird der Tangentialraum $T_a\mathbb{R}^2$ auf einen Untervektorraum von $T_{f(a)}\mathbb{R}^3$ abgebildet, der von

$$\{df_a(e_1), df_a(e_2)\} = \{f_u(a), f_v(a)\}$$

aufgespannt wird.

Die Kurven $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (u_0, v_0) + te_i, i = 1, 2$, nennt man *Parameterlinien*. Die Parameterlinien $t \mapsto (u_0 + t, v_0)$ (bzw. $t \mapsto (u_0, v_0 + t)$) nennt man *u-Linien* (bzw. *v-Linien*) und schreibt dafür oft nur $v = v_0$ (bzw. $u = u_0$).

Ein im Folgenden wichtiges Hilfsmittel ist der aus der Analysis bekannte Satz über die Umkehrabbildung:

Satz 1 (Umkehrsatz). *Es sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in W$ und $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Ist $df_a : T_a\mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(a)}\mathbb{R}^n$ ein Vektorraumisomorphismus, so gibt es eine offene Umgebung $U \subset W$ von a und eine offene Umgebung V von $f(a)$, so dass $f|_U : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. \square*

7.2 Reguläre Flächen

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt *reguläre Fläche*, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung V von p in \mathbb{R}^3 , eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine C^∞ -Abbildung $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto x(u, v)$ gibt (vgl. Abb. 7.2) mit folgenden Eigenschaften

- (a) $x(U) = S \cap V$ und $x : U \rightarrow S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.
- (b) Die Tangentialabbildung $dx_{(u,v)} : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{x(u,v)}\mathbb{R}^3$ ist injektiv für alle $(u, v) \in U$.

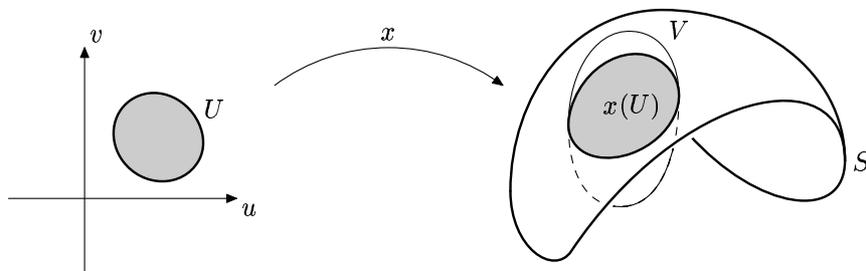


Abbildung 7.2: Reguläre Fläche

Bemerkung (a) Da x differenzierbar ist, ist x insbesondere stetig. Bedingung (a) besagt, dass es eine stetige Inverse $x^{-1} : S \cap V \rightarrow U$ gibt. Dabei ist $S \cap V$ bzw. U mit der entsprechenden Teilraum-Topologie von \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^2 versehen.

(b) Bedingung (b) bedeutet dass die Jacobi-Matrix

$$D_{(u,v)}x = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \left(x_u(u,v), x_v(u,v) \right)$$

für alle $(u,v) \in U$ den Rang 2 hat. Äquivalent dazu sind: (i) die Spaltenvektoren $x_u(u,v)$ und $x_v(u,v)$ sind linear unabhängig, (ii) für das Vektorprodukt gilt $x_u(u,v) \wedge x_v(u,v) \neq 0$.

(c) Die Abbildung x heißt *Parametrisierung* von S im Punkt p . Die Umkehrabbildung $x^{-1} : S \cap V \rightarrow U$ heißt *Karte* oder *lokales Koordinatensystem* um p und die (u,v) nennt man *Koordinaten* von $x(u,v)$.

Im gleichen Punkt einer Fläche kann es verschiedene Parametrisierungen geben. Wir wollen zeigen, dass die entsprechenden Koordinatenwechsel differenzierbar sind. Dazu benötigen wir den etwas technischen

Satz 2. *Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Weiter sei $W \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Abbildung mit $f(W) \subset S$. Ist $p \in f(W)$ und $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung um p mit $x(U) \subset f(W)$, so ist für $W' := f^{-1}(x(U))$ die Abbildung*

$$x^{-1} \circ f : W' \rightarrow U$$

differenzierbar.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ von p mit $x(U) = S \cap V$. Da $x(U) \subset f(W) \subset S$ gilt

$$W' = f^{-1}(x(U)) = f^{-1}(S \cap V) = W \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(V).$$

Wegen der Stetigkeit von f und da V offen ist, ist W' offen in \mathbb{R}^2 . Die Frage nach der Differenzierbarkeit von $x^{-1} \circ f$ ist also sinnvoll. Wir zeigen, dass $x^{-1} \circ f$ in jedem Punkt $a \in W'$ differenzierbar ist. Sei dazu $q = f(a)$ und $(u_0, v_0) \in U$ so, dass $q = x(u_0, v_0)$ gilt. Wir definieren $\bar{x} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\bar{x}(u, v, t) := x(u, v) + (0, 0, t).$$

Dann gilt offenbar $\bar{x} = x$ auf $U \times \{0\}$. Es ist

$$D_{(u_0, v_0, 0)}\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u_0, v_0) & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u_0, v_0) & 0 \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u_0, v_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen der Rangbedingung an x gibt es eine 2×2 Untermatrix der Jacobimatrix $D_{(u_0, v_0)}x$, die Rang 2 hat. Nach eventueller Vertauschung der Koordinaten x_i kann man annehmen, dass diese Untermatrix die 2×2 Untermatrix von $D_{(u_0, v_0, 0)}\bar{x}$ ist, die links oben steht. Damit ist $D_{(u_0, v_0, 0)}\bar{x}$ regulär und nach dem Umkehrsatz gibt es offene Umgebungen $\bar{U} \subset U \times \mathbb{R}$ von $(u_0, v_0, 0)$ und $\bar{V} \subset \mathbb{R}^3$ von $\bar{x}(u_0, v_0, 0) = x(u_0, v_0) = q = f(a)$, so dass $\bar{x}|_{\bar{U}} : \bar{U} \rightarrow \bar{V}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist

$$\bar{U} \cap (U \times \{0\}) = U' \times \{0\}$$

für eine in \mathbb{R}^2 offenen Menge $U' \subset U$. Da x ein Homöomorphismus von U auf $x(U) = S \cap V$ ist, gibt es eine offene Menge $V' \subset \mathbb{R}^3$, so dass $x|_{U'}$ ein Homöomorphismus von U' auf $S \cap V'$ ist. Wir bezeichnen mit $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Projektion $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$. Da $x|_{U'} = \bar{x}|_{U' \times \{0\}}$, gilt $x^{-1} = \pi \circ (\bar{x}|_{\bar{U}})^{-1}$ auf $S \cap V'$.

Wegen der Stetigkeit von f ist $W'' := f^{-1}(S \cap V')$ offen in \mathbb{R}^2 mit $a \in W''$ und auf W'' gilt

$$x^{-1} \circ f = \pi \circ \bar{x}^{-1} \circ f.$$

Als Verkettung differenzierbarer Abbildungen ist $\pi \circ \bar{x}^{-1} \circ f$ und damit auch $x^{-1} \circ f$ in a differenzierbar. Da a beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Korollar 1. *Es sei S eine reguläre Fläche und $x : U \rightarrow S$ und $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow S$ seien Parametrisierungen von S um p . Sei $D := x(U) \cap \bar{x}(\bar{U})$. Dann ist der Koordinatenwechsel*

$$\bar{x}^{-1} \circ x : x^{-1}(D) \rightarrow \bar{x}^{-1}(D)$$

differenzierbar (mit differenzierbarer Inverser $x^{-1} \circ \bar{x}$). \square

7.3 Tangentialebenen einer Fläche

Es sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Weiter sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Kurve mit $c(0) = p$. Der Vektor

$$c'(0) := \frac{dc}{dt}(0) \in T_p \mathbb{R}^3$$

heißt *Tangentenvektor* an die Fläche S im Punkt p . Die *Tangentialebene* $T_p S$ einer regulären Fläche S im Punkt p ist die Menge aller solchen Tangentenvektoren, also

$$T_p S := \{c'(0) \mid c \text{ wie oben}\}.$$

Die Elemente des Tangentialraumes nennt man *Tangentenvektoren*. Die lineare Hülle einer Menge von Vektoren $\{a_1, \dots, a_m\}$ bezeichnen wir im Folgenden mit $[a_1, \dots, a_m]$.

Lemma 1. *Ist $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung von S um p mit $x(u, v) = p$, so ist*

$$T_p S = dx_{(u, v)}(T_{(u, v)} \mathbb{R}^2) = \{p\} \times [x_u(u, v), x_v(u, v)].$$

Inbesondere ist $T_p S$ ein zweidimensionaler Untervektorraum von $T_p \mathbb{R}^3$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $T_p S \subseteq dx_{(u,v)}(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$. Sei also $c'(0) \in T_p S$ für eine differenzierbare Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ mit $c(0) = p$. Weiter sei $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung um p . Dann ist nach Satz 2 die Abbildung

$$\varphi := x^{-1} \circ c : (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}) \rightarrow U$$

differenzierbar ($\bar{\varepsilon}$ sei dabei so klein gewählt, dass diese Abbildung definiert ist; wegen der Stetigkeit von c ist das immer möglich), vgl. Abb. 7.3(a).

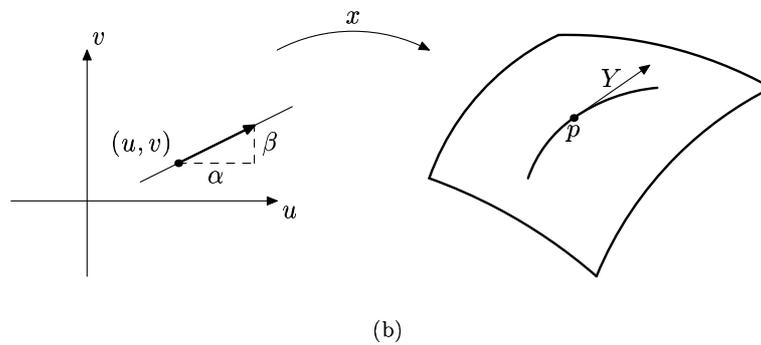
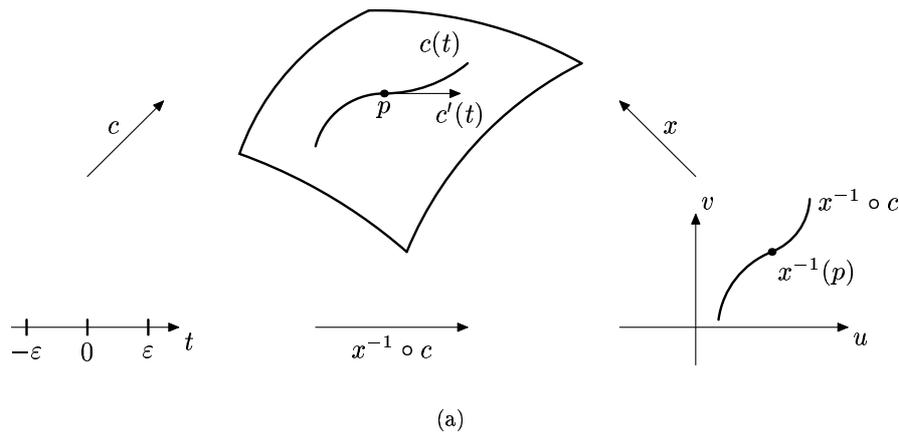


Abbildung 7.3: Tangentialvektoren

Es folgt

$$c'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (x \circ \varphi)(t) = dx_{(u,v)}(\varphi'(0)), \quad \text{d.h. } c'(0) \in dx_{(u,v)}(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$$

und somit gilt $T_p S \subseteq \{p\} \times [x_u(u, v), x_v(u, v)]$.

Sei jetzt umgekehrt

$$Y = \alpha x_u(u, v) + \beta x_v(u, v) \in dx_{(u,v)}(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2).$$

Wir setzen $c(t) := x((u, v) + t(\alpha, \beta))$, vgl. Abb. 7.3(b). Dann ist c differenzierbar, $c(0) = p$ und es gilt

$$\begin{aligned} c'(0) &= dx_{(u,v)}(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha dx_{(u,v)}(e_1) + \beta dx_{(u,v)}(e_2) \\ &= \alpha x_u(u, v) + \beta x_v(u, v) = Y, \end{aligned}$$

d.h. $Y \in T_p S$. Also ist auch die Inklusion $\{p\} \times [x_u(u, v), x_v(u, v)] \subseteq T_p S$ gezeigt. \square

Lemma 2. *Die Tangentialebene in einem Punkt einer regulären Fläche ist unabhängig von der lokalen Parametrisierung. Genauer seien $x : U \rightarrow S$ und $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow S$ Parametrisierungen von S um p . Für $x_u := x_u(x^{-1}(p))$, $x_v := x_v(x^{-1}(p))$ und $\bar{x}_{\bar{u}} := \bar{x}_{\bar{u}}(\bar{x}^{-1}(p))$, $\bar{x}_{\bar{v}} := \bar{x}_{\bar{v}}(\bar{x}^{-1}(p))$ gilt dann*

$$T_p S = [x_u, x_v] = [\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}].$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition von $T_p S$, die ja gar keine Parametrisierungen verwendet. der zweite teil des Lemmas folgt dann aus Lemma 1. \square

Lemma 3. *Es sei S eine reguläre Fläche und M eine offene Teilmenge von S , d. h. es gibt eine offen Menge $W \subset \mathbb{R}^3$ mit $M = S \cap W$. Dann ist M eine reguläre Fläche und $T_p M = T_p S$ für alle $p \in M$.*

Beweis. Ist $p \in M$ und $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung von S um p , so ist x eingeschränkt auf $x^{-1}(x(U) \cap M)$ eine Parametrisierung von M um p . \square

8 Beispiele

8.1 Affine Ebenen

Die affine Ebene durch $p \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt durch die linear unabhängigen Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$ ist

$$S := \{p + uX + vY \mid u, v \in \mathbb{R}\},$$

vergleiche Abb. 8.1. Wir wollen zeigen, dass S eine reguläre Fläche ist. Eine einzige

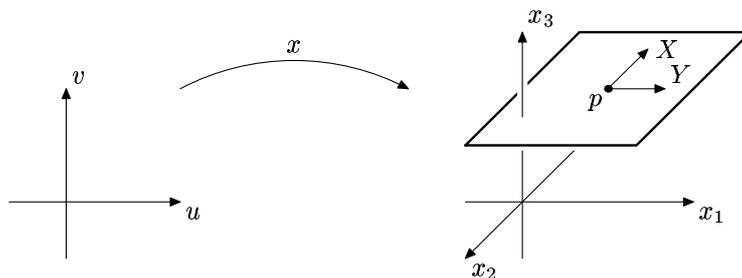


Abbildung 8.1: Eine affine Ebene

Parametrisierung reicht hier schon aus. Man wählt dazu $U := \mathbb{R}^2$, $V := \mathbb{R}^3$ und setzt $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto p + uX + vY$. Da $x_u = X$, $x_v = Y$, ist die Rang-Bedingung erfüllt. Dass x ein Homöomorphismus ist, folgt aus der Definition der Unterraumtopologie.

8.2 Graphen von Funktionen

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion. Der *Graph* von f ist die Menge

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in U, x_3 = f(x_1, x_2)\}.$$

Wir wollen überlegen, dass S eine reguläre Fläche ist. Wie bei Ebenen genügt auch hier eine einzige Parametrisierung. Wir setzen $V := \mathbb{R}^3$ und definieren $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

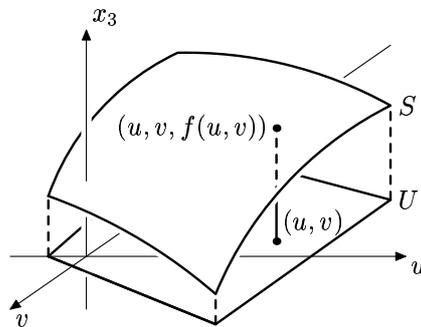


Abbildung 8.2: Graph einer Funktion

durch $(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$, vgl. Abb. 8.2. Dann gilt

$$x(U) = S = S \cap V.$$

Ferner ist die bijektive Abbildung $x : U \rightarrow S$ differenzierbar und somit auch stetig. Die Umkehrabbildung $x^{-1} : S \rightarrow U$, $(u, v, f(u, v)) \mapsto (u, v)$ ist stetig, da $x^{-1} = \pi|_S$, wobei $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Projektion $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ bezeichnet. Insbesondere ist x also ein Homöomorphismus von U auf S . Wegen

$$D_{(u,v)}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

ist die Rangbedingung ebenfalls erfüllt.

Umgekehrt ist jede reguläre Fläche lokal als Graph einer Funktion darstellbar. Genauer gilt

Satz 3. *Es sei S eine reguläre Fläche. Dann gibt es zu jedem $p \in S$ eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^3$, so dass $S \cap O$ der Graph einer C^∞ -Funktion ist.*

Beweis. Es sei $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung um $p = x(u_0, v_0)$. Da S regulär ist, können wir (nach eventueller Vertauschung der Koordinaten x_i) annehmen, dass die Matrix

$$D := \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

regulär ist. Es sei $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Projektion $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$. Dann ist

$$g := \pi \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v))$$

differenzierbar. Wegen $D_{(u_0, v_0)}g = D$ gibt es nach dem Umkehrsatz offene Umgebungen $W \subset U$ von (u_0, v_0) und $V \subset \mathbb{R}^2$ von $(x_1(u_0, v_0), x_2(u_0, v_0))$, so dass $g|_W : W \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $h := (g|_W)^{-1} : V \rightarrow W$, $(x_1, x_2) \mapsto (u, v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (x \circ h)(x_1, x_2) &= x(u, v) \\ &= (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \\ &= (x_1, x_2, x_3(h(x_1, x_2))). \end{aligned}$$

Da x ein Homöomorphismus ist, ist $x(W) = x(h(V))$ offen in $x(U)$. Es gibt also eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^3$, so dass $x(W) = S \cap O$ gilt. Schließlich ist $S \cap O$ der Graph der Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_3(h(x_1, x_2))$. \square

8.3 Die 2-Sphäre

Es sei $S := S^2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Die Menge S ist also gerade die Einheitssphäre, vgl. Abb. 8.3. Wir wollen zeigen, dass S eine reguläre Fläche

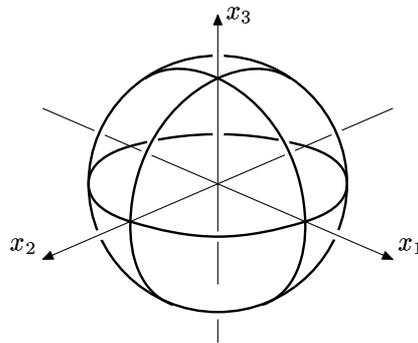


Abbildung 8.3: Die 2-Sphäre

ist. Dazu betrachten wir zunächst die offene Menge

$$V_3^+ := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

und die offene Menge

$$U_3 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Dann ist $S^2 \cap V_3^+$ der Graph der Funktion $f : U_3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x_1, x_2) \mapsto \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}.$$

Nach Beispiel 8.2 ist $x_3^+ : U_3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)})$ eine lokale Parametrisierung von S^2 . Das Bild von x_3^+ ist die offene obere Hemisphäre. Analog parametrisiert man die untere offene Hemisphäre durch

$$x_3^- : U_3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, -\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}).$$

Damit fehlen noch die Punkte auf S^2 mit $x_3 = 0$. Für diese bekommt man Parametrisierungen durch Vertauschen der Rollen von x_3 mit x_1 bzw. x_2 .

Wir haben also insgesamt 6 lokale Parametrisierungen gebraucht, um S^2 zu überdecken. Man kommt allerdings schon mit 2 Parametrisierungen aus. Es soll nur die Idee wiedergegeben werden, detailliertes Nachrechnen ist als Übung empfohlen. Wir konstruieren Koordinatenumgebungen durch *stereographische Projektion* π (vgl. Abb 8.4). Bezeichnet $N = (0, 0, 1)$ den „Nordpol“ so ist $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{1 - x_3}(x_1, x_2).$$

Eine analoge Formel erhält man für die stereographische Projektion vom „Südpol“ $S = (0, 0, -1)$ aus.

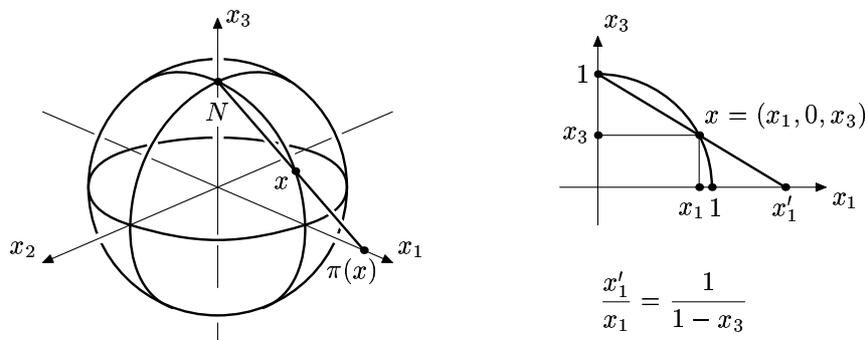


Abbildung 8.4: Stereographische Projektion

8.4 Implizit definierte Flächen

Oft ist eine Menge S implizit durch eine Gleichung definiert:

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Die Sphäre S^2 fällt in diese Klasse von Flächen. Das folgende Kriterium gibt eine hinreichende Bedingung dafür, dass S eine reguläre Fläche ist.

Satz 4. Sei $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion. Weiter sei

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1, x_2, x_3) = 0\} = f^{-1}\{0\}.$$

Falls für alle $p \in S$ der Gradient

$$\text{grad } f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)(p) \neq (0, 0, 0)$$

ist, so ist S eine reguläre Fläche.

Beweis. Sei $p \in S$. Wegen $\text{grad } f(p) \neq 0$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\partial f / \partial x_3(p) \neq 0$ ist. Wir definieren $\varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, f(x_1, x_2, x_3))$. Dann gilt

$$D_p \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \end{pmatrix},$$

also $\det D_p \varphi \neq 0$. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung gibt es offene Mengen $V_1 \subset V_0$, $W_1 := \varphi(V_1) \subset \mathbb{R}^3$ mit $p \in V_1$, $\varphi(p) \in W_1$, so dass $\varphi|_{V_1} : V_1 \rightarrow W_1$ ein Diffeomorphismus ist. Es gilt dann

$$S \cap V_1 = (\varphi|_{V_1})^{-1}(W_1 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})).$$

Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Projektion $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$. Dann ist

$$U := \pi(W_1 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}))$$

offen in \mathbb{R}^2 . Die Inklusion $i : U \rightarrow W_1 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0)$, ist ein Homöomorphismus. Somit ist $x := (\varphi|_{V_1})^{-1} \circ i : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung von S , die wegen $dx = d(\varphi|_{V_1})^{-1} \circ di$ Rang 2 hat. \square

Beispiel (a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten das Ellipsoid S definiert durch

$$S := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Mit den Bezeichnungen aus Satz 4 sei $V_0 := \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1,$$

also $S = f^{-1}\{0\}$. Um den Satz anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass $\text{grad } f(p) \neq 0$ für alle $p \in S$ gilt. Es ist aber

$$\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x_1}{a^2}, \frac{2x_2}{b^2}, \frac{2x_3}{c^2} \right) = (0, 0, 0)$$

nur für $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \notin S$. Für $a = b = c = 1$ erhält man die Einheitskugel S^2 .

(b) Das nächste Beispiel ist etwas abstrakter. Für $d > 0$ betrachten wir die Menge aller symmetrischen 2×2 Matrizen mit Determinante d , also

$$S := \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, \det X = x_1 x_3 - x_2^2 = d \right\}.$$

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_3 - x_2^2 - d$. Dann ist

$$\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -2x_2, x_1) \neq (0, 0, 0)$$

für alle $X \in S$, da $d > 0$. Nach Satz 4 ist S eine reguläre Fläche (ein 2-schaliges Hyperboloid).

Bemerkung. Die Bedingung $\text{grad } f(p) \neq 0$ für alle $p \in S$ ist hinreichend, aber nicht notwendig dafür, dass S eine reguläre Fläche ist. Wir betrachten dazu die Sphäre

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

und setzen $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)^2$. Dann ist $S^2 = f^{-1}(0)$,

$$\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)(2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

und somit $\text{grad } f(p) = 0$ für alle $p \in S^2$. Trotzdem ist S^2 - wie wir bereits wissen - eine reguläre Fläche (siehe Beispiel (a) und 7.3).

8.5 Rotationsflächen

Eine wichtige Klasse von Flächen sind *Drehflächen* oder *Rotationsflächen*. Dabei wird eine ebene Kurve in der $x_1 x_3$ -Ebene um die x_3 -Achse gedreht, vgl. Abb. 8.5. Um eine reguläre Fläche zu erhalten, muss die zu rotierende Kurve gewisse Bedingungen erfüllen, auf die wir hier aber nicht eingehen wollen.

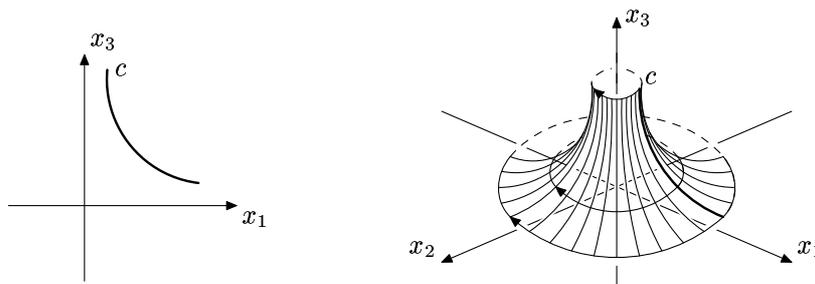


Abbildung 8.5: Rotationsfläche

9 Die 1. Fundamentalform

9.1 Definition

Wir wollen auf einer regulären Fläche Geometrie betreiben, also z.B. Längen und Winkel messen. Der Tangentialraum $T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ ist mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von \mathbb{R}^3 versehen. Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$, so ist die Tangentialebene T_pS ein Untervektorraum von $T_p\mathbb{R}^3$ (siehe Lemma II. 2). Es liegt also nahe, das Standard-Skalarprodukt auf T_pS einzuschränken.

Definition 1. *Es sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Dann definiert die bilineare Abbildung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle X, Y \rangle_p := \langle X, Y \rangle$$

ein Skalarprodukt auf T_pS . Die Zuordnung $I : p \mapsto I_p := \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ heißt 1. Fundamentalform von S .

Für eine gegebene Parameterisierung $x : U \rightarrow S$ von S um p haben wir die Basis

$$x_u := x_u(x^{-1}(p)) \quad \text{und} \quad x_v := x_v(x^{-1}(p))$$

von T_pS . Bezüglich dieser Basis können wir $I_p, p \in x(U)$, durch eine positiv definite, symmetrische Matrix $(g_{ij}(u, v)) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ beschreiben. Die folgende Bezeichnung dieser Matrix geht auf Gauß zurück:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{aligned} g_{11} &\equiv E = E(u, v) = \langle x_u, x_u \rangle_p, \\ g_{12} = g_{21} &\equiv F = F(u, v) = \langle x_u, x_v \rangle_p = \langle x_v, x_u \rangle_p, \\ g_{22} &\equiv G = G(u, v) = \langle x_v, x_v \rangle_p. \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir gezeigt: Auf einer regulären Fläche S wird durch das Standardskalarprodukt von \mathbb{R}^3 eine Familie von Skalarprodukten $(I_p)_{p \in S}$ induziert. Bezüglich einer Parametrisierung $x : U \rightarrow S$ von S ist diese Familie gegeben durch eine 2-parametrische Familie von Matrizen $(g_{ij}(u, v))_{(u, v) \in U}$. Dabei sind die Einträge $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

Beispiel (a) Wir betrachten eine affine Ebene, die global durch $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto x_0 + uf_1 + vf_2$ mit zwei orthonormierten Vektoren $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^3$ parametrisiert ist. Dann ist $x_u = f_1$ und $x_v = f_2$, also

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei S der Zylinder $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$. Eine lokale Parametrisierung von S ist $x(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$. Dann ist $x_u = r(-\sin u, \cos u, 0)$, $x_v = (0, 0, 1)$ und damit

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Die *innere Geometrie* einer Fläche umfasst alle Eigenschaften oder Größen, die nur von der 1. Fundamentalform abhängen (bzw. durch diese bestimmt sind).

Nach den obigen Beispielen stimmen für $r = 1$ die 1. Fundamentalform von Zylinder und Ebene überein. Der tiefere Grund dafür liegt darin, dass man den Zylinder unter Erhaltung der 1. Fundamentalform in die Ebene „abwickeln“ kann. Insbesondere enthält die 1. Fundamentalform nicht die vollständige Information darüber, wie die Fläche in den \mathbb{R}^3 eingebettet ist. Für viele geometrische Fragestellungen genügt es aber oft, die 1. Fundamentalform zu kennen. In den nächsten beiden Abschnitten geben wir erste Beispiele dazu an. Wir werden später in Teil IV noch ausführlich auf Fragen der inneren Geometrie eingehen.

9.2 Länge von Flächenkurven

Es sei $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung einer regulären Fläche S . Weiter sei $[\alpha, \beta] \rightarrow U$, $t \mapsto (u(t), v(t))$ eine differenzierbare Kurve. Dann ist $c(t) = x(u(t), v(t))$ eine differenzierbare Flächenkurve, vgl. Abb. 9.1. Da $x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^3$ kann man c

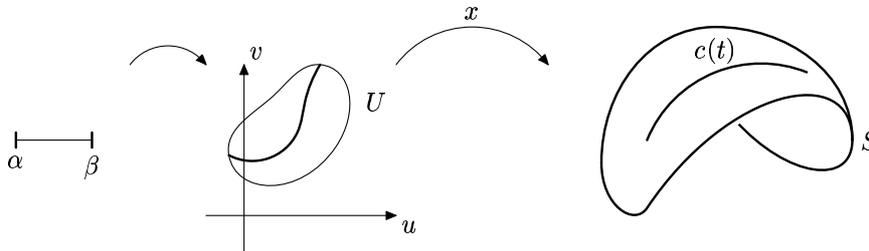


Abbildung 9.1: Eine Flächenkurve

natürlich auch als Raumkurve auffassen. Die Länge von c ist dann

$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \|c'(t)\| dt.$$

Weiter ist nach der Kettenregel $c'(t) = x_u(u(t), v(t))u'(t) + x_v(u(t), v(t))v'(t) \in T_{c(t)}S$ und somit

$$\begin{aligned} \|c'(t)\|^2 &= \langle c'(t), c'(t) \rangle \\ &= (u'(t))^2 \langle x_u, x_u \rangle + 2u'(t)v'(t) \langle x_u, x_v \rangle + (v'(t))^2 \langle x_v, x_v \rangle \\ &= (u'(t))^2 E + 2u'(t)v'(t)F + (v'(t))^2 G. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $L(c)$ für eine Flächenkurve genügt es also, die 1. Fundamentalform der Fläche und die Kurve im Parametergebiet zu kennen. Mit andern Worten: die Länge einer Flächenkurve von S ist eine Größe der inneren Geometrie von S .

9.3 Winkel zwischen Parameterlinien

Es sei S eine reguläre Fläche. Wir betrachten die Parameterlinien $u = u_0$ und $v = v_0$ bzw. deren Bilder $x(u_0, t)$ und $x(t, v_0)$ auf S , vgl. Abb. 9.2.

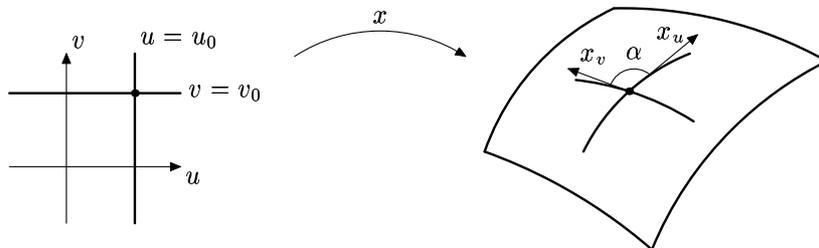


Abbildung 9.2: Parameterlinien

Der Winkel α , unter dem sich $x(u_0, t)$ und $x(t, v_0)$ im Punkt $x(u_0, v_0)$ schneiden, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle x_u(u_0, v_0), x_v(u_0, v_0) \rangle}{\|x_u(u_0, v_0)\| \|x_v(u_0, v_0)\|} \\ &= \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0) \cdot G(u_0, v_0)}}. \end{aligned}$$

Auch hier genügt die Kenntnis der 1. Fundamentalform, um den Winkel zu bestimmen.

9.4 Verhalten von I bei Koordinatenwechsel

Es sei S eine reguläre Fläche. Sind zwei Parametrisierungen $x : U \rightarrow S$, $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow S$ um den Punkt $p \in x(U) \cap \bar{x}(\bar{U})$ gegeben, so stellt sich die Frage, wie die Darstellungen der 1. Fundamentalform I_p in den jeweiligen Koordinaten zusammenhängen. Wir betrachten dazu den Koordinatenwechsel

$$\begin{aligned} \bar{x}^{-1} \circ x : x^{-1}(x(U) \cap \bar{x}(\bar{U})) &\rightarrow \bar{x}^{-1}(x(U) \cap \bar{x}(\bar{U})) \\ (u, v) &\mapsto (\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial \bar{x} \circ (\bar{x}^{-1} \circ x)}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}(u, v)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial \bar{x} \circ (\bar{x}^{-1} \circ x)}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}(u, v).\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}f_1 &:= x_u(u, v) & f_2 &:= x_v(u, v) \\ \bar{f}_1 &:= \bar{x}_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) & \bar{f}_2 &:= \bar{x}_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v})\end{aligned}$$

Bezüglich dieser Standardbasen hat der Koordinatenwechsel gemäss obiger Rechnung die Darstellungsmatrix

$$D(u, v) = (d_{ij}(u, v)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

Wir können also schreiben

$$f_i = \sum_{k=1}^2 d_{ki} \bar{f}_k$$

und

$$g_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle_p = \sum_{k,l=1}^2 d_{ki} d_{lj} \langle \bar{f}_k, \bar{f}_l \rangle_p,$$

bzw.

$$(g_{ij}(u, v)) = D^T(u, v) (\bar{g}_{ij}(\bar{u}, \bar{v})) D(u, v).$$

Für jeden Punkt $p = x(u, v) = \bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ gelten also die bekannten Transformationsformeln für Skalarprodukte unter Basiswechsel.

Bemerkung. Wir haben in diesem Teil (2-dimensionale) reguläre Flächen in \mathbb{R}^3 eingeführt und gewisse allgemeine Eigenschaften diskutiert. Die Dimensionen zwei und drei wurden aber nirgends wirklich benutzt. Tatsächlich kann man die bisherigen Konzepte genauso für beliebige Dimensionen betrachten: man spricht dann von $((n-1)$ -dimensionalen) *regulären Hyperflächen* in \mathbb{R}^n .

Teil III

Krümmung von Flächen

10 Gauß- und Weingarten-Abbildung

10.1 Differenzierbare Abbildungen

Wir betrachten zwei reguläre Flächen M und N und eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$. Es seien $p \in M$, $x : U \rightarrow M$ eine Parametrisierung um p und $y : V \rightarrow N$ eine Parametrisierung um $f(p)$.

Definition 1. Die stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt differenzierbar in $p \in M$, wenn die Abbildung

$$y^{-1} \circ f \circ x : x^{-1}(x(U) \cap f^{-1}(y(V))) \rightarrow y^{-1}(f(x(U)) \cap y(V))$$

differenzierbar in $x^{-1}(p)$ ist, vgl. Abb. 10.1. Sie heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt $q \in M$ differenzierbar ist.

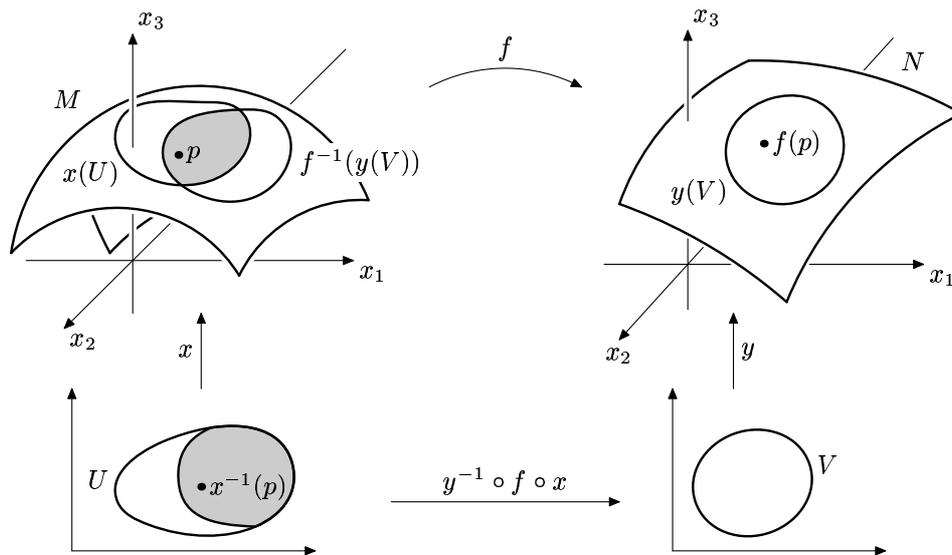


Abbildung 10.1: Darstellung in lokalen Koordinaten

Bemerkung (a) Da f stetig ist, ist die Menge $x^{-1}(x(U) \cap f^{-1}(y(V)))$ offen in U und damit offen in \mathbb{R}^2 . Die Frage nach Differenzierbarkeit ist also sinnvoll.

(b) Die Darstellung von f in Definition 1 bezeichnet man auch als Darstellung von f in lokalen Koordinaten. Man kann sich also merken: f ist genau dann differenzierbar, wenn f in lokalen Koordinaten differenzierbar ist.

(c) Die Differenzierbarkeitsaussage in lokalen Koordinaten hängt nicht von der Parametrisierung um p und $f(p)$ ab. Genauer: Ist \bar{x} eine weitere Parametrisierung um p und \bar{y} eine weitere Parametrisierung um $f(p)$, so ist $\bar{y}^{-1} \circ f \circ \bar{x}$ genau dann differenzierbar in $\bar{x}^{-1}(p)$, wenn $\bar{y}^{-1} \circ f \circ \bar{x}$ differenzierbar in $\bar{x}^{-1}(p)$ ist (Übungsaufgabe!).

Definition 2. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, so heißt f differenzierbar in $p \in M$, wenn die Abbildung

$$f \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

für eine und damit jede Parametrisierung um p differenzierbar ist.

10.2 Das Tangentialbündel

Es sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen regulären Flächen. Weiter sei $v \in T_p M$ ein Tangentialvektor, d. h. es gibt eine differenzierbare Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $c(0) = p$, $c((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M$ und $c'(0) = v$. Die Tangentialabbildung $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ist die lineare Abbildung gegeben durch

$$df_p(v) := \frac{d(f \circ c)}{dt}(0),$$

d. h. df_p bildet den Tangentialvektor $c'(0)$ der Kurve c im Punkt p auf den Tangentialvektor der Kurve $f \circ c$ im Punkt $f(p)$ ab, vgl. Abb. 10.2.

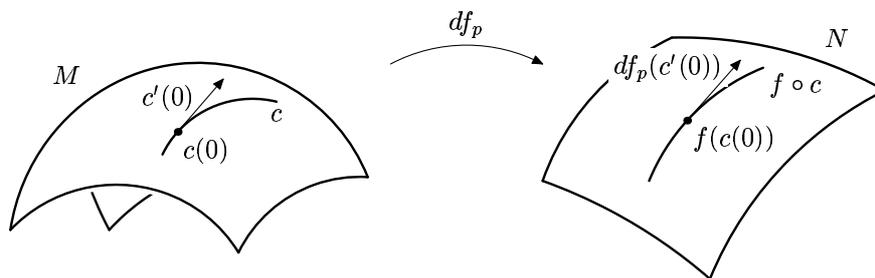


Abbildung 10.2: Die Tangentialabbildung

Wir müssen zeigen, dass df_p wohldefiniert ist, d. h. ist $\bar{c} : (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}) \rightarrow M$, eine weitere Kurve mit $\bar{c}(0) = p$ und $\bar{c}'(0) = v$, so ist zu zeigen, dass

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \bar{c})}{dt}(0)$$

gilt. Dazu sei $x : U \rightarrow M$ eine Parametrisierung um $c(0) = \bar{c}(0) = p$. Wegen der Stetigkeit von c und \bar{c} kann man annehmen, dass die Abbildungen $x^{-1} \circ c$ und $x^{-1} \circ \bar{c}$ definiert sind. Dann gilt nach Voraussetzung

$$dx_{x^{-1}(p)} \left(\frac{d(x^{-1} \circ c)}{dt}(0) \right) = c'(0) = \bar{c}'(0) = dx_{x^{-1}(p)} \left(\frac{d(x^{-1} \circ \bar{c})}{dt}(0) \right).$$

Da $dx_{x^{-1}(p)}$ injektiv ist, folgt

$$\frac{d(x^{-1} \circ c)}{dt}(0) = \frac{d(x^{-1} \circ \bar{c})}{dt}(0).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ c)}{dt}(0) &= \frac{d(f \circ x \circ x^{-1} \circ c)}{dt}(0) \\ &= d(f \circ x)_{x^{-1}(p)} \left(\frac{d(x^{-1} \circ c)}{dt}(0) \right) \\ &= d(f \circ x)_{x^{-1}(p)} \left(\frac{d(x^{-1} \circ \bar{c})}{dt}(0) \right) \\ &= \frac{d(f \circ x \circ x^{-1} \circ \bar{c})}{dt}(0) \\ &= \frac{d(f \circ \bar{c})}{dt}(0) \end{aligned}$$

Es kommt also nicht auf die Kurve c an, sondern nur auf den Tangentialvektor $c'(0)$ dieser Kurve. Ist $c'(0) = \alpha x_u + \beta x_v$, so kann man die spezielle Kurve

$$t \mapsto x(x^{-1}(p) + t(\alpha, \beta))$$

benutzen. Rechnen Sie mithilfe solcher Kurven die Linearität von df_p nach.

Definition 3. Die disjunkte Vereinigung

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M$$

heißt das Tangentialbündel von M . Eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ induziert durch die Festsetzung

$$df(p, v) := (f(p), df_p(v)), \quad (p, v) \in T_p M$$

eine Abbildung $df : TM \rightarrow TN$.

10.3 Normalenfelder

Die Krümmung einer Kurve haben wir als Änderungsgeschwindigkeit der Tangente definiert. Die Krümmung einer Fläche wird nun analog als Änderungsgeschwindigkeit der Tangentialebene definiert. Dazu benötigen wir einige neue Begriffe.

Definition 4. Ein Einheitsnormalenvektorfeld auf einer offenen Teilmenge W einer regulären Fläche S ist eine differenzierbare Abbildung

$$N : W \rightarrow T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad q \mapsto (q, N(q)),$$

die jedem Punkt $q \in W$ einen Einheitsnormalenvektor an S in q zuordnet, d. h.

$$\|N(q)\| = 1 \quad \text{und} \quad \langle N(q), X \rangle = 0$$

für alle $X \in T_q S$, vgl. Abb. 10.3.

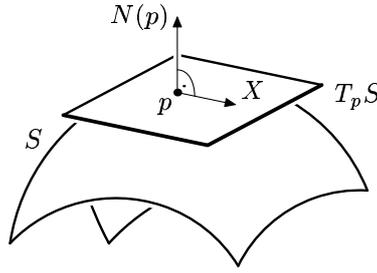


Abbildung 10.3: Einheitsnormalenvektor

Eine reguläre Fläche S heißt *orientierbar*, wenn es auf S ein differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld $N : S \rightarrow T\mathbb{R}^3$ gibt. Die Wahl eines solchen Vektorfeldes nennt man auch eine *Orientierung* von S . Auf einer orientierbaren Fläche gibt es immer genau zwei Orientierungen.

Definition 5. Es sei S eine reguläre Fläche und $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung von S um $p = x(u, v)$. Der Vektor

$$N(p) := \frac{x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)}{\|x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)\|} \in T_p\mathbb{R}^3$$

heißt Einheitsnormalenvektor von S im Punkt $p \in S$ bezüglich x .

Die Abbildung

$$N \circ x : U \rightarrow T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

ist per Definition differenzierbar und N ist ein Normalenfeld.

Es sei $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow S$, $(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ eine weitere Parametrisierung um p . Mit $\bar{N}(\bar{p})$ sei der Normalenvektor bezüglich \bar{x} bezeichnet. Weiter sei

$$\begin{aligned} \varphi : \bar{x}^{-1}(x(U) \cap \bar{x}(\bar{U})) &\rightarrow x^{-1}(x(U) \cap \bar{x}(\bar{U})) \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto (u, v) \end{aligned}$$

der Koordinatenwechsel. Es gilt also

$$\bar{x}(\bar{u}, \bar{v}) = (x \circ \varphi)(\bar{u}, \bar{v}) = x(u, v)$$

und damit

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}} &= \left(x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \wedge \left(x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) x_u \wedge x_v = \det(d\varphi) x_u \wedge x_v. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\bar{N}(\bar{p}) = \frac{\det(d\varphi)}{|\det(d\varphi)|} \cdot N(p).$$

Ist $\det(d\varphi) > 0$ so heißt φ orientierungserhaltend. Bei einem orientierungserhaltenden Diffeomorphismus gilt also $N(p) = \bar{N}(\bar{p})$, sonst gilt $N(p) = -\bar{N}(\bar{p})$.

Bemerkung. Eine reguläre Fläche S ist genau dann orientierbar, wenn es eine Überdeckung $(\varphi_i)_{i \in I}$ von S durch Parametrisierungen $\varphi_i : U_i \rightarrow S$ gibt, so dass alle Koordinatenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ positive Funktionaldeterminante haben (Übungsaufgabe!).

Beispiele (a) Die 2-Sphäre S^2 und Graphen von Funktionen sind stets orientierbar. Jede Fläche, die durch eine Parametrisierung beschrieben werden kann, ist orientierbar.

(b) Das Möbiusband ist nicht orientierbar, vgl. Abb. 10.4.

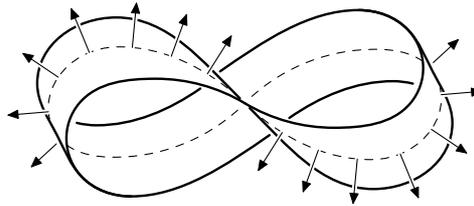


Abbildung 10.4: Möbiusband

10.4 Gauß- und Weingarten-Abbildung

Es sei S eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N . Die Abbildung $\pi : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(p, v) \mapsto v$ ist differenzierbar und damit auch die Abbildung $\pi \circ N$. Für diese Abbildung schreiben wir einfach N . Nach Definition ist also $N(S) \subset S^2$, vgl. Abb. 10.5.

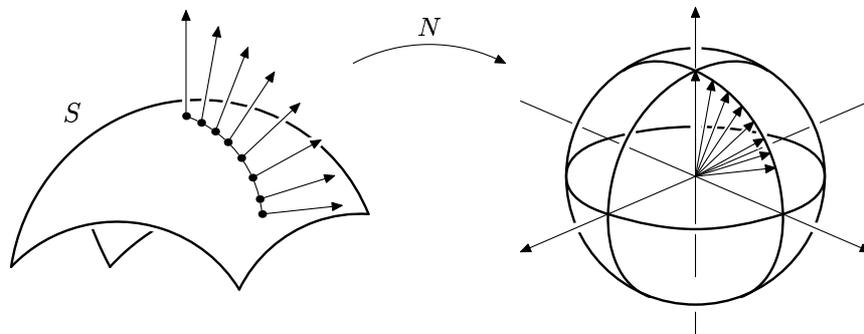


Abbildung 10.5: Gauß-Abbildung

Definition 6. Sei S eine orientierbare Fläche. Die differenzierbare Abbildung

$$N : S \rightarrow S^2, \quad p \mapsto N(p)$$

heißt Gauß-Abbildung von S .

Da das Vektorfeld N bis auf ein Vorzeichen eindeutig bestimmt ist, gibt es zu jedem $p \in N$ eine Parametrisierung $x : U \rightarrow S$ um p , so dass N auf $x(U)$ die Gestalt aus Definition 5 hat.

Wir betrachten die Tangentialabbildung

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2.$$

Nach Konstruktion steht $N(p)$ senkrecht auf $T_{N(p)} S^2$. Da aber per Definition $N(p)$ auch senkrecht auf $T_p S$ steht, können wir die Tangentialräume $T_p S$ und $T_{N(p)} S^2$ über die Abbildung $(p, v) \mapsto (N(p), v)$ identifizieren: $T_p S \cong T_{N(p)} S^2$. Insbesondere fassen wir nun dN_p als Endomorphismus von $T_p S$ auf.

Definition 7. Die Tangentialabbildung der Gauß-Abbildung

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_p S, \quad p \in S,$$

heißt Weingarten-Abbildung (oder auch Form-Operator).

Es sei $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung von S . Weiter sei $p = x(u, v) \in x(U)$. Dann haben wir die Basis

$$\{x_u = x_u(u, v), x_v = x_v(u, v)\}$$

von $T_p S$. Für die Tangentialabbildung dN_p gilt dann

$$\begin{aligned} dN_p(x_u) &= dN_p(dx_{(u,v)}(e_1)) \\ &= d(N \circ x)_{(u,v)}(e_1) \\ &= \frac{\partial(N \circ x)}{\partial u}(u, v) =: N_u(u, v) \end{aligned}$$

und

$$dN_p(x_v) = \frac{\partial(N \circ x)}{\partial v}(u, v) =: N_v(u, v).$$

Bemerkungen (a) Ist $c : I \rightarrow S$, $t \mapsto c(t) = x(u(t), v(t))$ eine differenzierbare Flächenkurve mit $c(0) = p$ und $N(t) := N(c(t))$ die Einschränkung der Gauß-Abbildung auf diese Kurve, so gilt

$$\begin{aligned} N'(0) &= \frac{d(N \circ c)}{dt}(0) = dN_p(c'(0)) = dN_p(u'(0)x_u + v'(0)x_v) \\ &= u'(0)N_u(u(0), v(0)) + v'(0)N_v(u(0), v(0)). \end{aligned}$$

(b) Da $\langle N, N \rangle = 1$ folgt durch ableiten

$$\langle N_u, N \rangle = \langle N_v, N \rangle = 0.$$

Das zeigt nochmals

$$dN_p(T_p S) = dN_p([x_u, x_v]) = [N_u, N_v] \subset N^\perp \cong T_p S,$$

d.h. dN_p ist für alle $p \in S$ ein Endomorphismus von $T_p S$.

Satz 1. Die Weingarten-Abbildung $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ einer regulären Fläche S ist für jeden Punkt $p \in S$ selbstadjungiert bezüglich der 1. Fundamentalform von S , d. h. es gilt

$$\langle dN_p(X), Y \rangle_p = \langle X, dN_p(Y) \rangle_p$$

für alle $p \in S$ und alle $X, Y \in T_p S$.

Beweis. Es genügt die Behauptung für eine Basis von $T_p S$ zu zeigen. Dazu sei $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung von S . Dann haben wir die Basis $\{x_u, x_v\}$ von $T_p S$. Wegen der Symmetrie des Skalarprodukts gilt

$$\langle dN_p(x_u), x_u \rangle = \langle x_u, dN_p(x_u) \rangle, \quad \langle dN_p(x_v), x_v \rangle = \langle x_v, dN_p(x_v) \rangle.$$

Es bleibt also

$$\langle dN_p(x_u), x_v \rangle = \langle x_u, dN_p(x_v) \rangle$$

zu zeigen. Das ist aber äquivalent zu

$$\langle N_u, x_v \rangle = \langle x_u, N_v \rangle.$$

Um das zu zeigen, leiten wir $\langle N, x_u \rangle = 0 = \langle N, x_v \rangle$ nach v bzw. nach u ab und erhalten

$$\begin{aligned} \langle N_v, x_u \rangle + \langle N, x_{uv} \rangle &= 0 \\ \langle N_u, x_v \rangle + \langle N, x_{vu} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Da x eine C^∞ -Abbildung, ist gilt $x_{uv} = x_{vu}$ ($x \in C^2$ hätte schon gereicht.). Damit folgt die Behauptung. \square

Wir erinnern an die folgenden Begriffe aus der Linearen Algebra. Sei E ein euklidischer Vektorraum, d. h. E ist ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt. Zu einer selbstadjungierten Abbildung $\phi : E \rightarrow E$ gehört eine symmetrische Bilinearform B_ϕ definiert durch

$$B_\phi(X, Y) := \langle \phi(X), Y \rangle$$

bzw. eine quadratische Form

$$Q_\phi(X) := B_\phi(X, X) = \langle \phi(X), X \rangle.$$

Wir betrachten jetzt diese Konzepte für $E = T_p S$ und $\phi = -dN_p$.

Definition 8. Die quadratische Form II_p die zu $-dN_p$, $p \in S$, gehört, heißt 2. Fundamentalform von S in p , also

$$II_p(X) := \langle -dN_p(X), X \rangle_p$$

für alle $p \in S$ und alle $X \in T_p S$. Wir werden die Bezeichnung II_p auch für die entsprechende Bilinearform verwenden.

Beispiele (a) Es sei S die affine Ebene durch $p \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt von den Vektoren f_1 und f_2 . Ein Normalenfeld auf S ist dann offenbar konstant. Es sei

$$f = \frac{f_1 \wedge f_2}{\|f_1 \wedge f_2\|}.$$

Wir wählen die Orientierung so, dass $N(p) = (p, f)$ gilt. Die Gauß-Abbildung ist also konstant. Für die Weingarten-Abbildung gilt folglich $dN_q \equiv 0$, bzw. $II_q \equiv 0$ für alle $q \in S$.

(b) Wir betrachten die Sphäre S_r^2 vom Radius r ($S^2 = S_1^2$). Für N ergeben sich die zwei Möglichkeiten

$$N(p) = \pm \frac{p}{\|p\|} = \pm \frac{p}{r},$$

je nach Wahl der Orientierung. Positives Vorzeichen entspricht dem "äußeren" Normalenfeld, negatives Vorzeichen dem "inneren", vgl. Abb. 10.6. Damit ist

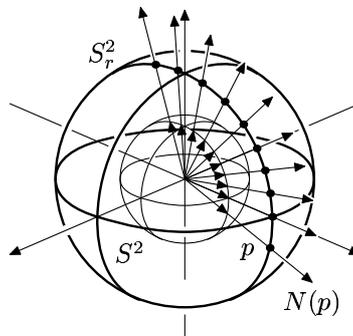


Abbildung 10.6: Äußeres Normalenfeld auf S_r^2

$$N = \pm \frac{1}{r} \text{id}_{S_r^2} \quad \text{und} \quad dN_p = \pm \frac{1}{r} \text{id}_{T_p S_r^2}.$$

Nach Definition erhält man $II_p(X) = \mp \frac{1}{r} \langle X, X \rangle_p$.

(c) Als weiteres Beispiel betrachten wir den Zylinder S , vgl. Abb. 10.7,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Die Gauß-Abbildung ist konstant längs Mantellinien und das Bild $N(S)$ ist ein Großkreis auf S^2 , vgl. Abb. 10.7.

Für die Weingarten-Abbildung erhält man

$$\begin{aligned} dN_p(X) &= 0, & \text{wenn } X \text{ tangential an eine Mantellinie ist und} \\ dN_p(Y) &= Y, & \text{wenn } Y \text{ tangential an eine Kreislinie ist.} \end{aligned}$$

Die Vektoren X und Y sind orthogonal und bilden damit eine Basis von $T_p S$. Bezüglich dieser Basis hat die zweite Fundamentalform also die Darstellung

$$II_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \|Y\|^2 \end{pmatrix}.$$

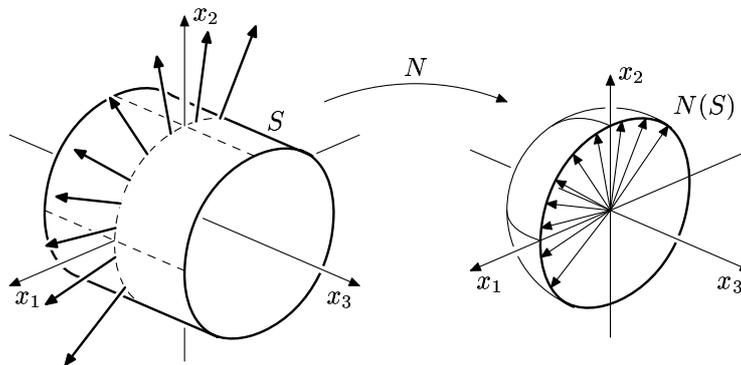


Abbildung 10.7: Zylinder und entsprechende Gauß-Abbildung

Zeigen Sie als , dass der Zylinder eine reguläre Fläche ist, und weisen Sie dann mithilfe einer Parametrisierung von S die obigen Behauptungen nach.

(d) Wir betrachten das hyperbolische Paraboloid, das implizit durch

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_2^2 - x_1^2\}$$

gegeben ist, vgl. Abb. 10.8. Eine globale Parametrisierung von S ist die Abbildung

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (u, v, v^2 - u^2).$$

S ist insbesondere der Graph einer Funktion und damit orientierbar.

Wir wählen das Normalenfeld bzgl. x als Orientierung, vgl. Definition 5. Es gilt

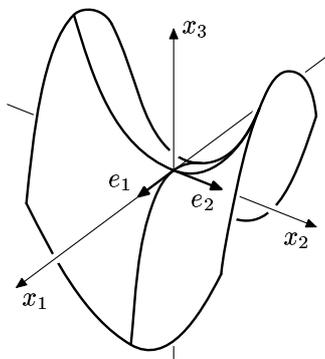


Abbildung 10.8: Hyperbolisches Paraboloid

$x_u(u, v) = (1, 0, -2u)$ und $x_v(u, v) = (0, 1, 2v)$, sowie $x_u(u, v) \wedge x_v(u, v) = (2u, -2v, 1)$. Für den Normalenvektor in $p = x(u, v)$ erhalten wir also

$$N(p) = N(x(u, v)) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

Für $p = (0, 0, 0) = x(0, 0)$ gilt

$$\begin{aligned}x_u &:= x_u(0, 0) = (1, 0, 0) = e_1, \\x_v &:= x_v(0, 0) = (0, 1, 0) = e_2.\end{aligned}$$

Für eine Flächenkurve c mit $c(0) = p = (0, 0, 0)$ ist $N(t) := N(c(t)) = N(x(u(t), v(t)))$ die Einschränkung der Gauß-Abbildung auf diese Kurve. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}dN_p(c'(0)) &= \frac{dN}{dt}(0) \\&= (2u'(0), -2v'(0), 0) \\&= 2u'(0)e_1 - 2v'(0)e_2.\end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned}c'(0) &= u'(0)x_u(0, 0) + v'(0)x_v(0, 0) \\&= u'(0)e_1 + v'(0)e_2,\end{aligned}$$

sehen wir durch Vergleich: $e_1 = x_u(0, 0)$ ist Eigenvektor von dN_p zum Eigenwert 2 und $e_2 = x_v(0, 0)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert -2 .

11 Gauß-Krümmung und mittlere Krümmung

11.1 Die Normalschnittkrümmung

Wir gehen aus von einer Idee von Euler und betrachten sogenannte Normalschnitte einer Fläche. Dazu sei S eine orientierte reguläre Fläche und $p \in S$. Weiter sei $X \in T_p S$ mit $\|X\| = 1$. Es bezeichne

$$\sigma_X := [N(p), X]$$

die affine Ebene in \mathbb{R}^3 durch p , aufgespannt von X und $N(p)$. Dann ist $\sigma_X \cap S$ in einer Umgebung von p das Bild einer regulären, mit Bogenlänge parametrisierten Kurve $c_X : I \rightarrow S$ mit $c'_X(0) = X$. Um das einzusehen, wählen wir eine lokale Parametrisierung $x : U \rightarrow S$ von S um p , die mit der Orientierung von S verträglich ist. Dann bilden die Vektoren

$$x_u, x_v, x_u \wedge x_v$$

eine Basis von \mathbb{R}^3 (wobei als Argument überall $x^{-1}(p)$ zu nehmen ist). Weiter sei B die Matrix deren Spalten gerade diese Vektoren sind. Wir führen einen Basiswechsel im \mathbb{R}^3 durch, beziehen uns also jetzt auf die obige Basis, d. h. wir betrachten die Koordinaten (y_1, y_2, y_3) mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Dieser Koordinatenwechsel ist ein Diffeomorphismus von \mathbb{R}^3 auf sich selbst. Bezüglich der Koordinaten y entspricht S der Menge

$$B^{-1}S = \{B^{-1}p \mid p \in S\}.$$

Da x eine Parametrisierung von S ist, ist $B^{-1} \circ x$ eine Parametrisierung von $B^{-1}S$ und es gilt

$$\begin{aligned} d(B^{-1} \circ x)_{x^{-1}(p)} &= dB_p^{-1} \circ dx_{x^{-1}(p)} \\ &= (x_u \ x_v \ x_u \wedge x_v)^{-1}(x_u \ x_v) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir haben damit dieselbe Situation wie im Beweis von Satz 3 in Abschnitt 8.2. Die Orthogonalprojektion π auf die Ebene $[x_u, x_v]$ ist in einer hinreichend kleinen Umgebung von p ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2 \cong [x_u, x_v]$. Der Schnitt von σ_X mit dieser Ebene ist eine Gerade durch 0. Der Schnitt von σ_X mit S ist das Bild dieser Geraden unter π^{-1} und damit eine reguläre Flächenkurve.

Es sei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung von c_X , also

$$\kappa(s) = \|c_X''(s)\|.$$

Da c_X in der Ebene σ_X liegt ist $c_X''(0)$ parallel zu $N(p)$, d. h. $H(0) = \pm N(p)$ (sofern $H(0)$ definiert ist). Das Vorzeichen ist durch die Orientierung von S bzw. durch die Wahl von N bestimmt.

Definition 9. Die Normalschnittkrümmung $\kappa_n(X)$ von S im Punkt p in Richtung $X \in T_pS$, $\|X\| = 1$, ist definiert als

$$\kappa_n(X) := \langle c_X''(0), N(p) \rangle = \pm \kappa(0).$$

Das ist - bis auf ein durch N bestimmtes Vorzeichen - die Krümmung der ebenen Kurve $S \cap \sigma_X$. Mit anderen Worten: N induziert eine Orientierung von σ_X . Wählt man diese Orientierung als die positive Orientierung von σ_X , so ist κ_n gerade die orientierte Krümmung von $S \cap \sigma_X$.

Wir stellen jetzt eine Beziehung zur 2. Fundamentalform bzw. zur Weingarten-Abbildung her. Dazu sei $N(s) := N(c_X(s))$ der Normalenvektor von S im Punkt $c_X(s)$, $s \in I$. Dann gilt

$$\langle N(s), c_X'(s) \rangle = 0$$

für alle $s \in I$. Ableiten nach s ergibt

$$\langle N'(s), c_X'(s) \rangle + \langle N(s), c_X''(s) \rangle = 0 \quad (*)$$

für alle $s \in I$. Es folgt

$$\begin{aligned} II_p(X) &= II_p(c'_X(0)) \\ &= I_p(-dN_{c(0)}(c'_X(0)), c'_X(0)) \\ &= \langle -(N \circ c_X)'(0), c'_X(0) \rangle_p \end{aligned}$$

und mit (*)

$$II_p(X) = \langle N(0), c''_X(0) \rangle = \kappa_n(X)$$

Damit erhält man eine geometrische Interpretation der 2. Fundamentalform II_p :

$$II_p(X) = \kappa_n(X)$$

für alle $X \in T_pS$ mit $\|X\| = 1$.

Beispiele (a) Wir betrachten eine Ebene. Alle Schnitte sind Geraden und alle Normalkrümmungen verschwinden. Es gilt also $II_p \equiv 0$.

(b) Wir betrachten die Sphäre S^2 . Alle Normalschnitte sind Großkreise, d. h. für die Normalkrümmung gilt stets $\kappa_n(X) = \pm 1$, bzw.

$$II_p(X) = \pm 1$$

für alle $p \in S^2$ und alle $X \in T_pS$ mit $\|X\| = 1$. Das Vorzeichen wird durch die Wahl der Orientierung bestimmt. Bei Wahl des äußeren Normalenfeldes erhält man negative Vorzeichen, bei Wahl des inneren Normalenfeldes positives Vorzeichen, vgl. Abb. 11.1.

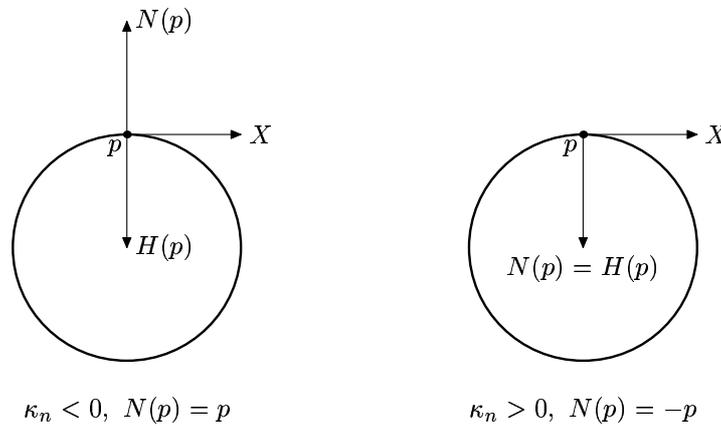


Abbildung 11.1: Normalschnittkrümmung von S^2

11.2 Hauptkrümmungen

Aus der Linearen Algebra wissen wir: Da $-dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ für jedes $p \in S$ selbst-adjungiert bezüglich der 1. Fundamentalform ist, gibt es eine Orthonormalbasis

$$\{E_1(p), E_2(p)\}$$

von $T_p S$ aus Eigenvektoren von $-dN_p$,

$$-dN_p(E_i(p)) = \kappa_i(p)E_i(p), \quad i = 1, 2.$$

Der Endomorphismus $-dN_p$ ist damit diagonalisierbar und die Darstellungs-Matrizen von I_p und II_p bezüglich obiger Basis aus Eigenvektoren haben die Gestalt

$$II_p = \begin{pmatrix} \kappa_1(p) & 0 \\ 0 & \kappa_2(p) \end{pmatrix} \quad I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I_p und II_p sind also insbesondere simultan diagonalisierbar für alle $p \in S$. Ohne Einschränkung sei $\kappa_1(p) \geq \kappa_2(p)$. Dann gilt

$$\kappa_1(p) = \max \{II_p(X) \mid \|X\| = 1, X \in T_p(S)\}$$

und

$$\kappa_2(p) = \min \{II_p(X) \mid \|X\| = 1, X \in T_p(S)\}.$$

Das bedeutet geometrisch: Die Eigenwerte $\kappa_1(p)$ und $\kappa_2(p)$ sind die Extrema der Normalschnittkrümmung in orthogonalen Richtungen.

Definition 10. Die Eigenwerte $\kappa_1(p)$ und $\kappa_2(p)$ heißen Hauptkrümmungen in p . Die zugehörigen Eigenvektoren $E_1(p), E_2(p) \in T_p S$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen von S in $p \in S$.

Aus den Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 in einem Punkt $p \in S$ kann man die Normalschnittkrümmung in einer beliebigen Richtung $X \in T_p S, \|X\| = 1$, berechnen. Dazu stellt man X in der Basis E_1, E_2 von $T_p S$ dar,

$$X = \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2.$$

Dann erhält man folgende Formel von Euler:

$$\begin{aligned} \kappa_n(X) &= II_p(X) \\ &= \langle -dN_p(X), X \rangle_p \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

11.3 Die Gauß-Krümmung

Es sei S eine reguläre Fläche. Unter einer *geometrischen Eigenschaft* von S versteht man eine Eigenschaft, die unabhängig von der Wahl einer Parametrisierung von S ist (für ihre Bestimmung ist man natürlich trotzdem oft auf eine konkrete

Parametrisierung angewiesen). Für Konstruktionen im Tangentialraum bedeutet Unabhängigkeit gerade Unabhängigkeit von der gewählten Basis. Die Lineare Algebra liefert uns einige solche Invarianten. So sind etwa für eine quadratische Form bzw. eine symmetrische Bilinearform die Spur und die Determinante einer Darstellungsmatrix unabhängig von der Wahl der Basis, bezüglich der die jeweilige Abbildung dargestellt wird.

Definition 11. Wir betrachten den Endomorphismus $-dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ und setzen

$$K(p) := \det(-dN_p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p),$$

$$H(p) := \frac{1}{2}\text{Spur}(-dN_p) = \frac{1}{2}(\kappa_1(p) + \kappa_2(p)).$$

Damit erhalten wir Funktionen $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ und $H : S \rightarrow \mathbb{R}$; $K(p)$ heißt Gauß-Krümmung von S in p , $H(p)$ heißt mittlere Krümmung von S in p .

Neben I und II sind das die wichtigsten (lokalen) geometrischen Invarianten einer Fläche. Anhand der Gauß-Krümmung klassifiziert man die Punkte einer Fläche folgendermaßen: Der Punkt $p \in S$ heißt

<i>elliptischer Punkt</i> , wenn	$K(p) > 0 \iff \det(-dN_p) > 0$
<i>parabolischer Punkt</i> , wenn	$K(p) = 0$ und $-dN_p \neq 0 \iff$ $\det(-dN_p) = 0$ und $-dN_p \neq 0$
<i>hyperbolischer Punkt</i> , wenn	$K(p) < 0 \iff \det(-dN_p) < 0$
<i>Flachpunkt</i> , wenn	$\kappa_1 = \kappa_2 = 0 \iff -dN_p = 0.$

Bemerkung. Die Gauß-Krümmung ist von der Wahl der Orientierung von S bzw. von der Wahl des Normalenfelds N unabhängig. Hingegen ändert die mittlere Krümmung beim Wechsel der Orientierung ihr Vorzeichen.

11.4 Formeln für K und H in lokalen Koordinaten

Es sei S eine orientierte reguläre Fläche und $x : U \rightarrow S$ eine mit der Orientierung verträgliche Parametrisierung von S . Wir wollen für einen Punkt $p \in x(U)$ mithilfe von x Formeln für die 2. Fundamentalform, die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung herleiten. Sei also $p \in x(U)$ und

$$x_u := x_u(x^{-1}(p)), \quad x_v := x_v(x^{-1}(p)).$$

Dann ist $\mathcal{B} := \{x_u, x_v\}$ eine Basis von $T_p S$. Nach Voraussetzung gilt für $q \in x(U)$

$$N(q) = \frac{x_u(x^{-1}(q)) \wedge x_v(x^{-1}(q))}{\|x_u(x^{-1}(q)) \wedge x_v(x^{-1}(q))\|}.$$

Es sei

$$A(p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

die Abbildungsmatrix von dN_p bezüglich B , d. h.

$$\begin{aligned} dN_p(x_u) &= a_{11}x_u + a_{21}x_v \\ dN_p(x_v) &= a_{12}x_u + a_{22}x_v \end{aligned}$$

Die Matrix der 2. Fundamentalform II_p bezüglich B sei

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Durch ableiten von $\langle N \circ x, x_u \rangle = \langle N \circ x, x_v \rangle = 0$ erhält man zunächst

$$\begin{aligned} \langle (N \circ x)_u, x_u \rangle + \langle N \circ x, x_{uu} \rangle &= 0 \\ \langle (N \circ x)_v, x_v \rangle + \langle N \circ x, x_{vv} \rangle &= 0 \\ \langle (N \circ x)_v, x_u \rangle + \langle N \circ x, x_{uv} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Also ist mit $N_u := (N \circ x)_u = dN_p(x_u)$ und $N_v := (N \circ x)_v = dN_p(x_v)$,

$$\begin{aligned} e &= II_p(x_u, x_u) = -\langle dN_p(x_u), x_u \rangle = -\langle N_u, x_u \rangle = \langle N, x_{uu} \rangle \\ f &= II_p(x_u, x_v) = -\langle N_u, x_v \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle \\ g &= II_p(x_v, x_v) = -\langle N_v, x_v \rangle = \langle N, x_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Nach Definition ist $II_p(X, Y) = I_p(-dN_p(X), Y)$ für $X, Y \in T_pS$. Wir wollen vorübergehend eine etwas allgemeinere Situation betrachten. Dazu sei Φ ein selbst-adjungierter Endomorphismus eines n -dimensionalen euklidischen Vektorraums V mit Basis b_1, \dots, b_n . Es sei Q die durch

$$Q(x, y) := \langle \Phi(x), y \rangle \quad (x, y \in V)$$

definierte symmetrische Bilinearform. Weiter seien

$$B := (b_{ij}) := (Q(b_i, b_j)), \quad C := (c_{ij}) := (\langle b_i, b_j \rangle)$$

die Darstellungsmatrix von Q bzw. die Matrix des Skalarprodukts und A die Matrix von Φ in dieser Basis. Dann gilt

$$\begin{aligned} b_{ij} &= Q(b_i, b_j) = \langle \Phi(b_i), b_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_k a_{ki} b_k, b_j \right\rangle \\ &= \sum_k a_{ki} c_{kj}, \end{aligned}$$

bzw. $B = A^T C$.

Wenden wir nun diese Überlegungen auf obige Situation an, so haben wir

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

und damit

$$-A^T = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Man beachte dabei, dass die Matrix eines Skalarprodukts stets regulär ist, da diese Matrix nur positive Eigenwerte und damit nicht verschwindende Determinante hat. In unserem Fall gilt speziell

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir das

Lemma 1. Für die Gauß-Krümmung im Punkt $p \in S$ gilt

$$K(p) = \det(-dN_p) = \det(-A) = \det(-A^T) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Für die mittlere Krümmung im Punkt $p \in S$ gilt

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Spur}(-A) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Bemerkung. Wird $X \in T_p S = [x_u, x_v]$ als Tangentialvektor an eine Kurve c geschrieben, also $c'(0) = X$, so ist

$$c'(0) = u'(0)x_u + v'(0)x_v$$

und

$$\begin{aligned} II_p(c'(0)) &= -\langle dN_p(c'(0)), c'(0) \rangle \\ &= -\langle u'(0)N_u + v'(0)N_v, u'(0)x_u + v'(0)x_v \rangle \\ &= (u'(0))^2 e + 2u'(0)v'(0)f + (v'(0))^2 g \end{aligned}$$

(man vgl. dazu auch $I_p(c'(0)) = (u'(0))^2 E + 2u'(0)v'(0)F + (v'(0))^2 G$).

Beispiele (a) Für den Rotationstorus betrachten wir die lokale Parametrisierung

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} (a + r \cos u) \cos v \\ (a + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi).$$

Mit den obigen Formeln erhält man

$$\begin{aligned} E &= r^2, & F &= 0, & G &= (a + r \cos u)^2 \\ e &= r, & f &= 0, & g &= (a + r \cos u) \cos u \end{aligned}$$

und damit

$$K(x(u, v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

Wir wollen die Punkte des Torus klassifizieren. Man erhält

parabolische Punkte ($K = 0$) für $u = \pi/2$ und $u = 3\pi/2$,
 hyperbolische Punkte ($K < 0$) für $u \in (\pi/2, 3\pi/2)$,
 elliptische Punkte ($K > 0$) für $u \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$.

Man vergleiche zu dieser Klassifikation auch Abb. 11.2. Ähnlich berechnet man auch die mittlere Krümmung (Übungsaufgabe!).

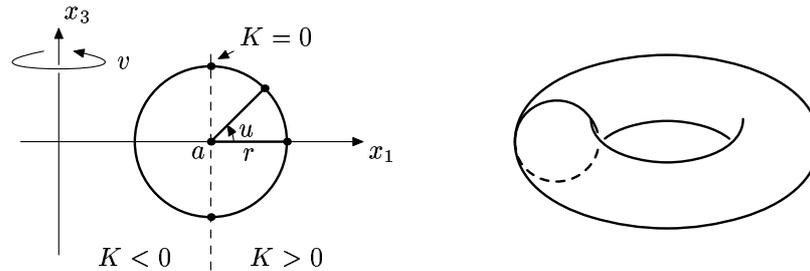


Abbildung 11.2: Erzeugende Kurve des Rotationstorus

(b) Wir betrachten nun allgemeine Rotationsflächen (vgl. II. 8.5). Es sei $v \mapsto (\varphi(v), 0, \psi(v))$, $v \in (a, b)$, die zu rotierende Kurve, ohne Einschränkung sei diese nach Bogenlänge parametrisiert (d.h. $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$). Dann ist

$$x(u, v) := (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (a, b)$$

eine lokale Parametrisierung. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 E &= \varphi^2, & F &= 0, & G &= (\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1 \\
 e &= -\varphi\psi', & f &= 0, & g &= \psi'\varphi'' - \psi''\varphi'
 \end{aligned}$$

und

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\psi'}{\varphi}(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi').$$

Ableiten von $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$ ergibt

$$2\varphi'\varphi'' + 2\psi'\psi'' = 0.$$

und damit

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{1}{\varphi}((\psi')^2\varphi'' - \psi'\psi''\varphi') \\
 &= -\frac{\varphi''}{\varphi}((\psi')^2 + (\varphi')^2) = -\frac{\varphi''}{\varphi}.
 \end{aligned}$$

12 Rotationsflächen mit konstanter Gauß-Krümmung

Wir betrachten eine Rotationsfläche mit konstanter Krümmung. Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen des letzten Beispiels. Die obige Formel für K liefert die Differentialgleichung

$$\varphi'' + K_0\varphi = 0$$

mit einer Konstanten K_0 . Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung hat folgende Gestalt:

$$\varphi(v) = \begin{cases} a \cos(\sqrt{K_0}v) + b \sin(\sqrt{K_0}v) & \text{falls } K_0 > 0 \\ av + b & \text{falls } K_0 = 0 \\ a \cosh(\sqrt{-K_0}v) + b \sinh(\sqrt{-K_0}v) & \text{falls } K_0 < 0 \end{cases}$$

mit beliebigen Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Fälle $K_0 \in \{1, 0, -1\}$ genauer.

1. Fall $K = 0$: Es ist $\varphi(v) = av + b$. Wegen

$$(\varphi')^2 \leq (\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$$

folgt $a^2 \leq 1$. Damit erhält man einen

Kreiszyylinder für $a = 0$,

Kreiskegel für $0 < |a| < 1$,

Ebenenstück für $a = 1$.

2. Fall $K = 1$: Nach geeigneter Wahl von v ist $\varphi(v) = a \cos v$, $a > 0$. Weiterhin muss gelten $a^2 \sin^2 v \leq 1$. Es folgt

$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt.$$

Man erhält

2-Sphäre für $a = 1$

Spindelfläche für $0 < a < 1$

Wulst-Fläche für $a > 1$

Diese Flächen haben typischerweise auch nicht-reguläre Punkte.

3. Fall $K = -1$: Es ist $\varphi(v) = ae^v + be^{-v}$ und $(ae^v - be^{-v})^2 \leq 1$. Sei zunächst $ab = 0$, also etwa $b = 0$. Durch geeignete Wahl von v kann man $a = 1$ erreichen. Dann ist

$$\varphi(v) = e^v \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t}} dt.$$

Die ebene Kurve $v \mapsto (\varphi(v), \psi(v))$ heißt *Traktrix* oder *Schleppkurve*. Die Länge der Tangentenstrecke von $(\varphi(v), \psi(v))$ bis zum Schnitt mit der x_3 -Achse ist konstant 1. Die durch Rotation dieser Kurve entstehende Fläche (mit singulären Punkten) heißt *Pseudo-Sphäre*. Sie spielte eine wichtige Rolle in der Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie.

Für $ab \neq 0$ hat man etwa $a = -b = c/2$ bzw. $a = b = c/2$. Flächen die der ersten Bedingung genügen sind vom Kegeltyp. Flächen die der zweiten Bedingung genügen sind vom Kehltyp.

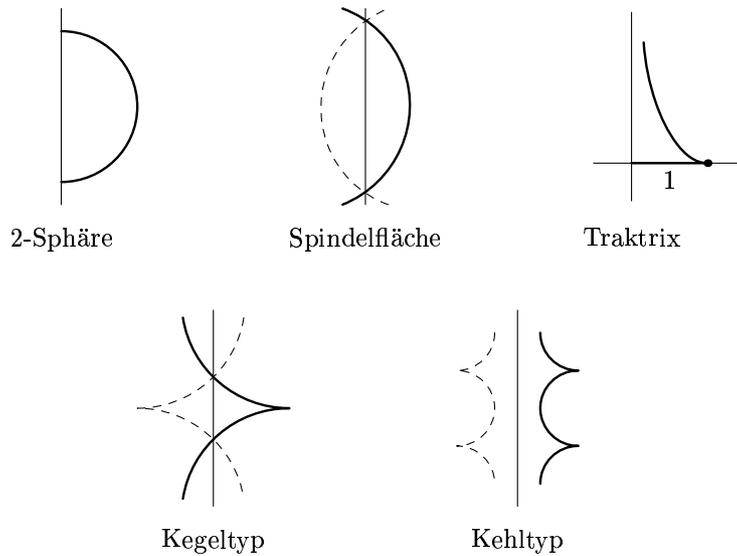


Abbildung 12.1: Ezeugende Kurven verschiedener Typen von Rotationsflächen

13 Minimalflächen

Es sei S eine reguläre Fläche und $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung von S . Der hier verwendete Integralbegriff ist der des Lebesgue-Integrals, der aus der Analysis bekannt sein sollte (vgl. z.B. K. Königsberger, Analysis II, Kap. 7).

Definition 12. Der Flächeninhalt von $x(U)$ ist definiert als

$$\mathcal{A}(x(U)) := \iint_U dA = \iint_U \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

dabei heißt $dA = \|x_u \wedge x_v\| \, du \, dv$ das Flächenelement von x .

Wir haben hier die Gleichung $\langle a \wedge b, c \wedge d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ benutzt. Die Zahl $\mathcal{A}(x(U))$ ist unabhängig von der Parametrisierung (Übung!).

Definition 13. Es sei $D \subset U$ ein beschränktes Gebiet mit Rand ∂D und $a : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion mit $a|_{\partial D} = 0$. Eine normale Variation von x ist eine Familie

$$x^\varepsilon : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

von Flächenstücken $x^\varepsilon(u, v) := x(u, v) + \varepsilon a(u, v)N(u, v)$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$.

Wir wollen den Flächeninhalt von x^ε bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} x_u^\varepsilon &= x_u + \varepsilon a N_u + \varepsilon a_u N \\ x_v^\varepsilon &= x_v + \varepsilon a N_v + \varepsilon a_v N. \end{aligned}$$

Für die erste Fundamentalform von x^ε erhält man

$$\begin{aligned} E^\varepsilon &= E - 2a\varepsilon e + O(\varepsilon^2) \\ F^\varepsilon &= F - 2a\varepsilon f + O(\varepsilon^2) \\ G^\varepsilon &= G - 2a\varepsilon g + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} dA_\varepsilon &= \sqrt{E^\varepsilon G^\varepsilon - (F^\varepsilon)^2} \, du \, dv \\ &= (EG - F^2 + 2a\varepsilon(-gE - eG + 2fF) + O(\varepsilon^2))^{1/2} \, du \, dv \\ &= (EG - F^2 + 2a\varepsilon(-2H(EG - F^2)) + O(\varepsilon^2))^{1/2} \, du \, dv \end{aligned}$$

Aus dieser letzten Formel erkennt man dass $E^\varepsilon G^\varepsilon - (F^\varepsilon)^2 \neq 0$ für genügend kleines ε gilt, d. h. x^ε ist eine reguläre Parametrisierung. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varepsilon) &:= \mathcal{A}(x^\varepsilon(D)) = \iint_D \sqrt{E^\varepsilon G^\varepsilon - (F^\varepsilon)^2} \, du \, dv \\ &= \iint_D ((EG - F^2)(1 - 4a\varepsilon H) + O(\varepsilon^2))^{1/2} \, du \, dv \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die *erste Variation des Flächenfunktionals*:

$$\mathcal{A}'(0) = \frac{d\mathcal{A}(x^\varepsilon(D))}{d\varepsilon}(0) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}(-2aH) \, du \, dv.$$

Wir haben hier benutzt, dass \iint und $\frac{d}{d\varepsilon}$ vertauschbar sind (vgl. dazu K. Königsberger, Analysis 2, 4. Aufl., 8.4).

Satz 2. Sei $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung einer regulären Fläche S . Die mittlere Krümmung H von S verschwindet genau dann, wenn $\mathcal{A}'(0) = 0$ für alle normalen Variationen von x gilt.

Beweis. Sei $\mathcal{A}'(0) = 0$. Wir nehmen an, dass ein Punkt $p \in x(U) \subset S$ existiert mit $H(p) \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen existiert dann eine Umgebung $x(W) \subset x(U)$ von p , so dass $H(q) \neq 0$ für alle $q \in x(W)$. Wir wählen $D \subset W$ und eine Funktion

$a : D \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $a(u, v) = H(x(u, v))$ gilt für alle $(u, v) \in D$ und $a = 0$ auf $U \setminus D$. Aus obiger Formel folgt dann, dass $\mathcal{A}'(0) < 0$ gilt. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei umgekehrt $H = 0$. Dann folgt sofort $\mathcal{A}'(0) = 0$ wegen obiger Formel. \square

Definition 14. Eine reguläre Fläche mit $H = 0$ heißt Minimalfläche.

Bemerkungen (a) $H = 0$ ist notwendig für $\mathcal{A}(x^0) \leq \mathcal{A}(x^\varepsilon)$ für alle normalen Variationen $x^\varepsilon : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $x^\varepsilon|_{\partial D} = x|_{\partial D}$, aber nicht hinreichend: Ein kritischer Punkt des Flächenfunktionals braucht kein Minimum zu sein. Um das zu entscheiden, braucht man noch die 2. Variation. Der Name Minimalfläche ist also etwas irreführend.

(b) Ist $H \neq 0$ so kann man mit der Variation $a(u, v) := H(u, v)$ den Flächeninhalt verkleinern.

(c) Minimalflächen haben keine elliptischen Punkte. Aus $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$ folgt nämlich $K = \kappa_1 \kappa_2 = -\kappa_1^2 \leq 0$. Also kann z.B. S^2 oder ein Rotationstorüs keine Minimalfläche sein.

(d) Minimalflächen ohne Rand können nicht kompakt sein. Beweisidee: Eine kompakte Fläche im \mathbb{R}^3 hat Punkte mit $K(p) > 0$. Ist nämlich B_r die kleinste offene Kugel im \mathbb{R}^3 in der S enthalten ist, so sind in einem Berührungspunkt p alle Normal-schnittkrümmungen von S größer oder gleich $1/r$.

(e) Physikalisch werden Minimalflächen mit Rand durch Seifenhäute realisiert. Experimente motivierten das **Plateau-Problem**: Gibt es zu jeder einfach geschlossenen Kurve c in \mathbb{R}^3 eine Fläche mit kleinstem Flächeninhalt mit c als Rand? Diese Frage konnte um 1930 positiv beantwortet werden.

(f) Es gibt enge Beziehungen zwischen Minimalflächen und der Funktionentheorie (Weierstraß-Darstellung).

Beispiele (a) Ebenen sind stets Minimalflächen, da $H = 0$ aus $\kappa_1 = \kappa_2$ folgt.

(b) Das *Katenoid* ist die einzige Rotationsfläche die auch Minimalfläche ist. Sie entsteht durch Rotation der sogenannten *Kettenlinie*, die durch

$$t \mapsto (a \cosh(t/a), t)$$

gegeben ist.

(c) Eine *Regelfläche* ist eine Fläche, die folgende Parametrisierung zulässt:

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto c(u) + vY(u),$$

mit einer differenzierbaren Kurve c in \mathbb{R}^3 und einem Vektorfeld Y längs c . Das *Helikoid* (oder *Wendelfläche*) ist die durch

$$x(u, v) = (0, 0, au) + v(\cos u, \sin u, 0)$$

definierte Regelfläche. Es ist die einzige Regelfläche mit $H = 0$.

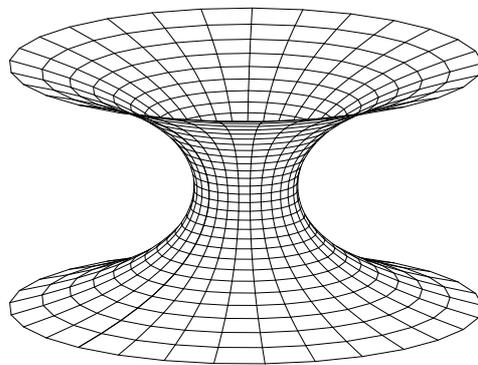


Abbildung 13.1: Katenoid

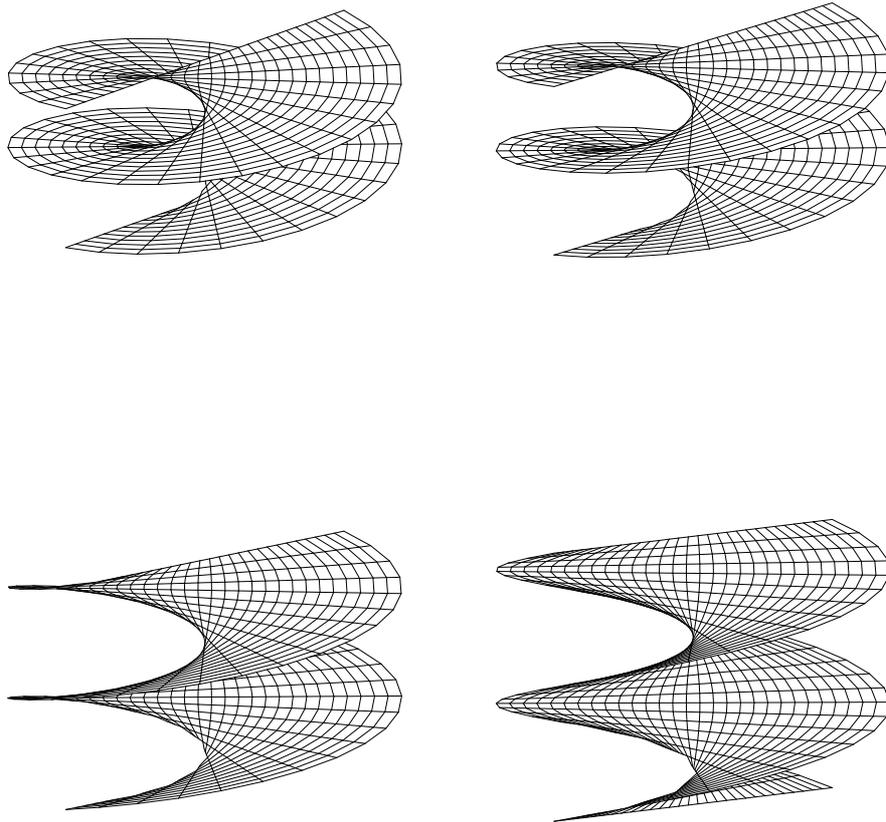


Abbildung 13.2: Helikoid aus verschiedenen Perspektiven. Das Helikoid wird schrittweise “nach hinten” gekippt.

Teil IV

Innere Geometrie von Flächen

14 Lokale Isometrien

14.1 Ein Beispiel

Wir betrachten das Ebenenstück parametrisiert durch

$$x : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (u, 0, v),$$

und das Zylinderstück parametrisiert durch

$$y : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v).$$

Als offene Teilmengen von Ebene und Zylinder sind es reguläre Flächen. Die angegebenen Parametrisierungen sind per Definition Diffeomorphismen auf die entsprechenden Flächen. Die Abbildung $\varphi := y \circ x^{-1}$ von der Ebene auf den Zylinder,

$$(u, 0, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v),$$

ist differenzierbar und kann als “Aufwickeln” des Ebenenstücks auf das Zylinderstück aufgefasst werden. Für die obigen Parametrisierungen gilt

$$\begin{aligned} x_u &= (1, 0, 0), & x_v &= (0, 0, 1), & E &= G = 1, & F &= 0, \\ y_u &= (-\sin u, \cos u, 0), & y_v &= (0, 0, 1), & E &= G = 1, & F &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten Fundamentalformen der Ebene und des Zylinders haben bezüglich der Basen $\{x_u, x_v\}$ und $\{y_u, y_v\}$ demnach dieselben Darstellungen. Hat man eine differenzierbare Kurve $(u(t), v(t))$ in U so folgt aus Abschnitt 9.2, dass sich entsprechende Kurven $x(u(t), v(t))$ in der Ebene und $y(u(t), v(t))$ auf dem Zylinder dieselbe Länge haben. Es gibt beim “Aufwickeln” der Ebene auf den Zylinder bzw. beim “Abwickeln” des Zylinders auf die Ebene also keine Längenverzerrung.

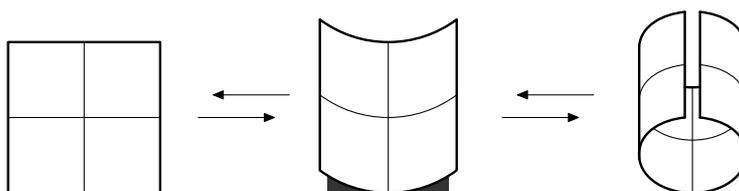


Abbildung 14.1: Auf- und Abwickeln eines Ebenenstücks auf einen Zylinder

Man kann sich nun fragen, ob es eine solche “längentreue” Abbildung auch zwischen anderen Flächen gibt, etwa zwischen Ebene und 2-Sphäre. Im Folgenden wollen wir solche Fragen beantworten. Dazu werden wir zunächst den Begriff einer längentreuen Abbildung definieren.

14.2 Isometrien

Wir erinnern daran, dass eine Abbildung $f : S \rightarrow \tilde{S}$ zwischen zwei regulären Flächen S und \tilde{S} differenzierbar in $p \in S$ ist, wenn es Parametrisierungen x um p und \tilde{x} um $f(p)$ gibt, so dass die Abbildung $\tilde{x}^{-1} \circ f \circ x$ differenzierbar ist (vgl. Abschnitt 10.1).

Definition 1. *Es seien S und \tilde{S} reguläre Flächen.*

- (a) *Ein Diffeomorphismus $\varphi : S \rightarrow \tilde{S}$ heißt Isometrie, falls für alle $p \in S$ und alle $X_1, X_2 \in T_p S$*

$$\langle X_1, X_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(X_1), d\varphi_p(X_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

gilt, d. h. die lineare Abbildung $d\varphi_p : (T_p S, \langle \cdot, \cdot \rangle_p) \rightarrow (T_{\varphi(p)} \tilde{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi(p)})$ ist eine euklidische Isometrie für alle $p \in S$. Die Flächen S und \tilde{S} heißen dann isometrisch.

- (b) *Gibt es zu jedem $p \in S$ eine Isometrie $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ einer offenen Umgebung U von p auf eine offene Umgebung \tilde{U} von $\varphi(p)$, so heißt S lokal isometrisch zu \tilde{S} . Ist S lokal isometrisch zu \tilde{S} , so auch \tilde{S} zu S .*

Beispiele (a) Die Abbildung φ aus Abschnitt 14.1 ist eine (lokale) Isometrie.

(b) Es sei c eine auf einem offenen Intervall $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ definierte, mit Bogenlänge parametrisierte, sphärische Raumkurve, d. h. eine Kurve, deren Bild in S^2 enthalten ist. Es gilt also $\|c(u)\| = 1$ und $\|c'(u)\| = 1$ für $u \in I$. Die durch

$$x(u, v) := x_0 + vc(u), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R}_{>0}$$

definierte Teilmenge von \mathbb{R}^3 heißt ein *allgemeiner Kegel*. Nach eventueller Verkleinerung von ε ist $S := x(I \times \mathbb{R}_{>0})$ eine reguläre Fläche und $x|_{I \times \mathbb{R}_{>0}}$ ist eine globale Parametrisierung von S . Es gilt

$$\begin{aligned} x_u &= vc', & x_v &= c, \\ E &= v^2, & F &= 0, & G &= 1. \end{aligned}$$

Wir definieren $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$p = x(u, v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, 0).$$

Dann ist φ ein lokaler Diffeomorphismus. Da für die lokale Parametrisierung

$$\tilde{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 0)$$

der Ebene $\bar{E} = v^2$, $\bar{F} = 0$, $\bar{G} = 1$ gilt, ist φ eine lokale Isometrie.

Satz 1. *Es seien S und \tilde{S} reguläre Flächen. Weiter seien $x : U \rightarrow S$ und $\tilde{x} : U \rightarrow \tilde{S}$ zwei lokale Parametrisierungen mit gemeinsamem Parameterbereich U . Dann ist $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ und $G = \bar{G}$ in U genau dann, wenn die Abbildung*

$$\varphi := \tilde{x} \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \tilde{x}(U)$$

eine (lokale) Isometrie ist.

Beweis. Es sei φ eine lokale Isometrie. Dann gilt

$$\bar{E} = \langle \bar{x}_u, \bar{x}_u \rangle = \langle d\varphi(x_u), d\varphi(x_u) \rangle = \langle x_u, x_u \rangle = E.$$

Analog folgen $\bar{F} = F$ und $\bar{G} = G$.

Wir kommen zur Umkehrung obiger Aussage. Es sei $p \in x(U)$ und $X \in T_p S$. Dann hat X eine Darstellung

$$X = c'(0) = u'x_u + v'x_v$$

für eine differenzierbare Kurve $c(t) = x(u(t), v(t))$, $c(0) = p$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} d\varphi_p(X) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\varphi \circ c)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\bar{x} \circ x^{-1} \circ x)(u(t), v(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \bar{x}(u(t), v(t)) = u'\bar{x}_u + v'\bar{x}_v \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \langle d\varphi_p X, d\varphi_p X \rangle_{\varphi(p)} &= \langle u'\bar{x}_u + v'\bar{x}_v, u'\bar{x}_u + v'\bar{x}_v \rangle \\ &= (u')^2 \bar{E} + 2u'v' \bar{F} + (v')^2 \bar{G} \\ &= (u')^2 E + 2u'v' F + (v')^2 G \\ &= \langle X, X \rangle_p \end{aligned}$$

Mit der Polarisations-Identität

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} (\langle X + Y, X + Y \rangle - \langle X, X \rangle - \langle Y, Y \rangle)$$

für alle $X, Y \in T_p S$ folgt die Behauptung. □

Beispiel. Wir zeigen, dass das Katenoid lokal isometrisch zum Helikoid ist. Dazu betrachten wir die lokale Parametrisierung

$$x(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v), \quad (u, v) \in U := (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

des Katenoids. Dann gilt

$$E = \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v.$$

Eine lokale Parametrisierung des Helikoids ist

$$\bar{x}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, \bar{u}), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U} := (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

Die Abbildung $U \rightarrow \bar{U}$, $(u, v) \mapsto (u, \sinh v) = (\bar{u}, \bar{v})$ ist ein Diffeomorphismus von U auf \bar{U} , da

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh v \end{pmatrix} = \cosh v \neq 0.$$

Damit erhält man eine Parametrisierung des Helikoids mit Parameterbereich U :

$$\bar{x}(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, u).$$

Bezüglich dieser Parametrisierung gilt

$$\bar{E} = \langle \bar{x}_u, \bar{x}_u \rangle = \sinh^2 v + 1 = \cosh^2 v, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = \cosh^2 v.$$

Damit folgt die Behauptung aus dem obigen Satz.

Bemerkungen (a) Lokale Isometrien sind längentreu und winkeltreu: Wir betrachten ohne Einschränkung den Fall einer Isometrie. Ist $c : I \rightarrow S$ eine Flächenkurve und $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ eine Isometrie, so ist $L(c) = L(\varphi \circ c)$. Schließen zwei Kurven c_1 und c_2 im Punkt $c_1(0) = c_2(0)$ den Winkel α ein, so schließen auch die Bildkurven $\varphi \circ c_1$ und $\varphi \circ c_2$ im Punkt $(\varphi \circ c_1)(0)$ diesen Winkel ein.

(b) Auch wenn man weiß, dass zwei Flächen lokal isometrisch sind, ist es oft schwierig eine lokale Isometrie explizit anzugeben.

(c) Der Nachweis, dass zwei Flächen nicht lokal isometrisch sein können ist im allgemeinen einfacher. Es genügt, Isometrie-Invarianten zu finden, die verschieden sind. Wir werden sehen, dass die Gauß-Krümmung eine solche Invariante ist. Damit folgt beispielsweise sofort, dass die 2-Sphäre und die Ebene nicht lokal isometrisch sein können.

15 Christoffel-Symbole und Theorema egregium

Bei einer Raumkurve haben wir das Änderungsverhalten des begleitenden Dreibeins betrachtet, um die Formeln von Frenet zu erhalten. Wir betrachten nun eine lokale Parametrisierung $x : U \rightarrow S$ einer Fläche S und das sogenannte *Darboux-Bein* x_u, x_v, N . Nach Voraussetzung sind diese drei Vektoren zwar linear unabhängig, bilden aber im allgemeinen keine Orthonormalbasis.

Wir wollen das Änderungsverhalten dieses Dreibeins beschreiben. Die Ableitung x_{uu} von x_u nach u ist eine Linearkombination von x_u, x_v und N . Analoges gilt für die anderen Ableitungen und wir können schreiben:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + L_1 N \\ x_{uv} &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + L_2 N \\ x_{vu} &= \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + \tilde{L}_2 N \\ x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + L_3 N. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Für die partiellen Ableitungen von N verwenden wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11} x_u + a_{21} x_v, \\ N_v &= a_{12} x_u + a_{22} x_v. \end{aligned}$$

Vergleichen Sie dazu auch Abschnitt 11.4.

Definition 2. Die Funktionen Γ_{ij}^k mit $i, j, k \in \{1, 2\}$ nennt man Christoffel-Symbole von S bezüglich der Parametrisierung x .

Wir wollen die Koeffizienten L_i und Γ_{ij}^k berechnen. Zunächst ist wegen $x_{uv} = x_{vu}$

$$\Gamma_{12}^k = \Gamma_{21}^k, \quad k = 1, 2$$

und $L_2 = \tilde{L}_2$. Bildet man mit den Gleichungen aus (15.1) das Skalarprodukt mit N so folgt

$$L_1 = e, \quad L_2 = f, \quad L_3 = g,$$

wobei e, f, g die Koeffizienten der 2. Fundamentalform sind (vgl. 11.4). Wir bilden nun das Skalarprodukt der Gleichungen in (15.1) mit x_u und x_v . Man erhält

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle x_{uu}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle x_{uu}, x_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle x_{uv}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle x_{uv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle x_{vv}, x_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle x_{vv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{aligned} \tag{15.2}$$

Jedes dieser drei linearen Gleichungssysteme ist wegen $EG - F^2 \neq 0$ eindeutig lösbar. Die Christoffel-Symbole können also aus den Koeffizienten E, F, G der 1. Fundamentalform und deren Ableitungen berechnet werden. Beispielsweise gilt mit den ersten zwei Zeilen von (15.2)

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}$$

und damit schliesslich

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}.$$

Diese Überlegung zeigt: Die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k sind Größen der *inneren Geometrie* einer Fläche.

Das System (15.1) ist unterbestimmt, d. h. man hat mehr Unbekannte als Gleichungen. Um Beziehungen zwischen den Unbekannten in (15.1) zu finden, leiten wir nochmals ab. Die folgenden Rechnungen gehen im wesentlichen auf Gauß zurück. Zunächst gilt allgemein

$$\begin{aligned}(x_{uu})_v - (x_{uv})_u &= 0, \\ (x_{vv})_u - (x_{vu})_v &= 0, \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0.\end{aligned}\tag{15.3}$$

Setzt man (15.1) in (15.3) ein, so erhält man Gleichungen der Form

$$A_i x_u + B_i x_v + C_i N = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei A_i , B_i und C_i Funktionen von E , F , G , e , f , g und deren Ableitungen sind. Da x_u , x_v , N linear unabhängig sind, erhält man 9 Relationen

$$A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Wir betrachten jetzt die 1. Gleichung aus (15.3) im Detail:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 x_{uv} + \Gamma_{11}^2 x_{vv} + e N_v + (\Gamma_{11}^1)_v x_u + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + e_v N = \\ \Gamma_{12}^1 x_{uu} + \Gamma_{12}^2 x_{vu} + f N_u + (\Gamma_{12}^1)_u x_u + (\Gamma_{12}^2)_u x_v + f_u N\end{aligned}$$

Wir benutzen nochmals (15.1) und erhalten durch Vergleich der Koeffizienten von x_v

$$B_1 = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - f a_{21} - (\Gamma_{12}^2)_u = 0.$$

Setzt man noch die Werte für a_{ij} ein, vgl. Abschnitt 11.4, so ergibt sich die *Gauß-Formel*

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2$$

Da die Christoffel-Symbole Größen der inneren Geometrie sind, folgt aus der Gauß-Formel der wichtige Satz

Satz 2 (Theorema egregium). *Die Gauß-Krümmung K einer regulären Fläche ist invariant unter lokalen Isometrien.*

Die Definition der Gauß-Krümmung benutzte die Einbettung einer Fläche in den umgebenden Raum \mathbb{R}^3 . Obiger Satz besagt nun aber, dass die Gauß-Krümmung einer Fläche *nicht* von dieser Einbettung abhängt. Sie ist also eine Größe (oder Invariante) der *inneren Geometrie* einer Fläche.

Beweis von Satz 2. Sei $p \in S$ und $x : U \rightarrow S$ eine lokale Parametrisierung um p . Weiter sei $V \subset x(U)$ eine Umgebung von p und $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset \bar{S}$ eine lokale Isometrie. Dann ist

$$\bar{x} := \varphi \circ x : x^{-1}(V) \rightarrow \varphi(V)$$

eine lokale Parametrisierung von \bar{S} um $\varphi(p)$. Ist nun $q \in V$ beliebig, so stimmen die Koeffizienten der 1. Fundamentalform von S bei q (bez. x) und von \bar{S} bei $\varphi(q)$ (bez. \bar{x}) überein und damit auch die Christoffel-Symbole in q und $\varphi(q)$. Nach der Gauß-Formel gilt somit

$$K(q) = \bar{K}(\varphi(q))$$

für alle $q \in V$. □

Aus dem Beispiel in 14.2 folgt demnach: Die Gauß-Krümmung des Katenoids und des Helikoids sind demnach in entsprechenden Punkten gleich. Das ist anschaulich nicht evident!

16 Kovariante Ableitung und Geodätische

Wir wollen in diesem Abschnitt Größen und Eigenschaften der inneren Geometrie einer Fläche herleiten. Das sind Konzepte, die insbesondere nicht von der Einbettung der Fläche in einen umgebenden Raum abhängen.

16.1 Die kovariante Ableitung

Wir definieren zunächst die Richtungsableitung eines Vektorfeldes auf einer regulären Fläche.

Definition 3. Ein differenzierbares Vektorfeld Y auf einer regulären Fläche S ist eine differenzierbare Abbildung

$$Y : S \rightarrow TS = \coprod_{p \in S} T_p S \quad \text{mit} \quad Y(p) \in T_p S.$$

Dabei heißt Y differenzierbar, wenn für jede lokale Parametrisierung $x : U \rightarrow S$ die Funktionen $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ in der Darstellung

$$Y(x(u, v)) = a(u, v)x_u(u, v) + b(u, v)x_v(u, v),$$

kurz $Y = ax_u + bx_v$, differenzierbar sind.

Es seien $X \in T_p S$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ eine differenzierbare Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Ist Y ein differenzierbares Vektorfeld auf S , so bezeichne $Y(t)$ die Einschränkung von Y auf c , also

$$Y(t) := Y(c(t)).$$

Wir wollen das Vektorfeld Y "in Richtung X " ableiten. Nach Definition 3 ist die Abbildung $Y \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Mit

$$Y'(t) := \frac{d(Y \circ c)}{dt}(t)$$

bezeichnen wir die gewöhnliche Ableitung nach dem Parameter t . Zunächst ist $Y'(t)$ ein Element von $T_{c(t)}\mathbb{R}^3$. Wir können also schreiben

$$Y'(t) = \alpha x_u + \beta x_v + \gamma N,$$

wenn N ein Normalenvektor von S im Punkt $c(t)$ ist. Dabei bezeichnet man den Tangentialvektor $\alpha x_u + \beta x_v \in T_{c(t)}S$ als *Tangential-* und γN als *Normalkomponente* von $Y'(t)$.

Definition 4. Sei $X \in T_pS$, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ differenzierbar mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Die Tangentialkomponente $D_X Y$ von $Y'(0)$, also die Orthogonalprojektion von $Y'(0)$ auf T_pS , heißt kovariante Ableitung von Y in Richtung X .

Ausgehend von einem Vektorfeld Y und einem Vektor $X \in T_pS$ erhalten wir also wieder einen Vektor $D_X Y \in T_pS$. In der Definition dieser Zuordnung scheint der umgebende Raum und die Kurve c eine entscheidende Rolle zu spielen. Wir wollen nun aber zeigen, dass dies nicht der Fall ist.

Lemma 1. Die kovariante Ableitung ist ein Begriff der inneren Geometrie einer Fläche, insbesondere also vom umgebenden Raum unabhängig.

Beweis. Seien $X \in T_pS$ und $x : U \rightarrow S$ eine lokale Parametrisierung um p . Weiter sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ eine differenzierbare Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$, also

$$X = c'(0) = u'x_u + v'x_v$$

mit differenzierbaren Funktionen $u, v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$. Ist nun Y ein differenzierbares Vektorfeld auf S so gilt

$$\begin{aligned} Y(t) &= a(u(t), v(t))x_u(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t))x_v(u(t), v(t)) \\ &=: a(t)x_u(t) + b(t)x_v(t). \end{aligned}$$

Aus $(x_u)' = u'x_{uu} + v'x_{uv}$ folgt (alles bei $t = 0$ ausgewertet)

$$Y' = a'x_u + b'x_v + a(u'x_{uu} + v'x_{uv}) + b(u'x_{vu} + v'x_{vv}).$$

Mit den Formeln (15.1) aus Abschnitt 15 findet man für die Tangentialkomponente von $Y'(0)$

$$\begin{aligned} D_X Y &= (a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{12}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v')x_u + \\ &\quad (b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{12}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v')x_v \end{aligned} \quad (16.1)$$

Dabei ist die rechte Seite bei p bzw. $t = 0$ auszuwerten. Man sieht, dass $D_X Y$ nicht von der Kurve c , sondern nur von $c'(0) = X$ bzw. von den Koordinaten $(u'(0), v'(0))$ von $c'(0)$ in der Basis x_u, x_v von T_pS abhängt. Da die Christoffel-Symbole Größen der inneren Geometrie sind, ist mit dieser Formel gezeigt, dass auch die kovariante Ableitung ein Begriff der inneren Geometrie ist (also nur von der 1. Fundamentalform abhängt). \square

Bemerkung. Nach obigem Lemma 1 kann man also $D_{c'(0)}Y$ berechnen, falls man die Koeffizienten der 1. Fundamentalform kennt. Genauer gilt (Übungsaufgabe!): Es seien S und \bar{S} lokal isometrische reguläre Flächen und Y ein differenzierbares Vektorfeld auf S . Weiter sei $p \in S$, $X \in T_pS$ und $\varphi : W \rightarrow \bar{W}$ eine lokale Isometrie einer offenen Umgebung von p auf eine offene Umgebung von $\varphi(p) = \bar{p}$. Dann ist $\bar{Y} := d\varphi(Y)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf \bar{W} . Mit $\bar{X} := d\varphi_p(X)$ gilt

$$D_{\bar{X}}\bar{Y} = d\varphi_p(D_X Y),$$

d.h. man hat das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varphi} & \bar{W} \\ D_X \downarrow & & \downarrow D_{\bar{X}} \\ D_X Y & \xrightarrow{d\varphi} & D_{\bar{X}} \bar{Y} \end{array}$$

Beispiel. Für die Ebene gilt $E = G = 1$, $F = 0$, $\Gamma_{ij}^k = 0$ und damit ist

$$D_{c'(0)}Y = a'x_u + b'x_v$$

die gewöhnliche Ableitung Y' von $Y = ax_u + bx_v$. Das ist auch direkt aus der geometrischen Konstruktion klar. Die kovariante Ableitung verallgemeinert also die gewöhnliche Ableitung von Vektoren in der Ebene.

16.2 Geodätische

Es sei S eine reguläre Fläche und $\gamma : I \rightarrow S$ eine differenzierbare Kurve. Das Vektorfeld $\gamma'(t) : I \rightarrow TS$ ist nur längs γ definiert. Trotzdem kann man ein solches Vektorfeld in Richtung $X \in T_p(S)$ ableiten, wenn $p \in \gamma(I)$ gilt, und wenn man X als Tangentialvektor einer Kurve c darstellen kann, deren Bild in $\gamma(I)$ enthalten ist (z.B. wenn $X = \gamma'(t)$ wie in der folgenden Definition).

Definition 5. Eine nicht konstante, differenzierbare Kurve $\gamma : I \rightarrow S$ heißt Geodätische, falls

$$D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$$

für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkungen (a) Die Eigenschaft Geodätische zu sein ist eine innergeometrische Eigenschaft einer Kurve auf einer Fläche. Insbesondere ist diese Eigenschaft nach der Bemerkung in 16.1 invariant unter lokalen Isometrien.

(b) Damit man für eine Kurve $c : [0, l] \rightarrow S$ keine Probleme mit der Ableitung in den Randpunkten bekommt verlangt man in diesem Fall, dass c die Einschränkung einer differenzierbaren Kurve $\tilde{c} : (0 - \varepsilon, l + \varepsilon) \rightarrow S$ auf $[0, l]$ ist.

Satz 3. Die Tangentialvektoren einer Geodätischen haben konstante Länge, d. h. ist $\gamma : I \rightarrow S$ eine Geodätische, so gibt es ein $\alpha \neq 0$ mit $\|\gamma'(t)\| = \alpha$ für alle $t \in I$. Damit sind Geodätische stets proportional zur Bogenlänge parametrisiert, d. h. $s = \alpha t$, wenn s die Bogenlänge ist.

Beweis. Es sei $N(\gamma(t))$ die Normale von S im Punkt $\gamma(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= 2 \langle D_{\gamma'(t)} \gamma' + \beta(t) N(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0, \end{aligned}$$

da $D_{\gamma'(t)} \gamma' = 0$ und $N(\gamma(t))$ orthogonal zu $\gamma'(t)$ ist. □

Beispiele (a) In der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 sind Geodätische genau die Geraden, da $\gamma'' = D_{\gamma'(t)} \gamma' = 0$.

(b) Jede Gerade auf einer Fläche ist Geodätische: gleiches Argument wie in (a).

Ist γ eine Kurve auf der Fläche S , so hat man das folgende geometrische Kriterium für Geodätische. Es ergibt sich unmittelbar aus der Definition der kovarianten Ableitung.

Lemma 2. Eine Flächenkurve γ ist genau dann Geodätische, wenn die Hauptnormale in jedem Punkt proportional zur Flächennormale ist, d. h. senkrecht auf der Fläche steht. □

Beweis. Die Tangentialkomponente von γ'' ist $D_{\gamma'} \gamma'$. Ist also $H(t)$ proportional zu $N(t)$, so folgt $D_{\gamma'} \gamma' = 0$. Ist umgekehrt $D_{\gamma'} \gamma' = 0$, so hat γ'' nur eine Normalkomponente, d. h. $H(t)$ ist proportional zu $N(t)$. □

Wenn wir im folgenden Punktmengen als Kurven bezeichnen, so sind natürlich immer entsprechende Parametrisierungen dieser Punktmengen gemeint.

Beispiele (a) Die 2-Sphäre. Nach obigem Kriterium sind Groß-Kreise Geodätische, da ein Gross-Kreis eine ebene Kurve mit $H \parallel N$ ist. Wir werden später sehen, dass es durch jeden Punkt in jeder Richtung lokal genau eine Geodätische gibt. Damit sind Groß-Kreise die einzigen (mit Bogenlänge parametrisierten) Geodätischen auf S^2 .

(b) Der Zylinder. Wir betrachten einen Zylinder vom Radius 1. Da Mantellinien Geraden sind, sind sie Geodätische. Ebenso sind Breitenkreise Geodätische, weil $H \parallel N$ gilt. Wie sehen die übrigen Geodätischen aus? Da Geodätische Objekte der inneren Geometrie sind, ist die Eigenschaft Geodätische zu sein, invariant unter lokalen Isometrien. Folglich gehen beim Abwickeln des Zylinders auf die Ebene Geodätische in Geodätische über. Die gleiche Aussage gilt natürlich auch für die andere Richtung. Es genügt also die Geodätischen der Ebene zu kennen und diese auf den Zylinder aufzuwickeln, man vergleiche dazu Abb. 16.1. Demnach gibt es unendlich viele Geodätische zwischen zwei Punkten. Neben Mantellinien und Breitenkreisen sind also Schraubenlinien genau die Geodätischen auf dem Zylinder.

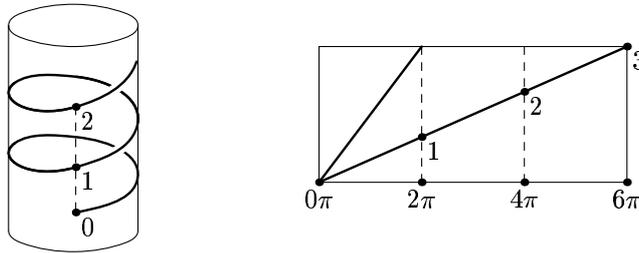


Abbildung 16.1: Geodätische auf dem Zylinder

16.3 Die Differentialgleichung für Geodätische

Wir wollen die definierende Gleichung einer Geodätischen, also $D_{\gamma'}\gamma' = 0$, in lokalen Koordinaten genauer untersuchen. Dazu sei $\gamma : I \rightarrow S$ eine differenzierbare Kurve auf S und $x : U \rightarrow S$ eine lokale Parametrisierung, so dass

$$\gamma(t) = x(u(t), v(t)), \quad t \in I$$

mit differenzierbaren Funktionen u und v gilt. Dann ist

$$\gamma'(t) = u'(t)x_u(u(t), v(t)) + v'(t)x_v(u(t), v(t)).$$

Benutzt man Gleichung (16.1) für $Y = \gamma'$, also $a = u'$, $b = v'$, so ist γ genau dann Geodätische, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2, \\ 0 &= v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2, \end{aligned} \quad (16.2)$$

da x_u und x_v linear unabhängig sind. (16.2) ist ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung für u und v . Ein solches System hat zu gegebenen Anfangsbedingungen lokal genau eine Lösung (vgl. z.B. V.I. Arnol'd, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Kap. 4). Die Anfangsbedingungen entsprechen dabei einem Startpunkt $\gamma(0)$, gegeben durch $(u(0), v(0))$ und einem Tangentialvektor gegeben durch seine Koordinaten $(u'(0), v'(0))$. Es ergibt sich also der folgende wichtige

Satz 4 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen). *Seien S eine reguläre Fläche, $p \in S$ und $0 \neq X \in T_pS$ ein Tangentialvektor.*

- (a) **(Existenz)** *Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine Geodätische $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = X$.*
- (b) **(Eindeutigkeit)** *Ist $\bar{\gamma} : (-\delta, \delta) \rightarrow S$ eine weitere Geodätische die diesen Bedingungen genügt, so ist $\gamma = \bar{\gamma}$ auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$.*

17 Geodätische auf Rotationsflächen

Es sei $c(v) = (\varphi(v), 0, \psi(v))$ eine reguläre, ebene Kurve mit $\varphi > 0$ definiert auf einem offenen Intervall I . Wir betrachten die Rotationsfläche S , gegeben durch

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \psi(v), x_1^2 + x_2^2 = (\varphi(v))^2, v \in I\}.$$

Eine lokale Parametrisierung von S ist gegeben durch

$$x(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times I.$$

Die ebene Kurve c wird also um die x_3 -Achse rotiert. Ohne Einschränkung sei c mit Bogenlänge parametrisiert, also

$$\left\| \frac{dc}{dv} \right\|^2 = 1 = \left(\frac{d\varphi}{dv} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dv} \right)^2$$

Wir nehmen außerdem an, dass φ ein Homöomorphismus von I auf $\varphi(I)$ ist, I ist mit der Teilraumtopologie versehen. Dann ist S eine reguläre Fläche (Übungsaufgabe!). Für eine Rotationsfläche gilt $E = \varphi^2$, $F = 0$, $G = 1$. Für die Christoffel-Symbole erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv} \\ \Gamma_{12}^2 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -\varphi \frac{d\varphi}{dv}, & \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Damit hat das Differentialgleichungssystem für Geodätische folgende Gestalt

$$\begin{aligned} 0 &= u'' + \frac{2}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv} u' v', \\ 0 &= v'' - \varphi \frac{d\varphi}{dv} (u')^2. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Wir wissen bereits, dass Kurven mit $H \parallel N$ Geodätische sind. Demnach sind alle Meridiane Geodätische, vgl. Abb. 17.1. Wir testen das nochmals mit unserer Differentialgleichung. Für Meridiane ist u konstant, also $u' = 0$. Ohne Einschränkung sei $s = v$ die Bogenlänge, dann gilt $v' = 1$ und $v'' = 0$. Das Differentialgleichungssystem (17.1) ist also erfüllt.

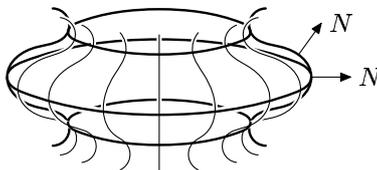


Abbildung 17.1: Meridiane auf einer Rotationsfläche

Welche Breitenkreise sind Geodätische? Ein Breitenkreis γ ist genau dann Geodätische, wenn γ'' parallel zu N ist, d.h. wenn N in der Schmiegebene von γ liegt. Anschaulich gilt das genau bei lokalen Extrema von φ , also wenn

$$\frac{d\varphi}{dv} = 0.$$

Wir prüfen das mit unserer Differentialgleichung. Für einen Breitenkreis ist $v = v_0$ konstant und damit $v' = 0$. Aus der 1. Gleichung von (17.1) folgt dann $u'' = 0$, also ist $0 \neq u'$ konstant, da Geodätische nicht konstant sind. Damit folgt aus der 2. Gleichung

$$\varphi \frac{d\varphi}{dv} = 0$$

also $d\varphi/dv = 0$, da $\varphi > 0$.

Wir wollen eine weitere wichtige Folgerung aus dem System (17.1) ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} (\varphi^2 u')' &= 2\varphi \frac{d\varphi}{dv} v' u' + \varphi^2 u'' \\ &= \varphi^2 (u'' + \frac{2}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv} v' u') = 0 \end{aligned}$$

wegen der 1. Gleichung von (17.1). Es gilt also $\varphi^2 u' = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Der Winkel $\theta \in [0, \pi/2]$, unter dem eine mit Bogenlänge parametrisierte Geodätische γ einen Breitenkreis schneidet, ist gegeben durch

$$\cos \theta = \frac{|\langle x_u, \gamma' \rangle|}{\|x_u\| \|\gamma'\|} = \frac{|\langle x_u, u' x_u + v' x_v \rangle|}{\|x_u\| \cdot 1} = \frac{\|x_u\|^2 |u'|}{\|x_u\|} = |\varphi u'|,$$

da bei Rotationsflächen stets $x_u \perp x_v$ ($\Leftrightarrow F = 0$) und $\|x_u\| = \varphi$ ($\Leftrightarrow E = \varphi^2$) gilt. Da weiter $\varphi(v(s))$ gerade der Radius $r(s)$ des Breitenkreises ist, folgt die *Relation von Clairaut*

$$r(s) \cos \theta(s) = c = \text{konst.}$$

Die Relation von Clairaut ermöglicht eine qualitative Diskussion des Verhaltens von Geodätischen auf Rotationsflächen. Es gilt

- Nimmt der Radius ab, also $r \downarrow 0$, so wächst $\cos \theta$ bzw. $\theta \downarrow 0$.
- Wächst der Radius, also $r \uparrow \infty$, so nimmt $\cos \theta$ ab bzw. $\theta \uparrow \pi/2$.
- Ist $c = 0$ folgt $\cos \theta = 0$ bzw. $\theta = \pi/2$.

Beispiele (a) Wir betrachten einen Zylinder. Dort ist der Radius r konstant und damit auch θ . Wir bekommen unsere Ergebnisse nochmals bestätigt: Geodätische sind Schraubenlinien ($\theta \in (0, \pi/2)$), Kreise ($\theta = 0$) und Geraden ($\theta = \pi/2$).

(b) Wir betrachten das elliptische Paraboloid. Es entsteht durch Rotation der Parabel $(x_1, 0, x_1^2)$ um die x_3 -Achse. Implizit ist es gegeben durch

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}.$$

Mit Satz 4 aus dem Abschnitt über implizit definierte Flächen folgt, dass das elliptische Paraboloid eine reguläre Fläche ist. Eine Geodätische, die kein Meridian ist, hat eine Form wie in Abb. 17.2.

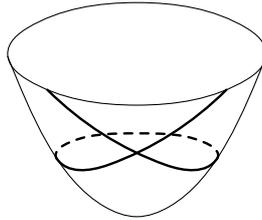


Abbildung 17.2: Geodätische auf dem elliptischen Paraboloid

18 Kürzeste Kurven sind Geodätische

Die kovariante Ableitung auf einer Fläche S verallgemeinert die gewöhnliche Ableitung eines Vektorfelds in der (euklidischen) Ebene. Die ebenen Kurven mit $c'' = 0$ sind Geraden(stücke) und damit kürzeste Verbindungen. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass Kurven, die kürzeste Verbindungen realisieren, Geodätische sind. Die Umkehrung hiervon gilt jedoch im Allgemeinen nicht: Geodätische brauchen nicht Kürzeste zu sein (vgl. z.B. Großkreise auf S^2).

Definition 6. Sei $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow S$ eine differenzierbare, reguläre Kurve auf der regulären Fläche S . Eine Variation mit festen Endpunkten von \tilde{c} ist eine differenzierbare Abbildung $c : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow S$ für die gilt (vgl. Abb. 18.1):

- (a) die Kurve $c_\varepsilon(t) := c(t, \varepsilon)$ ist regulär mit $c(a, \varepsilon) = \tilde{c}(a)$, $c(b, \varepsilon) = \tilde{c}(b)$ für alle $\varepsilon \in [-\delta, \delta]$ und
- (b) $c(t, 0) = \tilde{c}(t)$, $t \in [a, b]$.

Die Kurve $c_0(t) = \tilde{c}(t)$ soll minimale Länge im Vergleich zu Nachbarkurven haben. Dazu betrachten wir das (zur Variation c gehörende) *Längenfunktional*

$$L : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varepsilon \mapsto L(\varepsilon) := L(c_\varepsilon) = \int_a^b \|c'_\varepsilon(t)\| dt,$$

wobei $'$ die Ableitung nach t bezeichnet. Die Abbildung

$$[a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \varepsilon) \mapsto \|c'_\varepsilon(t)\|$$

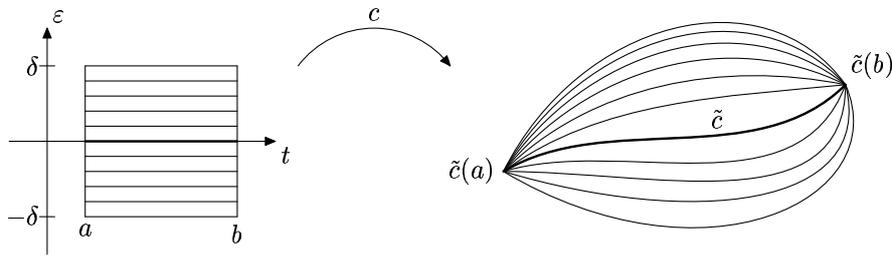


Abbildung 18.1: Variation mit festen Endpunkten

ist wegen der Forderungen an c differenzierbar. Insbesondere existiert die partielle Ableitung nach ε . Auch L ist differenzierbar und wir haben

$$\frac{dL}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \|c'_\varepsilon(t)\| dt = \int_a^b \frac{\langle c'_\varepsilon, \partial c'_\varepsilon / \partial \varepsilon \rangle}{\|c'_\varepsilon\|} dt,$$

(vgl. Königsberger, Analysis 2, 2.6). Weiter gilt

$$\frac{\partial c'_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right).$$

Eine *notwendige* Bedingung für die Minimalität von $L(c_0)$ im Vergleich zur Länge von Nachbarkurven ist $dL/d\varepsilon(0) = 0$. Die Kurve c_0 ist dann kritischer Punkt des Längenfunktional. Für festes t ist

$$(-\delta, \delta) \rightarrow S, \quad \varepsilon \mapsto c(t, \varepsilon)$$

eine differenzierbare, zu \tilde{c} transversale Kurve. Das differenzierbare Vektorfeld längs $\tilde{c} = c_0$

$$V(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} c(t, 0)$$

heißt *Variationsfeld*. Es ist $V(a) = V(b) = 0$. Wir nehmen jetzt an, dass $\tilde{c}(t) = c_0(t)$ mit Bogenlänge parametrisiert ist, d. h. $\|c'_0\| = 1$. Damit folgt

$$\frac{dL}{d\varepsilon}(0) = \int_a^b \langle c'_0, V'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \tilde{c}'(t), V'(t) \rangle dt.$$

Es gilt $\langle \tilde{c}', V' \rangle = \langle \tilde{c}', V \rangle' - \langle \tilde{c}'', V \rangle$. Integration liefert

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\varepsilon}(0) &= \langle \tilde{c}'(t), V(t) \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle \tilde{c}'', V \rangle dt \\ &= - \int_a^b \langle \tilde{c}'', V \rangle dt \\ &= - \int_a^b \langle D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c}' + \beta(t)N(c(t)), V(t) \rangle dt \\ &= - \int_a^b \langle D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c}', V(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

da V tangential an S , also $N \perp V$ ist. Falls nun \tilde{c} eine Geodätische ist, so ist $dL/d\varepsilon(0) = 0$, d.h. Geodätische sind kritische Punkte des Längenfunktionals. Es gilt folgender

Satz 5 (Kürzeste sind Geodätische). Sei $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow S$ eine mit Bogenlänge parametrisierte, differenzierbare Flächenkurve mit $\tilde{c}(a) = p_1$ und $\tilde{c}(b) = p_2$, so dass $\tilde{c}([a, b]) \subset x(U)$ für eine Parametrisierung $x : U \rightarrow S$ von S . Hat \tilde{c} unter allen Verbindungskurven von p_1 und p_2 kürzeste Länge, so ist \tilde{c} eine Geodätische.

Beweis. Sei c eine Variation von \tilde{c} mit festen Endpunkten und Variationsfeld V . Da \tilde{c} nach Voraussetzung eine kürzeste Verbindung zwischen p_1 und p_2 ist, gilt für jede solche Variationen

$$(*) \quad 0 = \frac{dL}{d\varepsilon}(0) = - \int_a^b \langle D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c}', V \rangle dt.$$

Ist c keine Geodätische so gilt $D_{\tilde{c}'(t_0)} \tilde{c}' \neq 0$ für ein $t_0 \in [a, b]$. Wir leiten daraus einen Widerspruch zu obiger Gleichung ab. Da $D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c}'$ stetig ist gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c}' \neq 0, \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Wir konstruieren nun eine Variation von \tilde{c} , die obiger Gleichung (*) widerspricht. Sei dazu $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung von S mit $p_1, p_2 \in x(U)$ und u, v seien differenzierbare Funktion $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{c}(t) = x(u(t), v(t))$. Da $D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c}'$ ein differenzierbares Vektorfeld längs $\tilde{c}(t)$ ist, gibt es differenzierbare Funktionen $x_1, x_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c} = x_1(t)x_u(u(t), v(t)) + x_2(t)x_v(u(t), v(t)).$$

Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abschneidefunktion wie in Abb. 18.2.

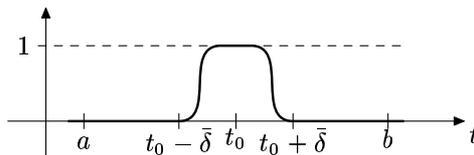


Abbildung 18.2: Abschneidefunktion

Wir wählen ein Intervall $I := [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ so klein, dass

$$c(t, \varepsilon) := x(u(t) + \varepsilon\alpha(t)x_1(t), v(t) + \varepsilon\alpha(t)x_2(t))$$

für $(t, \varepsilon) \in [a, b] \times I$ definiert ist. Dann ist c eine Variation von \tilde{c} mit festen Endpunkten. Für das zugehörige Variationsvektorfeld V gilt

$$V(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} c(t, 0) = \alpha x_1 x_u + \alpha x_2 x_v = \alpha(t) D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c}'.$$

Damit folgt

$$\frac{dL}{d\varepsilon}(0) = - \int_a^b \langle D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c}', V(t) \rangle dt = - \int_a^b \alpha(t) \|D_{\tilde{c}'(t)} \tilde{c}'\|^2 dt < 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu (*). □

Bemerkungen (a) Das Argument in obigem Beweis zeigt: Falls eine Kurve \tilde{c} zwischen zwei Punkten p und q keine Geodätische ist, so lässt sie sich verkürzen, d. h. es gibt eine Nachbarkurve c mit gleichen Endpunkten und $L(c) < L(\tilde{c})$.

(b) Die Umkehrung von Satz 5 ist falsch. Geodätische sind nicht immer Kürzeste. Einfache Gegenbeispiele findet man auf der 2-Sphäre und dem Zylinder.

(c) Man kann zeigen: Sind p und q genügend nahe, so existiert genau eine kürzeste Geodätische zwischen p und q (vgl. Satz 8 im nächsten Abschnitt).

19 Geodätische Parallelkoordinaten

Durch die Wahl von speziellen, der jeweiligen Fragestellung angepassten Parametrisierungen lassen sich Rechnungen oft vereinfachen. Wir wollen hier ein Beispiel einer solchen Parametrisierung angeben. Zunächst führen wir einige neue Bezeichnungen ein. Es sei

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

die Matrix der 1. Fundamentalform. Die dazu inverse Matrix bezeichnen wir mit

$$(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}.$$

Anstelle von (u, v) schreiben wir (u^1, u^2) . Weiter sei

$$g_{ij,k} := \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

Damit ergibt sich für die Christoffel-Symbole aus den Gleichungen (15.2)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$$

(Übungsaufgabe!). Ist $Y = a^1 x_{u^1} + a^2 x_{u^2}$ ein differenzierbares Vektorfeld und $c' = u_1' x_{u^1} + u_2' x_{u^2}$ das Tangentenvektorfeld an eine differenzierbare Kurve, so erhalten wir für die kovariante Ableitung den Ausdruck

$$D_{c'(t)} Y = \sum_{k=1}^2 \left((a^k)' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k a^i (u^j)' \right) x_{u^k}.$$

Insbesondere können wir das Differentialgleichungssystem für Geodätische (16.2) schreiben als

$$(u^k)'' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k (u^i)' (u^j)' = 0, \quad k = 1, 2.$$

Lemma 3 (Orthogonale Parameterlinien). Falls $g_{12} = 0$, so ist $g^{ii} = 1/g_{ii}$ für $i = 1, 2$, und für $i \neq k$

$$\Gamma_{ik}^k = \frac{g_{kk,i}}{2g_{kk}} = (\log \sqrt{g_{kk}})_{,i} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ii}^k = -\frac{g_{ii,k}}{2g_{kk}}.$$

Beweis. Offensichtlich gilt

$$\begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/g_{11} & 0 \\ 0 & 1/g_{22} \end{pmatrix}.$$

Setzt man dies in die Formel für die Christoffel-Symbole ein, so ergibt sich für $i \neq k$

$$\Gamma_{ik}^k = \frac{1}{2}g^{kk}g_{kk,i}$$

und

$$\Gamma_{ii}^k = \frac{1}{2}g^{kk}(-g_{ii,k}).$$

□

Satz 6 (Geodätische Parallelkoordinaten). Seien S eine reguläre Fläche und

$$\tilde{x} : V \rightarrow S, \quad (v^1, v^2) \mapsto \tilde{x}(v^1, v^2)$$

eine lokale Parametrisierung von S . Weiter sei $c(s) = \tilde{x}(v^1(s), v^2(s))$, $s \in [a, b]$ eine differenzierbare Flächenkurve. Es sei $s_0 \in (a, b)$ und $c'(s_0) \neq 0$. Dann gibt es einen Diffeomorphismus

$$\varphi : U \rightarrow V', \quad (u^1, u^2) \mapsto (v^1, v^2)$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{x} & x(U) \\ \varphi \downarrow & \nearrow \tilde{x} & \\ V & & \end{array}$$

von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ auf eine offene Umgebung $V' \subset V$ von $(v^1(s_0), v^2(s_0))$, so dass für die lokale Parametrisierung $x := \tilde{x} \circ \varphi$ gilt

- (a) Die Kurve $c(s) = x(u^1(s), u^2(s)) = (x \circ \varphi^{-1})(v^1(s), v^2(s))$ ist in einer genügend kleinen Umgebung von s_0 gegeben durch $u^1(s) = 0$ und $u^2(s) = s$.
- (b) Die Kurven $u^2 = \text{konst.}$ sind nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische, die jede der Kurven $u^1 = \text{konst.}$ orthogonal schneiden. Die Segmente $\alpha \leq u^1 \leq \beta$ zwischen den Kurven $u^1 = \alpha$ und $u^1 = \beta$ haben alle die gleiche Länge $\beta - \alpha$ (vgl. Abb. 19.1).
- (c) Die Koeffizienten der 1. Fundamentalform bzgl. x haben die Form

$$g_{11} = \langle x_{u^1}, x_{u^1} \rangle = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} > 0.$$

Haben umgekehrt die Koeffizienten der 1. Fundamentalform diese Gestalt, so gelten die Eigenschaften aus (b).

(d) Falls speziell $c(s)$ Geodätische ist mit $\|c'(s)\| = 1$, so gilt zusätzlich

$$g_{22}(0, u^2) = 1, \quad g_{22,1}(0, u^2) = 0, \quad \Gamma_{ij}^k(0, u^2) = 0$$

für alle i, j, k .

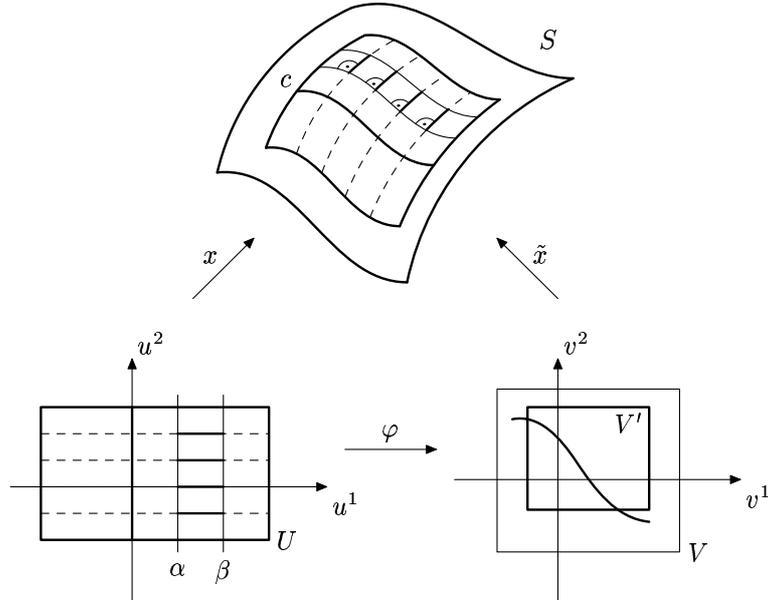


Abbildung 19.1: Geodätische Parallelkoordinaten. Die gestrichelten Linien sind nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische.

Definition 7. Koordinaten mit den Eigenschaften (a) und (b) aus Satz 6 heißen Geodätische Parallelkoordinaten (basierend auf einer Kurve $u^1 = \text{konst.}$). Die Kurven $u^1 = \text{konst.}$ heißen Parallelkurven. Ist speziell $u^1 = 0$ eine mit Bogenlänge parametrisierte Geodätische, so nennt man die Koordinaten auch Fermi-Koordinaten.

Beweis von Satz 6. (a), (b) Indem wir eventuell c auf eine kleine Umgebung von $s_0 \in (a, b)$ einschränken, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $c'(s) \neq 0$ für alle $s \in (a, b)$ gilt. Es sei

$$T(s) := \frac{c'(s)}{\|c'(s)\|}$$

und $T^*(s) \in T_{c(s)}S$ so, dass $T^* \perp T$, $\|T^*\| = 1$ und (T, T^*) die gleiche Orientierung wie $(\tilde{x}_{v^1}, \tilde{x}_{v^2})$ hat. Sei $s \in (a, b)$. Wir wissen, dass es zu $c(s)$ und $T^*(s)$ ein $\varepsilon(s)$ und eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma : (-\varepsilon(s), \varepsilon(s)) \rightarrow S$ mit $\gamma(0) = c(s)$ und $\gamma'(0) = T^*(s)$ gibt. Wir fassen alle diese Geodätischen in einer 1-Parameterfamilie c zusammen: für $s \in (a, b)$, $t \in (-\varepsilon(s), \varepsilon(s))$ sei

$$t \mapsto c(t, s) = \tilde{x}(v^1(t, s), v^2(t, s))$$

die nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit

$$c(0, s) = c(s), \quad \frac{\partial c}{\partial t}(0, s) = T^*(s).$$

Indem man (a, b) eventuell nochmals verkleinert, können wir annehmen, dass $\varepsilon(s) = \varepsilon > 0$ von s unabhängig ist. Die Abbildung

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (a, b) \rightarrow V, \quad (t, s) \mapsto (v^1(t, s), v^2(t, s))$$

ist differenzierbar, da die $v^i(t, s)$ als Lösungen der Differentialgleichungen für Geodätische differenzierbar von den Anfangsbedingungen $c(s), T^*(s)$ abhängen. Die Jacobi-Matrix von φ im Punkt $(0, s_0)$ hat als Spalten die linear unabhängigen Vektoren $T^*(s_0)$ und $T(s_0)$. Somit ist φ nach dem Umkehrsatz ein Diffeomorphismus von einer Umgebung U von $(0, s_0)$ in $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (a, b)$ auf eine Umgebung $V' \subset V$ von $(v^1(s_0), v^2(s_0))$. Damit ist (a) und der 2. Teil von (b) gezeigt.

(c) Wir schreiben ab jetzt (u^1, u^2) für (t, s) . Da die Kurven $u^2 = \text{konst.}$ nach Konstruktion mit Bogenlänge parametrisierte Geodätische sind, ist

$$g_{11} = \|x_{u^1}\| = 1.$$

Aus den Differentialgleichungen für Geodätische (16.2) folgt für $u^1 = s$ und $u^2 = \text{konst.}$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0.$$

Somit gilt

$$0 = \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \sum_l g^{1l} (g_{1l,1} + g_{l1,1} - g_{11,l}) = g^{12} g_{12,1}.$$

Da $g^{12} = -g_{12} / \det(g_{ik})$ ist, folgt aus dieser Gleichung $g_{12} g_{12,1} = 0$ oder auch

$$\frac{1}{2} (g_{12}^2)_{,1} = \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{1}{2} g_{12}^2 = 0,$$

d. h. g_{12} ist als Funktion von u^1 konstant. Da nach Konstruktion

$$g_{12}(0, u^2) = \langle T, T^* \rangle = 0$$

ist, folgt $g_{12}(u^1, u^2) = 0$. Damit ist der 1. Teil von (b) gezeigt. Da (g_{ik}) als Matrix eines Skalarprodukts positiv definit ist gilt $g_{22} = \det(g_{ik}) > 0$. Wir kommen nun zum 2. Teil von (c). Es gelte also

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} > 0.$$

Daraus folgt $\Gamma_{11}^1 = 0$ und nach Lemma 3 ist $\Gamma_{11}^2 = 0$. Also

$$D_{x_{u^1}} x_{u^1} = \sum_i \Gamma_{11}^i x_{u^i} = 0,$$

d.h. die Kurven $u^2 = \text{konst.}$ sind nach Bogenlänge parametrisierte (da $g_{11} = 1$) Geodätische, welche (wegen $g_{12} = 0$) jede der Kurven $u^1 = \text{konst.}$ orthogonal schneiden. Jede dieser Kurven kann als Basiskurve gewählt werden.

(d) Für $s = u^2$ sei $c(s) = x(0, u^2)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Dann gilt $g_{22}(0, u^2) = 1$. Da $g_{12} = 0$ und $g_{11} = 1$, folgt mit Lemma 3

$$\Gamma_{11}^1 = 0 = \Gamma_{11}^2.$$

Wir müssen noch die Behauptung für die übrigen Christoffel-Symbole zeigen. Längs der Kurve c gilt $D_{c'(s)}T = D_{c'(s)}c' = 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \langle T(s), T^*(s) \rangle = \langle T'(s), T^*(s) \rangle + \langle T(s), T^{*'}(s) \rangle \\ &= \langle D_{c'(s)}T, T^* \rangle + \langle T, D_{c'(s)}T^* \rangle \\ &= \langle T, D_{c'(s)}T^* \rangle. \end{aligned}$$

Aus $\|T^*(s)\| = 1$ folgt ähnlich wie oben

$$0 = \frac{d}{ds} \langle T^*(s), T^*(s) \rangle = 2 \langle T^*(s), D_{c'(s)}T^* \rangle.$$

Wir schließen daraus, dass $D_{c'(s)}T^*$ orthogonal zu $[T(s), T^*(s)] = T_{c(s)}S$ ist. Also muss $D_{c'(s)}T^* = 0$ sein. In geodätischen Parallelkoordinaten (u^1, u^2) ist $T^*(s) = x_{u^1}(0, u^2)$. Die Formel für die kovariante Ableitung (16.1) liefert für $(a^1, a^2) = (1, 0)$ die Gleichung

$$\Gamma_{12}^1(0, u^2) = 0 = \Gamma_{12}^2(0, u^2).$$

Nach Lemma 3 ist

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{g_{22,1}}{g_{22}}, \quad \text{also} \quad g_{22,1}(0, u^2) = 0.$$

Weiterhin folgt damit ebenfalls aus Lemma 3

$$\Gamma_{22}^1(0, u^2) = -\frac{g_{22,1}(0, u^2)}{2g_{11}} = 0.$$

Schließlich ist wegen $g_{22}(0, u^2) = 1$,

$$\Gamma_{22}^2(0, u^2) = \frac{g_{22,2}(0, u^2)}{2g_{22}} = 0.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Wir wollen zwei Anwendungen von geodätischen Parallelkoordinaten geben. Zunächst werden wir eine Formel für die Gauß-Krümmung in geodätischen Parallelkoordinaten herleiten und anschließend zeigen wir, dass Geodätische lokal Kürzeste sind.

Satz 7. *In geodätischen Parallelkoordinaten gilt für die Gauß-Krümmung*

$$K(u^1, u^2) = -\frac{(\sqrt{g_{22}})_{,11}}{\sqrt{g_{22}}}(u^1, u^2).$$

Beweis. Nach der Gauß-Formel (Theorema egregium) gilt

$$-g_{11}K = \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{11,2}^2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2.$$

Mit Lemma 3 und da in geodätischen Parallelkoordinaten $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ gilt, folgt

$$-K = (\log \sqrt{g_{22}})_{,11} + ((\log \sqrt{g_{22}})_{,1})^2.$$

Wir setzen $f := \sqrt{g_{22}}$ und rechnen

$$(\log f)_{,11} + ((\log f)_{,1})^2 = \left(\frac{f_{,1}}{f}\right)_{,1} + \left(\frac{f_{,1}}{f}\right)^2 = \frac{f_{,11}}{f} = \frac{(\sqrt{g_{22}})_{,11}}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Damit ist der Satz bewiesen. \square

Wir wissen bereits, dass kürzeste Verbindungen immer Geodätische sind. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch, wie etwa das Beispiel des Zylinders zeigt. Der folgende Satz besagt jedoch, dass *genügend kleine Segmente* von Geodätischen auch Kürzeste sind.

Satz 8 (Geodätische sind lokal Kürzeste). *Seien S eine reguläre Fläche und $x : U \rightarrow S$, $(u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2)$ geodätische Parallelkoordinaten. Dann ist eine mit Bogenlänge parametrisierte Geodätische der Form*

$$\gamma(s) := x(s, u_0^2), \quad s_0 \leq s \leq s_1$$

kürzer als eine beliebige Kurve

$$c(t) := x(u^1(t), u^2(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

die $p_0 = \gamma(s_0) = c(t_0)$ und $p_1 = \gamma(s_1) = c(t_1)$ verbindet.

Beweis. Es ist $c' = (u^1)'x_{u^1} + (u^2)'x_{u^2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|c'\|^2 &= ((u^1)')^2 g_{11} + 2(u^1)'(u^2)'g_{12} + g_{22}((u^2)')^2 \\ &= ((u^1)')^2 + (u^2)^2 g_{22}(u^1(t), u^2(t)) \\ &\geq ((u^1)')^2. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$L(c) \geq \int_{t_0}^{t_1} |(u^1)'| dt \geq u^1(t_1) - u^1(t_0) = s_1 - s_0 = L(\gamma).$$

\square

Korollar 1. *Geodätische werden durch (lokale) Isometrien auf Geodätische abgebildet.*

Beweis. Sei γ eine Geodätische. Wir betrachten geodätische Parallelkoordinaten bei $\gamma(t)$ (das ist immer möglich nach Satz 6). Nach Satz 8 ist γ lokal Kürzeste. Für eine Isometrie φ ist $\varphi \circ \gamma$ dann eine Kürzeste zwischen entsprechenden Bildpunkten (φ lässt Längen invariant). Nach Satz 5 ist eine Kürzeste eine Geodätische. \square

Bemerkung: Geodätische Polarkoordinaten. Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Für $\varepsilon > 0$ genügend klein betrachten wir den geometrischen Ort K_ε aller Endpunkte von geodätischen Segmenten der Länge ε , die von p ausgehen. K_ε heißt *geodätischer Kreis* vom Radius ε und Zentrum p . Die der "Kurve" K_ε entsprechenden geodätischen Parallelkoordinaten heißen *geodätische Polarkoordinaten*, vgl. Abb. 19.2.

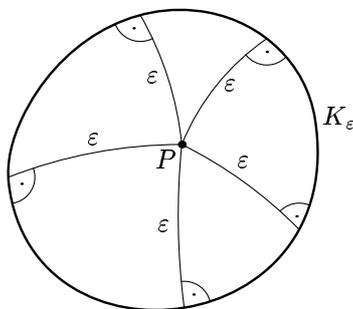


Abbildung 19.2: geodätische Polarkoordinaten

Man kann zeigen, dass die Parameterlinien einerseits die von p ausgehenden Geodätischen und andererseits die geodätischen Kreise um p sind. Die Tatsache, dass sich diese Kurven jeweils unter einem rechten Winkel schneiden, heißt in diesem Fall auch "Gauß-Lemma" (für Einzelheiten siehe Vorlesung "Riemannsche Geometrie").

20 Parallelverschiebung und geodätische Krümmung

20.1 Parallele Vektorfelder

Wir wollen das Konstruktions-Prinzip der Parallelverschiebung in der euklidischen Ebene auf gekrümmte Flächen übertragen.

Definition 8. *Es sei $c : I \rightarrow S$ eine differenzierbare Flächenkurve und $Y(t)$ ein differenzierbares Vektorfeld längs c , d. h. $Y(t) \in T_{c(t)}S$ für $t \in I$. $Y(t)$ heißt parallel längs c , wenn*

$$D_{c'(t)}Y(t) = 0$$

für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkungen (a) Wir betrachten den Spezialfall der euklidischen Ebene. Hier ist

$$D_{c'(t)}Y(t) = Y'(t) = 0 \iff Y(t) = \text{konst.}$$

Die parallelen Vektorfelder sind hier also gerade die konstanten Vektorfelder.

(b) Das Tangentenvektorfeld $c'(t)$ einer Geodätischen c ist stets parallel.

Satz 9. *Es seien Y und Z parallele Vektorfelder längs $c : I \rightarrow S$. Dann ist*

$$\langle Y(t), Z(t) \rangle_{c(t)} = \text{konst.}$$

Damit sind der Winkel $\angle(Y(t), Z(t))$ und die Längen $\|Y(t)\|, \|Z(t)\|$ konstant.

Beweis. Das Vektorfeld Y ist genau dann parallel, wenn die Tangentialkomponente von Y' verschwindet, wenn also $Y'(t) \perp T_{c(t)}S$ gilt. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \langle Y(t), Z(t) \rangle = \langle Y'(t), Z(t) \rangle + \langle Y(t), Z'(t) \rangle = 0.$$

Demnach ist $\langle Y(t), Z(t) \rangle$ konstant. □

Beispiel (Parallelfelder längs Geodätischen). Wir betrachten eine Geodätische $c : I \rightarrow S$. Wie sieht das Parallelfeld Y längs c mit $Y(t_0) = Y_0 \in T_{c(t_0)}S$ aus? Ist α der Winkel zwischen $c'(t_0)$ und Y_0 , so folgt aus obigem Satz, dass dieser Winkel längs c erhalten bleibt. Man erhält also $Y(t)$, indem man $c'(t)$ um den Winkel α dreht und eventuell noch mit einem konstanten Faktor multipliziert. Das so erhaltene Vektorfeld Y ist differenzierbar und parallel.

Satz 10 (Existenz und Eindeutigkeit von Parallelfeldern). *Es seien $c : I \rightarrow S$ eine differenzierbare Kurve auf der regulären Fläche S und $Y_0 \in T_{c(t_0)}S, t_0 \in I$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Parallelfeld $Y(t)$ längs c mit $Y(t_0) = Y_0$.*

Beweis. Wir können annehmen, dass I abgeschlossen ist. Damit ist $c(I) \subset S$ kompakt und wird von endlich vielen Koordinatenumgebungen überdeckt. Wegen der Eindeutigkeit genügt es, die Behauptung für Segmente von c zu beweisen, die ganz in einer Koordinatenumgebung liegen. Es sei also $x : U \rightarrow S$ eine lokale Parametrisierung um $c(t_0)$ und u, v seien differenzierbare Funktionen, so dass $c(t) = x(u(t), v(t))$ in dieser Koordinatenumgebung gilt. Wir machen für Y den Ansatz

$$Y(t) = a(t)x_u(u(t), v(t)) + b(t)x_v(u(t), v(t))$$

mit zu bestimmenden differenzierbaren Funktionen a und b . Y ist genau dann parallel, wenn

$$0 = D_c Y = (a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{12}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v')x_u + (b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{12}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v')x_v$$

gilt, also genau wenn

$$\begin{aligned} a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv' &= 0 \\ b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv' &= 0. \end{aligned} \quad (20.1)$$

Das ist aber ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für a und b . Es hat zu gegebenen Anfangsbedingungen $(a(t_0), b(t_0))$ genau eine Lösung $(a(t), b(t))$. Zudem ist diese Lösung auf dem ganzen Intervall I definiert. \square

20.2 Parallelverschiebung

Wir zeigen im Folgenden wie man mit Hilfe von Parallelfeldern Vektoren längs Kurven “parallel verschieben” kann.

Definition 9. Sei $c : I \rightarrow S$ eine differenzierbare Kurve und $Y_0 \in T_{c(t_0)}S$. Weiter sei $Y(t)$ das parallele Vektorfeld längs c mit $Y(t_0) = Y_0$. Für $t_1 \in I$ heißt dann $Y(t_1)$ die Parallelverschiebung von Y_0 längs c nach $c(t_1)$.

Bemerkungen (a) Aus Satz 9 folgt, dass die Parallelverschiebung längs einer Kurve $c : [a, b] \rightarrow S$ eine lineare Isometrie der euklidischen Vektorräume T_pS und T_qS ist, wobei $p = c(a)$ und $q = c(b)$ ist. Die Parallelverschiebung ermöglicht somit den Vergleich “weit voneinander entfernter” Tangentialräume.

(b) Ist die Kurve c nur stückweise differenzierbar, so definiert man die Parallelverschiebung segmentweise.

(c) Die Parallelverschiebung ist als Begriff der inneren Geometrie einer Fläche invariant unter lokalen Isometrien. Genauer: Hat man eine Kurve $c : I \rightarrow S$ mit $c(I) \subset U$, U offen, eine Isometrie $\varphi : U \rightarrow \bar{U} \subset \bar{S}$ und $Y_0 \in T_{c(t_0)}S$, so gilt das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{d\varphi} & d\varphi(Y_0) \\ \text{PV längs } c \downarrow & & \downarrow \text{PV längs } \varphi \circ c \\ Y(t) & \xrightarrow{d\varphi} & d\varphi(Y(t)) \end{array}$$

(d) Es seien S und \bar{S} zwei reguläre Flächen, die sich längs einer differenzierbaren Kurve $c : I \rightarrow S \cap \bar{S}$ tangential berühren, d. h. $T_{c(t)}S = T_{c(t)}\bar{S}$ für alle $t \in I$. Ist Y_0 ein Vektor aus $T_{c(t_0)}S = T_{c(t_0)}\bar{S}$, so ist $Y(t)$ genau dann die Parallelverschiebung von Y_0 längs c bezüglich S , wenn $Y(t)$ die Parallelverschiebung von Y_0 längs c bezüglich \bar{S} ist. Denn: die kovariante Ableitung $D_{c'(t)}Y$ ist für beide Flächen dieselbe (da das entsprechende Differentialgleichungssystem (20.1) für beide Flächen identisch ist).

Beispiel. Wir betrachten ein Beispiel zur letzten Bemerkung. Es sei c der Breitenkreis zum Winkel $\pi/2 - \varphi$ auf einer orientierten Einheitssphäre. Weiter sei Y_0 tangential an c im Punkt p . Gesucht ist die Parallelverschiebung von Y_0 längs c . Dazu betrachten wir den Kegel K , der die Sphäre längs c tangential berührt, vgl. Abb. 20.1. Dieser hat gerade den Öffnungswinkel $\psi = \pi/2 - \varphi$.

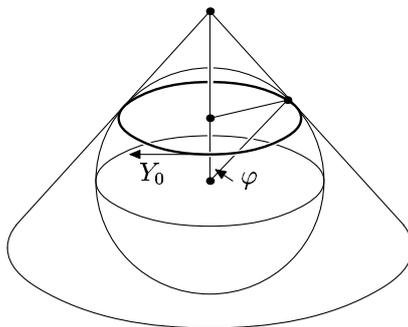


Abbildung 20.1:

Die Kurve c liegt auf dem Kegel und Y_0 ist tangential an K . Ohne Einschränkung sei c mit Bogenlänge parametrisiert und $p = c(0)$. Nach der obigen Bemerkung genügt es, die Parallelverschiebung von Y_0 längs c bezüglich K zu bestimmen. Da K lokal isometrisch zur Ebene ist, können wir die Parallelverschiebung in der Ebene durchführen (vgl. Abb. 20.2) und dann wieder auf den Kegel bzw. die Sphäre übertragen.

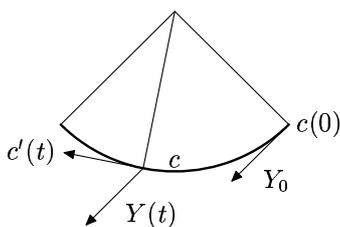


Abbildung 20.2: Parallelverschiebung von Y_0 in der Ebene. Parallelverschiebung auf dem Zylinder erhält man, indem man den erhaltenen Winkel zwischen $Y(t)$ und $c'(t)$ auf den Zylinder überträgt.

20.3 Parallelverschiebung und Krümmung

Wir wollen nun die Parallelverschiebung mit der Krümmung in Verbindung bringen. Dazu betrachten wir eine orientierbare Fläche S . Weiter sei $c : I \rightarrow S$, $t \mapsto c(t)$ eine mit Bogenlänge parametrisierte Flächenkurve. Wegen $\|c'(t)\|^2 = \langle c', c' \rangle = 1$ ist $\langle c''(t), c'(t) \rangle = 0$. Damit ist die Tangentialkomponente $D_{c'(t)}c'$ von c'' proportional zu $N(t) \wedge c'(t)$. Das führt auf folgende

Definition 10. Die Abbildung $\kappa_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$D_{c'(t)}c'(t) = \kappa_g(t)(N(t) \wedge c'(t))$$

heißt geodätische Krümmung. Die Zahl $\kappa_g(t)$ heißt geodätische Krümmung von c im Punkt $c(t)$.

Das Vorzeichen von κ_g hängt von der gewählten Orientierung der Fläche bzw. vom Durchlaufsinne der Kurve ab.

Lemma 4. Sei $c : I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\kappa(t) = \|c''(t)\|$ die Krümmung von c . Weiter sei $\kappa_n(t) = \langle c''(t), N(t) \rangle$ die Normalschnittkrümmung von S im Punkt $c(t)$ in Richtung $c'(t)$. Dann gilt

$$\kappa^2(t) = \kappa_n^2(t) + \kappa_g^2(t).$$

Beweis. Zerlegung von c'' in Normal- und Tangentialkomponente liefert

$$\begin{aligned} c'' &= \langle c'', N \rangle N + D_{c'(t)} c' \\ &= \kappa_n N + \kappa_g (N \wedge c'). \end{aligned}$$

Da N und $N \wedge c'$ orthogonale Einheitsvektoren sind folgt $\kappa^2 = \|c''\|^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$. \square

Bemerkungen (a) Mit Definition 10 gilt: Eine Kurve c ist genau dann Geodätische, wenn $\kappa_g \equiv 0$ gilt. Das erklärt auch die Bezeichnung "geodätische Krümmung".

(b) Falls $T_1(t) = c'(t)$ und $T_2(t)$ ein begleitendes 2-Bein von c ist, das gleich orientiert ist wie S , so ist

$$\kappa_g(t) = \langle D_{c'(t)} c', T_2(t) \rangle.$$

Die geodätische Krümmung κ_g ist also eine Größe der *inneren Geometrie* einer orientierten Fläche.

Im folgenden sei Y ein paralleles Einheitsvektorfeld längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c : I = [a, b] \rightarrow S$.

Es sei V ein 2-dimensionaler orientierter Vektorraum. Weiter seien X und Y zwei linear unabhängige Vektoren. Es sei $\alpha \in (0, \pi)$ der Winkel zwischen X und Y , also

$$\cos \alpha = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|} \in (-1, 1).$$

Der *orientierte Winkel* zwischen X und Y ist definiert als α , wenn (X, Y) positiv orientiert ist, und als $-\alpha$, wenn (X, Y) negativ orientiert ist. Man beachte, dass die Reihenfolge von X und Y entscheidend ist! Im Spezialfall einer orientierten Fläche ist jede Tangentialebene orientiert und das Vorzeichen des orientierten Winkels zwischen X und Y ist gegeben durch das Vorzeichen von $\det(X, Y, N)$, wobei N die Flächennormale ist.

Lemma 5. Es sei Y ein paralleles Einheitsvektorfeld längs der nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow S$. Weiter sei $\theta(t)$ der orientierte Winkel zwischen $Y(t)$ und $c'(t)$, also

$$Y(t) = \cos \theta(t) c'(t) - \sin \theta(t) (N(t) \wedge c'(t)),$$

mit $\cos \theta(t) = \langle c'(t), Y(t) \rangle$, $|\theta| \in (0, \pi)$. Dann ist $\kappa_g(t) = \theta'(t)$.

Beweis. Wir leiten die Gleichung $\cos\theta(t) = \langle c'(t), Y(t) \rangle$ nach t ab und erhalten mit $D_{c'}Y = D_{c'}c' = 0$, dass

$$\begin{aligned} -\theta'(t) \sin\theta(t) &= \langle c''(t), Y(t) \rangle + \langle c'(t), Y'(t) \rangle \\ &= \langle D_{c'(t)}c', Y(t) \rangle + \langle c'(t), D_{c'(t)}Y \rangle \\ &= \langle D_{c'(t)}c', \cos\theta(t)c'(t) - \sin\theta(t)(N(t) \wedge c'(t)) \rangle \\ &= \cos\theta(t) \langle D_{c'(t)}c', c'(t) \rangle - \sin\theta(t) \kappa_g(t) \\ &= -\sin\theta(t) \kappa_g(t) \end{aligned}$$

Für $t_0 \in I$ mit $\sin\theta(t_0) \neq 0$ folgt die Behauptung. Ist $\sin\theta(t)$ ungleich 0 in einer Umgebung von t_0 , so folgt die Behauptung, da $\theta'(t)$ und $\kappa_g(t)$ stetig sind. Ist $\sin\theta(t) \equiv 0$ auf einem abgeschlossenen Intervall $J \subset I$, so ist c auf J Geodätische (da $Y = c'$ und Y parallel) und damit $\kappa_g = 0 = \theta'(t)$ auf J . \square

Bemerkung: Holonomie. Betrachtet man die Winkeländerung (bzgl. c') bei Parallelverschiebung längs c , so gilt nach obigem Lemma

$$\theta(t_1) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \kappa_g(t) dt.$$

Ist insbesondere c geschlossen, so ist $\theta(b) - \theta(a)$ der Winkel zwischen $Y(b)$ und $Y(a)$.

Es sei nun $T_1(t), T_2(t), T_3(t) = N(t)$ eine begleitende Orthonormalbasis einer Flächenkurve $c(t)$ (c muss nicht mit Bogenlänge parametrisiert sein) mit $T_1(t)$ und $T_2(t) \in T_{c(t)}S$. Weiter sei

$$Y(t) = \cos\varphi(t) T_1(t) + \sin\varphi(t) T_2(t)$$

ein Einheits-Vektorfeld längs c .

Frage: Wie muss man φ wählen, damit Y parallel ist?

Wir stellen zunächst fest, dass wegen $\langle T_i, T_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\langle T'_i, T_j \rangle + \langle T_i, T'_j \rangle = 0$$

gilt. Setzt man $a_{ij} := \langle T'_i, T_j \rangle$, so folgt $a_{ij} = -a_{ji}$. Man erhält damit eine schiefsymmetrische Matrix (a_{ij}) die folgende Eigenschaft hat

$$\begin{pmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ T'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} Y' &= -\varphi' \sin\varphi T_1 + \varphi' \cos\varphi T_2 + \cos\varphi (\alpha T_2 + \beta T_3) + \sin\varphi (-\alpha T_1 + \gamma T_3) \\ &= -(\alpha + \varphi') \sin\varphi T_1 + (\alpha + \varphi') \cos\varphi T_2 + (\beta \cos\varphi + \gamma \sin\varphi) T_3. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld Y ist genau dann parallel, wenn die Tangentialkomponente von Y' verschwindet, also genau dann, wenn $\alpha + \varphi' = 0$ gilt. Im nächsten Lemma bestimmen wir $\alpha (= -\varphi')$ mittels geodätischer Parallelkoordinaten.

Lemma 6. *Es sei S eine orientierte Fläche, $x : U \rightarrow S$, $(u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2)$ seien geodätische Parallelkoordinaten und c sei eine Kurve in $x(U)$, also*

$$c(t) = x(u^1(t), u^2(t)).$$

Weiter sei $T_1(t) = x_{u^1}(u^1(t), u^2(t))$,

$$T_2(t) = \frac{x_{u^2}(u^1(t), u^2(t))}{\|x_{u^2}(u^1(t), u^2(t))\|} \quad \text{und} \quad T_3(t) = T_1(t) \wedge T_2(t) = N(t).$$

Für $\alpha(t) = \langle T_1'(t), T_2(t) \rangle$ gilt $\alpha(t) = (\sqrt{g_{22}})_{,1}(u^2)'(t)$.

Beweis. Zunächst ist

$$\begin{aligned} T_1'(t) &= \frac{d}{dt} x_{u^1}(u^1(t), u^2(t)) \\ &= (u^1)'(t) x_{u^1 u^1}(u^1(t), u^2(t)) + (u^2)'(t) x_{u^1 u^2}(u^1(t), u^2(t)). \end{aligned}$$

In geodätischen Parallelkoordinaten gilt aber $g_{12} = 0$ und $g_{11} = 1$ und damit $\Gamma_{11}^1 = 0$. Weiter ist nach Lemma 3 auch $\Gamma_{11}^2 = -\frac{g_{11,2}}{g_{22}} = 0$. Also ergibt sich

$$\langle x_{u^1 u^1}, x_{u^2} \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 x_{u^1} + \Gamma_{11}^2 x_{u^2} + lN, x_{u^2} \rangle = \Gamma_{11}^1 g_{12} + \Gamma_{11}^2 g_{22} = 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle x_{u^1 u^2}, x_{u^2} \rangle (u^2)' \frac{1}{\|x_{u^2}\|} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} \langle x_{u^2}, x_{u^2} \rangle (u^2)' \frac{1}{\|x_{u^2}\|} \\ &= \frac{1}{2} g_{22,1} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (u^2)' = (\sqrt{g_{22}})_{,1} (u^2)' \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Als Anwendung charakterisieren wir die Flächen mit Gauß-Krümmung Null.

Satz 11 (Flächen mit $K = 0$). *Sei S eine reguläre Fläche. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (a) *Die Parallelverschiebung ist lokal wegunabhängig, d. h. zu jedem $p \in S$ gibt es eine (Koordinaten-)Umgebung in der die Parallelverschiebung nicht von der Kurve c abhängt.*
- (b) *Zu jedem $p \in S$ gibt es geodätische Parallelkoordinaten, so dass $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt.*
- (c) *S ist lokal isometrisch zur euklidischen Ebene.*
- (d) *Für die Gauß-Krümmung K von S gilt $K \equiv 0$.*

Beweis. Der Beweis der Äquivalenzen (b) \iff (c) \iff (d) ist eine Übungsaufgabe. Wir vervollständigen nun noch den Ringschluß.

(c) \implies (a): Parallelfelder in der euklidischen Ebene sind konstant, also ist die Parallelverschiebung wegunabhängig.

(a) \Rightarrow (b): In einer Umgebung von p wählen wir Fermi-Koordinaten $x : U \rightarrow S$ (vgl. Satz 6) basierend auf der nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $x(0, u^2)$ mit $p = x(0, 0)$. Nach Annahme ist die Parallelverschiebung in $x(U)$ wegunabhängig. Wir zeigen: die Kurven $x(a, u^2)$ sind alle Geodätische. Dazu betrachten wir den Einheitsvektor

$$A_0 := \frac{x_{u^2}}{\sqrt{g_{22}}}(a, 0).$$

Die Kurve $u^2 = 0$ ist Geodätische, deren Tangentialvektor im Punkt $x(a, 0)$ senkrecht zu A_0 steht. Also ist die Parallelverschiebung A_1 von A_0 längs $u^2 = 0$ nach $x(0, 0)$ ein Einheitsvektor, der orthogonal zum Tangentialvektor an $x(u^1, 0)$ in $u^1 = 0$ steht.

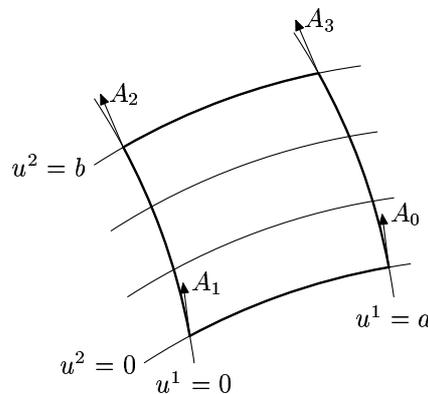


Abbildung 20.3: Parallelverschiebung von A_0

Damit folgt

$$A_1 = \frac{x_{u^2}}{\sqrt{g_{22}}}(0, 0).$$

Die Parallelverschiebung A_2 von A_1 längs $u^1 = 0$ nach $x(0, b)$ ist der Tangentialvektor an die Geodätische $u^1 = 0$, also

$$A_2 = \frac{x_{u^1}}{\sqrt{g_{11}}}(0, b).$$

Nun verschieben wir A_2 parallel längs der Geodätischen $u^2 = b$ nach $x(a, b)$ und erhalten wegen $g_{12} = 0$

$$A_3 = \frac{x_{u^1}}{\sqrt{g_{11}}}(a, b).$$

Nach Voraussetzung ist die Parallelverschiebung wegunabhängig. Also ist die Parallelverschiebung von A_0 längs $u^1 = a$ ebenfalls A_3 . Da b beliebig war, ist

$$\frac{x_{u^2}}{\sqrt{g_{22}}}(a, u^2)$$

ein paralleles Einheitsvektorfeld längs $x(a, u^2)$. Dann ist $x(a, u^2)$ aber eine Geodätische. Da Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, folgt, dass $\sqrt{g_{22}(a, u^2)}$ als Funktion von u^2 konstant ist. Aus der Differentialgleichung für Geodätische (16.2) folgt mit $u = u_1$, dass $\Gamma_{22}^1 = 0$. Da nach Lemma 3

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{g_{22,1}}{2g_{11}}$$

gilt, ist g_{22} auch als Funktion von u_1 konstant. Damit schließen wir, dass $g_{22}(u^1, u^2) = g_{22}(0, 0) = 1$ gilt. Da für geodätische Parallelkoordinaten allgemein $g_{11} \equiv 1$ und $g_{12} \equiv 0$ gilt, folgt schließlich die Behauptung $g_{ij} = \delta_{ij}$. \square

Teil V

Der Satz von Gauß-Bonnet und Folgerungen

21 Umlaufsatz und Satz von Gauß-Bonnet

21.1 Der Umlaufsatz für Flächenkurven

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung des Umlaufsatzes von Hopf (Satz 12 in 6.1). Dazu benötigen wir noch einige zusätzliche Begriffe.

Definition 1. Sei S eine reguläre Fläche. Unter einer einfach geschlossenen, stückweise regulären Flächenkurve verstehen wir eine stetige Abbildung $c : [0, l] \rightarrow S$ mit folgenden Eigenschaften

- (a) Die Kurve ist geschlossen, d. h. $c(0) = c(l)$.
- (b) Die Kurve c ist injektiv auf $]0, l[$.
- (c) Es gibt eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$ von $[0, l]$, so dass c auf jedem Segment $I_i := [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k+1$, differenzierbar und regulär ist.

Nach Definition gibt es für jedes t_i links- und rechtsseitige Ableitungen von c . Wir schreiben $c'(t_i^+)$ für die rechtsseitige und $c'(t_i^-)$ für die linksseitige Ableitung. Wir wollen weiter annehmen, dass S orientiert ist. Dann sei $-\pi < \delta_i < \pi$ der orientierte Winkel zwischen $c'(t_i^-)$ und $c'(t_i^+)$. (Den Fall $|\delta_i| = \pi$, der anschaulich einer "Spitze" entspricht, betrachten wir hier nicht.) Zudem nehmen wir an, dass c auf jedem regulären Segment mit Bogenlänge parametrisiert ist.

Definition 2. Der mit Vorzeichen versehene Winkel $-\pi < \delta_i < \pi$ heißt Aussenwinkel im Punkt $c(t_i)$, vgl. Abb. 21.1. Falls $\delta_i \neq 0$, so nennen wir $c(t_i)$ eine Ecke von c .

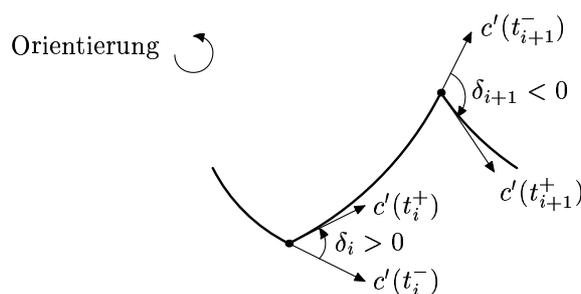


Abbildung 21.1: Aussenwinkel einer Kurve

Es sei jetzt $x : U \rightarrow S$, $(u, v) \mapsto x(u, v)$ eine lokale Parametrisierung von S , die mit der Orientierung von S verträglich ist. Weiter sei U homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe. Sei $c : [0, l] \rightarrow S$ eine einfach geschlossene, stückweise reguläre Kurve mit $c([0, l]) \subset x(U)$, Ecken $c(t_i)$ und Aussenwinkeln δ_i für $i = 1, \dots, k$. Man beachte, dass mit dieser Konvention $c(0) = c(l)$ keine Ecke ist! Schließlich sei für $i = 1, \dots, k+1$ und $t \in I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $\beta_i(t)$ der orientierte Winkel zwischen $x_u(c(t))$ und $c'(t)$. Es gilt also insbesondere

$$(*) \quad \delta_i = \beta_{i+1}(t_i) - \beta_i(t_i) \quad (i = 1, \dots, k).$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Hopf (Satz 12 in 6.1) für ebene Kurven.

Satz 1 (Umlaufsatz für Flächenkurven). *Mit obigen Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{i=1}^{k+1} (\beta_i(t_i) - \beta_i(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \delta_i = \pm 2\pi.$$

In Worten: Die totale Variation des Winkels zwischen einem festen Richtungsfeld und dem Tangentialvektor von c ist zusammen mit den "Sprüngen" an den Ecken gleich $\pm 2\pi$ (wobei das Vorzeichen von der Orientierung der Kurve abhängt).

Beweis. 1. Schritt: Wir nehmen an, dass c keine Ecken hat, also $\delta_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. Dann ist nach $(*)$ $\beta_{i+1}(t_i) = \beta_i(t_i)$ für $i = 1, \dots, k$ und die Behauptung des ist Satzes somit äquivalent zu

$$\beta_{k+1}(l) - \beta_1(0) = \pm 2\pi.$$

Diese Gleichung ist nun aber eine Konsequenz aus den folgenden drei Bemerkungen:

(1) Da sowohl $\beta_{k+1}(l)$ als auch $\beta_1(0)$ den Winkel zwischen x_u und $c'(0) = c'(l)$ messen, ist $\beta_{k+1}(l) - \beta_1(0)$ ein Vielfaches von 2π .

(2) Sei I die erste Fundamentalform von S und I^0 die erste Fundamentalform der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 . Für $\lambda \in [0, 1]$ ist dann $I^\lambda := \lambda I + (1 - \lambda)I^0$ ebenfalls ein (positiv definites) Skalarprodukt auf $T_p S$ für $p \in S$ (genauer: I^λ ist eine sogenannte Riemannsche Metrik). Wir definieren den Winkel β^λ zwischen x_u und c' bezüglich I^λ durch

$$\cos \beta^\lambda := \frac{I^\lambda(x_u, c')}{\sqrt{I^\lambda(x_u, x_u) I^\lambda(c', c')}}.$$

Weil β^λ stetig von λ abhängt, verändert sich $\beta^\lambda(l) - \beta^\lambda(0)$ stetig mit λ . Da dieser Wert aber immer ein Vielfaches von 2π ist, muss er konstant sein.

(3) Für $\lambda = 0$ ist (S, I^0) lokal isometrisch zu der euklidischen Ebene (vgl. Satz 11 in 20.3). Wir können also S in diesem Fall als Stück von \mathbb{R}^2 und c als ebene Kurve auffassen. Somit ist $\beta^0(l) - \beta^0(0)$ gerade 2π mal die Umlaufzahl von c , also nach dem Umlaufsatz von Hopf (Satz 12 in 6.1) gleich $\pm 2\pi$.

2. Schritt: Wir nehmen jetzt an, dass c insgesamt k Ecken hat, also $\delta_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, k$. Mit obiger Gleichung (*) gilt allgemein

$$\sum_{i=1}^{k+1} (\beta_i(t_i) - \beta_i(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \delta_i = \beta_{k+1}(l) - \beta_1(0).$$

Satz 1 ist somit wieder äquivalent zur Gleichung

$$\beta_{k+1}(l) - \beta_1(0) = \pm 2\pi.$$

Wir beweisen diese Gleichung, indem wir wie im ersten Schritt die folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) nachweisen. (1) und (2) sind klar:

(1) $\beta_{k+1}(l) - \beta_1(0) = 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$),

(2) $\beta_{k+1}^\lambda(l) - \beta_1^\lambda(0) = \text{konstant} = \beta_{k+1}^0(l) - \beta_1^0(0) = (\beta_{k+1}(l) - \beta_1(0))$.

(3) Die zu beweisende Aussage von Satz 1 ist äquivalent zu der folgenden Verallgemeinerung des Umlaufsatzes von Hopf für ebene geschlossene Kurven mit Ecken:

$$\beta_{k+1}(l) - \beta_1(0) = \sum_{i=1}^{k+1} (\beta_i(t_i) - \beta_i(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \delta_i = \pm 2\pi.$$

Um diese Gleichung zu beweisen, gehen wir wie folgt vor. Für jede Ecke $c(t_i)$ wählen wir einen kleinen Kreis K um $c(t_i)$. Sei $P = c(a_i)$ der letzte Punkt von $c([t_{i-1}, t_i])$ auf K und $Q = c(b_i)$ der erste Punkt von $c([t_i, t_{i+1}])$ auf K . Wir wählen dann eine glatte Kurve c_i von P nach Q mit Anfangsrichtung $c'(a_i)$ und Endrichtung $c'(b_i)$, vgl. Abb. 21.2. Wenn der Radius von K gegen Null geht, so ist die totale Änderung

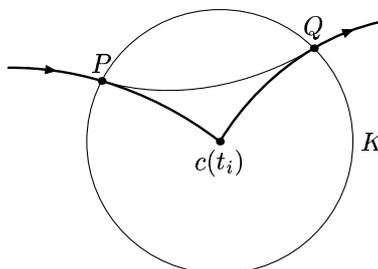


Abbildung 21.2: Glätten von Ecken

der Tangentenrichtung von c_i beliebig nahe bei δ_i . Wählt man also alle Kreisradien genügend klein, so erhält man mittels der Kurven c_i eine einfach geschlossene glatte Kurve \bar{c} . Nach dem Umlaufsatz ist die totale Änderung des Tangentenvektors \bar{c}' gleich $\pm 2\pi$. Andererseits ist die totale Tangentenänderung längs der Teilkurven c_i nahe bei $\sum_{i=1}^k \delta_i$, während die totale Änderung der übrigen Segmente von \bar{c} nahe bei $\sum_{i=1}^{k+1} (\beta_i(t_i) - \beta_i(t_{i-1}))$ ist. Wir erhalten somit insgesamt, dass der Ausdruck

$$\beta_{k+1}(l) - \beta_1(0) = \sum_{i=1}^{k+1} (\beta_i(t_i) - \beta_i(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \delta_i$$

nahe bei $\pm 2\pi$ ist. Nach (1) und (2) muss er somit gleich $\pm 2\pi$ sein. \square

21.2 Satz von Gauß-Bonnet (lokale Version)

Definition 3. *Es sei S eine orientierte Fläche. Ein einfaches Gebiet ist eine Teilmenge G von S , die homöomorph zu einer (abgeschlossenen) Kreisscheibe ist und für deren Rand gilt $\partial G = c([0, l])$ für eine stückweise reguläre, einfach geschlossene Kurve $c : [0, l] \rightarrow S$.*

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass c auf jedem regulären Segment nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann kann man auf jedem solchen Segment von c den Vektor $c'(t)$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $(c'(t), T_2(t))$ von $T_{c(t)}S$ ergänzen. Man sagt c ist bezüglich G positiv orientiert, falls auf jedem regulären Segment von c gilt: für die positive Orthonormalbasis $(c'(t), T_2(t))$ zeigt $T_2(t)$ nach G , genauer: Ist $\varepsilon(t)$ eine in G verlaufende differenzierbare Kurve mit $\varepsilon(0) = c(t)$ und $\varepsilon'(0) \neq c'(t)$, so ist

$$\langle \varepsilon'(0), T_2(t) \rangle > 0.$$

Anschaulich: Das Innere von G liegt "links" von c , vgl. Abb. 21.3.

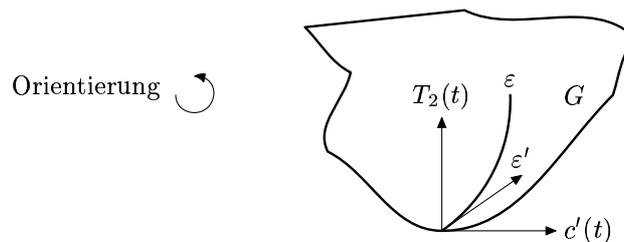


Abbildung 21.3: Eine positiv orientierte Randkurve

Wir hatten gesehen, dass der Flächeninhalt von $x(U)$ gegeben ist durch

$$\mathcal{A}(x(U)) = \iint_U dA = \iint_U |x_u \wedge x_v| \, dudv$$

und dass diese Größe unabhängig von der lokalen Parametrisierung x ist. Genau so zeigt man, dass für eine differenzierbare Funktion f auf $x(U)$ das Integral von f über G , also die Größe

$$I(f) := \iint_G f \, dA := \iint_V f(x(u, v)) \, dA$$

mit $G = x(V)$, unabhängig von der Parametrisierung ist.

Satz 2 (Gauß-Bonnet, lokale Version). *Es sei $x : U \rightarrow S$ eine lokale Parametrisierung einer regulären Fläche S durch geodätische Parallelkoordinaten. Weiter sei $G \subset x(U)$ ein einfaches, abgeschlossenes Gebiet mit Rand $\partial G = c(I)$ für eine*

positiv orientierte, einfach geschlossene, stückweise reguläre Kurve c . Die Kurve c sei mit Bogenlänge parametrisiert. Sind für $i = 1, \dots, k$, $c(t_i)$ die Ecken von c und δ_i die Aussenwinkel, so gilt

$$\iint_G K \, dA + \sum_{i=1}^{k+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa_g(t) \, dt + \sum_{i=1}^k \delta_i = 2\pi,$$

dabei ist κ_g die geodätische Krümmung der regulären Segmente von c und K ist die Gauß-Krümmung von S .

Bemerkung. Der Satz gilt auch ohne die Einschränkung, dass man geodätische Parallelkoordinaten als Parameter hat. Diese Voraussetzung erleichtert lediglich den Beweis.

Beweis von Satz 2. Da wir geodätische Parallelkoordinaten voraussetzen, gilt nach Abschnitt 19, Satz 6,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $dA = \sqrt{\det(g_{ij})} \, du^1 du^2 = \sqrt{g_{22}} \, du^1 du^2$. Weiter ist $T_1 := x_{u^1}$ ein Einheitsvektorfeld auf G . Längs der Randkurve c betrachten wir ein Parallelfeld $Y(t)$. Auf $I_i := [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k+1$, sei $\theta_i(t)$ der orientierte Winkel zwischen $Y(t)$ und $c'(t)$, $\varphi_i(t)$ der orientierte Winkel zwischen $T_1(t)$ und $Y(t)$, vgl. Abb. 21.4.

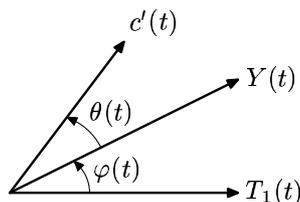


Abbildung 21.4:

Dann ist

$$\beta_i(t) = \theta_i(t) + \varphi_i(t), \quad t \in I_i$$

differenzierbar. Nach dem Umlaufsatz für Flächenkurven (Satz 1) und unserer Annahme über Orientierung und Durchlaufsinne ist die gesamte Tangendrehung von c' bezüglich T_1 gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{k+1} (\beta_i(t_i) - \beta_i(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \delta_i = 2\pi. \quad (21.1)$$

Das können wir auch schreiben als

$$2\pi = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{I_i} \beta_i'(t) \, dt + \sum_{i=1}^k \delta_i = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{I_i} (\theta_i'(t) + \varphi_i'(t)) \, dt + \sum_{i=1}^k \delta_i \quad (21.2)$$

Nach Lemma 5 aus Abschnitt 20.3 ist

$$\sum_{i=1}^{k+1} \int_{I_i} \theta'_i(t) dt = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{I_i} \kappa_g(t) dt. \quad (21.3)$$

Weiter ist nach Lemma 6 aus Abschnitt 20.3

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \int_{I_i} \varphi'_i(t) dt &= \sum_{i=1}^{k+1} \int_{I_i} (-\sqrt{g_{22}})_{,1} (u^2)' dt = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{u^2(I_i)} \left(-\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} \right) du^2 \\ &= \int_{x^{-1}(\partial G)} -\left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} \right) du^2 \stackrel{*}{=} \iint_{x^{-1}(G)} -\frac{\partial^2(\sqrt{g_{22}})}{(\partial u^1)^2} du^1 du^2 \\ &= \iint_{x^{-1}(G)} -\frac{(\sqrt{g_{22}})_{,11}}{\sqrt{g_{22}}} \sqrt{g_{22}} du^1 du^2 \\ &\stackrel{**}{=} \iint_{x^{-1}(G)} K \circ x^{-1} dA = \iint_G K dA \end{aligned} \quad (21.4)$$

In der Gleichung * wurde der Satz von Gauß-Green für Gebiete Ω der Ebene verwendet,

$$\int_{\partial \Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

mit $P = 0$ und $Q = -(\sqrt{g_{22}})_{,1}$. Gleichung ** gilt nach Satz 7 aus Abschnitt 19. Setzt man nun (21.3) und (21.4) in (21.2) ein, so folgt die Behauptung. \square

21.3 Folgerungen

(a) Wenn die Kurve c keine Ecken hat, so gilt

$$\iint_G K dA + \int_{\partial G} \kappa_g dt = 2\pi.$$

(b) Falls S die euklidische Ebene \mathbb{R}^2 ist, so ist $K = 0$ und $\kappa_g = \kappa^*$, die orientierte Krümmung. Satz 2 ist dann gerade der Umlaufsatz von Hopf für ebene Kurven (vgl. auch den Beweis von Satz 1).

(c) Es sei c ein *geodätisches Polygon*, d. h. die regulären Segmente von c sind Geodätische. Dann ist $\kappa_g = 0$ und es gilt

$$\iint_G K dA + \sum_{i=1}^k \delta_i = 2\pi.$$

Definiert man die *Innenwinkel* α_i an den Ecken $c(t_i)$ als $\alpha_i := \pi - \delta_i$, so gilt für ein geodätisches n -Eck

$$\iint_G K dA = 2\pi - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = \pi(2 - n) + \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Insbesondere gilt für ein geodätisches Dreieck Δ

$$\iint_{\Delta} K dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi.$$

(d) Wir betrachten ein geodätisches Dreieck Δ und spezialisieren die Gauß-Krümmung. Dann gilt für die Innenwinkelsumme von Δ

$$\alpha + \beta + \gamma \quad \left\{ \begin{array}{l} > \pi \\ = \pi \\ < \pi \end{array} \right\}, \quad \text{falls} \quad \left\{ \begin{array}{l} K > 0 \\ K = 0 \\ K < 0 \end{array} \right\}.$$

Beispielsweise ist $K = 1$ für die Einheitssphäre S^2 , $K = 0$ für die Ebene und $K = -1$ für die Pseudosphäre.

(e) Ist $K \leq 0$ im Gebiet G , so schneiden sich zwei mit Bogenlänge parametrisierte, voneinander verschiedene Geodätische in G höchstens einmal. Das kann man wie folgt einsehen. Angenommen die Geodätischen schneiden sich mehr als einmal. Dann entsteht (insbesondere) ein geodätisches 2-Eck (vgl. Abb. 21.5) für das gilt $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ (wieso?).

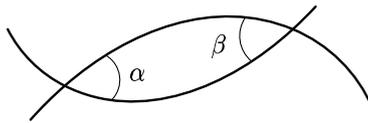


Abbildung 21.5: Geodätisches 2-Eck

Nach obiger Folgerung (b) aus dem Satz von Gauß-Bonnet ist aber

$$0 \geq \iint K dA = \alpha + \beta > 0,$$

ein Widerspruch!

22 Mannigfaltigkeiten (light)

22.1 Definition

Wir wollen im Folgenden den Begriff der regulären Fläche verallgemeinern. Bisher waren unsere Flächen stets Teilmengen von \mathbb{R}^3 . Das ist eine starke Einschränkung, denn geometrische Konfigurationen haben oft mehr als nur zwei Parameter. Ein Beispiel ist die Position eines Pendels mit $n > 2$ Gelenken, vgl. Abb. 22.1. Die Lage ist hier durch das n -Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0, 2\pi]^n$ gegeben. Andere geometrische Objekte wiederum sind gar nicht erst als Teilmengen eines \mathbb{R}^n gegeben, so zum Beispiel der n -dimensionale projektive Raum, den wir in 22.2 genauer betrachten. Das folgende Konzept hat sich im Laufe der Zeit herausgebildet (siehe Anhang C).

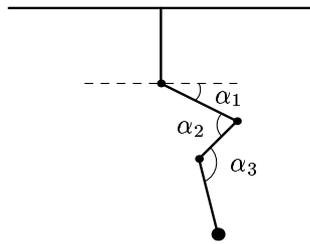


Abbildung 22.1: Ebenes Pendel mit 3 Gelenken

Definition 4. Eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum M , der lokal euklidisch ist. Genauer: Es gibt eine Menge von Paaren $\mathcal{A} := \{(M_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ von offenen Teilmengen $M_i \subset M$ und stetigen Abbildungen $\varphi_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Mengen M_i bilden eine Überdeckung von M , d. h.

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i.$$

(b) Für alle $i \in I$ ist $\varphi_i : M_i \rightarrow \varphi_i(M_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus.

Eine n -dimensionale, topologische Mannigfaltigkeit heißt differenzierbar, falls zusätzlich gilt

(c) Falls $M_i \cap M_j \neq \emptyset$, so ist $\varphi_i(M_i \cap M_j)$ offen in \mathbb{R}^n und der Kartenwechsel

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(M_i \cap M_j) \rightarrow \varphi_j(M_i \cap M_j)$$

ist differenzierbar, vgl. Abb. 22.2.

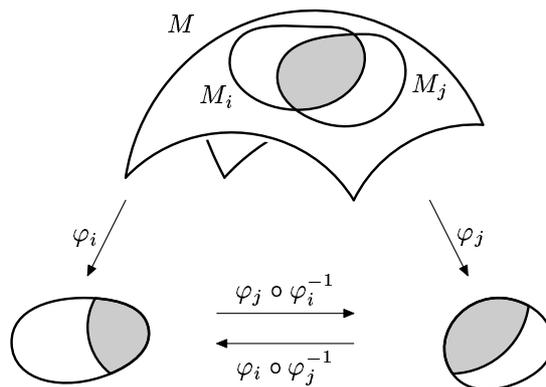


Abbildung 22.2: Kartenwechsel

Das Paar (M_i, φ_i) nennt man Karte von M und die Menge \mathcal{A} differenzierbarer Atlas für M . Ist \mathcal{A} ein maximaler differenzierbarer Atlas, so heißt \mathcal{A} eine differenzierbare Struktur auf M .

Bemerkungen (a) Nach dem Satz von der Gebietstreue (vgl. Anhang A) ist die Dimension n einer topologischen Mannigfaltigkeit wohldefiniert.

(b) Ein differenzierbarer Atlas \mathcal{A} für M induziert eine eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur auf M . Man erhält sie, indem man alle mit \mathcal{A} verträglichen Karten zu \mathcal{A} hinzufügt. Dabei heißt $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset M$ verträglich mit \mathcal{A} wenn ψ den Bedingungen (b) und (c) aus Definition 4 genügt.

(c) Eine differenzierbare Struktur \mathcal{A} auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M induziert eine Topologie auf M : eine Menge $O \subset M$ ist offen, falls für alle $(M_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$ die Menge $\varphi_i(M_i \cap O)$ offen in \mathbb{R}^n ist. Insbesondere sind die M_i offen.

(d) Hat man eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, so heißt f differenzierbar, wenn f die Bedingungen aus Definition 1 aus Abschnitt 10.1 erfüllt. Dabei sind die Begriffe reguläre Fläche durch differenzierbare Mannigfaltigkeit und lokale Parametrisierung durch Karte zu ersetzen, man vgl. dazu auch Abb. 22.3.

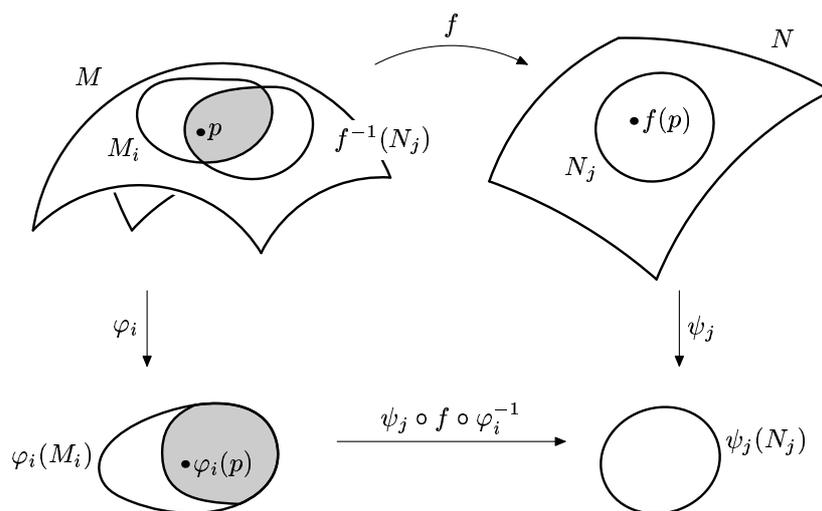


Abbildung 22.3: Darstellung einer differenzierbaren Abbildung in lokalen Koordinaten. f ist differenzierbar, wenn $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ differenzierbar ist.

(e) Für die Kartenwechsel kann man auch verlangen, dass sie anstatt C^∞ eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

stetig	topologische Mannigfaltigkeit
C^k	C^k -Mannigfaltigkeit
affin	affine Mannigfaltigkeit
holomorph	komplexe Mannigfaltigkeit

Die entsprechenden Objekte erhalten dann die Bezeichnung aus der zweiten Spalte.

Definition 5. Sei (M, \mathcal{A}) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. M heißt orientierbar, falls man aus \mathcal{A} einen Atlas auswählen kann, so dass die Funktionaldeterminanten aller Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ gleiches Vorzeichen haben.

Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit M in \mathbb{R}^3 , versehen mit der Teilraumtopologie ist genau dann orientierbar, wenn es ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld auf M gibt. Denn eine solche Mannigfaltigkeit ist ja nichts anderes als eine reguläre Fläche.

22.2 Beispiele

(a) 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Jede zusammenhängende 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu einem Intervall in \mathbb{R} oder zur Kreislinie S^1 (vgl. z.B. L. Führer, *Allgemeine Topologie*, Vieweg, 1977, Kap. 15.13).

(b) Reguläre Flächen. Wir betrachten eine reguläre Fläche S . Die Umkehrabbildungen lokaler Parametrisierungen bilden einen differenzierbaren Atlas für S . Die Karten sind hier so gewählt, dass die von der entsprechenden differenzierbaren Struktur induzierte Topologie gerade die Teilraumtopologie ist.

(c) Reguläre Flächenstücke. Wir betrachten eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine injektive Immersion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, d.h. f ist differenzierbar und die Tangentialabbildung df_p ist injektiv für alle $p \in U$. Dann ist $\{(f(U), f^{-1})\}$ ein differenzierbarer Atlas für $f(U)$. Der wesentliche Unterschied zwischen regulären Flächen und regulären Flächenstücken ist, dass reguläre Flächenstücke im Allgemeinen nicht die Teilraumtopologie tragen.

(d) Die reell projektive Ebene. Wir betrachten die Menge \mathbb{P}^2 der 1-dimensionalen Untervektorräume von \mathbb{R}^3 , also

$$\mathbb{P}^2 := \{[x] \mid x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0\}.$$

Definiert man auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation \sim durch

$$x \sim y : \iff x = \lambda y$$

mit einem $\lambda \neq 0$, so hat man eine bijektive Abbildung zwischen $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$ und \mathbb{P}^2 . Die entsprechende Quotienten-Topologie (siehe Anhang A) ist dann eine natürliche Topologie auf \mathbb{P}^2 . Schränkt man die obige Äquivalenzrelation auf S^2 ein, so werden genau die Antipodenpunkte identifiziert, d.h. \sim auf S^2 ist definiert durch

$$x \sim y : \iff x = \pm y.$$

Wir erhalten also $\mathbb{P}^2 \cong S^2/\sim$. Es sei V_3 die obere offene Hemisphäre von S^2 . Wir definieren $\rho_3 : V_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$. Dann ist ρ_3 injektiv und

$\rho_3(V_3)$ ist die offene Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ in \mathbb{R}^2 . Es sei nun $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ definiert durch $x \mapsto [x]$. Weiter sei $M_3 := \pi(V_3)$. Dann ist

$$\varphi_3 : M_3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad [x] \mapsto (\rho \circ (\pi|_{V_3})^{-1})([x])$$

injektiv und $\varphi_3(M_3) = B_1(0)$. Wir betrachten nun die offenen Hemisphären $V_1 := \{x \in S^2 \mid x_1 > 0\}$ und $V_2 := \{x \in S^2 \mid x_2 > 0\}$. Für diese konstruieren wir analoge Abbildungen $\varphi_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\varphi_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dabei ist $M_i := \pi(V_i)$. Die Definitionsbereiche dieser Abbildungen überdecken \mathbb{P}^2 und die Bilder dieser Abbildungen sind offen. Weiter ist $\{(M_i, \varphi_i) \mid i = 1, 2, 3\}$ ein differenzierbarer Atlas von \mathbb{P}^2 (Übung!), der seinerseits eine differenzierbare Struktur auf \mathbb{P}^2 induziert.

Übungsaufgabe: Ersetzt man die orthogonalen Projektionen durch passende stereographische Projektionen, so ergibt sich ein differenzierbarer Atlas für \mathbb{P}^2 , der die gleiche differenzierbare Struktur induziert.

23 Klassifikationssatz für kompakte 2-Mannigfaltigkeiten

23.1 Chirurgie

Aus gegebenen topologischen Räumen kann man durch “verkleben” neue konstruieren. Der anschauliche Begriff des Verklebens wird dabei durch eine Äquivalenzrelation präzisiert.

Wir wollen einen Spezialfall genauer beschreiben. Dazu sei X ein topologischer Raum und $\alpha : X \rightarrow X$ ein Homöomorphismus. Die Menge $X \times [0, 1]$ sei mit der Produkt-Topologie versehen. Auf dieser Menge definieren wir eine Äquivalenzrelation \sim durch $(x, 0) \sim (\alpha(x), 1)$ für $x \in X$ und $(x, t) \sim (x, t)$ für $x \in X$ und $0 < t < 1$. Die Menge der Äquivalenzklassen $(X \times [0, 1])/\alpha$ wird mit der Quotienten-Topologie versehen. Anschaulich werden gegenüberliegende Seiten des “Rechtecks” $X \times [0, 1]$ so verklebt, wie es der Homöomorphismus α angibt, vgl. Abb. 23.1.

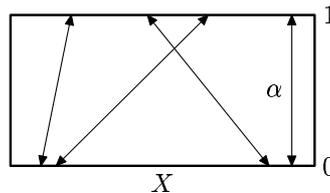


Abbildung 23.1: Selbstverkleben von $X \times [0, 1]$

Beispiele (a) (Zylinder) Wir betrachten $X = [-1, 1]$ und $\alpha(x) = x$. Wir verkleben also ein Paar sich gegenüberliegender Seiten. Genauer betrachten wir die Äquivalenzrelation \sim mit den Klassen

$$\{(x, 0), (x, 1) \mid x \in [-1, 1]\} \text{ und } \{(x, t) \mid x \in [-1, 1], t \in (0, 1)\}.$$

Dieser Quotientenraum wird schematisch wie in Abb. 23.2 dargestellt. Der entspre-

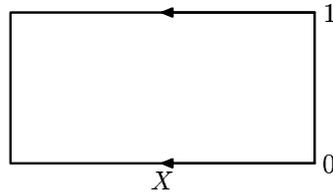


Abbildung 23.2: Die mit Pfeilen markierten Seiten werden verklebt.

chende Quotientenraum $(X \times [0, 1])/\alpha$ ist homöomorph zu einem Rotationszylinder (Übungsaufgabe!).

(b) (**Torus**) Wir betrachten das Einheitsquadrat $Q = [0, 1]^2$. Wir verkleben gegenüberliegende Ränder dieses Quadrats, vgl. Abb. 23.3, d.h. wir verkleben zuerst

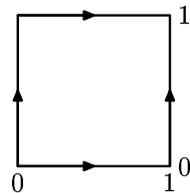


Abbildung 23.3: Selbstverkleben des Einheitsquadrats zum Torus

etwa die obere und untere Kante (der Zylinder entsteht), und danach die vertikalen Kanten, die jetzt Kreise sind. Übung: Man zeige, dass Rotationstorus und das wie oben verklebte Einheitsquadrat homöomorph sind.

(c) (**Möbiusband**) Das Möbiusband entsteht, indem man ein Rechteck wie in Abb. 23.4 verklebt. Die Pfeile in entgegengesetzter Richtung deuten dabei an, dass

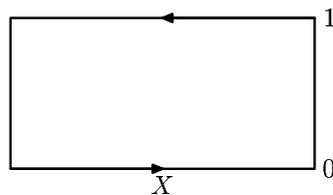


Abbildung 23.4: Möbiusband

die Seiten so zu identifizieren sind, dass beim Verkleben die Pfeile wieder in die gleiche Richtung zeigen. Formal haben wir $X = [-1, 1]$ und $\alpha(x) = -x$.

(d) (**Klein'sche Flasche**). Die Klein'sche Flasche entsteht aus einem Rechteck durch Verkleben wie in Abbildung 23.5.

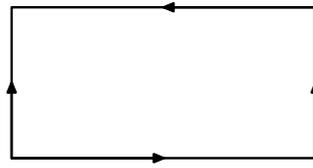


Abbildung 23.5: Die Klein'sche Flasche

Es seien X und Y topologische Räume, $X_0 \subset X$ ein Teilraum und $\varphi : X_0 \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Es bezeichne $Y \cup_{\varphi} X$ den Quotientenraum $X + Y / \sim$ nach der von $x \sim \varphi(x)$ für alle $x \in X_0$ erzeugten Äquivalenzrelation auf der topologischen Summe $X + Y$. Man sagt dann, $Y \cup_{\varphi} X$ entstehe durch *Anheften* von X an Y mittels der *Anheftungsabbildung* φ (oder auch: $Y \cup_{\varphi} X$ entsteht aus $X + Y$ durch Identifizieren der Punkte $x \in X_0$ mit ihren Bildpunkten $\varphi(x) \in Y$).

Beispiele (a) Verkleben von 2 Henkeln. Wir betrachten zunächst einen Torus und stanzen eine offene Kreisscheibe aus. Wir erhalten einen topologischen Raum, der als *Henkel* bezeichnet wird. Haben wir nun zwei Kopien solcher Henkel, so ver-

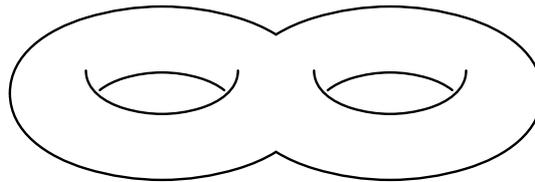


Abbildung 23.6: Verkleben von zwei Henkeln

kleben wir entsprechende Punkte der Randkreise (es ist also $\varphi = \text{id}$). Das Ergebnis ist der in Abb. 23.6 dargestellte Raum.

(b) Sphäre mit Henkel. Stanzt man aus einer Sphäre eine offene Kreisscheibe aus, so kann man längs des Randkreises einen Henkel anheften, vgl. Abb. 23.7. Eine Sphäre mit einem Henkel ist homöomorph zu einem Torus. Diesen Prozess kann man wiederholen und so mehrere Henkel an eine Sphäre anheften.

(c) Die projektive Ebene. Wir betrachten nochmals die projektive Ebene \mathbb{P}^2 . Wir wollen hier skizzieren, wie man \mathbb{P}^2 erhält, wenn man ein Möbiusband und eine abgeschlossene Kreisscheibe auf bestimmte Art miteinander verklebt. Es sei S die obere abgeschlossene Hemisphäre von S^2 . Man erhält daraus \mathbb{P}^2 als topologischen Raum, wenn man gegenüberliegende Punkte auf der Einheitskreislinie (Äquator) verklebt. Dieser Quotientenraum ist aber homöomorph zu einer abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, auf der gegenüberliegende Randpunkte verklebt werden. Man muss dazu die obere Hemisphäre lediglich "flachdrücken". Wir wollen diesen Faktorraum (vgl. Abb. 23.8 links) auf eine andere Art konstruieren. Wir betrachten die Einheitskreisscheibe D und zerschneiden/verkleben diese wie in Abb. 23.8 rechts. Die beiden Räume in Abb. 23.8 sind dann homöomorph. Wir deformieren nun die

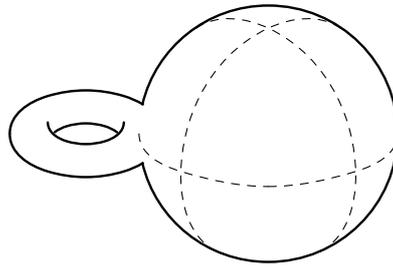


Abbildung 23.7: Sphäre mit Henkel

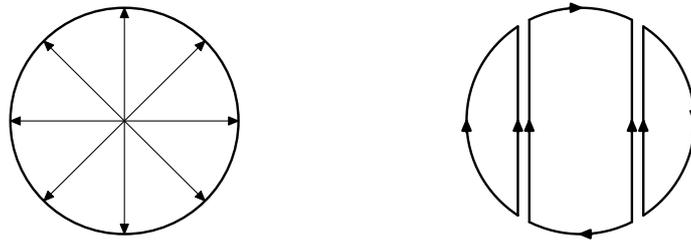


Abbildung 23.8: Verkleben der projektiven Ebene I

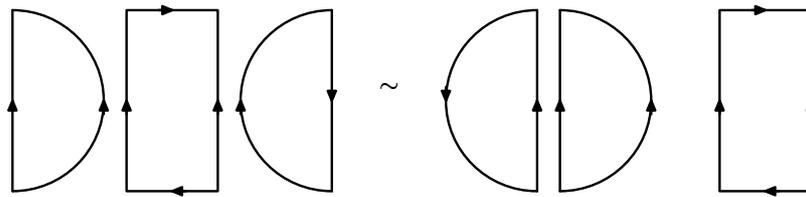


Abbildung 23.9: Verkleben der projektiven Ebene II

äusseren Teile der zerschnittenen Kreisscheibe wie in Abb. 23.9 links. Dann verkleben wir zuerst das Rechteck zum Möbiusband und die beiden übrigen Teile zu einer Kreisscheibe. Schließlich erhalten wir \mathbb{P}^2 , indem wir die Kreisscheibe an das Möbiusband anheften.

(d) **Die Klein'sche Flasche.** Die Klein'sche Flasche entsteht durch Verkleben von zwei Möbiusbändern (vgl. K. Jänich, Topologie, S.60).

23.2 Der Klassifikationsatz

Unter einer *2-Mannigfaltigkeit* verstehen wir hier eine 2-dimensionale, zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit. Die *kompakten* 2-Mannigfaltigkeiten kann man vollständig auflisten. Einen Beweis des folgenden Satzes findet man z.B. im Buch von Ossa, Kap. 3.8.

Satz 3 (Klassifikationssatz). *Es sei M eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

- (a) *Ist M orientierbar, so gibt es ein $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass M homöomorph zu einer 2-Sphäre mit g Henkeln ist.*
- (b) *Ist M nicht orientierbar, so gibt es ein $g \in \mathbb{N}$, so dass M homöomorph zu einer 2-Sphäre mit $g \geq 1$ aufgesetzten Möbiusbändern ist.*

Die Zahl g heißt Geschlecht von M . Zwei kompakte 2-Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn sie vom gleichen Geschlecht und beide orientierbar (bzw. nicht orientierbar) sind.

Beispiele (a) Die Sphäre S^2 ist orientierbar und hat Geschlecht $g = 0$. Der Torus ist ebenfalls orientierbar und hat Geschlecht $g = 1$.

(b) Die projektive Ebene ist nicht orientierbar und vom Geschlecht $g = 1$. Die Klein'sche Flasche ist nicht orientierbar und vom Geschlecht $g = 2$.

24 Satz von Gauß-Bonnet (Globale Version)

24.1 Triangulierungen

Wir benötigen hier einige Begriffe und Sätze aus der algebraischen Topologie, die wir ohne Beweise angeben. Sei Δ das Standard 2-Simplex, also $\Delta := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ und } 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$.

Definition 6. *Es sei M eine kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit. Eine Triangulierung von M ist eine endliche Familie*

$$\sigma_k : \Delta \rightarrow \sigma_k(\Delta) \subset M \quad (k = 1, \dots, n)$$

von Orientierungserhaltenden Diffeomorphismen σ_k (d.h. σ_k hat positive Funktionaldeterminante), für die gilt:

- (a) *Die Simplices (oder Dreiecke) $\sigma_k(\Delta)$ bilden eine Überdeckung von M ,*

$$M = \bigcup_{k=1}^n \sigma_k(\Delta).$$

- (b) *Ist $\sigma_k(\Delta) \cap \sigma_j(\Delta) \neq \emptyset$, dann haben $\sigma_k(\Delta)$ und $\sigma_j(\Delta)$ entweder genau eine Kante oder genau eine Ecke gemeinsam.*

Satz 4. *Jede kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit M mit gegebenem Atlas \mathcal{A} besitzt eine Triangulierung $\sigma_k : \Delta \rightarrow M$ ($k = 1, \dots, n$), so dass jedes Simplex $\sigma_k(\Delta)$ ganz im Definitionsbereich einer Karte von \mathcal{A} enthalten ist.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. in J. Munkres, *Elementary differential topology*, Princeton, 1966.

Definition 7. Die Euler-Poincaré Charakteristik einer Triangulierung T von M ist definiert als

$$\chi(M, T) := \#Ecken - \#Kanten + \#Flächen,$$

(dabei steht $\#$ für "Anzahl").

Satz 5. Die Euler-Poincaré Charakteristik einer kompakten, orientierbaren 2-Mannigfaltigkeit M ist unabhängig von der Triangulierung T , und es gilt

$$\chi(M) = 2 - 2g,$$

wobei g das Geschlecht von M ist.

Aus Satz 3 und Satz 5 folgt

Korollar 1. Die Euler Charakteristik $\chi(M)$ ist eine topologische Invariante und zwei kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 sind genau dann homöomorph, wenn $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ gilt. \square

Beispiele (a) Wir betrachten die Sphäre S^2 . Der Sphäre sei ein Tetraeder einbeschrieben, vgl. Abb. 24.1. Man "projiziert" die Seiten dieses Tetraeders auf S^2 und

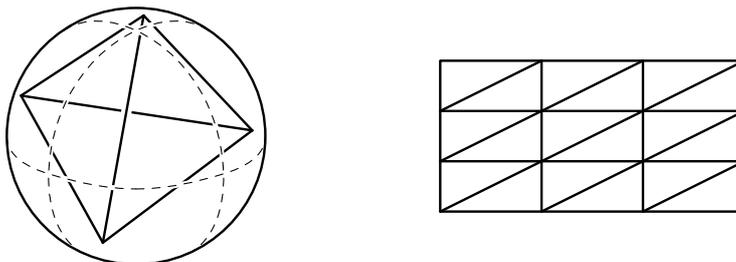


Abbildung 24.1: Triangulierungen von S^2 und T^2

erhält dadurch eine Triangulierung. Es ergibt sich damit $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$.

(b) Es sei T^2 der Torus. Durch die wie in Abb. 24.1 angedeutete Triangulierung des Rechtecks erhält man eine Triangulierung von T^2 . Es gilt also $\chi(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0$. Entfernt man aus dieser Triangulierung eine Fläche, so erhält man eine Triangulierung eines Henkels. Die Euler-Poincaré Charakteristik eines Henkels ist also $\chi(T^2) - 1 = -1$.

24.2 Der Satz von Gauß-Bonnet

Wir können nun eine globale Version des Satzes von Gauß-Bonnet formulieren.

Satz 6 (Gauß-Bonnet, globale Version). Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$\iint_M K \, dA = 2\pi\chi(M).$$

Bemerkungen (a) Der Satz gilt allgemeiner für jede kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit M mit einer Riemannschen Metrik (M braucht also nicht unbedingt als Teilmenge von \mathbb{R}^3 gegeben zu sein). Dazu muss man aber alle Begriffe wie Krümmung, Parallelverschiebung, Flächeninhalt usw. zuerst entsprechen verallgemeinern (vgl. dazu die Vorlesung “Riemannschen Geometrie”).

(b) Ist M eine kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit, die homöomorph zu S^2 ist, so gilt stets

$$\iint_M K dA = 4\pi.$$

(c) Ist M eine kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit mit $K > 0$, so ist M homöomorph zu S^2 . Aus dem Satz von Gauß-Bonnet und Satz 5 folgt nämlich

$$2 - 2g = \chi(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_M K dA > 0,$$

also $g = 0$. Nach dem Klassifikationssatz ist dann M homöomorph zu S^2 .

Beweisskizze zu Satz 6: Wir wählen eine Triangulierung $\sigma_j : \Delta \rightarrow M$, ($j = 1, \dots, f$) von M , so dass jedes Dreieck $\sigma_j(\Delta)$ ganz in einem Parallelkoordinaten-Gebiet liegt. Wir orientieren die Dreiecke so, dass ihre Orientierung mit derjenigen der Mannigfaltigkeit M übereinstimmt. Es bezeichne e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen dieser Triangulierung. Nach dem lokalen Satz von Gauß-Bonnet gilt für $j = 1, \dots, f$

$$\iint_{\sigma_j(\Delta)} K dA = - \int_{\partial(\sigma_j(\Delta))} \kappa_g dt + \sum_{i=1}^3 \alpha_i^{(j)} - \pi.$$

Wir summieren nun über alle j und erhalten

$$\iint_M K dA = \sum_{j=1}^f \iint_{\sigma_j(\Delta)} K dA = - \sum_{j=1}^f \int_{\partial(\sigma_j(\Delta))} \kappa_g dt + e2\pi - f\pi.$$

Jede Kante erscheint in dieser Summe 2 mal, aber gegenläufig orientiert (so dass sich das Vorzeichen der geodätischen Krümmung jeweils umkehrt, vgl. Definition 10 in 20.3). Damit ergibt sich

$$\iint_M K dA = e2\pi - f\pi.$$

Jede Dreiecksfläche hat 3 Kanten und jede Kante berandet genau 2 Flächen, also ist $3f = 2k$. Somit folgt schließlich

$$\iint_M K dA = 2\pi e - f\pi = 2\pi(e - \frac{3}{2}f + f) = 2\pi(e - k + f) = 2\pi\chi(M).$$

□

Anhang

A Einige Grundbegriffe der Topologie

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{T}) bestehend aus einer Menge X und einem System \mathcal{T} von Teilmengen von X , so dass gilt:

- (1) X und \emptyset sind in \mathcal{T} ,
- (2) der Durchschnitt von endlich vielen und die Vereinigung von beliebig vielen Mengen aus \mathcal{T} ist wieder in \mathcal{T} .

Das Teilmengensystem \mathcal{T} nennt man eine **Topologie von X** . Die Elemente von \mathcal{T} heißen **offene Teilmengen von X** . Eine Menge $A \subset X$ ist **abgeschlossen in X** genau dann, wenn ihr Komplement offen ist.

Eine **Basis** von \mathcal{T} ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so dass für jede offene Menge $V \in \mathcal{T}$ gilt $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{B}$.

Übung: \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n haben eine abzählbare Basis.

Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **Umgebung von $x \in X$** , wenn es eine offene Menge V gibt mit $x \in V \subset U$. Ein topologischer Raum erfüllt das **Hausdorffsche Trennungsaxiom** oder ist **hausdorffsch**, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten disjunkte, offene Umgebungen existieren.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes ist selbst wieder ein topologischer Raum versehen mit der **Teilraum-Topologie**: Eine Menge $U \subseteq Y$ ist offen genau dann, wenn es eine offene Menge V von X gibt mit $V \cap Y = U$.

Übung: Sei X hausdorffsch mit abzählbarer Basis. Dann ist jeder Teilraum $Y \subset X$ auch hausdorffsch mit abzählbarer Basis.

Die **topologische Summe** von zwei topologischen Räumen X und Y ist die disjunkte Vereinigung $X + Y$ versehen mit der Topologie $\{U + V \mid U \text{ offen in } X, V \text{ offen in } Y\}$.

Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, $f : X \rightarrow Y$, heißt **stetig**, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen sind in X . Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **offen**, falls Bilder von offenen Mengen in X offen sind in Y . Eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$, für die sowohl f als auch ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig sind, heißt **Homöomorphismus**.

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) , bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- (1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ein metrischer Raum (X, d) ist auch ein topologischer Raum. Die Topologie wird wie folgt konstruiert: eine Menge $O \subset X$ ist offen, falls für alle $p \in O$ ein

$\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ existiert, so dass der Ball um p mit Radius ε ganz in O enthalten ist: $B_\varepsilon(p) := \{q \in X \mid d(p, q) < \varepsilon\} \subset O$.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes heißt **kompakt**, wenn jede Überdeckung von Y durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält: If $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$, then there are $i_1, \dots, i_n \in I$ such that $Y = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$.

Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen zerlegen lässt (oder, äquivalent, wenn X und \emptyset die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind).

Übung: Stetige Bilder von kompakten Mengen sind kompakt. Stetige Bilder von zusammenhängenden Mengen sind zusammenhängend.

Seien X und Y topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ heißt **offen in der Produkt-Topologie**, wenn es zu jedem Punkt $(x, y) \in W$ Umgebungen U von x in X und V von y in Y gibt, so dass $U \times V \subseteq W$.

Sei X ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Wir bezeichnen mit $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x . Weiter bezeichne X/\sim die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \rightarrow X/\sim; x \mapsto [x]$ die natürliche Projektion. Die **Quotienten-Topologie auf X/\sim** ist so definiert: $U \subset X/\sim$ ist offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen ist in X (π ist dann stetig).

Satz von der Gebietstreue: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive und stetige Abbildung, so ist $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ auch offen.

Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. im Buch von Alexandroff und Hopf, Kap. X.2., oder im Buch von Ossa, Kap. 5.6.

Korollar Für $m \neq n$ ist \mathbb{R}^m nicht homöomorph zu \mathbb{R}^n .

Beweis-Skizze. Ist etwa $m < n$ so ist $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$ eine injektive, stetige Abbildung von \mathbb{R}^m auf eine nicht offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Wäre nun \mathbb{R}^n homöomorph zu \mathbb{R}^m , so ergibt sich ein Widerspruch zum Satz von der Gebietstreue. \square

Literaturhinweise

- P. Alexandroff, H. Hopf, *Topologie I*, Springer Verlag, 1935.
- K. Jänich, *Topologie*, Springer, 1994.
- E. Ossa, *Topologie*, Vieweg, 1992.
- I.M. Singer, J. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer, 1967.

B Fragen zur Lernkontrolle

1. Kurven: Was ist eine parametrisierte Kurve? Wie ist ein Tangentialvektor an eine Kurve definiert? Beispiel? Gegenbeispiel? Was heißt und wozu braucht man den Begriff “regulär” im Zusammenhang mit Kurven? Wieso ist die Länge einer Kurve ein geometrischer Begriff? Was charakterisiert die Bogenlänge als Parameter? Welche Kurven kann man immer mit Bogenlänge parametrisieren? Welche ebenen Kurven haben konstante Krümmung? Wie lauten die Ableitungsgleichungen von Frenet für ebene Kurven bzw. für Raumkurven? Was besagt der Hauptsatz der (lokalen) Kurventheorie für Raumkurven? Was ist die zentrale Idee des Beweises? Wieviel Differenzierbarkeit muss man voraussetzen? Was versteht man unter Hauptnormale, Binormale und Schmiegebene? Wie ist die Torsion definiert? Gibt es Raumkurven mit konstanter Krümmung und beliebig vorgegebener Torsion? Beispiel einer Kurve mit Krümmung 4 und Torsion 10? Was besagt der Umlaufsatz von Hopf?

2. Flächen: Was ist eine reguläre Fläche(=rF) in \mathbf{R}^3 ? Was versteht man unter einer lokalen Parametrisierung einer rF? Wie sind Tangentialebenen und Tangentialvektoren von rF definiert? Wann ist die Niveaumenge $f^{-1}(a)$ einer Funktion eine rF? Beweis? Was ist die erste Fundamentalform einer rF? Wie verhält sich die erste Fundamentalform unter Koordinatentransformationen?

3. Krümmung: Was versteht man unter der Gauß- bzw. der Weingarten-Abbildung? Beispiele? Was für eine wichtige (linear-algebraische) Eigenschaft hat die Weingarten-Abbildung? Wie ist die 2. Fundamentalform definiert und wie kann man sie geometrisch interpretieren? Definition der Gauß-Krümmung und der mittleren Krümmung? Was ist der Zusammenhang dieser Größen mit der Normalkrümmung und den Hauptkrümmungen? Wie lauten die Formeln für H und K ? Wie nennt man rF mit $H = 0$ und was ist die geometrische Interpretation davon?

4. Innere Geometrie: Was ist eine Isometrie (lokal, global) von rF? Beispiele? Gegenbeispiele? Wie berechnet man den Flächeninhalt einer rF? Was sind Christoffel-Symbole? Was besagt das “theorema egregium”? Wie ist die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes auf einer rF in eine gegebene Richtung definiert? Beispiele für Größen der inneren Geometrie? Ist die kovariante Ableitung eine solche Größe? Wie findet man die Formel dafür? Was ist die kovariante Ableitung in der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 ? Was ist eine Geodätische? Weitere Charakterisierungen von Geos? Wie lauten die Differentialgleichungen für Geodätische und wie leitet man sie her? Was besagt der Satz über die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen? Beispiele von Geos auf Rotationsflächen? Wie lautet der Satz von Clairaut? Was ist der Zusammenhang zwischen Geodätischen und kürzesten Verbindungskurven auf rF? Beweisidee? Was sind geodätische Parallelkoordinaten? Was sind Fermi-Koordinaten? Wie sieht die 1. Fundamentalform in solchen Koordinaten aus? Wie lautet die Formel für die Gauß-Krümmung in geodätischen Parallelkoor-

dinaten? Was ist ein paralleles Vektorfeld? Wie ist die Parallelverschiebung längs einer Kurve definiert und was hat sie für eine wichtige Eigenschaft? Was versteht man unter der geodätischen Krümmung einer Flächenkurve? Besteht ein Zusammenhang zwischen der geodätischen Krümmung und der Parallelverschiebung? Was hat die geodätische Krümmung mit Geodätischen zu tun?

5. Satz von Gauß-Bonnet: Was versteht man unter der Orientierung einer rF bzw. allgemeiner einer 2-Mannigfaltigkeit? Was ist eine differenzierbare 2-Mannigfaltigkeit? Was versteht man unter dem Geschlecht und der Euler-Charakteristik einer kompakten, orientierbaren 2-Mannigfaltigkeit? Klassifikationssatz? Wie lautet die lokale und wie die globale Version des Satzes von Gauß-Bonnet und was sind die Beweisideen? Anwendungen (z.B. auf geodätische Dreiecke in Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung)?

C Historische Anmerkungen

Kurven und Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum gehören zu den klassischen Gegenständen der Geometrie. Die Methoden der analytischen Geometrie und der Differentialrechnung wurden seit ihrer Erfindung systematisch auch zur Untersuchung von Kurven und Flächen eingesetzt (u.a. im 18. Jahrhundert von L. Euler). Erst um 1827 jedoch hat Carl-Friedrich Gauß (1777-1855) die Differentialgeometrie grundlegend verändert und durch seine Entdeckungen den Weg zum abstrakten und fundamentalen Konzept einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit aufgezeigt. In seinem berühmten “theorema egregium” hat Gauß nachgewiesen, dass es ein Maß für die Krümmung einer Fläche gibt (heute als Gauß-Krümmung bezeichnet), das nur von der Möglichkeit einer Längenmessung von Kurven auf der Fläche abhängig ist (1. Fundamentalform). Durch diese Entdeckung einer “intrinsischen” oder “inneren” Geometrie (also unabhängig von der Gestalt der Fläche im umgebenden Raum) wurde das abstrakte Konzept einer 2-Mannigfaltigkeit denkbar, auf der eine beliebige Längenmessung vorgegeben ist.

Weiter gefördert wurden solche Vorstellungen durch die Entdeckung von nicht-euklidischen Geometrien durch Janos Bolyai (1802-1860) und unabhängig von Nikolai Iwanowitsch Lobachefskij (1793-1856) um 1830. In einer nicht-euklidischen (d.h. elliptischen oder hyperbolischen) Geometrie gelten alle “Postulate” von Euklid ausser dem Parallelenaxiom. Letzteres besagt, dass es durch einen Punkt p , welcher nicht auf einer Geraden L liegt, genau eine zu L parallele Gerade gibt. Die Möglichkeit von widerspruchsfreien Geometrien, in denen das Parallelenaxiom nicht gilt, war auch Gauß bekannt. Er hat seine Einsichten jedoch nicht veröffentlicht (wohl um Konflikte philosophischer Art zu vermeiden).

Der entscheidende Paradigmenwechsel gelang schließlich Bernhard Riemann (1826-1866). In seinem Habilitationsvortrag in Göttingen im Jahre 1854 führte er den Begriff einer “Mannigfaltigkeit” ein als einer “mehrfach ausgedehnten Größe”, die lokal so “aussieht” wie \mathbb{R}^n . Er machte klar, wie in einem solchen Raum viele verschiedene Längenmessungen definiert werden können (heute sogenannte Riemannsche Metriken). Damit hat er insbesondere topologische (d.h. nur von der gegebenen Mannigfaltigkeit abhängige) und metrische (d.h. durch die gewählte Längenmessung bestimmte) Eigenschaften klar unterschieden. Weiter zeigte er, dass sich sowohl die euklidische Geometrie als auch die nicht-euklidischen Geometrien als Spezialfälle von Riemannschen Geometrien auffassen lassen.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts haben zahlreiche weitere wichtige Entwicklungen stattgefunden. Vom Standpunkt der modernen Differentialgeometrie und der Theorie der Mannigfaltigkeiten aus gesehen besonders bedeutend ist das monumentale Werk von Henri Poincaré (1854-1912). Verschiedene Konzepte, die er einführte und Fragen, die er stellte, waren richtungweisend für die Weiterentwicklung dieses Gebietes im 20. Jahrhundert. So benutzte er z.B. (Homotopie-)Gruppen, um topologische Invarianten von Mannigfaltigkeiten zu bestimmen und unterstrich die Bedeutung von Mannigfaltigkeiten im Studium von dynamischen Systemen. Die berühmte Poincaré-Vermutung besagt, dass eine geschlossene, einfach zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit homöomorph zu einer 3-Sphäre ist.

Für die Lösung dieses Problems wurde im Jahr 2000 ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt (vgl. www.claymath.org/millennium). Momentan (Februar 2004) diskutieren Experten gerade über die Vollständigkeit eines schwierigen, von Grisha Perelman vorgelegten "Beweises".

Von besonderer Bedeutung für die weitere Entwicklung des Mannigfaltigkeitsbegriffs und die Mathematik des 20. Jahrhunderts insgesamt war die Entstehung der Theorie der Lie-Gruppen (das sind Gruppen, die gleichzeitig auch Mannigfaltigkeiten sind). Nach deren Einführung durch Sophus Lie (1842-1899) gegen Ende des 19. Jahrhunderts haben vor allem Elie Cartan (1869-1951) und Hermann Weyl (1885-1955) wichtige Beiträge geleistet. Lie-Gruppen bilden heute einen zentralen Gegenstand mathematischer Forschung. Schon in seinem Erlanger Programm von 1878 hatte Felix Klein (1849-1925) den engen Zusammenhang zwischen Gruppentheorie und Geometrie betont (via Symmetrien). Alle diese Beiträge führten zusammen mit dem Entstehen der Topologie zu einer zunehmenden Klärung der Begriffe, so dass die Theorie der Mannigfaltigkeiten heute hochentwickelt und für weite Bereiche der Mathematik und der Physik fundamental ist (z.B. Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie, Relativitätstheorie, Quanten(feld)theorie, Analysis, Lie-Gruppen, algebraische Geometrie).

Literaturauswahl:

- P. Dombrowski, *150 years after Gauß*, Asterisque, **62**, Soc. Math. de France, 1979.
- H. Meschkowski, *Mathematiker-Lexikon*, Bibl. Inst. Mannheim, 1980.
- E. Scholz, *Die Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, 1980.
- M. Spivak, *How to read Gauß*, Kapitel 3A in: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Bd. II.
- M. Spivak, *What did Riemann say?*, Kapitel 4B in: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Bd. II.

D Literatúrauswahl

- **M. Berger, B. Gostiaux**, *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*, Graduate texts in Mathematics 115, Springer Verlag, 1978.

Die Vorlesungen "Differentialgeometrie" und "Riemannsche Geometrie" führen von speziellen zu allgemeinen Konzepten. Das Buch von Berger beschreibt den umgekehrten Weg. Es beginnt mit Mannigfaltigkeiten und behandelt Kurven und Flächen dann als spezielle Beispiele von solchen.

- **W. Blaschke, K. Leichtweiß**, *Elementare Differentialgeometrie*, Springer Verlag, 1973

Enthält viele Themen, die moderne Differentialgeometrie-Lehrbücher eher vernachlässigen (z.B. isoperimetrische Ungleichungen). Eine Fundgrube für viele Beispiele von speziellen Klassen von Kurven und Flächen. Trotz des Titels geht das Buch weit über den Stoff der Vorlesung hinaus.

- **M. do Carmo**, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg Studium, Aufbaukurs Mathematik, 3. Aufl. 1993.

Ebenfalls ein Buch, dessen Inhalt dem Stoff der Vorlesung entspricht. Wie auch in der Vorlesung wird vor allem Wert auf die geometrischen Ideen und weniger auf den Formalismus gelegt.

- **J. Casey**, *Exploring curvature*, Vieweg Verlag, 1996.

Ein sehr originelles Buch! Beschrieben sind u.a. einfache Experimente durch die die intrinsische Geometrie von Flächen (Krümmung, PV, Geos etc.) anhand von physikalischen Gegenständen (z.B. Kartoffeln oder Wassermelonen) erforscht werden kann.

- **A. Gray**, *Differentialgeometrie*, Spektrum Verlag, 1994

Differentialgeometrie mit "Mathematica".

- **W. Kühnel**, *Differentialgeometrie, Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*, Vieweg Studium, Aufbaukurs Mathematik, 1999.

Eine Spezialität dieses Textes: neben Kurven und Flächen im Euklidischen Raum werden auch solche im Minkowski-Raum (der grundlegend ist für die spezielle Relativitätstheorie) behandelt. Außerdem hat das Buch zwei Teile: der 1. Teil entspricht der Vorlesung Differentialgeometrie während der 2. Teil die Riemannsche Geometrie behandelt.

- **W. Klingenberg**, *A Course in Differential Geometry*, Graduate texts in Mathematics 51, Springer Verlag, 1978.

Die Übersetzung eines Klassikers! (in Deutsch wohl nur noch antiquarisch erhältlich als Heidelberger Taschenbuch). In relativ knapper, aber sehr präziser Form werden neben dem Stoff der Vorlesung auch gleich noch Konzepte der Riemannsche Geometrie behandelt. Besonders interessant sind die vielen Anmerkungen. Klingenberg (geb. 1924) ist ebenso wie Berger (geb. 1927) ein einflussreicher Differentialgeometer des 20. Jahrhunderts.

- **H. Reckziegel, M. Kriener, K. Pawel**, *Elementare Differentialgeometrie mit Maple*, Vieweg Verlag, 1998.

Die Autoren entwickeln die Begriffe und Resultate der Differentialgeometrie im Wechsel mit Maple-Programmpaketen. Die zahlreichen so erstellten Graphiken vertiefen das Verständnis der Theorie. Etwas weniger benutzerfreundlich als das Buch von Gray.

- **M. Spivak**, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 2 und vol 3., Publish or perish, 1998.

Spivak wollte um 1970 "Das Große Buch der Differentialgeometrie" schreiben. Obwohl es 5 dicke Bände umfasst, ist es unvollständig geblieben. Der 1. Band behandelt Mannigfaltigkeiten. Der 2. Band enthält (u.a.) historische Teile (z.B. ein Kapitel "How to read Gauss"). Fünf Bücher für Leser mit viel Zeit (man wird allerdings auch belohnt). Das Besondere bei Spivak: es wird viel motiviert (was in der mathematischen Literatur leider eher selten ist).

Index

- Aussenwinkel, 92
- begleitendes 2-Bein, 11
- Bewegung, 1
- Binormale, 14
- Bogenlänge, 7
- Bogenlängeparameter, 7
- Christoffel-Symbole, 65
- Darboux-Bein, 64
- Differential, 23
- differenzierbare Struktur, 99
- differenzierbarer Atlas, 99
- differenzierbares Vektorfeld, 67
- Drehflächen, 33
- Ecke, 92
- Einheitsnormalenvektor, 41
- erste Variation des Flächenfunktional, 57
- erste Variation des Längenfunktional, 74
- euklidische Isometrie, 1
- euklidischer Vektorraum, 1
- Euler-Poincaré Charakteristik, 106
- Fermi-Koordinaten, 79
- Fläche
 - orientierbare, 41
 - reguläre, 24
- Flächenelement, 56
- Flächeninhalt, 56
- Flächenkurve
 - einfach geschlossene, 92
- Frenet-Bein, 14
- Frenet-Kurven, 17
- Fundamentalform
 - erste, 34
 - zweite, 44
- Gauß-Abbildung, 42
- Gauß-Formel, 66
- Gauß-Krümmung, 51
- Gebiet
 - einfaches, 95
- Geodätische, 69
- geodätische Krümmung, 87
- Geodätische Parallelkoordinaten, 79
- geodätische Polarkoordinaten, 83
- geodätisches Polygon, 97
- Geschlecht, 106
- Graph einer Funktion, 29
- Hauptkrümmungen, 50
- Hauptkrümmungsrichtungen, 50
- Hauptnormale, 14
- Helikoid, 58
- Helix, 4
- Immersion, 101
- Isometrie
 - euklidische, 1
 - zwischen Flächen, 62
- Karte, 25, 99
- Katenoid, 58
- Kegel
 - allgemeiner, 62
- Kettenlinie, 58
- Koordinaten, 25
- kovariante Ableitung, 68
- Krümmung
 - einer Kurve, 9
 - Gauß-, 51
 - mittlere, 51
 - orientierte, 10
- Kurve
 - ebene, 3
 - parametrisierte, 3
 - reguläre, 7
- Länge einer Kurve, 4
- Längenfunktional, 74
- Logarithmische Spirale, 5
- lokal isometrisch, 62

lokales Koordinatensystem, 25
 Mannigfaltigkeit
 differenzierbare, 99
 n-dimensionale, 98
 orientierbare, 101
 topologische, 98
 Minimalfläche, 58
 mittlere Krümmung, 51

 normale Variation, 57
 Normalenvektor, 10
 Normalschnittkrümmung, 48

 orientierte Winkel, 87
 Orientierung einer Fläche, 41

 paralleles Vektorfeld, 83
 Parallelverschiebung, 85
 Parameterlinien, 24
 Parametertransformation, 6
 Parametrisierung, 25
 Peano-Kurve, 2
 Pseudo-Sphäre, 56

 Raumkurve, 3
 Regelfläche, 58
 Relation von Clairaut, 73
 Rotationsflächen, 33

 Satz von Gauß-Bonnet
 global, 107
 lokal, 96
 Schleppkurve, 56
 Schmiegebene, 14
 Schraubenlinie, 4
 stereographische Projektion, 31

 Tangente, 4
 Tangentialabbildung, 23
 Tangentialbündel, 40
 Tangentialebene
 einer Fläche, 26
 Tangentialraum, 3
 Tangentialvektor, 14
 an eine Fläche, 26
 an eine Kurve, 4
 theorema egregium, 66
 Torsion, 15
 Traktrix, 56
 Triangulierung, 106

 Umlaufsatz
 für Flächenkurven, 93
 von Hopf, 21

 Variation mit festen Endpunkten, 74
 Variationsfeld, 75

 Weingarten-Abbildung, 43
 Wendelfläche, 58
 Windung, 15