Maßtheorie

Sommersemester 2005

Joachim Hilgert

Diese Ausarbeitung ist nicht korrekturgelesen und nur zum internen Gebrauch gedacht!

Für Kommentare und Korrekturen bin ich dankbar. Vorschläge für Ergänzungen im Index werden jederzeit eingearbeitet.

Paderborn, den 13.7.2005 J. Hilgert

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Meßbare Mengen und Funktionen

In diesem Kapitel legen wir den Rahmen für eine allgemeine Integrationstheorie fest, indem wir angeben, welchen Mengen wir ein „Maß“ oder „Volumen“ zuordnen wollen, und welche Funktionen wir integrieren wollen. Diese Mengen und Funktionen heißen dann meßbar. Daß man überhaupt Mengen aussondert und nicht alle Mengen und Funktionen als meßbar behandelt, liegt daran, daß man später ja Vorschriften angeben will, die jeder meßbaren Menge und jeder meßbaren Funktion eine Zahl (das Maß bzw. das Integral) zuordnet, und solche Vorschriften umso schwieriger zu finden sind, je komplizierter die Mengen und Funktionen aussehen. Die Strategie ist daher, von möglichst einfachen Mengen auszugehen (wie z.B. Intervallen) und weitere meßbare Mengen durch elementare Operationen wie Schneiden, Vereinigen oder Komplementbilden dazuzugewinnen. So stößt man auf den Begriff einer Algebra von Mengen, von dem sich aber herausstellt, daß er nicht ausreichend ist. Man verallgemeinert ihn auf den Begriff der σ-Algebra, in dem auch abzählbar unendliche Schnitte und Vereinigungen inkorporiert sind. Als meßbare Funktionen nimmt man dann, in Analogie zur Stetigkeit, solche, deren Urbilder von meßbaren Mengen meßbar sind.

1.1 Meßbare Mengen

Seien M eine beliebige, nichtleere Menge und $\mathfrak{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$ die **Potenzmenge** von M, d.h., die Menge aller Teilmengen von M. Eine nichtleere Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ von Teilmengen von M heißt eine **Algebra**, wenn

$$E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{M} \quad \Rightarrow \quad E_1 \cup \ldots \cup E_n \in \mathfrak{M}$$

und

$$E \in \mathfrak{M} \quad \Rightarrow \quad M \setminus E \in \mathfrak{M}.$$

Wenn sogar

$$E_j \in \mathfrak{M}, j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \in \mathfrak{M}$$

gilt, dann heißt die Algebra $\mathfrak{M}$ eine **σ-Algebra**.

Ein Paar $(M, \mathfrak{M})$, wobei M eine nichtleere Menge und $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine σ-Algebra ist, heißt ein **meßbarer Raum** oder kurz ein **Meßraum**. Die Elemente der σ-Algebra heißen **meßbare Mengen**.

Bemerkung 1.1.1 : Nach den de Morganschen Gesetzen gilt

$$\bigcap E_j = M \setminus \left(\bigcup (M \setminus E_j) \right),$$

also gelten in einer Algebra bzw. einer σ-Algebra $\mathfrak{M}$ auch die Gesetze

$$E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{M} \quad \Rightarrow \quad E_1 \cap \ldots \cap E_n \in \mathfrak{M}$$

bzw.

$$E_j \in \mathfrak{M}, j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_j \in \mathfrak{M}.$$

Außerdem gilt wegen $E \cup (M \setminus E) = M$ und $E \cap (M \setminus E) = \emptyset$ automatisch $\emptyset, M \in \mathfrak{M}$. ∎

Beispiel 1.1.2 : Sei M eine beliebige, nichtleere Menge.

(i) $\mathfrak{P}(M)$ ist eine σ-Algebra.

(ii) $\{\emptyset, M\}$ ist eine σ-Algebra.

∎

Seien M und A beliebige, nichtleere Mengen. Wenn $\mathfrak{M}_a \subseteq \mathfrak{P}(M)$ für jedes $a \in A$ eine σ-Algebra ist, dann ist auch $\bigcap_{a\in A} \mathfrak{M}_a \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine σ-Algebra. Wenn jetzt $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine beliebige, nichtleere Teilmenge ist, dann ist

$$\sigma(\mathfrak{E}) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{E}\subseteq\mathfrak{M} \\ \mathfrak{M}\ \sigma-\text{Algebra}}} \mathfrak{M}$$

ebenfalls eine σ-Algebra, und zwar die kleinste, die $\mathfrak{E}$ enthält. Man nennt sie die von $\mathfrak{E}$ **erzeugte** σ-Algebra.

Beispiel 1.1.3 : Sei $(M,\mathcal{U})$ ein topologischer Raum und

$$\mathfrak{E} = \{U \in \mathfrak{P}(M) \mid U \text{ offen in } M\}.$$

Dann heißt die von $\mathfrak{E}$ erzeugte σ-Algebra die **Borel**–σ-Algebra von $(M,\mathcal{U})$. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{B}_M$. Die Elemente von $\mathfrak{B}_M$ heißen die **Borel–meßbaren** Teilmengen von M. ∎

Seien jetzt $M_1, \dots, M_n$ nichtleere Mengen und $\mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{P}(M_j)$ σ-Algebren für $j = 1, \dots, n$. Dann heißt die von

$$\{E_1 \times \ldots \times E_n \mid E_j \in \mathfrak{M}_j, j = 1, \dots, n\}$$

erzeugte σ-Algebra die **Produkt**-σ-Algebra der $\mathfrak{M}_j$. Sie wird mit $\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{M}_j$ bezeichnet.

Proposition 1.1.4 : *Seien $M_1, \dots, M_n$ nichtleere Mengen und $M_j \in \mathfrak{E}_j \subseteq \mathfrak{P}(M_j)$ für $j = 1, \dots, n$. Dann gilt*

$$\bigotimes_{j=1}^n \sigma(\mathfrak{E}_j) = \sigma(\{E_1 \times \ldots \times E_n \mid E_j \in \mathfrak{E}_j, j = 1, \dots, n\}). \tag{1.1}$$

Beweis:

IDEE: Um „$\subseteq$“ zu zeigen, nenne die rechte Seite von (1.1) einfach $\mathfrak{M}$ und betrachte $\mathfrak{M}'_j := \{F_j \subseteq M_j \mid \pi_j^{-1}(F_j) \in \mathfrak{M}\}$ mit den Projektionen π_j auf den j-ten Faktor. Die $\mathfrak{M}'_j$ sind σ-Algebren und enthalten mit $\mathfrak{E}_j$ auch $\sigma(\mathfrak{E}_j)$. Damit erhält man $E_1 \times \ldots \times E_n = \bigcap_{j=1}^n \pi_j^{-1}(E_j) \in \mathfrak{M}$ für alle $E_j \in \sigma(\mathfrak{E}_j)$, also $\bigotimes_{j=1}^n \sigma(\mathfrak{E}_j) \subseteq \mathfrak{M}$.

Die Inklusion „$\supseteq$“ ist klar. Für die Umkehrung nennen wir die rechte Seite von (1.1) einfach $\mathfrak{M}$ und betrachten die Mengensysteme

$$\mathfrak{M}'_j := \{F_j \subseteq M_j \mid \pi_j^{-1}(F_j) \in \mathfrak{M}\},$$

wobei $\pi_j : M_1 \times \ldots \times M_n \to M_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor ist.

Da die Urbildoperation mit Schnitten und Komplementbildung vertauscht:

$$\pi_j^{-1}(\bigcap_{a\in A} E_a) = \bigcap_{a\in A} \pi_j^{-1}(E_a), \quad \pi_j^{-1}(M_j \setminus E) = M \setminus \pi_j^{-1}(E),$$

ist $\mathfrak{M}'_j \subseteq \mathfrak{P}(M_j)$ eine σ-Algebra, die $\mathfrak{E}_j$ also auch $\sigma(\mathfrak{E}_j)$ enthält. Wenn jetzt $E_j \in \sigma(\mathfrak{E}_j)$, dann gilt $\pi_j^{-1}(E_j) \in \mathfrak{M}$, also

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(E_j) \in \mathfrak{M},$$

was wiederum $\bigotimes_{j=1}^n \sigma(\mathfrak{E}_j) \subseteq \mathfrak{M}$ impliziert. ∎

Ein metrischer Raum (M, ρ) heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare Teilmenge $Q \subseteq M$ enthält, die einen nichtleeren Schnitt mit jeder nichtleeren, offenen Teilmenge von M hat:

$$\forall\ \emptyset \neq U \subseteq M \text{ offen} \ : \quad Q \cap U \neq \emptyset. \tag{1.2}$$

Als Beispiel betrachte $\mathbb{R}^k$ und darin die abzählbare Teilmenge $\mathbb{Q}^k$, die jede ϵ-Kugel, also auch jede nichtleere, offene Menge schneidet. Man nennt Teilmengen Q eines topologischen Raumes M, die (1.2) erfüllen, **dicht**.

Proposition 1.1.5 : *Seien $M_1, \ldots, M_n$ separable metrische Räume und $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, versehen mit der Produkttopologie. Dann gilt*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_{M_j} = \mathfrak{B}_M.$$

Beweis:

Idee: Wähle jeweils eine dichte Folge $\{x_j^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq M_j$ und setze $\mathfrak{E}_j := \{B(x_j^{(k)}; r) \mid k \in \mathbb{N}, 0 < r \in \mathbb{Q}\}$. Dann findet man $\mathfrak{B}_{M_j} = \sigma(\mathfrak{E}_j)$, und weil $\{(x_1^{(k_1)}, \ldots, x_n^{(k_n)}) \mid k_j \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, n\}$ abzählbar und dicht in M ist, ergibt sich auch $\mathfrak{B}_M = \sigma(\{E_1 \times \ldots \times E_n \mid E_j \in \mathfrak{E}_j\})$. Jetzt folgt die Behauptung mit Proposition 1.1.4.

Seien $\{x_j^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq M_j$ abzählbare, dichte Mengen in M_j für $j = 1, \ldots, n$ und

$$\mathfrak{E}_j := \{B(x_j^{(k)}; r) \mid k \in \mathbb{N}, 0 < r \in \mathbb{Q}\}.$$

Behauptung: $\mathfrak{B}_{M_j} = \sigma(\mathfrak{E}_j)$.

Wenn nämlich $U \subseteq M_j$ offen ist und $x \in U$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B(x; \epsilon) \subseteq U$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x_j^{(k)} \in B(x; \frac{\epsilon}{4})$. Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\epsilon}{4} < r < \frac{\epsilon}{2}$ gilt dann

$$x \in B(x_j^{(k)}; r) \subseteq B(x; \epsilon) \subseteq U.$$

Damit sehen wir aber, daß jede offene Menge in M_j eine (automatisch abzählbare) Vereinigung von Elementen von $\mathfrak{E}_j$ sein muß.

Analog finden wir auch

$$\mathfrak{B}_M = \sigma(\{E_1 \times \ldots \times E_n \mid E_j \in \mathfrak{E}_j\}),$$

weil die Menge

$$\{(x_1^{(k_1)}, \ldots, x_n^{(k_n)}) \mid k_j \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, n\}$$

abzählbar und dicht in M ist. Zusammen mit Proposition 1.1.4 erhalten wir

$$\mathfrak{B}_M = \bigotimes_{j=1}^n \sigma(\mathfrak{E}_j) = \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_{M_j}.$$

■

Das folgende Lemma erleichtert die Identifizierung der von einer Algebra erzeugten σ-Algebra.

Lemma 1.1.6 : *Seien M eine nichtleere Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine Algebra. Weiter sei $\mathfrak{C}$ die kleinste Familie von Mengen, die $\mathfrak{A}$ enthält und folgende Eigenschaften hat:*

(a) *Für $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ mit $E_j \in \mathfrak{C}$ gilt $\bigcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathfrak{C}$.*

(b) *Für $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ mit $E_j \in \mathfrak{C}$ gilt $\bigcap_{j=1}^\infty E_j \in \mathfrak{C}$.*

Dann haben wir $\mathfrak{C} = \sigma(\mathfrak{A})$.

Beweis:

IDEE: Zunächst verifiziert man, daß es so ein kleinstes Mengensystem gibt (alle schneiden!). Dann setzt man für $E \in \mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C}(E) := \{F \in \mathfrak{C} \mid E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathfrak{C}\}$$

und beweist mit der Minimalität von $\mathfrak{C}$, daß $\mathfrak{C}(E) \supseteq \mathfrak{C}$ gilt. Weiter folgert man, daß $\mathfrak{C}$ eine Algebra ist. Wegen (a) ist $\mathfrak{C}$ dann sogar eine σ-Algebra.

Indem man alle Mengensysteme, die $\mathfrak{A}$ enthalten und sowohl (a) als auch (b) erfüllen, schneidet, sieht man, daß es in der Tat ein kleinstes solches Mengensystem gibt.

Die Inklusion $\mathfrak{C} \subseteq \sigma(\mathfrak{A})$ ist klar. Für die Umkehrung definiert man zu $E \in \mathfrak{C}$ das Mengensystem

$$\mathfrak{C}(E) := \{F \in \mathfrak{C} \mid E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathfrak{C}\}.$$

Dann erfüllt $\mathfrak{C}(E)$ die Bedingungen (a) und (b) mit $\mathfrak{C}(E)$ statt $\mathfrak{C}$.

Wenn $E \in \mathfrak{A}$, dann gilt außerdem $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}(E)$. Wegen der Minimalität von $\mathfrak{C}$ haben wir dann also $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}(E)$. Nun gilt aber nach der Definition für alle $E, F \in \mathfrak{C}$

$$F \in \mathfrak{C}(E) \quad \Leftrightarrow \quad E \in \mathfrak{C}(F).$$

Das bedeutet, wir haben

$$\forall E \in \mathfrak{A}, F \in \mathfrak{C} \ : \quad E \in \mathfrak{C}(F).$$

Wieder mit der Minimalität von $\mathfrak{C}$ folgern wir $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}(F)$. Insbesondere bedeutet dies, daß

$$\forall E, F \in \mathfrak{C} \ : \quad E \cap F, E \setminus F, F \setminus E \in \mathfrak{C},$$

d.h., $\mathfrak{C}$ ist eine Algebra.

Wenn $E_j \in \mathfrak{C}$ für $j \in \mathbb{N}$, dann betrachten wir $F_n := \bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathfrak{C}$ und schließen mit (a)

$$\bigcup_{j=1}^\infty E_j = \bigcup_{n=1}^\infty F_n \in \mathfrak{C}.$$

Also ist $\mathfrak{C}$ eine σ-Algebra, und das beweist die Behauptung. ■

Übung 1.1.1 : Seien $(M_1, \mathfrak{M}_1), \ldots, (M_n, \mathfrak{M}_n)$ meßbare Räume. Eine Teilmenge $E \subseteq M_1 \times \ldots \times M_n$ heißt ein **meßbarer Quader**, wenn sie von der Form $E = A_1 \times \ldots \times A_n$ mit $A_i \in \mathfrak{M}_i$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von meßbaren Quadern. Zeige:

(i) $\mathfrak{A}$ ist die kleinste Algebra in $\mathfrak{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{M}_n$, die alle meßbaren Quader enthält.

(ii) Jedes Element von $\mathfrak{A}$ läßt sich als *disjunkte* Vereinigung endlich vieler meßbarer Quader schreiben.

■

Übung 1.1.2 : Die Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ wird von jedem der folgenden Mengensysteme erzeugt:

(a) $\mathfrak{E}_1 = \{]a, b[\mid a < b\}$,

(b) $\mathfrak{E}_2 = \{[a, b] \mid a < b\}$,

(c) $\mathfrak{E}_3 = \{]a, b] \mid a < b\}$,

(d) $\mathfrak{E}_4 = \{[a, b[\mid a < b\}$,

(e) $\mathfrak{E}_5 = \{]a, \infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$,

(f) $\mathfrak{E}_6 = \{]-\infty, b[\mid b \in \mathbb{R}\}$,

(g) $\mathfrak{E}_7 = \{[a, \infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$,

(h) $\mathfrak{E}_8 = \{]-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R}\}$.

■

Übung 1.1.3 : Seien M eine nichtleere Menge und $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine beliebige, nichtleere Teilmenge der Potenzmenge von M. Zeige, daß $\sigma(\mathfrak{E})$ tatsächlich eine σ-Algebra ist. ■

Übung 1.1.4 : Sei M eine überabzählbare Menge. Setze

$$\mathfrak{M} := \{E \subseteq M \mid E \text{ oder } M \setminus E \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

Zeige, daß $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra auf M ist. ■

Übung 1.1.5 : Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathfrak{M}_n$ die vom System

$$\mathfrak{E}_n := \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$$

auf $\mathbb{N}$ erzeugte σ-Algebra. Zeige, daß $\mathfrak{M}_n$ aus allen Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ besteht, welche entweder $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ oder $m \in A$ für alle $m \geq n + 1$ erfüllen. Offenbar gilt $\mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{M}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Warum ist dennoch $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ keine σ-Algebra auf $\mathbb{N}$? ■

Übung 1.1.6 : Seien $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra auf einer nichtleeren Menge M und $N \in \mathfrak{M}$. Zeige, daß

$$\mathfrak{M}_N := \{N \cap A : A \in \mathfrak{M}\}$$

eine σ-Algebra auf N ist. Man nennt $\mathfrak{M}_N$ die **Spur-σ-Algebra** auf N. ■

Übung 1.1.7 : Seien $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum, $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f : M \to X$ eine Abbildung. Zeige, daß das System aller Teilmengen $E \subseteq X$ mit $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$ eine σ-Algebra auf X ist. ■

Übung 1.1.8 : Sei (M, ρ) ein metrischer Raum und $D \subseteq M$. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) D ist dicht.

(ii) $\overline{D} = M$.

(iii) Für alle $x \in M$ und für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $y \in D$ mit $\rho(x, y) < \epsilon$.

■

1.2 Meßbare Funktionen

Seien $(M,\mathfrak{M})$ und $(N,\mathfrak{N})$ meßbare Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt f $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$-**meßbar**, wenn

$$\forall A \in \mathfrak{N} \ : \quad f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}, \tag{1.3}$$

d.h., wenn Urbilder meßbarer Mengen wieder meßbar sind. Wir lassen den Zusatz $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$- weg, wenn klar ist, welche σ-Algebren gemeint sind. Wenn die σ-Algebra $\mathfrak{N}$ von dem Mengensystem $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(N)$ erzeugt wird, dann können wir (1.3) auch durch

$$\forall N \in \mathfrak{E} \ : \quad f^{-1}(N) \in \mathfrak{M}$$

ersetzen.

Beispiel 1.2.1 : Seien $(M,\mathcal{U})$ und $(N,\mathcal{V})$ topologische Räume und $f\colon M \to N$ stetig. Da Urbilder offener Mengen unter f offen sind, ist die Abbildung $(\mathfrak{B}_M,\mathfrak{B}_N)$-meßbar. ■

Bemerkung 1.2.2 : Seien $(M,\mathfrak{M})$, $(N,\mathfrak{N})$ und $(L,\mathfrak{L})$ meßbare Räume sowie $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to L$ meßbare Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f\colon M \to L$ meßbar:

$$\forall E \in \mathfrak{L} \ : \quad (g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}\big(g^{-1}(E)\big) \in \mathfrak{M}.$$

■

Proposition 1.2.3 : *Seien $(M,\mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum und $f, g\colon M \to \mathbb{C}$ meßbare, d.h. $(\mathfrak{M},\mathfrak{B}_{\mathbb{C}})$-meßbare Abbildungen. Dann sind auch $f+g$ und fg meßbar.*

Beweis:

IDEE: Verknüpfe die meßbare Abbildung $h\colon M \to \mathbb{C}^2,\ x \mapsto (f(x), g(x))$ mit der Addition bzw. der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ (beides stetig, also meßbar).

Betrachte die Abbildung

$$h\colon M \to \mathbb{C}^2, \quad x \mapsto (f(x), g(x)).$$

Die Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{C}^2}$ von $\mathbb{C}^2$ wird von den Mengen der Form $U \times U'$ mit $U, U' \subseteq \mathbb{C}$ offen, erzeugt. Wegen

$$h^{-1}(U \times U') = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U')$$

ist also h meßbar. Weil aber $f+g$ und fg durch Verknüpfung von h mit den stetigen, also meßbaren Abbildungen

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (z,w) \mapsto z + w$$

und

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (z,w) \mapsto zw$$

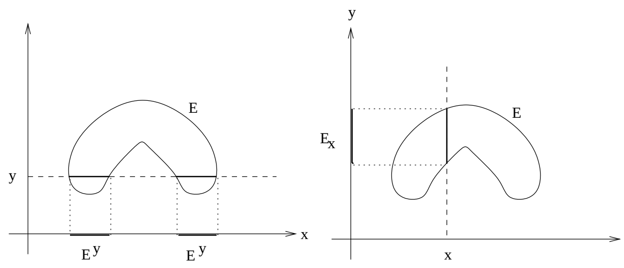
entstehen, folgt die Behauptung aus Bemerkung 1.2.2. ■

Die nächste Proposition wird bei der Konstruktion von Maßen auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ nützlich sein.

Proposition 1.2.4 : *Seien $(M,\mathfrak{M})$, $(N,\mathfrak{N})$ und $(L,\mathfrak{L})$ meßbare Räume.*

(i) *Wenn $E \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$, dann gilt*

$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in N \mid (x,y) \in E\} \in \mathfrak{N}, \\ E^y &:= \{x \in M \mid (x,y) \in E\} \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$



(ii) *Wenn $f\colon M \times N \to L$ meßbar ist, dann sind auch die Abbildungen*

$$\begin{aligned} f_x &: N \to L, \qquad y \mapsto f(x,y), \\ f^y &: M \to L, \qquad x \mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

für alle $x \in M$ und $y \in N$ meßbar.

Beweis:

Idee: Zeige, daß $\{E \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \mid (\forall x \in M, y \in N)\ E_x \in \mathfrak{N}, E^y \in \mathfrak{M}\}$ eine σ-Algebra ist, die alle meßbaren Quader $A \times B \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ enthält.

Betrachte das Mengensystem

$$\mathfrak{C} := \{E \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \mid (\forall x \in M, y \in N)\ E_x \in \mathfrak{N}, E^y \in \mathfrak{M}\}.$$

Dann gilt

$$\forall A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N} \ : \quad A \times B \in \mathfrak{C}.$$

Außerdem verifiziert man für $E, E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{C}$ und $x \in M, y \in N$ sofort

$$\begin{aligned} \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)_x &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x, \\ \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)^y &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)^y, \\ M \setminus E^y &= ((M \times N) \setminus E)^y, \\ N \setminus E_x &= ((M \times N) \setminus E)_x. \end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{C}$ eine σ-Algebra, die alle meßbaren Quader $A \times B$ mit $A \in \mathfrak{M}$ und $B \in \mathfrak{N}$ enthält. Daraus folgt aber $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{C}$ und somit (i).

Um (ii) zu beweisen, müssen wir nur noch feststellen, daß für $C \in \mathfrak{L}$ gilt

$$f_x^{-1}(C) = \big(f^{-1}(C)\big)_x \quad \text{und} \quad (f^y)^{-1}(C) = \big(f^{-1}(C)\big)^y.$$

∎

Beispiel 1.2.5 : Seien $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum und $E \subseteq M$ eine meßbare Menge. Dann ist die durch

$$\chi_E(m) := \begin{cases} 1 & \text{für } m \in E \\ 0 & \text{für } m \notin E \end{cases}$$

definierte **charakteristische Funktion** $\chi_E \colon M \to \mathbb{R}$ meßbar, weil

$$\chi_E^{-1}(]a,b[) = \begin{cases} M & \text{falls } a < 0 < 1 < b, \\ E & \text{falls } 0 \leq a < 1 < b, \\ M \setminus E & \text{falls } a < 0 < b \leq 1, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also sind auch endliche (komplexe) Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen meßbarer Mengen meßbar. Solche Funktionen nennen wir **einfache Funktionen**. Die einfachen Funktionen $M \to \mathbb{C}$ lassen sich charakterisieren als diejenigen meßbaren Funktionen, die nur endlich viele Werte annehmen: Wenn nämlich $f(M) = \{z_1, \ldots, z_n\}$, dann ist jedes $E_j := f^{-1}(z_j)$ für $j = 1, \ldots, n$ meßbar, und es gilt

$$f = \sum_{j=1}^{n} z_j \chi_{E_j}.$$

Diese Zerlegung von f als Linearkombination von charakteristischen Funktionen nennt man die **Standardzerlegung** von f. Sie erfüllt insbesondere $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$. ■

Um sich lästige Fallunterscheidungen in den Betrachtungen reellwertiger meßbarer Funktionen zu ersparen, ergänzen wir die Menge $\mathbb{R}$ um zwei Punkte, die die Rolle von plus und minus „Unendlich“ spielen sollen:

$$[-\infty, \infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Hier sind $-\infty$ und ∞ einfach Symbole. Wir ergänzen die Ordnung auf $\mathbb{R}$ durch

$$\forall r \in \mathbb{R} \ : \quad -\infty < r < \infty$$

und erhalten so eine Ordnung auf $[-\infty, \infty]$. Mit dieser Ordnung kann man Begriffe wie **untere** und **obere Schranke** sowie **Supremum** und **Infimum** leicht auf Teilmengen von $[-\infty, \infty]$ übertragen. Der einzige Unterschied zum Fall $\mathbb{R}$ ist, daß auch in $\mathbb{R}$ unbeschränkte Mengen in $[-\infty, \infty]$ ein Supremum haben. Analog erhält man auch den Limes superior und den Limes inferior für Folgen in $[-\infty, \infty]$.

Addition und Multiplikation lassen sich nicht in vernünftiger Weise auf ganz $[-\infty, \infty]$ fortsetzen. Wir setzen jedoch

$$x + y := \begin{cases} x + y & \text{für } x, y \in \mathbb{R}, \\ \infty & \text{für } x \in]-\infty, \infty] \text{ und } y = \infty, \\ \infty & \text{für } x = \infty \text{ und } y \in]-\infty, \infty], \\ -\infty & \text{für } x \in [-\infty, \infty[\text{ und } y = -\infty, \\ -\infty & \text{für } x = -\infty \text{ und } y \in [-\infty, \infty[, \end{cases}$$

wobei $[-\infty, \infty[\ := \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ und $]-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wenn insbesondere $[0, \infty] := [0, \infty[\cup \{\infty\}$, dann definiert dies eine Addition auf $[0, \infty]$. Analog setzt man

$$xy := \begin{cases} xy & \text{für } x, y \in \mathbb{R}, \\ \pm\infty & \text{für } x \in]0, \infty] \text{ und } y = \pm\infty, \\ \pm\infty & \text{für } x = \pm\infty \text{ und } y \in]0, \infty], \\ \mp\infty & \text{für } x \in [-\infty, 0[\text{ und } y = \pm\infty, \\ \mp\infty & \text{für } x = \pm\infty \text{ und } y \in [-\infty, 0[. \end{cases}$$

Bemerkung 1.2.6 : Setze

$$\mathfrak{B}_{[-\infty,\infty]} := \{E \subseteq [-\infty,\infty] \mid E \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\} \subseteq \mathfrak{P}([-\infty,\infty])\,.$$

Dann sieht man leicht, daß $\mathfrak{B}_{[-\infty,\infty]}$ eine σ-Algebra ist, die von den Halbstrahlen $]a,\infty] :=]a,\infty[\cup \{\infty\}$ mit $a \in \mathbb{R}$ erzeugt wird.

Sei jetzt $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum, und seien $f, g\colon M \to [-\infty,\infty]$ meßbare Abbildungen. Wenn $f + g\colon M \to [-\infty,\infty]$ definiert ist, d.h., wenn $f(x) + g(x)$ für jedes $x \in M$ definiert ist, dann ist $f + g$ auch meßbar:

$$\begin{aligned} (f+g)^{-1}(]a,\infty]) &= (f+g)^{-1}(]a,\infty[) \cup (f+g)^{-1}(\{\infty\}) \\ &= (f+g)^{-1}(]a,\infty[) \cup g^{-1}(\{\infty\}) \cup f^{-1}(\{\infty\}) \end{aligned}$$

und $(f+g)^{-1}(]a,\infty[)$ ist meßbar, weil es mit $h^{-1}(]a,\infty[)$ zusammenfällt, wobei h die Summe der meßbaren Funktionen $f|_{M'}, g|_{M'}\colon M' \to \mathbb{R}$ mit $M' = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R})$ ist. ■

Proposition 1.2.7 : *Seien $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen $f_n\colon M \to [-\infty,\infty]$. Dann gilt:*

(i) $\sup f_n\colon M \to [-\infty,\infty]$ *ist meßbar.*

(ii) $\inf f_n\colon M \to [-\infty,\infty]$ *ist meßbar.*

(iii) $\limsup f_n\colon M \to [-\infty,\infty]$ *ist meßbar.*

(iv) $\liminf f_n\colon M \to [-\infty,\infty]$ *ist meßbar.*

(v) *Wenn der punktweise Limes $f = \lim f_n\colon M \to [-\infty,\infty]$ existiert, dann ist er meßbar.*

Beweis:

Idee: (i) folgt aus $(\sup f_n)^{-1}(]a,\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(]a,\infty])$, der Rest dann aus (i).

Beachte, daß

$$\begin{aligned} (\sup f_n)^{-1}(]a,\infty]) &= \{m \in M \mid \sup_n f_n(m) > a\} \\ &= \{m \in M \mid \exists n \text{ mit } f_n(m) > a\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(]a,\infty]). \end{aligned}$$

Dies zeigt (i). Der zweite Teil folgt mit (i) und $\inf f_n = -\sup(-f_n)$. Die Teile (iii) und (iv) folgen jetzt, weil Limes superior und Limes inferior durch sukzessives Bilden von Suprema und Infima entstehen. Der letzte Teil ist dann wegen $\lim f_n = \limsup f_n$ für konvergente Folgen klar. ■

Mit Proposition 1.2.7 können wir zu einer meßbaren Funktion $f\colon M \to [-\infty,\infty]$ den **positiven Teil** $f^+ := \max(f, 0)$ und den **negativen Teil** $f^- := -\min(f, 0)$ definieren, die beide wieder meßbar sind.

Übung 1.2.1 : Seien $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum und $f, g : M \to [-\infty,\infty]$ meßbar. Zeige, daß dann auch die folgenden Funktionen meßbar sind.

$$\text{(i) } \max\{f,g\}, \quad \text{(ii) } \min\{f,g\}, \quad \text{(iii) } f^+, \quad \text{(iv) } f^-.$$

■

Übung 1.2.2 : Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $[-\infty, \infty]$. Zeige:

(i) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$,

(ii) Aus $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$.

■

Übung 1.2.3 : Seien $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra auf M und $f_n : M \to \mathbb{R}$ eine Folge meßbarer Funktionen. Zeige, daß die Menge

$$A := \{x \in M | \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$$

eine meßbare Teilmenge von M ist. ■

Übung 1.2.4 : Sei $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra auf M, und sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Zeige, daß es eine meßbare Funktion $\alpha : M \to \mathbb{C}$ gibt mit $|\alpha| = 1$ und $f = \alpha|f|$. ■

Übung 1.2.5 : Sei $\mathfrak{R}$ das System aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, die sich als endliche Vereinigung von Intervallen schreiben lassen. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **additiv**, wenn für disjunkte Mengen $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{R}$ gilt

$$\mu(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = \mu(E_1) + \ldots + \mu(E_n),$$

sie ist σ-**additiv**, wenn für disjunkte Mengen $E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{R}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j),$$

ferner wird sie **endlich** genannt, wenn $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ ist.

Zeige, daß die Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } \epsilon > 0 \text{ gibt mit }]0, \epsilon[\subseteq A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

additiv und endlich, aber nicht σ-additiv ist. ■

Übung 1.2.6 : Sei M eine nichtleere Menge. Ein **Dynkin-System** über M ist ein nichtleeres System $\mathfrak{D}$ von Teilmengen von M mit

(a) $M \in \mathfrak{D}$,

(b) $A, B \in \mathfrak{D}$, $A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{D}$,

(c) $A_n \in \mathfrak{D}$ disjunkt $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{D}$.

Zeige:

(i) Jede σ-Algebra ist ein Dynkin-System.

(ii) Sei $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Dann existiert ein kleinstes Dynkin-System, das $\mathfrak{R}$ umfaßt.

(iii) Ein Dynkin-System $\mathfrak{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es **schnittstabil** ist, d.h., wenn aus $A, B \in \mathfrak{D}$ folgt, daß $A \cap B \in \mathfrak{D}$ ist.

■

Kapitel 2

Maß und Integral

In diesem Kapitel führen wir den Begriff des Maßes auf beliebigen, meßbaren Räumen und den zugehörigen Integralbegriff ein. Zentrale Ergebnisse sind die Analoga der schon für die reelle Gerade bewiesenen, fundamentalen Konvergenzsätze. Darüber hinaus zeigen wir, wie man Maße und Integrale auf Produkträumen konstruiert. Das entscheidende Ergebnis in diesem Kontext ist der Satz von Fubini, der besagt, daß Integrale auf Produkträumen durch iteriertes Integrieren berechnet werden können und die Reihenfolge dabei keine Rolle spielt.

2.1 Maße

Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum. Eine Abbildung

$$\mu\colon \mathfrak{M} \to [0, \infty]$$

heißt ein **Maß** auf $(M, \mathfrak{M})$, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ ist und für jede disjunkte, abzählbare Familie $E_1, E_2, \ldots$ von meßbaren Mengen gilt

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Hier ist $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ als der Grenzwert der entsprechenden Reihe zu lesen, wenn alle $\mu(E_j)$ endlich (d.h. in $[0, \infty[$) sind und die Reihe konvergiert; falls dem nicht so ist, setzt man $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) := \infty$. Das Tripel $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ heißt ein **Maßraum**. Ein Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(M) \in [0, \infty[$, und **σ-endlich**, wenn $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ mit $\mu(E_k) < \infty$.

Beachte, daß aus $E \subseteq E'$ wegen $\mu(E') = \mu(E' \setminus E) + \mu(E)$ sofort folgt $\mu(E) \leq \mu(E')$. Insbesondere nimmt ein endliches Maß nur endliche Werte an.

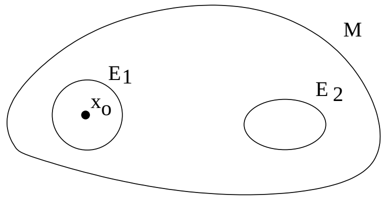
Beispiel 2.1.1 : Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.

(i) Sei $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(M) \ni E$. Dann definiert $\mu(E) := \sum_{x\in E} f(x)$ mit $f\colon M \to \{1\}, x \mapsto 1$ ein Maß, das **Zählmaß**.

(ii) Sei $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(M)$ und $x_0 \in M$. Dann definiert

$$\mu(E) := \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß, das **Dirac-** oder **Punktmaß** in $x_0 \in M$.



■

Beispiel 2.1.2 : Betrachte den meßbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$. Dann ist für jedes $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ die charakteristische Funktion χ_A lokal integrierbar im Sinne der Integrationstheorie einer Variablen und durch

$$\lambda^1(A) := \int \chi_A$$

wird ein Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \lambda^1)$ definiert. Das so definierte Maß λ^1 nennt man **Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}$. ■

Bei der Konstruktion von Maßen ist es in der Regel nicht so schwer, eine passende Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ zu finden, auf der die endliche Additivität $\mu(\bigcup_{j=1}^n E_j) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j)$ gilt. Dagegen ist der Übergang zu der von $\mathfrak{A}$ erzeugten σ-Algebra oft schwierig. Umso angenehmer ist der folgende Satz, der zeigt, daß es nur eine „gute" Fortsetzung einer endlich additiven Funktion $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ zu einem Maß auf $(M, \sigma(\mathfrak{A}))$ geben kann.

Satz 2.1.3 : *Seien M eine nichtleere Menge, $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine Algebra und $\mathfrak{M} := \sigma(\mathfrak{A})$. Weiter sei μ ein Maß auf $(M, \mathfrak{M})$ mit*

$$\exists A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A} \ : \ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = M \ \textit{und} \ (\forall j \in \mathbb{N} \ : \ \mu(A_j) < \infty).$$

Wenn ν ein Maß auf $(M, \mathfrak{M})$ ist, das auf $\mathfrak{A}$ mit μ übereinstimmt, dann gilt $\mu = \nu$.

Beweis:

IDEE: Für endliches μ betrachte $\mathfrak{C} := \{E \in \mathfrak{M} \mid \mu(E) = \nu(E)\}$ und zeige, daß $\mathfrak{C}$ die Bedingungen (a) und (b) aus Lemma 1.1.6 erfüllt. Mit dem Lemma folgt dann $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}$, d.h., die Behauptung. Für σ-endliche Maße schneide alle Mengen mit einer Familie von Mengen endlichen Maßes.

Spezialfall: $\mu(M) < \infty$.

Wir setzen

$$\mathfrak{C} := \{E \in \mathfrak{M} \mid \mu(E) = \nu(E)\} \subseteq \mathfrak{M}.$$

Beachte, daß wegen $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$ für meßbare Mengen $E \subseteq F$ und der analogen Aussage für ν gilt

$$E \in \mathfrak{C} \quad \Rightarrow \quad F \setminus E \in \mathfrak{C}$$

sofern $F \in \mathfrak{C}$. Dann erfüllt $\mathfrak{C}$ die Bedingungen (a) und (b) aus Lemma 1.1.6:

Wenn $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ mit $E_j \in \mathfrak{C}$, setze

$$C_1 := E_1, \quad C_2 := E_2 \setminus E_1, \quad C_3 := E_3 \setminus E_2, \ldots$$

Dann sind die C_j alle disjunkt, und es gilt

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(C_j) = \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j) = \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j).$$

Also ist auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{C}$, und dies zeigt (a). Bedingung (b) folgt durch Komplementbildung sofort aus (a), da $M \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$.

Wegen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ können wir Lemma 1.1.6 anwenden und erhalten $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$. Dies beweist den Satz für den Spezialfall.

Allgemeiner Fall: Wir stellen zunächst fest, daß wir eine disjunkte Familie $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$ mit

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = M \text{ und } (\forall j \in \mathbb{N} \;:\; \mu(A_j) < \infty)$$

finden können: Wenn nämlich $A'_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$ irgendeine Familie mit

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j = M \text{ und } (\forall j \in \mathbb{N} \;:\; \mu(A'_j) < \infty)$$

ist, setzt man einfach

$$A''_n := \bigcup_{j=1}^{n} A'_j \text{ und } A_n := A''_n \setminus A''_{n-1}.$$

Wegen $\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E \cap A_j)$ und $\nu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E \cap A_j)$ für $E \in \mathfrak{M}$ genügt es also zu zeigen, daß für $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) < \infty$ gilt $\mu(E \cap N) = \nu(E \cap N)$. Dazu betrachten wir die Algebra

$$\widetilde{\mathfrak{A}} := \{A \cap N \mid A \in \mathfrak{A}\} \subseteq \mathcal{P}(N),$$

die die σ-Algebra

$$\widetilde{\mathfrak{M}} := \{E \cap N \mid E \in \mathfrak{M}\} \subseteq \mathcal{P}(N)$$

erzeugt. Dann erfüllen die Einschränkungen von μ und ν auf $\widetilde{\mathfrak{M}}$ die Voraussetzungen des Spezialfalls, und dieser zeigt dann $\mu(E \cap N) = \nu(E \cap N)$. ∎

Übung 2.1.1 : Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{M}$. Zeige:

(i) Aus $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

(ii) Aus $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $\mu(A_1) < \infty$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

(iii) Die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ in Teil (ii) ist nicht überflüssig.

(iv) In (ii) kann die Vorausetzung $\mu(A_1) < \infty$ weggelassen werden, wenn μ ein σ-endliches Maß ist. (Hierzu benötigt man den Umordnungssatz).

∎

2.2 Integrale

Sei jetzt $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Wir bezeichnen die Menge der meßbaren Funktionen $f\colon M \to [0, \infty]$ mit $\mathcal{L}^+(M)$. Wenn $f \in \mathcal{L}^+(M)$ einfach ist und

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{E_j}$$

die Standardzerlegung von f ist, dann definieren wir das **Integral** von f bzgl. μ durch

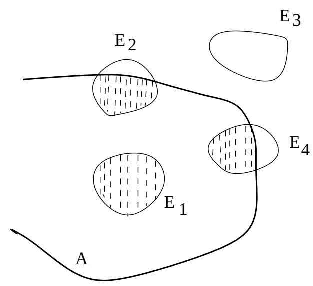
$$\int_M f d\mu := \sum_{j=1}^n a_j \, \mu(E_j).$$

Hier setzen wir $0 \cdot \infty = 0$ und beachten ferner, daß in der obigen Standardzerlegung $a_j \geq 0$ für alle j gilt.

Für $A \in \mathfrak{M}$ setzen wir

$$\int_A f d\mu := \sum_{j=1}^n a_j \, \mu(E_j \cap A).$$

Falls M und das Maß μ aus dem Kontext klar sind, schreiben wir einfach $\int f$ für $\int_M f d\mu$ und $\int_A f$ für $\int_A f d\mu$.



Proposition 2.2.1 : *Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in \mathcal{L}^+(M)$ einfache Funktionen.*

(i) *Wenn $c \geq 0$, dann gilt $\int cf = c \int f$.*

(ii) *$\int (f+g) = \int f + \int g$.*

(iii) *Wenn $f \leq g$, dann gilt $\int f \leq \int g$.*

Beweis:

Idee: Betrachte die Standardzerlegungen der einfachen Funktionen.

(i) folgt unmittelbar aus den Definitionen. Für (ii) betrachte die Standardzerlegungen

$$f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}, \quad \text{und} \quad g = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{B_k}$$

von f und g. Zusätzlich setzen wir

$$A_0 := M \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j, \quad B_0 := M \setminus \bigcup_{k=1}^m B_k, \quad a_0 := 0 =: b_0.$$

Dann gilt

$$f = \sum_{j=0}^n a_j \chi_{A_j}, \quad \text{und} \quad g = \sum_{k=0}^m b_k \chi_{B_k}$$

sowie

$$A_j = \bigcup_{k=0}^m (A_j \cap B_k) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, n$$

und

$$B_k = \bigcup_{j=0}^n (A_j \cap B_k) \quad \forall k = 0, 1, \ldots, m.$$

Jetzt rechnet man

$$\int f + \int g = \sum_{j=0}^{n} a_j \mu(A_j) + \sum_{k=0}^{m} b_k \mu(B_k) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} (a_j + b_k)\mu(A_j \cap B_k).$$

Wenn $\{c_1, \ldots, c_l\} = \{a_j + b_k \mid j = 0, \ldots, n; k = 0, \ldots, m\} \setminus \{0\}$ und

$$C_i := \bigcup_{a_j + b_k = c_i} (A_j \cap B_k),$$

dann ist

$$f + g = \sum_{i=1}^{l} c_i \chi_{C_i}$$

die Standardzerlegung von $f + g$, und (ii) folgt aus

$$\int (f+g) = \sum_{i=1}^{l} c_i \mu(C_i) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{a_j + b_k = c_i} (a_j + b_k)\mu(A_j \cap B_k).$$

Wenn jetzt $f \leq g$, dann gilt $a_j \leq b_k$ wenn immer $A_j \cap B_k \neq \emptyset$. Also findet man

$$\int f = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_j \mu(A_j \cap B_k) \leq \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} b_k \mu(A_j \cap B_k) = \int g.$$

■

Proposition 2.2.2 : *Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^+(M)$ eine einfache Funktion. Dann ist die Abbildung*

$$\mathfrak{M} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \int_A f$$

ein Maß.

Beweis:

IDEE: Die Arbeit besteht darin, die Gleichheit $\int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f$ für jede disjunkte Familie $E_1, E_2, \ldots$ von meßbaren Mengen in M zu zeigen. Dafür braucht man den Umordnungssatz für Reihen.

Sei $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ die Standardzerlegung von f. Wir stellen zunächst fest, daß $\int_\emptyset f = \sum_{j=1}^n a_j \mu(\emptyset) = 0$ ist und wählen eine disjunkte, abzählbare Familie $E_1, E_2, \ldots$ von meßbaren Mengen in M. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\Big(A_j \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_j \cap E_i)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f.
\end{aligned}$$

Beachte, daß wir hier die Umordnung der Summierung rechtfertigen müssen: Wenn die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i)$ konvergieren, geht das nach dem Umordnungssatz für Reihen.Wenn eine der Reihen nicht konvergiert, verifizieren wir direkt, daß beide Seiten ∞ sind. ■

Für beliebige $f \in \mathcal{L}^+(M)$ und $A \in \mathfrak{M}$ definieren wir jetzt das **Integral** von f über A bzgl. μ durch

$$\int_A f\, d\mu := \sup\{\textstyle\int_A \phi d\mu \mid 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ einfach}\}.$$

Es folgt unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für einfache Funktionen (vgl. Proposition 2.2.1), daß $\int_A cf d\mu = c \int_A f d\mu$ für $f \in \mathcal{L}^+(M)$ und $c \geq 0$ sowie $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ für $f, g \in \mathcal{L}^+(M)$ und $f \leq g$. Genauso sieht man, daß $\int_A f \leq \int_B f$, falls $f \in \mathcal{L}^+(M)$ und $A \subseteq B$ meßbar sind. Außerdem erkennt man, daß $\int_A f d\mu = 0$ ist, falls $f^{-1}(]0, \infty]) \cap A$ eine Nullmenge ist.

Die Additivität des Integrals ergibt sich nicht automatisch, weil nicht klar ist, ob man jede einfache Funktion ϕ, die $0 \leq \phi \leq f + g$ erfüllt, als Summe $\phi_1 + \phi_2$ mit $0 \leq \phi_1 \leq f$ und $0 \leq \phi_2 \leq g$ schreiben kann. Das folgende Lemma wird uns helfen, die Additivität des Integrals zu beweisen.

Lemma 2.2.3 : *Seien $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum und $f\colon M \to [0, \infty]$ eine meßbare Funktion. Dann gibt es eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \ldots \leq f$.

(b) $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise gegen* f.

Beweis:

IDEE: Mit $E_n^k := f^{-1}(]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}])$ und $F_n := f^{-1}(]2^n, \infty])$ für $n, k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$ ist die gesuchte Folge durch $\phi_n := \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}$ gegeben.

Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$ setze

$$E_n^k := f^{-1}(]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}])$$

und

$$F_n := f^{-1}(]2^n, \infty]).$$

Dann ist

$$\phi_n := \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}$$

eine einfache Funktion. Jetzt genügt es, für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Eigenschaften zu zeigen:

(a') $\phi_n \leq \phi_{n+1}$,

(b') $0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq 2^{-n}$ für jedes $x \in M$ mit $f(x) \leq 2^n$.

Dafür müssen wir mehrere Fälle unterscheiden:

1) Wenn $x \in E_n^k$ und $f(x) \in]\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}]$, dann gilt $x \in E_{n+1}^{2k}$ und

$$\phi_n(x) = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} = \phi_{n+1}(x).$$

2) Wenn $x \in E_n^k$ und $f(x) \in]\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}]$, dann gilt $x \in E_{n+1}^{2k+1}$ und

$$\phi_n(x) = \frac{k}{2^n} < \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \phi_{n+1}(x).$$

3) Wenn $x \in F_n$ und $f(x) \in\ ]2^n, 2^{n+1}]$, dann gilt für ein $2^{2n+1} \leq k \leq 2^{2n+2} - 1$, daß $x \in E_{n+1}^k$ und

$$\phi_n(x) = 2^n \leq \frac{k}{2^{n+1}} = \phi_{n+1}(x).$$

4) Wenn $x \in F_n$ und $f(x) \in\ ]2^{n+1}, \infty[$, dann gilt $x \in F_{n+1}$ und

$$\phi_n(x) = 2^n < 2^{n+1} = \phi_{n+1}(x).$$

Damit haben wir (a'). Die Bedingung (b') folgt analog durch Nachrechnen (Übung!). ■

Der nächste Satz ist eine Variante des Satzes von der Monotonen Konvergenz und an dieser Stelle der Schlüssel zur Additivität des Integrals.

Satz 2.2.4 (Monotone Konvergenz): *Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^+(M)$ mit $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Beweis:

IDEE: Die Ungleichung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \leq \int f$ für $f = \sup_n f_n$ ist unmittelbar einsichtig. Für die Umkehrung betrachte $E_n = \{x \in M \mid f_n(x) \geq t\phi(x)\}$, wobei $0 < t < 1$ fest gewählt ist, und schließe mit Proposition 2.2.2 (und Übung 2.1.1), daß $\int \phi = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} \phi$ gilt. Es folgt $t \int \phi \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n$ und damit die Behauptung mit $t \to 1$.

Wegen der Monotonie von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\int f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind die Suprema gleich den Limiten. Setze $f := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{L}^+(M)$. Dann zeigt $f_n \leq f$ sofort $\int f_n \leq \int f$ und somit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \leq \int f.$$

Um auch die Umkehrung zu zeigen, wähle ein $t \in\ ]0, 1[$. Wenn jetzt ϕ eine einfache Funktion mit $0 \leq \phi \leq f$ ist, betrachte

$$E_n := \{x \in M \mid f_n(x) \geq t\phi(x)\}.$$

Da f_n und ϕ meßbar sind, ist auch E_n meßbar. Sei $x \in M$ beliebig mit $f(x) > 0$, dann gilt wegen $\phi(x) \leq f(x)$ und $\phi(x) < \infty$, daß $t\phi(x) < f(x)$. Also finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \geq t\phi(x)$. Also gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = M.$$

Wegen $E_n \subseteq E_{n+1}$ folgt mit Proposition 2.2.2 und Übung 2.1.1

$$\int \phi = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} \phi,$$

und wir können rechnen

$$t \int \phi = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} t\phi \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n.$$

Weil $t \in]0, 1[$ beliebig war, erhalten wir

$$\int \phi \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n$$

und schließlich

$$\int f \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n.$$

■

Korollar 2.2.5 : *Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^+(M)$. Wir setzen $f := \sup\{\sum_{j=1}^n f_j \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt*

$$\int f = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

Beweis:

IDEE: Benütze zunächst Proposition 2.2.1 und Satz 2.2.4, um $\int(h+g) = \int h + \int g$ für $h, g \in \mathcal{L}^+(M)$ zu zeigen. Mit Induktion über die Anzahl der Summanden und dann erneut Satz 2.2.4 folgt schließlich die Behauptung.

Wir zeigen zunächst, daß für $h, g \in \mathcal{L}^+(M)$ gilt

$$\int (h+g) = \int h + \int g.$$

Dazu seien zu h und g Folgen $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen wie in Lemma 2.2.3 gewählt. Dann ist $(\phi_n + \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge einfacher Funktionen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\phi_n + \psi_n) = h + g$ und Satz 2.2.4 liefert zusammen mit Proposition 2.2.1

$$\int (h+g) = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n+\psi_n) = \lim_{n\to\infty} (\int \phi_n + \int \psi_n) = (\lim_{n\to\infty} \int \phi_n) + (\lim_{n\to\infty} \int \psi_n) = \int h + \int g.$$

Mit Induktion folgt jetzt sofort

$$\int \sum_{j=1}^{n} f_j = \sum_{j=1}^{n} \int f_j.$$

Die Funktionen $g_n := \sum_{j=1}^n f_j$ konvergieren punktweise monoton gegen f und erneut mit Satz 2.2.4 schließen wir

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int g_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

■

Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ wie zuvor ein Maßraum und $f\colon M \to [-\infty, \infty]$ eine meßbare Funktion sowie $f = f^+ - f^-$ die Zerlegung von f in ihren positiven und ihren negativen Teil. Wenn eines der beiden Integrale $\int f^\pm$ endlich ist, dann definieren wir

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \tag{2.1}$$

und nennen $\int f d\mu$ das **Integral** von f. Wenn sowohl $\int f^+ d\mu$ als auch $\int f^- d\mu$ endlich sind, nennen wir f **μ-integrierbar**. Wenn aus dem Kontext klar ist, welches Maß gemeint ist, lassen wir das μ weg. Eine meßbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ heißt **integrierbar**, wenn $\operatorname{Re} f\colon M \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f\colon M \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Das **Integral** $\int f$ ist dann durch

$$\int f := \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$$

definiert. Für $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sei $\mathcal{L}^1(M, \mu, \mathbb{K})$ oder (wenn das Maß aus dem Kontext klar ist) $\mathcal{L}^1(M, \mathbb{K})$ die Menge der integrierbaren Funktionen $f\colon M \to \mathbb{K}$. Statt $\mathcal{L}^1(M, \mathbb{C})$ schreibt man oft nur $\mathcal{L}^1(M)$.

Satz 2.2.6 : *Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f : M \to [-\infty, \infty]$ meßbar, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist μ-integrierbar.*

(2) *f^+ und f^- sind μ-integrierbar.*

(3) *Es gibt eine μ-integrierbare Funktion g mit $|f| \leq g$.*

(4) *$|f|$ ist μ–integrierbar.*

Beweis:

„(1)⇔(2)“: Dies folgt unmittelbar aus den Definition der Integrierbarkeit.

„(2)⇒(3)“: Sind f^+ und f^- μ-integrierbar, dann sind f^+, f^- und $g = |f| = f^+ + f^-$ meßbar (vgl. Bemerkung 1.2.6) und nach Korollar 2.2.5 gilt

$$\int g \; d\mu = \int (f^+ + f^-) \; d\mu = \int f^+ \; d\mu + \int f^- \; d\mu < \infty.$$

Somit ist auch g μ-integrierbar und wegen $|f| = g = f^+ + f^-$ folgt die Behauptung.

„(3)⇒(4)“: Existiert eine μ-integrierbare Funktion g mit $|f| \leq g$, so gilt, wieder mit Korollar 2.2.5, aufgrund von $g = |f| + (g - |f|)$:

$$\int |f| \; d\mu \leq \int g \; d\mu.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Annahme, daß $\int g \; d\mu < \infty$.

„(4)⇒(2)“: Sei nun $|f|$ μ-integrierbar. Es gilt: $f^+ \leq |f|$ und $f^- \leq |f|$. Außerdem sind f^+, f^- und $|f|$ meßbar und nichtnegativ. Damit wird

$$\int f^+ \; d\mu \leq \int |f| \; d\mu < \infty \qquad \text{und} \qquad \int f^- \; d\mu \leq \int |f| \; d\mu < \infty.$$

■

Proposition 2.2.7 : *$\mathcal{L}^1(M, \mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und die Abbildung*

$$\int : \mathcal{L}^1(M, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int f$$

ist $\mathbb{K}$-linear, bildet nichtnegative Funktionen auf nichtnegative Zahlen ab und erfüllt die Ungleichung

$$\Big| \int_M f \Big| \leq \int_M |f|.$$

Beweis:

Idee: Zerlege erst in Real- und Imaginärteil, dann in positiven und negativen Teil.

Wir zeigen zunächst die Linearität. Dabei behandeln wir nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei dem Leser als (einfache) Übung überlassen.

Seien also $f, h \in \mathcal{L}^1(M, \mathbb{R})$ und $r \in \mathbb{R}$. Es genügt jetzt zu zeigen, daß $f + h, rf \in \mathcal{L}^1(M, \mathbb{R})$ und

$$\int (f + h) = \int f + \int h, \quad \int rf = r \int f.$$

Die Funktionen $f + h$ und f sind meßbar (vgl. Bemerkung 1.2.6). Wenn $r \geq 0$, dann gilt $rf^\pm = (rf)^\pm$, also sind $\int (rf)^\pm = r \int f^\pm$ endlich (vgl. Proposition 2.2.1). Dies zeigt, daß rf integrierbar ist mit

$$\int rf = \int rf^+ - \int rf^- = r \int f^+ - r \int f^- = r \int f.$$

Der Fall $r < 0$ liefert $(rf)^{\pm} = -rf^{\mp}$ und geht ansonsten analog.

Zunächst gilt wegen Korollar 2.2.5

$$\int f - \int h = \int f' - \int h'$$

für alle $f, f', h, h' \in \mathcal{L}^+(M)$ mit $f - h = f' - h'$, falls die betrachteten Integrale endlich sind.

Wegen Satz 2.2.6 und der Dreiecksungleichung folgt die Integrierbarkeit von $f + h$, und somit gilt mit obigem

$$\begin{aligned} \int (f+h) &= \int (f+h)^+ - \int (f+h)^- \\ &= \int (f^+ + h^+) - \int (f^- + h^-) \\ &= \int f^+ - \int f^- + \int h^+ - \int h^- \\ &= \int f + \int h. \end{aligned}$$

Damit ist die Linearität des Integrals gezeigt. Die Positivität ist nach Definition unmittelbar klar, und für die letzte Behauptung setzen wir $\int_M f = re^{i\gamma}$ mit $r \geq 0$ und $\gamma \in [0, 2\pi[$. Dann rechnen wir nach:

$$|\int_M f| = e^{-i\gamma} \int_M f = \int_M e^{-i\gamma} f = \int_M \mathrm{Re}(e^{-i\gamma} f) \leq \int_M |e^{-i\gamma} f| = \int_M |f|,$$

weil $\int \mathrm{Im}(e^{-i\gamma} f) = 0$ ist. ■

Übung 2.2.1 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $\mathfrak{M}^*$ die Familie aller $E \subseteq M$, für die es $A, B \in \mathfrak{M}$ gibt mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$. Für $E \in \mathfrak{M}^*$ definiere $\mu^*(E) := \mu(A)$. Zeige:

(i) $\mathfrak{M}^*$ ist eine σ-Algebra, die $\mathfrak{M}$ enthält,

(ii) μ^* ist wohldefiniert,

(iii) μ^* ist ein Maß auf M,

(iii) μ^* ist eine **Fortsetzung** von μ, d.h. $\mu^*(E) = \mu(E)$ für alle $E \in \mathfrak{M}$.

Man nennt den Maßraum $(M, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ die **Vervollständigung** von $(M, \mathfrak{M}, \mu)$. ■

Übung 2.2.2 : Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $(M, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ seine Vervollständigung.

(i) Beweise, daß eine Funktion $f : M \to [-\infty, \infty]$ genau dann $\mathfrak{M}^*$-meßbar ist, wenn es $\mathfrak{M}$-meßbare Funktionen $f_1, f_2 : M \to [-\infty, \infty]$ gibt, mit $f_1 \leq f \leq f_2$ und $f_1 = f_2$ μ-fast überall gilt (d.h. $\mu(\{x \in M \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$).

(ii) Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine $\mathfrak{M}^*$-meßbare Funktion. Zeige, daß die Funktionen f_1, f_2 aus Teil (i) i.a. *nicht* überall endlich gewählt werden können.

■

Übung 2.2.3 : Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f : M \to [0, \infty]$ eine meßbare Funktion. Definiere

$$\nu(E) := \int_E f \, d\mu, \quad E \in \mathfrak{M}.$$

Zeige, daß ν ein Maß ist. ■

Übung 2.2.4 : Sei $\mathfrak{M}$ die σ-Algebra aus Übung 1.1.4. Definiere für $E \in \mathfrak{M}$

$$\mu(E) := \begin{cases} 0, & \text{falls } E \text{ abzählbar ist,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, daß μ ein Maß auf $\mathfrak{M}$ ist. ■

Übung 2.2.5 : Finde ein Beispiel eines Maßes, das nicht σ-endlich ist. ■

Übung 2.2.6 : Seien $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum, μ ein endliches Maß auf $\mathfrak{M}$ und $f \in \mathcal{L}^1(M, \mathbb{C}, \mu)$. Weiter sei $S \subseteq \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Menge mit der Eigenschaft, daß

$$A_E(f) := \frac{\int_E f\, d\mu}{\mu(E)} \in S$$

für jedes $E \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(E) > 0$. Zeige, daß $f(x) \in S$ für fast alle $x \in M$.
Hinweis: Jede offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ läßt sich als abzählbare Vereinigung offener Kugeln schreiben, vgl. Proposition 1.1.5. ■

Übung 2.2.7 : Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Teilmengen von M mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Zeige, daß fast alle $x \in M$ in höchstens endlich vielen E_n liegen (d.h., die Menge derjenigen $x \in M$, für die dies nicht gilt, hat das Maß 0). ■

Übung 2.2.8 : Charakterisiere diejenigen einfachen Funktionen, die integrierbar sind. ■

Übung 2.2.9 : Ist die **Dirichletsche Sprungfunktion**

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

integrierbar?

Übung 2.2.10 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : M \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert (d.h. für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $x \in M$ gilt: $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$). Zeige:

(i) Wenn $\mu(M) < \infty$, dann ist f integrierbar.

(ii) Die Aussage aus Teil (i) ist falsch für Maßräume mit $\mu(M) = \infty$.

■

2.3 Produktmaße

Gegeben seien zwei Maßräume $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ und $(N, \mathfrak{N}, \nu)$. Wir wollen daraus ein Maß auf $(M \times N, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N})$ konstruieren. Die Grundidee ist, Funktionen in zwei Variablen nacheinander in den beiden Variablen zu integrieren.

Für $E \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ sind nach Proposition 1.2.4 die Mengen

$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in N \mid (x, y) \in E\} \in \mathfrak{N} \\ E^y &:= \{x \in M \mid (x, y) \in E\} \in \mathfrak{M} \end{aligned}$$

für alle $x \in M$ und $y \in N$ meßbar. Damit kann man die Funktionen

$$\begin{aligned} f_E &: M \to [0, \infty], \quad x \mapsto \nu(E_x) \\ g_E &: N \to [0, \infty], \quad y \mapsto \mu(E^y) \end{aligned}$$

definieren.

Lemma 2.3.1 : *Falls μ und ν σ-endlich sind, sind die Funktionen f_E und g_E sind für jedes $E \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ meßbar.*

Beweis:

Idee: Betrachte $\mathfrak{C} := \{E \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \mid f_E \text{ meßbar}\}$ und zeige, daß $\mathfrak{C}$ die Bedingungen (a) und (b) aus Lemma 1.1.6 erfüllt. Da außerdem endliche, disjunkte Vereinigungen von Quadern der Form $A \times B$ mit $A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{C}$ sind, folgt die Behauptung.

Wir führen den Beweis für f_E, der andere Fall geht analog. Betrachte das Mengensystem

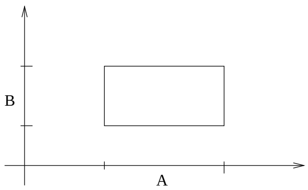
$$\mathfrak{C} := \{E \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \mid f_E \text{ meßbar}\}.$$

Wenn $E = A \times B$ mit $A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}$ ein meßbarer Quader ist, dann gilt

$$E_x = \begin{cases} B & \text{falls } x \in A, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und

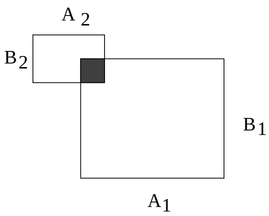
$$f_E(x) = \begin{cases} \nu(B) & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Also ist f_E in diesem Fall meßbar und $E \in \mathfrak{C}$. Wenn E die *disjunkte* Vereinigung endlich vieler, meßbarer Quader $E_1, \ldots, E_k$ ist, dann ist

$$f_E = f_{E_1} + \ldots + f_{E_k}$$

meßbar und Übung 1.1.1 zeigt, daß die von den meßbaren Quadern erzeugte Algebra $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{C}$ enthalten ist.



Damit reicht es jetzt, zu zeigen, daß $\mathfrak{C}$ die Bedingungen (a) und (b) aus Lemma 1.1.6 erfüllt: Sei $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ mit $E_j \in \mathfrak{C}$ und $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$. Dann gilt für $x \in M$ (vgl. Übung 2.1.1)

$$f_E(x) = \nu(E_x) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (E_j)_x\right) = \lim_{j \in \mathbb{N}} \nu((E_j)_x) = \lim_{j \in \mathbb{N}} f_{E_j}(x),$$

was die Meßbarkeit von f_E zeigt (vgl. Proposition 1.2.7).

Analog, wenn $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ mit $E_j \in \mathfrak{C}$ und $E = \bigcap_{j=1}^\infty E_j$, dann gilt für $x \in M$ (vgl. Übung 2.1.1(iv) - an dieser Stelle braucht man die σ-Endlichkeit)

$$f_E(x) = \nu(E_x) = \nu\left(\bigcap_{j=1}^\infty (E_j)_x\right) = \lim_{j \in \mathbb{N}} \nu((E_j)_x) = \lim_{j \in \mathbb{N}} f_{E_j}(x),$$

was wiederum die Meßbarkeit von f_E zeigt (vgl. Proposition 1.2.7). ∎

Satz 2.3.2 : *$(M,\mathfrak{M},\mu)$ und $(N,\mathfrak{N},\nu)$ seien zwei σ-endliche Maßräume. Dann ist Abbildung*

$$\mu\otimes\nu\colon \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}\to[0,\infty],\quad E\mapsto\int_M \nu(E_x)d\mu(x)$$

ein Maß. Weiter ist $\mu\otimes\nu$ σ-endlich und es gilt

$$(\mu\otimes\nu)\big(E\big)=\int_M\nu(E_x)d\mu(x)=\int_N\mu(E^y)d\nu(y).$$

Beweis:

Idee: Die σ-Additivität $\mu\otimes\nu(\bigcup_{j=1}^\infty E_j)=\sum_{j=1}^\infty \mu\otimes\nu(E_j)$ folgt aus dem Satz 2.2.4 von der Montonen Konvergenz. Die σ-Endlichkeit des Maßes folgt mit Satz 2.1.3 durch zurückschneiden mit Quadern endlichen Volumens. Die letzte Formel folgt durch Vertauschen der Rollen von μ und ν sowie erneut dem Eindeutigkeitssatz 2.1.3.

Es ist klar, daß

$$(\mu\otimes\nu)\big(\emptyset\big)=\int_M\nu(\emptyset)d\mu(x)=0$$

gilt. Wenn $E_1,E_2,\dots$ eine disjunkte Familie von Mengen in $\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$ ist und $E=\bigcup_{j=1}^\infty E_j$, dann gilt

$$\nu(E_x)=\sum_{j=1}^\infty\nu\big((E_j)_x\big)$$

und mit dem Satz 2.2.4 von der Monotonen Konvergenz folgt

$$(\mu\otimes\nu)\big(E\big)=\int_M\nu(E_x)d\mu(x)=\sum_{j=1}^\infty\int_M\nu((E_j)_x)d\mu(x)=\sum_{j=1}^\infty(\mu\otimes\nu)\big(E_j\big).$$

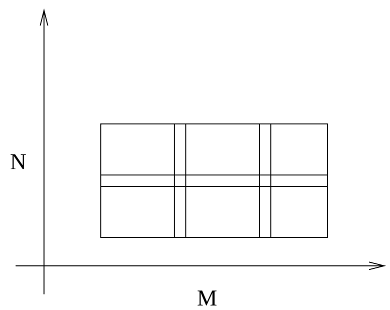
Dies zeigt, daß $\mu\otimes\nu$ ein Maß ist.

Wenn jetzt μ und ν σ-endlich sind, dann gibt es Mengen $A_1,A_2,\dots$ mit $A_j\in\mathfrak{M}$, $\mu(A_j)<\infty$ für $j\in\mathbb{N}$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j=M$ sowie Mengen $B_1,B_2,\dots$ mit $B_j\in\mathfrak{N}$, $\nu(B_j)<\infty$ für $j\in\mathbb{N}$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}B_j=N$. Es folgt

$$\bigcup_{j,k\in\mathbb{N}}A_j\times B_k=M\times N$$

mit

$$\begin{aligned}(\mu\otimes\nu)\big(A_j\times B_k\big)&=\int_M\nu((A_j\times B_k)_x)d\mu(x)\\&=\int_{A_j}\nu(B_k)d\mu(x)\\&=\nu(B_k)\mu(A_j)\\&<\infty.\end{aligned}$$



Dies zeigt, daß $\mu \otimes \nu$ σ-endlich ist und sogar die etwas stärkere Bedingung aus Satz 2.1.3 erfüllt.

Wir wiederholen jetzt das ganze Argument für die Abbildung

$$\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \to [0, \infty], \quad E \mapsto \int_N \mu(E^y) d\nu(y)$$

und finden, daß auch diese Abbildung ein σ-endliches Maß ist, für das die Mengen $A_j \times B_k$ das Maß $\mu(A_j)\nu(B_k)$ haben. Aber dann zeigt Satz 2.1.3 die Gleichheit

$$(\mu \otimes \nu)\big(E\big) = \int_M \nu(E_x) d\mu(x) = \int_N \mu(E^y) d\nu(y).$$

■

Das Maß $\mu \otimes \nu$ heißt das **Produktmaß** von μ und ν.

Man will das Verfahren aus Satz 2.3.2 iterieren und so Produktmaße von endlich vielen σ-endlichen Maßen konstruieren. In diesem Kontext ist das folgende Korollar sehr wichtig.

Korollar 2.3.3 : *Seien $(M_i, \mathfrak{M}_i, \mu_i)$ für $i = 1, 2, 3$ drei σ-endliche Maßräume. Dann gilt:*

(i) $(\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2) \otimes \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_1 \otimes (\mathfrak{M}_2 \otimes \mathfrak{M}_3) = \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 \otimes \mathfrak{M}_3$.

(ii) $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$.

Beweis:

IDEE: Kombiniere Satz 2.3.2 mit Satz 2.1.3.

Der erste Teil folgt sofort aus der Tatsache, daß alle drei σ-Algebren von den Mengen der Form $E_1 \times E_2 \times E_3$ mit $E_i \in \mathfrak{M}_i$ und $i = 1, 2, 3$ erzeugt werden.

Da die von den Mengen der Form $E_1 \times E_2 \times E_3$ erzeugte Algebra $\mathfrak{A}$ mit $E_i \in \mathfrak{M}_i$ und $i = 1, 2, 3$ gerade die Menge der disjunkten Vereinigungen solcher Mengen ist (vgl. Übung 1.1.1), folgt der zweite Teil aus Satz 2.3.2 und Satz 2.1.3, weil die Maße auf Elementen von $\mathfrak{A}$ übereinstimmen. ■

Mit diesem Korollar können wir jetzt zu einer endlichen Familie $(M_i, \mathfrak{M}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, k$ von σ-endlichen Maßräumen ein **Produktmaß** $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k$ auf $(M_1 \times \ldots \times M_k, \mathfrak{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{M}_k)$ durch

$$\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k(M) = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes (\ldots \otimes \mu_k) \ldots)(E)$$

definieren.

Beispiel 2.3.4 : Betrachte den meßbaren Raum

$$(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}) = (\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}).$$

Dann heißt das Produktmaß $\lambda^n = \lambda^1 \otimes \ldots \otimes \lambda^1$ der Lebesgue-Maße auf $\mathbb{R}$ das **Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}^n$. ■

Satz 2.3.5 (Fubini - 1. Version): *Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ und $(N, \mathfrak{N}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume. Sei $f\colon M \times N \to [0, \infty]$ eine meßbare Abbildung. Dann gilt*

$$\int_M \left(\int_N f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_N \left(\int_M f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{M \times N} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

Beweis:

IDEE: Für charakterische Funktionen ist dies gerade der Satz 2.3.2. Dann bildet man Linearkombinationen und approximiert durch einfache Funktionen gemäß Lemma 2.2.3. Die Behauptung folgt dann aus dem Satz 2.2.4 von der Monotonen Konvergenz.

Wenn f die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge ist, dann ist die Aussage gerade die Gleichheit in Satz 2.3.2 plus die Definition des Produktmaßes. Da man Summen und positive Konstanten aus den Integralen herausziehen kann, ist die Behauptung auch für einfache Funktionen richtig.

Wähle jetzt eine approximierende Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für f wie in Lemma 2.2.3. Dann gilt

$$\int_{M\times N} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \lim_{n\to\infty}\int_{M\times N}\phi_n(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y). \tag{2.2}$$

Jetzt setzt man

$$g_n(x) := \int_N \phi_n(x,y)d\nu(y) \quad \text{und} \quad h_n(y) := \int_M \phi_n(x,y)d\mu(x)$$

sowie

$$g(x) := \int_N f(x,y)d\nu(y) \quad \text{und} \quad h(y) := \int_M f(x,y)d\mu(x).$$

Dann sind die Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigende Folgen meßbarer Funktionen und Satz 2.2.4 zeigt

$$g_n(x)\to g(x) \quad \text{und} \quad h_n(y)\to h(y).$$

Wieder mit Satz 2.2.4 rechnen wir jetzt

$$\begin{aligned}
\int_M g(x)d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_M g_n(x)d\mu(x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_M\left(\int_N \phi_n(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{M\times N}\phi_n(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_N\left(\int_M \phi_n(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_N h_n(y)d\nu(y)\\
&= \int_N h(y)d\nu(y).
\end{aligned}$$

Wegen (2.2) beweist diese Rechnung die Behauptung. ■

Beispiel 2.3.6 : Die Eulersche **Beta–Funktion** $B\colon [0,\infty[\times[0,\infty[\to[0,\infty[$ ist durch

$$B(p,q) := \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$$

definiert. Mit Satz 2.3.5 zeigt man die Identität

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{2.3}$$

Dazu führt man in der Definition

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

der **Gamma–Funktion** für $p > 0$ die Substitution $x = ty$ durch und findet

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^\infty y^{p-1} e^{-ty} dy$$

für $t > 0$. Damit rechnet man unter Zuhilfenahme von Satz 2.3.5

$$\begin{aligned}
\Gamma(p+q)B(p,q) &= \Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \\
&= \int_0^\infty t^{p-1} dt \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy \\
&= \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y} dy \int_0^\infty (ty)^{p-1} e^{-ty} y \, dt \\
&= \Gamma(q)\Gamma(p).
\end{aligned}$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird die folgende Darstellung der Betafunktion benützt, die man aus der Substitution $x = \frac{t}{1+t}$ erhält:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx.$$

Durch Auswertung von (2.3) in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ leitet man die Formel

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

her:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4} - (t-\frac{1}{2})^2}} \\
&= \arcsin\big(2(t-\tfrac{1}{2})\big)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

■

Übung 2.3.1 : Sei ν ein endliches Maß auf dem meßbaren Raum $([0,\infty[, \mathfrak{B}_{[0,\infty[})$, und sei $\phi\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi(t) = \nu([0,t[)$. Weiter sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon M \to [0,\infty[$ meßbar. Dann gilt

$$\int_M (\phi \circ f)(x) d\mu(x) = \int_{[0,\infty[} F(t) d\nu(t)$$

für die Funktion $F\colon [0,\infty[\to [0,\infty[, t \mapsto \mu(\{x \in M \mid f(x) > t\})$. ■

2.4 Nullmengen und Konvergenz

Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $E \in \mathfrak{M}$ heißt eine **μ-Nullmenge**, wenn $\mu(E) = 0$. Eine Aussage über die Punkte $x \in M$ heißt **μ-fast überall** (**μ-f.ü.**) wahr, wenn sie für das Komplement einer Nullmenge wahr ist. Manchmal sagt man auch, die Aussage gelte **für μ-fast alle** (**f.μ-f.a.**) x. Wenn das Maß aus dem Kontext klar ist, lassen wir das μ in den obigen Bezeichnungen weg.

Seien insbesondere $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $(N, \mathfrak{N})$ ein meßbarer Raum. Dann heißen zwei meßbare Abbildungen $f, g \colon M \to N$ **μ–fast überall gleich**, wenn $\{m \in M \mid f(m) \neq g(m)\}$ eine μ–Nullmenge ist. Wir schreiben dann

$$f = g \quad \text{(f.ü.)}$$

Beispiel 2.4.1 : Eine Folge von Funktionen $f_n \colon M \to \mathbb{C}$ konvergiert (f.ü.) gegen eine Funktion $f \colon M \to \mathbb{C}$, wenn es eine Nullmenge $A \subseteq M$ gibt mit

$$\forall x \in M \setminus A \ : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

■

Proposition 2.4.2 : *Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^+(M)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\int_M f d\mu = 0$.

(2) $f = 0$ (f.ü.).

Beweis:

IDEE: Für einfache Funktionen ist das klar und für allgemeines f folgt „(2) $\Rightarrow$ (1)“ sofort, weil jede f approximierende, einfache Funktion fast überall Null sein muß. Für die Umkehrung zeigt man, daß alle $E_k := \{x \in M \mid f(x) \geq \frac{1}{k}\}$ Nullmengen sind.

Wenn $f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}$ eine einfache Funktion ist, dann folgt die Behauptung sofort aus $\int f = \sum_{j=1}^k a_j \mu(E_j)$.

Für allgemeines f nehmen wir zunächst an, daß $f = 0$ (f.ü.). Wenn ϕ eine einfache Funktion mit $0 \leq \phi \leq f$ ist, dann ist $\phi = 0$ (f.ü.), also gilt $\int \phi = 0$. Damit folgt $\int f = 0$ nach der Definition des Integrals.

Umgekehrt sei $\int f = 0$, dann setze

$$E_k := \{x \in M \mid f(x) \geq \tfrac{1}{k}\}.$$

Es gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\mu(E_k) = k \int_{E_k} \tfrac{1}{k} \leq k \int f = 0,$$

also impliziert

$$M = \{x \in M \mid f(x) = 0\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$$

die Behauptung, weil die abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst eine Nullmenge ist (Übung!). ■

Nach Proposition 2.4.2 ist die Menge $\mathcal{N}$ der meßbaren Funktionen $f\colon M \to \mathbb{K}$, die μ-fast überall gleich Null sind, ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(M,\mathbb{K})$, auf dem das Integral verschwindet. Daher definiert $\int : \mathcal{L}^1(M,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ auch ein lineares Funktional auf dem Quotientenraum $L^1(M,\mathbb{K}) := \mathcal{L}^1(M,\mathbb{K})/\mathcal{N}$. Es wird auch mit $\int$ bezeichnet. Da es im Kontext der Integrationstheorie meist unerheblich ist, wenn man eine Funktion auf einer Nullmenge abändert, wird oft der Unterschied zwischen L^1 und $\mathcal{L}^1$ nicht extra erwähnt. Man betrachtet dann ein Element von $L^1(M,\mathbb{K})$ als eine Funktion, die man aber nach Belieben auf Nullmengen abändern darf.

Wenn wir betonen wollen, über welches Maß wir integrieren, schreiben wir $\mathcal{L}^1(M,\mu,\mathbb{K})$ und $L^1(M,\mu,\mathbb{K})$. Wenn aus dem Kontext klar ist, über welchen Raum wir integrieren oder in welchem Körper die Werte der Funktionen liegen sollen, schreiben wir auch $L^1(\mathbb{C},\mu)$ oder $L^1(\mu)$ etc.

Lemma 2.4.3 (Fatou): *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^+(M)$. Dann gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Beweis:

Idee: Betrachte die monoton steigende Folge $(\inf_{n\ge k} f_n)_{k\in\mathbb{N}}$ mit punktweisem Grenzwert $\liminf_{k\to\infty} f_k$ und benütze den Satz 2.2.4 von der Monotonen Konvergenz.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\forall j \ge k \ : \quad \inf_{n\ge k} f_n \le f_j,$$

also

$$\forall j \ge k \ : \quad \int \inf_{n\ge k} f_n \le \int f_j.$$

Dies wiederum zeigt

$$\int \inf_{n\ge k} f_n \le \inf_{j\ge k} \int f_j.$$

Weil die Folge $(\inf_{n\ge k} f_n)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton steigend mit punktweisem Grenzwert $\liminf_{k\to\infty} f_k$ ist, zeigt Satz 2.2.4 jetzt

$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int \inf_{n\ge k} f_n \le \lim_{k\to\infty} \inf_{j\ge k} \int f_j = \liminf_{k\to\infty} \int f_k.$$

■

Satz 2.4.4 (Dominierte Konvergenz): *Sei $(M,\mathfrak{M},\mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen $M \to \mathbb{C}$, die* (f.ü.) *gegen eine meßbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ konvergiert. Wenn es eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(M,\mathbb{R})$ mit*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \quad |f_n| \le g \ \text{(f.ü.)}$$

gibt, dann ist $f \in \mathcal{L}^1(M,\mathbb{C})$, und es gilt

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Beweis:

Idee: Aufspaltung in Real- und Imaginärteil und anschließend in Positiv- und Negativteil reduziert die Behauptung auf nichtnegative Funktionen. Durch Abänderung der Funktionen auf einer Nullmenge kann man außerdem annehmen, daß die Konvergenz punktweise ist. Anwendung des Lemmas 2.4.3 von Fatou auf $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und auf $(g - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liefert dann die Behauptung.

Nach Satz 2.2.6 und der Voraussetzung gilt $f_n \in \mathcal{L}^1(M, \mathbb{C})$ für alle n gilt. Wegen $|\operatorname{Im} f_n|, |\operatorname{Re} f_n| \leq |f_n|$ gelten die Voraussetzungen automatisch auch für Real- und Imaginärteile der Funktionen. Man kann daher annehmen, daß alle involvierten Funktionen reellwertig sind. Jetzt zeigt man mit demselben Argument, daß wir o.B.d.A. annehmen können $f_n, f \in \mathcal{L}^+(M)$.

Sei jetzt $A \in \mathfrak{M}$ eine Nullmenge mit

$$\forall x \in M \setminus A \ : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

und

$$\forall n \in \mathbb{N}, x \in M \setminus A \ : \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

Indem wir f_n durch $\min\big(f_n, g(1-\chi_A)\big)$ und f durch $\min\big(f, g(1-\chi_A)\big)$ ersetzen, können wir jetzt annehmen, daß $A = \emptyset$. Jetzt sagt das Lemma 2.4.3 von Fatou, daß

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \leq \int g.$$

Andererseits zeigt dasselbe Lemma

$$\int g - \int f = \int (g-f) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n.$$

Zusammen sehen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

was die Behauptung beweist. ∎

Ein Maß μ heißt **vollständig**, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge meßbar ist.

Beachte, daß der punktweise Grenzwert einer Folge von meßbaren Funktionen meßbar ist (vgl. Proposition 1.2.7). Wenn also die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überall gegen f konvergiert, so ist im Satz 2.4.4 von der dominierten Konvergenz die Annahme, daß f meßbar ist, überflüssig. Sei jetzt $A \subseteq M$ eine μ-Nullmenge mit

$$\forall x \in M \setminus A \ : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Wir definieren $\widetilde{f}\colon M \to \mathbb{C}$ durch

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \notin A, \\ 0 & \text{für } x \in A. \end{cases}$$

Dann gilt $\widetilde{f} = \lim_{n\to\infty} f_n \cdot (1-\chi_A)$, also ist $\widetilde{f}$ meßbar. Für $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ gilt

$$f^{-1}(E) \cap (M \setminus A) = \widetilde{f}^{-1}(E) \cap (M \setminus A),$$

d.h.

$$f^{-1}(E) = (\widetilde{f}^{-1}(E) \cap (M \setminus A)) \cup (f^{-1}(E) \cap A).$$

Wenn μ vollständig ist, dann ist f automatisch meßbar.

Satz 2.4.5 (Fubini - 2. Version): *Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ und $(N, \mathfrak{N}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und $f\colon M \times N \to \mathbb{C}$ eine meßbare Abbildung. Wenn*

$$\int_{M\times N} |f(x,y)| d(\mu \otimes \nu)(x,y) < \infty,$$

dann gilt

(i) *Die Funktionen*

$$f_x\colon N \to \mathbb{C}, \quad y \mapsto f(x,y)$$

sind für fast alle $x \in M$ integrierbar.

(ii) *Die Funktionen*

$$f^y\colon M \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x,y)$$

sind für fast alle $y \in N$ integrierbar.

(iii) *Es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{M\times N} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) &= \int_M \left(\int_N f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)\\ &= \int_N \left(\int_M f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(x).\end{aligned}$$

Beweis:

IDEE: Man zeigt, daß man sich auf nicht negative Funktionen beschränken kann, und beachtet, daß ein Integral nur endlich sein kann, wenn der Integrand fast überall endlich ist. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz 2.3.5 von Fubini.

Indem wir zunächst nach Real- und Imaginärteil und dann nach positivem und negativem Teil aufspalten, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $f \in \mathcal{L}^+(M)$. Jetzt benützen wir die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 2.3.5. Dort wird gezeigt, daß für $g(x) = \int_N f(x,y)d\nu(y)$ gilt

$$\int_M g(x)d\mu(x) < \infty.$$

Dann kann es aber keine Menge positiven Maßes geben, auf der $g\colon M \to [0,\infty]$ den Wert ∞ annimmt. Dies beweist (i). Die Behauptung (ii) folgt ganz analog. Der dritte Teil wurde schon in Satz 2.3.5 bewiesen. ■

Satz 2.4.6 (Parameterabhängige Integrale): *Seien $(M,\mathfrak{M},\mu)$ ein Maßraum und $f\colon M\times[a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion, für die $f(\,\cdot,t)\colon M \to \mathbb{C}$ für jedes $t \in [a,b]$ integrierbar ist. Setze $F(t) := \int_M f(x,t)\,d\mu(x)$.*

(i) *Wenn es eine integrierbare, nichtnegative Funktion g auf M mit $|f(x,t)| \le g(x)$ für alle $x \in M$ und $t \in [a,b]$ gibt und $\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$ für alle $x \in M$ ist, dann gilt auch*

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0).$$

(ii) *Wenn die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$ existiert, und es außerdem eine integrierbare, nichtnegative Funktion g auf M mit $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \le g(x)$ für alle $x \in M$ und $t \in [a,b]$ gibt, so ist F differenzierbar in $]a,b[$, und es gilt*

$$F'(t) = \int_M \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\;d\mu(x).$$

Beweis:

IDEE: Wende den Satz 2.4.4 über die dominierte Konvergenz auf die Folgen $f_n(x) = f(x,t_n)$ und $\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}$ mit $t_n \to t_0$ an (für letzteres braucht man den Mittelwertsatz).

(i) Setze $f_n(x) = f(x,t_n)$, wobei $t_n \to t_0$ für $n \to \infty$. Mit dem Satz 2.4.4 über die dominierte Konvergenz rechnen wir

$$\begin{aligned}
F(t_0) &= \int_M f(x,t_0)\ d\mu(x) \\
&= \int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\ d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_M f(x,t_n)\ d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} F(t_n).
\end{aligned}$$

(ii) Mit $h_n(x) := \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}$ gilt $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$, also ist $\frac{\partial f}{\partial t}(\,\cdot, t_0)$ meßbar (vgl. Proposition 1.2.7). Mit dem Mittelwertsatz sieht man, daß für jedes $x \in M$ gilt

$$|h_n(x)| \le \sup_{t\in[a,b]} \left|\tfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x).$$

Jetzt rechnen wir wieder mit dem Satz 2.4.4 über die dominierte Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\ d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_M h_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n - t_0} \int_M (f(x,t_n) - f(x,t_0))\ d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0}.
\end{aligned}$$

■

Übung 2.4.1 : Sei $(M,\mathfrak{M},\mu)$ ein Maßraum. Für $f,g : M \to [-\infty,\infty]$ gelte $f = g$ μ-fast überall, d.h., die Menge $\{x \in M | f(x) \neq g(x)\}$ ist meßbar und hat das Maß Null.

(i) Belege durch ein Beispiel, daß aus der Meßbarkeit von f im allgemeinen nicht die Meßbarkeit von g folgt.

(ii) Sei jetzt $(M,\mathfrak{M},\mu)$ vollständig. Zeige, daß mit f auch g meßbar ist.

■

Übung 2.4.2 : Definiere $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Zeige:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx &= \frac{\pi}{4}, \text{ aber} \\
\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy &= -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(ii) Folgere aus (i), daß f nicht integrierbar ist.

■

Übung 2.4.3 : Definiere $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{1-y^2} & \text{falls } |y| \neq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, daß

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx \right) dy$$

existiert, aber

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy \right) dx$$

nicht existiert.

Übung 2.4.4 : Definiere $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{(1-|x|)^2+(1-|y|)^2} & \text{falls } |xy| \neq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige:

(i)

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx \right) dy = 0.$$

(ii) f ist nicht über $[-1,1] \times [-1,1]$ integrierbar.

■

Übung 2.4.5 : Seien $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \subseteq M$ meßbar. Zeige, daß aus $\mu(A) = 0$ folgt, daß $A \times B$ eine Nullmenge in $(M \times M, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}, \mu \otimes \mu)$ ist. ■

Übung 2.4.6 : Sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeige:

$$\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{x} f(x,y)dy \right) dx = \int_{0}^{1} \left(\int_{y}^{1} f(x,y)dx \right) dy.$$

■

Übung 2.4.7 : Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x_1,x_2) := \begin{cases} \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} & \text{falls } x_1^2+x_2^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\, d(x_1,x_2).$$

■

Übung 2.4.8 : Berechne das Volumen des Kugeloktanten

$$K := \{(x_1,x_2,x_3) : x_1,x_2,x_3 \geq 0, x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1\}.$$

■

Übung 2.4.9 : Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die rechte Hälfte des Einheiskreises und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1,x_2) \mapsto x_1.$$

Berechne $\int_A f(x_1,x_s)d(x_1,x_2)$. ■

Übung 2.4.10 : Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(A) > 0$ heißt der Punkt

$$S := \frac{1}{\lambda^n(A)} \int_A x\, dx \in \mathbb{R}^n$$

der **Schwerpunkt** von A. Berechne den Schwerpunkt des Kugeloktanten aus Aufgabe 2.4.8. (Hierbei ist die Integration komponentenweise zu verstehen.) ■

Übung 2.4.11 : Berechne die folgenden Grenzwerte:

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx,$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

■

Kapitel 3

Fortsetzung von Maßen

σ–Algebren stellen den natürlichen Definitionsbereich von Wahrscheinlichkeitsmaßen dar. Für die beiden Maß–Fortsetzungssätze, die wir hier behandeln, erweist es sich jedoch als zweckmäßig, als Vorstufen von σ–Algebren auch einfachere Mengensysteme zu untersuchen. Man erhält dann relativ einfache Existenz- und Fortsetzungssätze für Maße. Insbesondere sieht man wie bestimmten Funktionen (den sogenannten Verteilungsfunktionen) auf $\mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsmaße zugeordnet werden können. Damit läßt sich dann eine Vielzahl von in der Stochastik relevanten Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschreiben.

3.1 Mengensysteme

Ω sei eine nichtleere Menge und und $\mathfrak{P}(\Omega) = \{N \mid N \subseteq \Omega\}$ die Potenzmenge von Ω, d.h. die Menge aller Teilmengen von Ω. Eine Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt **vereinigungsstabil** (geschrieben $\cup$-stabil), wenn mit $A, B \in \mathfrak{M}$ auch $A \cup B \in \mathfrak{M}$ gilt und **durchschnittsstabil** oder einfach **schnittstabil** (geschrieben $\cap$-stabil), wenn mit $A, B \in \mathfrak{M}$ auch $A \cap B \in \mathfrak{M}$ gilt.

Ein System S von Teilmengen von Ω heißt **Semiring** über Ω, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $\emptyset \in S$,

(b) S ist $\cap$–stabil,

(c) Zu $A, B \in S$ existieren $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_n \in S$ mit

$$A \backslash B = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} C_i.$$

Bemerkung 3.1.1 : Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Bezeichnen $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$, d.h. $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \ldots, n$, dann versteht man unter einem linksseitig offenen und rechtsseitig abgeschlossenen **Intervall** die folgende Punktmenge:

$$]a, b]_{(n)} := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i \leq b_i;\ i = 1, \ldots, n\}.$$

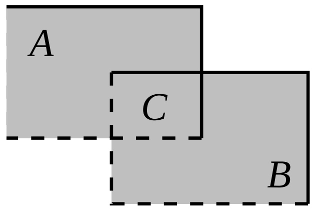
Beachte, daß $]a, b]_{(n)}$ leer ist, falls es ein j mit $b_j \leq a_j$ gibt.
Behauptung: Das Mengensystem

$$\mathbb{I}^n := \{]a, b]_{(n)} \mid a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \leq b\}$$

ist ein Semiring über $\Omega = \mathbb{R}^n$.

(a) $\emptyset =]a, a]_{(n)} \in \mathbb{I}^n$.

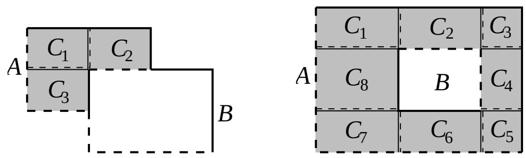
(b) Sei $A =]a,b]_{(n)}$, $B =]c,d]_{(n)}$ und $C = A \cap B$.



Mit $e_i := \max\{a_i, c_i\}$ und $f_i := \min\{a_i, c_i\}$ gilt

$$]a,b]_{(n)} \cap]c,d]_{(n)} =]e,f]_{(n)}.$$

(c) Sei $A =]a,b]_{(n)}$ und $B =]c,d]_{(n)}$.



Mit $e_i := \max\{a_i, c_i\}$ und $f_i := \min\{a_i, c_i\}$ gilt $]a,b]_{(n)} \setminus]c,d]_{(n)} =]a,b]_{(n)} \setminus]e,f]_{(n)}$, d.h., wir können annehmen, daß

$$a_i \leq c_i \leq d_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

gilt. Damit können wir dann rechnen

$$\begin{aligned}
]a,b]_{(n)} \setminus]c,d]_{(n)} &= \left]\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right]_{(n)} \Big\backslash \left]\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}\right]_{(n)} \\
&= \left]\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right]_{(n)} \cup \left]\begin{pmatrix} d_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right]_{(n)} \\
&\quad \cup \left]\begin{pmatrix} c_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ c_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right]_{(n)} \cup \left]\begin{pmatrix} c_1 \\ d_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right]_{(n)} \\
&\quad \vdots \\
&\quad \cup \left]\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}\right]_{(n)} \cup \left]\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}\right]_{(n)}.
\end{aligned}$$

Dabei sind die Vereinigungen disjunkt und manche der 2^n Stücke evtl. leer (wenn nämlich nicht $a_i < c_i < d_i < b_i$ gilt).

■

Ein System $\mathfrak{R}$ von Teilmengen einer nichtleeren Menge Ω heißt ein **Ring** über Ω, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) $\emptyset \in \mathfrak{R}$,

(b) $\mathfrak{R}$ ist $\cup$–stabil,

(c) Für $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt $A \backslash B \in \mathfrak{R}$.

Ein System $\mathfrak{A}$ von Teilmengen einer nichtleeren Menge Ω heißt eine **Algebra** über Ω, wenn gilt:

(a) $\Omega \in \mathfrak{A}$,

(b) $\mathfrak{A}$ ist $\cup$–stabil,

(c) Für $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\complement A := \Omega \backslash A \in \mathfrak{A}$.

Ein System $\mathfrak{F}$ von Teilmengen einer nichtleeren Menge Ω heißt $\sigma-$**Algebra** über Ω, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) $\Omega \in \mathfrak{F}$,

(b) Für $A \in \mathfrak{F}$ gilt $\complement A := \Omega \backslash A \in \mathfrak{F}$.

(c) Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathfrak{F}$ ist $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$.

Beispiel 3.1.2 : Sei $\Omega \neq \emptyset$.

(i) $\mathfrak{R} = \{\emptyset\}$ ist der kleinste Ring über Ω.

(ii) $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist die kleinste σ–Algebra über Ω.

(iii) $\mathfrak{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$ ist die größte σ–Algebra über Ω.

■

Proposition 3.1.3 : *Sei Ω nicht leer. Dann gilt*

(i) *Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring über Ω, dann ist $\mathfrak{R}$ auch $\cap$–stabil.*

(ii) *$\{\sigma$–Algebra$\} \subseteq \{$Algebra$\} \subseteq \{$Ring$\} \subseteq \{$Semiring$\}$*

(iii) *Ein Ring $\mathfrak{R}$ über Ω ist genau dann eine Algebra über Ω, wenn $\Omega \in \mathfrak{R}$.*

(iv) *Sei $\mathfrak{F}$ eine σ–Algebra über Ω. Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathfrak{F}$ ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$.*

Beweis:

Idee: Rechnen mit Schnitten, Vereinigungen und Komplementen von Mengen. Insbesondere braucht man die de Morganschen Gesetze.

(i) Zunächst stellt man fest, daß aus $A, B \in \mathfrak{R}$ nach Definition auch $A \backslash B \in \mathfrak{R}$ folgt. Dann folgt aber auch $A \backslash (A \backslash B) \in \mathfrak{R}$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} A \backslash (A \backslash B) &= A \cap \complement(A \backslash B) \\ &= A \cap \complement(A \cap \complement B) \\ &= A \cap (\complement A \cup B) \\ &= (A \cap \complement A) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

(ii) Die Inklusion $\{\sigma\text{–Algebra}\} \subseteq \{\text{Algebra}\}$ folgt unmittelbar aus den Definitionen. Jede Algebra $\mathfrak{A}$ ist ein Ring, weil sie mit Ω auch $\emptyset = \Omega\backslash\Omega$ enthält und aus $A, B \in \mathfrak{A}$ folgt

$$A\backslash B = A \cap \complement B = \complement B \cup \complement A \in \mathfrak{A}.$$

Nach (i) ist schließlich auch jeder Ring ein Semiring.

(iii) Wegen (ii) ist nur noch zu zeigen, daß ein Ring $\mathfrak{R}$ über Ω mit $\Omega \in \mathfrak{R}$ eine Algebra ist. Das ist wegen $\complement A = \Omega\backslash A$ aber klar.

(iv) Aus $A_n \in \mathfrak{F}$ folgt $\complement A_n \in \mathfrak{F}$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n \in \mathfrak{F}$. Aber dann gilt auch

$$\complement\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement(\complement A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}.$$

■

Übung 3.1.1 : Man zeige durch Angabe von Beispielen, daß die Inklusionskette $\{\sigma\text{–Algebra}\} \subseteq \{\text{Algebra}\} \subseteq \{\text{Ring}\} \subseteq \{\text{Semiring}\}$ für Mengensysteme in einer nichtleeren Menge Ω i.a. aus strikten Inklusionen besteht. ■

Ein System $\mathfrak{D}$ von Teilmengen von Ω heißt **Dynkin–System** über Ω, wenn es die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $\Omega \in \mathfrak{D}$,

(b) Für $A \in \mathfrak{D}$ gilt $\complement A = \Omega\backslash A \in \mathfrak{D}$,

(c) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{D}$ ist auch $\dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}} A_n \in \mathfrak{D}$.

Für $A \subseteq B$ in $\mathfrak{D}$ gilt $A \cup \complement B \in \mathfrak{D}$ und daher $\complement(A \cup \complement B) = B \setminus A \in \mathfrak{D}$. Also kann man Bedingung (b) durch

(b′) Für $A, B \in \mathfrak{D}$ mit $A \subseteq B$ gilt $B \setminus A \in \mathfrak{D}$.

ersetzen.

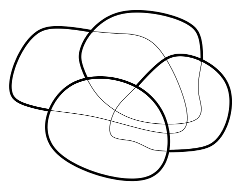
Satz 3.1.4 : *$\mathfrak{D}$ sei ein Dynkin–System über Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$\mathfrak{D}$ ist eine σ–Algebra.*

(2) *$\mathfrak{D}$ ist $\cap$–stabil.*

Beweis:

IDEE: „(1)⇒(2)“ ist klar mit Proposition 3.1.3. Für die Umkehrung muß man abzählbare Vereinigungen in disjunkte abzählbare Vereinigungen umwandeln. Das geht mit dem Ansatz $B_n := A_n\backslash(\bigcup_{m<n} A_m)$.



Da in Proposition 3.1.3 bereits gezeigt wurde, daß σ-Algebren $\cap$-stabil sind, ist nur noch zu zeigen, daß für jede Folge $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{D}$ (A_n nicht notwendig paarweise disjunkt) auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{D}$ ist. Betrachte dazu die disjunkten Mengen

$$B_n := A_n \cap \bigcap_{m=1}^{n-1} \complement A_m = A_n \cap \complement \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m = A_n \backslash (\bigcup_{m=1}^{n-1} A_m).$$

Da $\mathfrak{D}$ ist nach Voraussetzung $\cap$-stabil und abgeschlossen unter Komplementbildung ist, sind die B_n in $\mathfrak{D}$. Damit folgt $\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathfrak{D}$ und es reicht zu zeigen, daß $\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Die Inklusion „$\subseteq$“ ist offensichtlich. Für die Umkehrung wähle $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gibt es ein kleinstes $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_0 \in A_{n_0}$ und es folgt $x_0 \in A_{n_0} \backslash (\bigcup_{n<n_0} A_n) = B_{n_0}$. ∎

Proposition 3.1.5 : *Sei I eine beliebige Indexmenge und $\mathfrak{X}_i$ für jedes $i \in I$ ein Ring, eine Algebra, ein Dynkin–System oder eine σ–Algebra über Ω. Dann ist*

$$\mathfrak{X} := \bigcap_{i\in I} \mathfrak{X}_i = \{A \subseteq \Omega \mid (\forall i \in I)\ A \in \mathfrak{X}_i\}$$

ein Mengensystem desselben Typs wie die $\mathfrak{X}_i$.

Beweis:

Idee: Prüfe direkt die Definitionen nach.

Wir beweisen den Satz exemplarisch für Ringe:

(a) Wegen $\emptyset \in \mathfrak{X}_i$ für alle $i \in I$ gilt $\emptyset \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{X}_i$.

(b) Für $A, B \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{X}_i$ gilt $A \cup B \in \mathfrak{X}_i$ für alle $i \in I$, d.h., $A \cup B \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{X}_i$.

(c) Für $A, B \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{X}_i$ gilt $A\backslash B \in \mathfrak{X}_i$ für alle $i \in I$, d.h., $A\backslash B \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{X}_i$.

∎

Bemerkung 3.1.6 : Der Durchschnitt von Semiringen ist im allgemeinen kein Semiring mehr, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:

$$S_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\},$$
$$S_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

sind zwei Semiringe über $\Omega = \{1,2,3\}$. Der Schnitt

$$S = S_1 \cap S_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2,3\}\}$$

ist zwar gegenüber der Durchschnittsbildung abgeschlossen, doch es gilt:

$$\begin{aligned} S_1 :&\ \{1,2,3\}\backslash\{1\} = \{2,3\} = \{2\} \cup \{3\} \text{ mit } \{2\},\{3\} \in S_1, \\ S_2 :&\ \{1,2,3\}\backslash\{1\} = \{2,3\} \in S_2, \\ S :&\ \{1,2,3\}\backslash\{1\} = \{2,3\} \notin S. \end{aligned}$$

∎

Satz 3.1.7 (Erzeugendensysteme): *Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathfrak{B}$ ein beliebiges System von Teilmengen von Ω. Dann gibt es unter den Ringen, Algebren, Dynkin–Systemen bzw. σ–Algebren, die $\mathfrak{B}$ enthalten, jeweils ein kleinstes solches System (symbolisch $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{B}), \mathfrak{A}(\mathfrak{B}), \mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ bzw. $\sigma(\mathfrak{B})$) nämlich*

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{B}) = \bigcap \{\mathfrak{M}' \mid \mathfrak{M}' \supseteq \mathfrak{B},\ \mathfrak{M}' \text{ ist Ring, Algebra, Dynkin–System bzw. } \sigma\text{–Algebra}\}.$$

$\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ heißt das von $\mathfrak{B}$ **erzeugte System** *und $\mathfrak{B}$ der* **Erzeuger des Systems**.

Beweis:

IDEE: Kombiniere Proposition 3.1.5 mit dem Umstand, daß die Potenzmenge eine σ-Algebra (eine Algebra, ein Ring etc.) ist.

Die Existenz eines solchen Systems folgt aus der Tatsache, daß die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Menge $\mathfrak{B}$ umfaßt und alle Eigenschaften eines Ringes, einer Algebra, eines Dynkin–Systems bzw. einer σ–Algebra besitzt. Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar aus Proposition 3.1.5, wonach der Durchschnitt von Ringen, Algebren, Dynkin–Systemen bzw σ–Algebren wieder ein Ring, eine Algebra, ein Dynkin–System bzw. eine σ–Algebra ist. ∎

Satz 3.1.8 : *Sei Ω eine nichtleere Menge, und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ sei schnittstabil, so stimmen das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin–System $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ und die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ–Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ überein.*

Beweis:

IDEE: Wegen Satz 3.1.4 genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ schnittstabil ist. Dafür weißt man nach, daß für jedes $A \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ das System $\mathfrak{D}_A := \{C \subseteq \Omega \mid A \cap C \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})\}$ ein Dynkin–System ist, das $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ enthält. Daraus folgt dann die Behauptung.

Da jede σ–Algebra auch ein Dynkin–System ist, gilt $\mathfrak{D}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Ist umgekehrt $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ als σ–Algebra nachgewiesen, folgt auch $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ und somit $\mathfrak{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Nach Satz 3.1.4 muß deshalb nur noch überprüft werden, ob $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ mit je zwei Mengen A und B auch $A \cap B$ enthält. Dafür zeigen wir, daß für jedes $A \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ das System

$$\mathfrak{D}_A := \{C \subseteq \Omega \mid A \cap C \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})\}$$

ein Dynkin–System ist. Wegen $A \cap \Omega = A \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ ist $\Omega \in \mathfrak{D}_A$. Seien weiter $B, C \in \mathfrak{D}_A$ mit $B \subseteq C$. Dann ist $(A \cap C) \setminus (A \cap B) \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$, weil $A \cap B \subseteq A \cap C$ und $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ Dynkin–System ist. Es gilt aber $(A \cap C) \setminus (A \cap B) = A \cap (C \setminus B)$, so daß $C \setminus B \in \mathfrak{D}_A$. Sei nun $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{D}_A$. Da $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ Dynkin–System ist, folgt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A \cap D_n) \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ und wegen $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A \cap D_n) = A \cap \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ ist deshalb $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathfrak{D}_A$. Damit ist nachgewiesen, daß $\mathfrak{D}_A$ ein Dynkin–System ist. Für jedes $E \in \mathcal{E}$ gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}_E$ (weil $\mathcal{E}$ schnittstabil ist) und deshalb $\mathfrak{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}_E$. Für jedes $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ und jedes $E \in \mathcal{E}$ ist also $E \cap D \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ bzw. $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}_D$ und somit $\mathfrak{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}_D$, mit anderen Worten $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ ist $\cap$–stabil. ∎

Eine σ–Algebra $\mathfrak{F}$ heißt **separabel**, wenn es ein abzählbares Teilmengensystem $K \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $\sigma(K) = \mathfrak{F}$ gibt.

Satz 3.1.9 (Darstellungssatz für Ringe): *Ist S ein Semiring über Ω, so ist der von S erzeugte Ring das Mengensystem K aller Mengen $E \subseteq \Omega$, die eine endliche Zerlegung der Form*

$$E = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i \ , \quad A_i \in S \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$

gestatten.

Beweis:

IDEE: Mit Proposition 3.1.5 reduziert man die Behauptung auf die Implikation $E, D \in K \Rightarrow E \backslash D \in K$, die durch eine Mengenumrechnung unter Ausnutzung der Zerlegungen von E und D bewiesen wird.

Wir zeigen zunächst, daß K ein Ring ist: Wegen $\emptyset \in S$ folgt auch sofort $\emptyset \in K$. Seien jetzt $E, D \in K$. Dann gibt es Zerlegungen der Form

$$E = \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} A_i, \ A_i \in S \qquad \text{und} \qquad D = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} B_j, \ B_j \in S.$$

Wegen $E \cup D = (E \backslash D) \cup D$ und $(E \backslash D) \cap D = \emptyset$ genügt es $E \backslash D \in K$ zu beweisen. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} E \backslash D &= \left(\dot{\bigcup_{i=1}^{m}} A_i \right) \backslash \left(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} B_j \right) \\ &= \left(\dot{\bigcup_{i=1}^{m}} A_i \right) \cap \complement \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} B_j \\ &= \left(\dot{\bigcup_{i=1}^{m}} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} \complement B_j \right) \\ &= \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} \bigcap_{j=1}^{n} (A_i \cap \complement B_j) \\ &= \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} \bigcap_{j=1}^{n} (A_i \backslash B_j) \\ &= \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} \bigcap_{j=1}^{n} \dot{\bigcup_{k=1}^{l}} C_{ijk} \\ &= \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} \dot{\bigcup_{k=1}^{l}} \underbrace{\bigcap_{j=1}^{n} C_{ijk}}_{\in S} \in K, \end{aligned}$$

wobei $A_i \backslash B_j = \dot{\bigcup}_{k=1}^{l} C_{ijk}$ mit $C_{ijk} \in S$ eine passende Zerlegung ist. Jetzt wissen wir, daß K ein Ring ist, der S enthält. Wenn $\mathfrak{R}'$ ein weiterer Ring ist, der S enthält, dann enthält $\mathfrak{R}'$ auch alle Mengen der Form $E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} A_i$ mit $A_i \in S$, d.h. ganz K. Also ist K der von S erzeugte Ring (vgl. Proposition 3.1.5). ■

Beispiel 3.1.10 :

Wir wollen jetzt noch einmal zum Semiring $\mathbb{I}^n = \{]a, b]_{(n)} \mid a, b \in \mathbb{R}^n\}$ aller endlichen, links offenen und rechts abgeschlossenen Intervalle des $\mathbb{R}^n$ zurückkehren und uns einen Überblick über die Elemente der von $\mathbb{I}^n$ erzeugten σ–Algebra $\sigma(\mathbb{I}^n)$ verschaffen, die auch σ**–Algebra der Borelschen Mengen** genannt und mit $\mathfrak{B}^n$ bezeichnet wird. Da es sich bei den Ergebnissen von Zufallsexperimenten in der Regel um reelle Zahlen oder reellwertige Vektoren handelt, spielt die σ–Algebra der Borelschen Mengen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und deren Anwendungen naturgemäß eine besondere Rolle.

Da die Vereinigung bzw. der Durchschnitt von abzählbar vielen Mengen aus $\mathfrak{B}^n$ wieder ein Element aus $\mathfrak{B}^n$ ist, gehören neben den Intervallen $]a,b]_{(n)}$ auch die folgenden Mengen zu $\mathfrak{B}^n$:

$$[a,b]_{(n)} := \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i; i=1,\dots,n\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \left]a-\frac{1}{j},b\right]_{(n)} \in \mathfrak{B}^n,$$

$$]a,b[_{(n)} := \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i; i=1,\dots,n\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left]a,b-\frac{1}{j}\right]_{(n)} \in \mathfrak{B}^n,$$

$$]-\infty,b]_{(n)} := \{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid -\infty < x_i \le b_i; i=1,\dots,n\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}}]-m,b]_{(n)} \in \mathfrak{B}^n,$$

$$\{b\} =]a,b]_{(n)} \backslash (a,b)_{(n)} \in \mathfrak{B}^n.$$

■

Proposition 3.1.11 : *$\mathfrak{F}$ sei eine σ–Algebra über Ω und Ω' eine nichtleere Menge mit $\Omega' \subseteq \Omega$. Dann ist $\mathfrak{F}' := \{\Omega' \cap A \mid A \in \mathfrak{F}\}$ eine σ–Algebra über Ω', die sogenannte* **Spur–σ–Algebra**.

Beweis:

IDEE: Wähle für jedes $A' \in \mathfrak{F}'$ ein $A \in \mathfrak{F}$ mit $A' = A \cap \Omega'$ und nütze aus, daß $\mathfrak{F}$ eine σ–Algebra ist.

(a) Wegen $\Omega' \subseteq \Omega$ ist $\Omega' \cap \Omega = \Omega'$. Mit $\Omega \in \mathfrak{F}$ ist deshalb auch $\Omega' \in \mathfrak{F}'$.

(b) Sei $A' \in \mathfrak{F}'$. Aufgrund der Definition von $\mathfrak{F}'$ gibt es ein $A \in \mathfrak{F}$ mit $A' = \Omega' \cap A$. Da $\mathfrak{F}$ eine σ–Algebra ist, ist $\complement A \in \mathfrak{F}$. Dann gilt aber

$$\Omega' \backslash A' = \Omega' \backslash (\Omega' \cap A) = \Omega' \backslash A = \Omega' \cap \complement A \in \mathfrak{F}.$$

(c) Sei $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{F}'$. Dann gibt es aufgrund der Definition von $\mathfrak{F}'$ eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathfrak{F}$, so daß $A'_n = \Omega' \cap A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\mathfrak{F}$ σ–Algebra ist, ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$. Aufgrund der Definition von $\mathfrak{F}'$ folgt weiter:

$$\Omega' \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}'.$$

Es gilt aber

$$\Omega' \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega' \cap A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n, \quad \text{also} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n \in \mathfrak{F}$$

■

Übung 3.1.2 : Zeige, daß man als Erzeugendensystem für $\mathfrak{B}^n$ ebenso die linksseitig abgeschlossenen und rechtsseitig offenen Intervalle des $\mathbb{R}^n$ hätte wählen können. Zeige weiter, daß auch die offenen bzw. die kompakten Mengen des $\mathbb{R}^n$ Erzeugendensysteme der σ–Algebra der Borelschen Mengen $\mathfrak{B}^n$ sind. ■

Übung 3.1.3 : Es sei $\{\mathfrak{F}_t \mid t \in T\}$ ein System von σ-Algebren über einer nichtleeren Menge Ω. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(i) $\bigcup_{t\in T} \mathfrak{F}_t$ ist eine σ-Algebra.

(ii) $\bigcap_{t\in T} \mathfrak{F}_t$ ist eine σ-Algebra.

■

Übung 3.1.4 : Es sei $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen. Es sei $\mathfrak{A}_n$ eine σ-Algebra über Ω_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei ferner

$$\mathfrak{A} := \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \;\middle|\; A_n \in \mathfrak{A}_n \right\}.$$

(i) Zeige, daß $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über $\Omega := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ ist.

(ii) Ist $\mathfrak{A}$ ein Dynkin-System, wenn alle $\mathfrak{A}_n$ Dynkin-Systeme sind?

(iii) Kann man auf die paarweise Disjunktheit der Ω_n in (i) oder (ii) verzichten?

■

Übung 3.1.5 : Man zeige:

(i) Das System der beschränkten Mengen des $\mathbb{R}^n$ ist ein Ring, aber keine Algebra.

(ii) Das System der endlichen Vereinigungen von Intervallen der Form $]a,b]$, $]a,\infty[$ und $]-\infty,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ ist eine Algebra, aber keine σ-Algebra.

■

Übung 3.1.6 : Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengensystem mit folgenden Eigenschaften:

(a) $A, B \in \mathfrak{M}, A \cap B \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathfrak{M}$.

(b) $A, B \in \mathfrak{M}, A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \exists C_1, \dots, C_k$ paarweise disjunkt mit $B \backslash A = \bigcup_{j=1}^{k} C_j$.

(c) $\forall A, B \in \mathfrak{M}\ \exists C \in \mathfrak{M} \;:\; \quad A \subseteq C, B \subseteq C$.

Zeige, daß folgende Menge $\mathfrak{R}$ ein Ring ist:

$$\mathfrak{R} := \left\{ A \in \mathfrak{P}(\Omega) \;\middle|\; A = \dot{\bigcup_{j=1}^{k}} A_j, A_j \in \mathfrak{M} \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

■

3.2 Mengenfunktionen

Wir wollen jetzt auf den Begriff des (Wahrscheinlichkeits-) Maßes zu sprechen kommen. So wie es sich bei den bisherigen Betrachtungen als zweckmäßig erwies, neben der primär interessierenden σ–Algebra auch Mengensysteme mit verwandten Strukturen zu untersuchen, ist es auch im folgenden nützlich, neben Wahrscheinlichkeitsmaßen zunächst allgemeinere Mengenfunktionen zu betrachten.

Sei S ein Semiring über Ω und $\mu : S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Funktion.

(a) μ heißt **nichtnegativ**, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in S$.

(b) μ heißt **additiv**, wenn für alle $A, B \in S$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \dot\cup B \in S$ gilt:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(c) μ heißt **σ–additiv**, wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise fremden Elementen aus S (d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$) mit $\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in S$

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

(d) μ heißt **subadditiv**, wenn für alle $A, B \in S$ mit $A \cup B \in S$ gilt:

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

(e) μ heißt σ–**subadditiv**, wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus S mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in S$

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Die Einschränkung $S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (anstelle von $S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) wird gemacht, um sinnlose Ausdrücke wie $\infty - \infty$ zu vermeiden. Andererseits will man auch in der Lage sein, Mengen mit unendlichem Maß zu behandeln und kommt daher nicht mit reellwertigen Funktionen aus.

(i) μ heißt **Inhalt**, wenn μ nichtnegativ und additiv ist.

(ii) μ heißt **Prämaß**, wenn μ nichtnegativ und σ–additiv ist.

(iii) μ heißt **Maß**, wenn μ Prämaß und S eine σ–Algebra ist.

(iv) μ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, wenn μ ein Maß und $\mu(\Omega) = 1$ ist.

Ein Inhalt μ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty$ ist für alle $A \in S$.

Beispiel 3.2.1 :

(i) Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring über Ω und $\omega \in \Omega$. Die Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sei definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

Dann ist μ ein endliches Prämaß. Ist $\mathfrak{R}$ eine σ–Algebra, so ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (das sogenannte **Dirac–Maß**).

Veranschaulichung: $\mathfrak{R} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

$\mathfrak{R}$ ist eine σ–Algebra über $\Omega = \{1,2,3\}$. Wähle $\omega = 1$. Dann ergibt sich $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(\{2,3\}) = 0$, $\mu(\{1,2,3\}) = 1$.

(ii) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Die auf dem Semiring $\mathbb{I}^1$ der links offenen und rechts abgeschlossenen Intervalle $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a \leq b$ durch

$$\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$$

definierte Mengenfunktion ist ein endlicher Inhalt auf $\mathbb{I}^1$, denn es gilt:

(a) $\mu(\emptyset) = \mu(]a,a]) = F(a) - F(a) = 0$.

(b) $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a) \geq 0$ für $a \leq b$ auf Grund der Monotonie von F.

(c) Es seien $]a,b]$ und $]a',b']$ zwei Intervalle aus $\mathbb{I}^1$ mit $b = a'$. Die Eigenschaft $b = a'$ wird gefordert, um $]a,b] \cup]a',b'] =]a,b'] \in \mathbb{I}^1$ und $]a,b] \cap]a',b'] = \emptyset$ sicherzustellen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu(]a,b] \cup]a',b']) &= \mu(]a,b']) \\ &= F(b') - F(a) \\ &= F(a') - F(a) + F(b') - F(a') \\ &= F(b) - F(a) + F(b') - F(a') \qquad \text{(wegen } b = a'\text{)} \\ &= \mu(]a,b]) + \mu(]a',b']). \end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.2.2 : Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen, die alle auf einer σ–Algebra $\mathfrak{F}$ über Ω definiert sind. Sei weiter $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen mit $\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n = 1$. Weiter sei $\mu : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ definiert durch

$$\mu(A) := \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \underbrace{\mu_n(A)}_{\leq 1}}_{\leq 1}, \quad \forall A \in \mathfrak{F}.$$

Dann ist μ nichtnegativ und erfüllt $\mu(\Omega) = 1$. Um zu zeigen, daß μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{F}$ ist, muß man nur noch die σ–Additivität nachweisen:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Big) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \alpha_m\mu_m\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Big) && \text{(Def. von } \mu) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \alpha_m \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_m(A_n) && (\sigma\text{–Additivität der } \mu_m) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} \alpha_m\mu_m(A_n) && \text{(Umordnungssatz für abs. konv. Reihen)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) && \text{(Def. von } \mu).
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.3 : *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring über Ω und $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ein Inhalt. Dann gilt:*

(i) *Für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt $\mu(A\cup B) + \mu(A\cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

(ii) *μ ist monoton, d.h. $\forall A, B \in \mathfrak{R}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(iii) *$\forall A, B \in \mathfrak{R}$ mit $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$ gilt $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

(iv) *μ ist subadditiv.*

(v) *Ist μ ein Prämaß, dann ist μ σ–subadditiv.*

Beweis:

Idee: Schreibe $A\cup B = A\dot\cup(B\backslash A)$, dann liefern die Definitionen die Punkte (i) bis (iv). Für (v) braucht man wieder den Ansatz $B_n := A_n\backslash(\bigcup_{m<n} A_m)$.

(i) Für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt $A\cup B = A\cup(B\backslash A)$ und $A\cap(B\backslash A) = \emptyset$ sowie $(A\cap B)\cup(B\backslash A) = B$ und $(A\cap B)\cap(B\backslash A) = \emptyset$. Damit ergibt sich

$$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A), \quad \text{und} \quad \mu(A\cap B) + \mu(B\backslash A) = \mu(B).$$

Für $\mu(A\cap B) < \infty$ liefert dies $\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$, also die Behauptung. Für $\mu(A\cap B) = \infty$ folgt

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A)\mu(A\cap B) + \mu(B\backslash A) = \infty = \mu(A\cup B) + \mu(A\cap B).$$

(ii),(iii) Wegen $A = B\cap A$ finden wir

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \geq \mu(A).$$

(iv) Aufgrund von (ii) rechnet man

$$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

(v) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{R}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$. Wir setzen $B_1 := A_1$ und $B_n := A_n \backslash \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m$ für $n \geq 2$. Dann gilt $\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $B_n \subseteq A_n$ und $B_n \in \mathfrak{R}$ für alle n. Außerdem sind die B_n paarweise disjunkt Aus der σ–Additivität und der Monotonie von μ folgt dann

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

■

Proposition 3.2.4 : *$\mathfrak{F}$ sei eine σ–Algebra über Ω und $\mu : \mathfrak{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein Maß. Dann gilt:*

(i) *Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathfrak{F}$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle n gilt:*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ii) *Ist μ endlich, dann gilt für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathfrak{F}$ mit $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle n :*

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Die unter (i) angegebene Eigenschaft von μ bezeichnet man als **Stetigkeit von unten**, die unter (ii) als **Stetigkeit von oben**.

Beweis:

IDEE: Mit $B_n := A_n \backslash A_{n-1}$ und Proposition 3.2.3 bekommt man (i). Teil (ii) erhält man aus (i) durch Komplementbildung.

(i) O.B.d.A. sei $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (sonst ist die Aussage trivialerweise richtig). Wir setzen $B_1 := A_1$ und $B_{n+1} = A_{n+1} \backslash A_n$ für $n \geq 1$. Dann gilt: $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) && (\mu \text{ ist } \sigma\text{–additiv}) \\
&= \mu(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \backslash A_n) \\
&= \mu(A_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \big(\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)\big) && (\text{aufgrund von Proposition 3.2.3 (iii)}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).
\end{aligned}$$

(ii) Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \mu\Big(\complement\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n\Big) && \text{(Regeln von de Morgan)}\\
&= \mu\Big(\Omega\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n\Big) && \text{(Definition des Komplements)}\\
&= \mu(\Omega) - \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n\Big) && \text{(aufgrund von Proposition 3.2.3 (iii))}\\
&= \mu(\Omega) - \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega\backslash A_n)\Big).
\end{aligned}$$

Es gilt aber $\Omega\backslash A_1 \subseteq \Omega\backslash A_2 \subseteq \Omega\backslash A_3 \subseteq \cdots$. Deshalb können wir (i) anwenden und erhalten

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega\backslash A_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega\backslash A_n) = \mu(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Damit wird

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

■

3.3 Maß–Fortsetzungssätze und äußere Maße

Es seien $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zwei Mengensysteme über Ω mit $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$. Gilt für die beiden Mengenfunktionen $\nu : \mathfrak{M}_1 \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ und $\mu : \mathfrak{M}_2 \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ die Beziehung $\nu(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{M}_1$, dann nennt man μ eine **Fortsetzung** (**Erweiterung**) von ν auf $\mathfrak{M}_2$ und ν eine **Restriktion** (**Einschränkung**) von μ auf $\mathfrak{M}_1$.

Satz 3.3.1 (1. Maß–Fortsetzungssatz): *Sei S ein Semiring über Ω und $\nu\colon S \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ein Inhalt. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\mu\colon \mathfrak{R}(S) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, die auch ein Inhalt ist. Sie erfüllt*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i) \quad \textit{mit} \quad E = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i,\ A_i \in S,\ i = 1,\ldots,n, \quad \textit{und } A_i \cap A_j = \emptyset \textit{ für } i \neq j. \tag{3.1}$$

Falls ν ein Prämaß ist, ist auch μ ein Prämaß.

Beweis:

IDEE: Die Eindeutigkeit folgt aus dem Darstellungssatz 3.1.9 für Ringe. Für die Existenz zeigt man durch Verfeinerung zuerst, daß $\mu(E)$ nicht von der Wahl der Zerlegung abhhängt. Dann verifiziert man, daß μ ein Inhalt ist. Wieder mit dem Darstellungssatz 3.1.9 für Ringe und Verfeinerung folgert man schließlich die σ–Additivität von μ aus der σ–Additivität von ν.

Nach dem Darstellungssatz 3.1.9 für Ringe kann jede Menge $E \in \mathfrak{R}(S)$ in der Form $E = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$, $A_i \in S$ für $i = 1,\ldots,p$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ dargestellt werden. Daher ist μ, wenn es existiert, durch (3.1) eindeutig bestimmt. Die Existenz zeigen wir in mehreren Schritten.

1. Schritt: Die Darstellung von μ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der gewählten Zerlegung der Menge $E \in \mathfrak{R}(S)$ in Mengen A_i aus S.

Zu zeigen: Sind $E = \dot\bigcup_{i=1}^p A_i$ und $E = \dot\bigcup_{j=1}^q B_j$ mit $A_i, B_j \in S$ $(i = 1, \dots, p;\ j = 1, \dots, q)$ und $A_i \cap A_k = \emptyset$ für $i \neq k$, $B_j \cap B_\ell = \emptyset$ für $j \neq \ell$ zwei endliche Zerlegungen von E, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^p \nu(A_i) \overset{!}{=} \sum_{j=1}^q \nu(B_j).$$

Offensichtlich sind

$$A_i = A_i \cap E = A_i \cap \left(\dot\bigcup_{j=1}^q B_j \right) = \dot\bigcup_{j=1}^q (A_i \cap B_j) \qquad (i = 1, \dots, p)$$

$$B_j = E \cap B_j = \left(\dot\bigcup_{i=1}^p A_i \right) \cap B_j = \dot\bigcup_{i=1}^p (A_i \cap B_j) \qquad (j = 1, \dots, q)$$

Zerlegungen von A_i und B_j in paarweise disjunkte Mengen $A_i \cap B_j \in S$ für $i = 1, \dots, p$ und $j = 1, \dots, q$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^p \nu(A_i) &= \sum_{i=1}^p \nu\left(\dot\bigcup_{j=1}^q (A_i \cap B_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \nu(A_i \cap B_j) \qquad \text{(da } \nu \text{ additiv ist)} \\
&= \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p \nu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^q \nu\left(\dot\bigcup_{i=1}^p (A_i \cap B_j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^q \nu(B_j).
\end{aligned}$$

2. Schritt: μ ist ein Inhalt.

Hierfür ist zu zeigen, daß μ nichtnegativ und additiv ist. Daß μ nichtnegativ ist, folgt unmittelbar aus der Definition von μ. Sei $E = E' \dot\cup E''$ mit $E' \cap E'' = \emptyset$ und $E, E', E'' \in \mathfrak{R}(S)$. Dann existieren nach dem Darstellungssatz 3.1.9 für Ringe Zerlegungen

$$E' = \dot\bigcup_{i=1}^p A_i', \quad E'' = \dot\bigcup_{j=1}^q A_j'', \quad A_i', A_j'' \in S, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q,$$

so daß

$$E = E' \cup E'' = \bigcup_{i=1}^p A_i' \cup \bigcup_{j=1}^q A_j''.$$

Da $A_i' \cap A_j'' = \emptyset$ wegen $E' \cap E'' = \emptyset$, gilt

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^p \nu(A_i') + \sum_{j=1}^q \nu(A_j'') = \mu(E') + \mu(E'').$$

3. Schritt: Ist ν Prämaß, dann ist auch seine Erweiterung ein Prämaß, d.h., ist ν σ–additiv, so ist auch μ σ–additiv.

Zu zeigen: Ist $E = \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ eine Zerlegung von $E \in \mathfrak{R}(S)$ mit $E_n \in \mathfrak{R}(S)$, $E_n \cap E_m = \emptyset$ für $n \neq m$, so gilt:

$$\mu(E) \overset{!}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Aufgrund des Darstellungssatzes für Ringe (Satz 3.1.9) existieren für E und E_n Zerlegungen

$$E = \dot{\bigcup_{i=1}^{p}} A_i, \quad A_i \in S,\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$
$$E_n = \dot{\bigcup_{j=1}^{p_n}} B_{nj}, \quad B_{nj} \in S,\ B_{nj} \cap B_{nk} = \emptyset \text{ für } j \neq k.$$

Hieraus folgt:

$$E = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \dot{\bigcup_{j=1}^{p_n}} B_{nj},$$
$$A_i = A_i \cap E = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \dot{\bigcup_{j=1}^{p_n}} (A_i \cap B_{nj}),$$
$$B_{nj} = E \cap B_{nj} = \dot{\bigcup_{i=1}^{p}} (A_i \cap B_{nj}).$$

Die Mengen $A_i \cap B_{nj}$ sind paarweise disjunkt. Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \sum_{i=1}^{p} \nu(A_i) && \text{(Definition der Erweiterung)}\\
&= \sum_{i=1}^{p} \nu\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \dot{\bigcup_{j=1}^{p_n}} (A_i \cap B_{nj}) \Big) && \text{(aufgrund der speziellen Zerlegung der } A_i)\\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_n} \nu(A_i \cap B_{nj}) && (\nu \text{ ist nach Voraussetzung } \sigma\text{–additiv})\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_n} \sum_{i=1}^{p} \nu(A_i \cap B_{nj}) && \text{(Umordnungssatz für abs. konv. Reihen)}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_n} \nu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{p}} (A_i \cap B_{nj}) \Big) && (\nu \text{ ist additiv})\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_n} \nu(B_{nj}) && \text{(aufgrund der speziellen Zerlegung der } B_{nj})\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) && \text{(Definition von } \mu),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

■

S sei ein Semiring über Ω und μ ein Prämaß (Inhalt) auf (Ω, S). Weiter sei $\mathfrak{M} \subseteq S$ sei ein Mengensystem in Ω. Dann heißt μ σ**–endlich** auf $\mathfrak{M}$, wenn es Mengen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \in \mathfrak{M}$ mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$ und $\mu(A_j) < \infty$, $j \in \mathbb{N}$, gibt.

Der folgende Satz ist eine Verschärfung des schon bewiesenen Eindeutigkeitssatzes 2.1.3.

Satz 3.3.2 (Eindeutigkeitssatz für Maße): *$\mathfrak{M}$ sei ein $\cap$–stabiles System von Teilmengen von Ω. Sind μ_1 und μ_2 zwei Maße auf $\sigma(\mathfrak{M})$, die auf $\mathfrak{M}$ übereinstimmen und dort σ–endlich sind, so stimmen sie auch auf $\sigma(\mathfrak{M})$ überein.*

Beweis:

IDEE: Für jedes $E \in \mathfrak{M}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ zeigt man, daß $\mathfrak{D}_E := \{D \in \sigma(\mathfrak{M}) \mid \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)\}$ ein Dynkin–System ist, das $\mathfrak{M}$ enthält. Daraus folgert man mit Satz 3.1.8, daß $\mathfrak{D}_E = \sigma(\mathfrak{M})$. Für $\mu_i(E) = \infty$ schreibe E als disjunkte Vereinigung von Mengen endlichen Maßes.

Zu zeigen ist, daß für jedes $M \in \sigma(\mathfrak{M})$ gilt $\mu_1(M) = \mu_2(M)$. Für $E \in \mathfrak{M}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ setzen wir

$$\mathfrak{D}_E := \{D \in \sigma(\mathfrak{M}) \mid \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)\}.$$

Behauptung: $\mathfrak{D}_E$ ist ein Dynkin-System, daß $\mathfrak{M}$ enthält.

(a) Wegen $\mu_1(E \cap \Omega) = \mu_1(E) = \mu_2(E) = \mu_2(E \cap \Omega)$ gilt $\Omega \in \mathfrak{D}_E$.

(b) Mit Proposition 3.2.3 rechnen wir

$$\begin{aligned}
\mu_1(E \cap \complement D) &= \mu_1(E \backslash D) \\
&= \mu_1(E) - \mu_1(E \cap D) \\
&= \mu_2(E) - \mu_2(E \cap D) \\
&= \mu_2(E \cap \complement D),
\end{aligned}$$

falls $D \in \mathfrak{D}_E$. Also gilt $\complement D \in \mathfrak{D}_E$.

(c) Sei $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente von $\mathfrak{D}_E$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu_1(E \cap \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} D_n) &= \mu_1\Big(\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} (E \cap D_n)\Big) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(E \cap D_n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(E \cap D_n) \\
&= \mu_2(E \cap \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} D_n),
\end{aligned}$$

also $\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathfrak{D}_E$.

Da mit $A, B \in \mathfrak{M}$ auch $A \cap B \in \mathfrak{M}$, folgt zunächst $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{D}_E$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Es gilt also für das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ die Beziehung $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{D}_E$ und Satz 3.1.8 liefert $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{D}_E = \sigma(\mathfrak{M})$. Wir erhalten

$$\mu_1(E \cap A) = \mu_2(E \cap A) \quad \text{für } A \in \sigma(\mathfrak{M}) \text{ und } E \in \mathfrak{M} \text{ mit } \mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty.$$

Aufgrund der σ–Endlichkeit von μ_1 und μ_2 existiert eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{M}$ mit $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$ und $\mu_1(A_n) = \mu_2(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit obigem Argument finden wir

$$\mu_1(A_n \cap A) = \mu_2(A_n \cap A) \ \ \forall\, A \in \sigma(\mathfrak{M}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Mit Proposition 3.2.4(i) finden wir jetzt

$$\mu_1(A) = \lim_{n \to \infty} \mu_1(A_n \cap A) = \lim_{n \to \infty} \mu_2(A_n \cap A) = \mu_2(A) \qquad \forall\, A \in \sigma(\mathfrak{M}).$$

∎

Ein Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$, für welches $\mu(K) < \infty$ für jedes kompakte $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, heißt ein **Borel–Maß** auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$.

Lemma 3.3.3 : *Ein Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$ ist ein Borel–Maß genau dann, wenn es endlich auf $\mathbb{I}^n$ ist.*

Beweis:

IDEE: Das ist eine Konsequenz des Satzes von Heine–Borel.

Wenn μ auf $\mathbb{I}^n$ endlich ist, dann ist μ ein Borel-Maß, weil jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nach dem Satz von Heine–Borel beschränkt, also in einem Interval der Form $]a, b]_{(n)}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$ enthalten ist.

Umgekehrt, wenn μ ein Borel-Maß ist, dann ist μ endlich auf $\mathbb{I}^n$ weil $[a, b]_{(n)}$ für jedes $a, b \in \mathbb{R}^n$ kompakt ist und $]a, b]_{(n)}$ enthält. ■

Korollar 3.3.4 : *Jedes Borel-Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$ ist eindeutig durch seine Werte auf $\mathbb{I}^n$ bestimmt.*

Beweis:

IDEE: Kombiniere den Eindeutigkeitssatz 3.3.2 mit Lemma 3.3.3.

$\mathbb{I}^n$ ist als Semiring (vgl. Bemerkung 3.1.1) $\cap$–stabil und μ ist nach Lemma 3.3.3 endlich auf $\mathbb{I}^n$. Es gilt $\mathfrak{B}^n = \sigma(\mathbb{I}^n)$ und außerdem haben wir

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}](-n, \ldots, -n), (n, \ldots, n)]_{(n)} = \mathbb{R}^n.$$

Damit ist μ σ-endlich auf $\mathbb{I}^n$ und die Behauptung folgt aus Satz 3.3.2. ■

Sei M eine Menge und $\mathfrak{P}(M)$ ihre Potenzmenge, d.h. die Menge $\{N \mid N \subseteq M\}$ aller Teilmengen von M. Ein **äußeres Maß** auf M ist eine Funktion $\mu^* \colon \mathfrak{P}(M) \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ falls $A \subseteq B \subseteq \Omega$.

(iii) Für jede Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mu^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(A_j)$.

Die Bezeichnung *äußeres* Maß leitet sich von der folgenden Konstruktion her:

Lemma 3.3.5 : *Sei $\emptyset \in \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\rho\colon \mathfrak{E} \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit $\rho(\emptyset) = 0$. Für beliebiges $U \in \mathfrak{P}(\Omega)$ definieren wir $\widehat{\mathfrak{E}}(U)$ als das System aller Folgen $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{E}$ mit $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und setzen*

$$\mu^*(U) := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) \mid (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathfrak{E}}(U)\}, \tag{3.2}$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$ *definiert wird. Dann ist μ^* ein äußeres Maß.*

Beweis:

IDEE: Die Punkte (i) und (ii) sind unmittelbare Konsequenzen der Definitionen. Für (iii) betrachtet man Folgen in $\widehat{\mathfrak{E}}(U_n)$, die $\mu^*(U_n)$ bis auf $\frac{\varepsilon}{2^n}$ approximieren und benützt die Eigenschaften der geometrischen Reihe.

(i) folgt mit $(\emptyset, \emptyset, \ldots) \in \widehat{\mathfrak{E}}(\emptyset)$. Die Monotonie (ii) ergibt sich, weil $A \subseteq B$ impliziert $\widehat{\mathfrak{E}}(A) \supseteq \widehat{\mathfrak{E}}(B)$. Um (iii) zu zeigen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \infty$, dann ist (ii) automatisch richtig. Wir nehmen also an, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$. Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Für jedes n gibt es dann eine Folge $(A_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in \widehat{S}(A_n)$ mit $\sum_{m=1}^{\infty} \rho(A_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Die Folge $(A_{n,m})_{n,m=1,2,\ldots}$ (ordne die unendliche Matrix als Folge an) liegt in $\widehat{\mathfrak{E}}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Hieraus entsteht mit dem Umordnungssatz

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{m,n} \rho(A_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon < \infty.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

■

Bemerkung 3.3.6 : Sei μ ein Prämaß auf einem Semiring S in Ω. Lemma 3.3.5 sagt dann gerade, daß die durch (3.2) definierte Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß auf Ω ist. Man nennt diese Abbildung auch das vom Prämaß μ **induzierte** äußere Maß. ■

Im Folgenden werden wir die eindeutig bestimmte Fortsetzung des Prämaßes μ auf den Ring $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}(S)$ wieder mit μ bezeichnen (vgl. Satz 3.3.1).

Lemma 3.3.7 : *Sei μ ein Prämaß auf einem Semiring S in Ω. Es gilt $\mu^*(B) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathfrak{R}$.*

Beweis:

Idee: Die Ungleichung „$\leq$“ folgt aus dem Darstellungssatz 3.1.9 für Ringe. Für die Ungleichung „$\geq$“ baut man aus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{S}(B)$ eine disjunkte Folge mit B als Vereinigung.

Der Darstellungssatz 3.1.9 für Ringe besagt, daß man jedes $B \in \mathcal{R}$ in der Form $B = \dot\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ mit $n \in \mathbb{N}, C_i \in S, C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j$ darstellen kann. Daraus folgt $(C_1, C_2, \ldots, C_n, \emptyset, \emptyset, \ldots) \in \widehat{S}(B)$ und dann $\mu^*(B) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) = \mu(B)$.

Umgekehrt gibt es zwei Fälle: Wenn $\mu^*(B) = \infty$, ist alles gezeigt. Wenn $\mu^*(B) < \infty$, so gilt $\widehat{S}(B) \neq \emptyset$. Es sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{S}(B)$. Weil Ringe schnittstabil sind (vgl. Proposition 3.1.3), folgt $A_n \cap B \in \mathfrak{R}$. Wegen $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset B$ gilt $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B)$. Setze $D_1 := (A_1 \cap B)$ und $D_n := (A_n \cap B) \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1}(A_j \cap B) \in \mathfrak{R}$ für $n \geq 2$. Hieraus ergibt sich $B = \dot\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,\ D_i \cap D_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Da μ ein Prämaß ist und $D_n \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Damit hat man schließlich $\mu(B) \leq \mu^*(B)$. ■

Wenn μ^* ein äußeres Maß auf M ist, heißt eine Teilmenge $G \subseteq M$ μ^***-meßbar**, wenn für jedes $U \subseteq M$ gilt

$$\mu^*(U) = \mu^*(U \cap G) + \mu^*(U \cap (M \backslash G)) \text{ für alle } U \in \mathfrak{P}(M)\,. \tag{3.3}$$

Bemerkung 3.3.8 : Sei μ^* ein äußeres Maß auf M und $A, E \subseteq M$. Dann gilt

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (M \setminus A))$$

nach Definition des äußeren Maßes. Um die μ^*-Meßbarkeit von A zeigen, muß man also nur die umgekehrte Ungleichung beweisen, die im Falle $\mu^*(E) = \infty$ trivial wird. Zu zeigen bleibt also

$$\forall E \subseteq M, \mu^*(E) < \infty \;:\quad \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (M \setminus A)).$$

■

Satz 3.3.9 (Caratheodory): *Sei μ^* ein äußeres Maß auf M. Dann ist die Menge $\mathfrak{M}$ aller μ^*-meßbaren Mengen eine σ-Algebra und die Einschränkung von μ^* auf $\mathfrak{M}$ ist ein vollständiges Maß.*

Beweis:

IDEE: Sobald man die Definition der μ^*-Meßbarkeit zur Verfügung hat sind alle genannten Eigenschaften elementar zu verifizieren.

Da die Definition der μ^*-Meßbarkeit symmetrisch in A und $M \setminus A$ ist, ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen unter Komplementbildung.

Seien jetzt $A, B \in \mathfrak{M}$ und $E \subseteq M$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (M \setminus A)) \\
&= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap (M \setminus B)) + \mu^*(E \cap (M \setminus A) \cap B) \\
&\quad + \mu^*(E \cap (M \setminus A) \cap (M \setminus B)) \\
&\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (M \setminus (A \cup B))),
\end{aligned}$$

also nach Bemerkung 3.3.8 $A \cup B \in \mathfrak{M}$.

Wenn $A, B \in \mathfrak{M}$ disjunkt sind, finden wir

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap (M \setminus A)) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

d.h. μ^* ist endlich additiv auf $\mathfrak{M}$.

Sei jetzt $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in $\mathfrak{M}$. Wir setzen $B_n := \dot{\bigcup}_{j=1}^n A_j$ und $B = \dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Dann gilt für jedes $E \subseteq M$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap (M \setminus A_n)) \\
&= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})
\end{aligned}$$

und mit Induktion sieht man $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j)$. Dies wiederum zeigt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap (M \setminus B_n)) \geq \mu^*(E \cap (M \setminus B)) + \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j).$$

Jetzt läßt man n gegen ∞ gehen und findet mit der σ-Subadditivität von μ^*

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geq \mu^*(E \cap (M \setminus B)) + \sum_{j=1}^\infty \mu^*(E \cap A_j) \\
&\geq \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^\infty (E \cap A_j) \right) + \mu^*(E \cap (M \setminus B)) \\
&= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap (M \setminus B)) \\
&\geq \mu^*(E).
\end{aligned}$$

Damit gilt $B \in \mathfrak{M}$ und man hat gezeigt, daß $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra ist. Aber wenn man in dieser Rechnung $E = B$ setzt, folgt zudem

$$\mu^*(B) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j),$$

d.h. μ^* ist σ-additiv auf $\mathfrak{M}$, also ein Maß.

Bleibt die Vollständigkeit zu zeigen. Wenn aber $\mu^*(A) = 0$, dann gilt für jedes $E \subseteq M$

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (M \setminus A)) = \mu^*(E \cap (M \setminus A)) \leq \mu^*(E).$$

Damit gilt $A \in \mathfrak{M}$, was die Vollständigkeit zeigt. ∎

Wir haben unsere Aufgabe gelöst, jedes Prämaß μ auf einem Semiring S in Ω zu einem Maß auf $\sigma(S)$ fortzusetzen, wenn wir zeigen können, daß μ^* ein Maß auf $\sigma(S)$ ist. Hierzu benützen wir Konzept der μ^*-Meßbarkeit. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ die Menge aller μ^*-meßbaren Teilmengen von Ω und erinnern daran, daß nach Satz 3.3.9 diese Menge eine σ–Algebra ist. Wenn nun μ^* das von μ induzierte äußere Maß ist, dann müssen wir noch zeigen, daß alle $A \in S$ μ^*–meßbar sind. In diesem Falle ist $S \subseteq \mathfrak{A}$. Hieraus folgt $\sigma(S) \subseteq \mathfrak{A}$, und damit ist μ^* eingeschränkt auf $\sigma(S)$ ein Maß, das μ nach Lemma 3.3.7 fortsetzt. Im allgemeinen ist $\mathfrak{A}$ jedoch größer als $\sigma(S)$. Wir zeigen:

Lemma 3.3.10 : *Sei S ein Semiring über Ω und $\mu\colon S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein Prämaß sowie $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ das von μ induzierte äußere Maß. Dann sind alle $B \in S$ μ^*-meßbar.*

Beweis:

Idee: Die Ungleichung $\mu^*(U) \le \mu^*(U \cap B) + \mu^*(U \cap \complement B)$ für $B \in S$ und $U \subseteq \Omega$ folgt sofort aus Bemerkung 3.3.8, weil μ^* eine äußeres Maß ist. Für die Umkehrung konstruiert man aus Elementen von $\widehat{S}(U)$ Elemente von $\widehat{S}(U \cap B)$ und $\widehat{S}(U \backslash B)$.

Es seien $B \in S$ und $U \subseteq \Omega$ beliebig. Nach Bemerkung 3.3.8 genügt es

$$\mu^*(U) \ge \mu^*(U \cap B) + \mu^*(U \cap \complement B) \tag{3.4}$$

zu zeigen. Ist $\widehat{S}(U) = \emptyset$, folgt $\mu^*(U) = \infty$, und wir sind fertig. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $\widehat{S}(U) \neq \emptyset$. Es sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{S}(U)$. Wegen $A_j \in S$ findet man $D_{j,i} \in S$ mit $D_{j,i_1} \cap D_{j,i_2} = \emptyset$ für $i_1 \neq i_2$, $j \in \mathbb{N}$ und

$$A_j \backslash B = \dot{\bigcup_{i=1}^{n_j}} D_{j,i}.$$

Somit folgt $\Delta_1 := (A_j \cap B)_{j\in\mathbb{N}} \in \widehat{S}(U \cap B)$ und $\Delta_2 := (D_{j,i})_{j\in\mathbb{N}, 1\le i\le n_j} \in \widehat{S}(U\backslash B) = \widehat{S}(U \cap \complement B)$. Da μ additiv auf S ist, ergibt sich mit dem 1. Maßfortsetzungssatz 3.3.1

$$\mu(A_j) = \mu(A_j \cap B) + \mu(A_j \backslash B) = \mu(A_j \cap B) + \sum_{i=1}^{n_j} \mu(D_{j,i})$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, wobei zu beachten ist, daß $A_j \setminus B$ nich notwendigerweise in S liegt. Hieraus folgt mit der Definition von $\widehat{S}(U \cap B)$ bzw. $\widehat{S}(U \cap \complement B)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{E_1 \in \Delta_1} \mu(E_1) + \sum_{E_2 \in \Delta_2} \mu(E_2) \ge \mu^*(U \cap B) + \mu^*(U \cap \complement B)$$

für jedes $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \hat{S}(U)$. Daraus ergibt sich durch Infimumsbildung

$$\mu^*(U) \ge \mu^*(U \cap B) + \mu^*(U \cap \complement B).$$

■

Bemerkung 3.3.11 : In der Situation von Lemma 3.3.10 liefert Satz 3.3.9 wegen $S \subseteq \mathfrak{A}$, daß $\sigma(S) \subseteq \mathfrak{A}$. Also ist die Restriktion von μ^* auf $\sigma(S)$ ein Maß, das μ nach Lemma 3.3.7 fortsetzt. ■

Satz 3.3.12 (2. Maß–Fortsetzungssatz): *Sei μ ein Prämaß auf einem Semiring S in Ω. Dann definiert*

$$\nu(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{S}(A) \right\} \qquad \text{für } A \in \sigma(S)$$

ein Maß auf $\sigma(S)$, das μ fortsetzt. Ist μ σ-endlich auf S, so ist auch ν σ-endlich. In diesem Fall ist ν die einzige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(S)$.

Beweis:

IDEE: Die Existenz wird durch Bemerkung 3.3.11 gesichert, die Eindeutigkeit wird durch den Eindeutigkeitsatz 3.3.2 gesichert.

Die Existenz von ν erhält man aus Bemerkung 3.3.11 indem man das von μ induzierte äußere Maß auf $\sigma(S)$ einschränkt. Dies liefert gleichzeitig die Formel für ν. Sei jetzt μ σ-endlich. Dann gibt es $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ in S mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\nu(A_n) = \mu(A_n)$ folgt damit auch die σ-Endlichkeit von ν. Die Eindeutigkeitsaussage folgt jetzt unmittelbar aus dem Eindeutigkeitssatz 3.3.2. ■

Übung 3.3.1 : Sei μ ein σ-endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{M}$ über Ω und μ^* das von μ induzierte äußere Maß. Zeige: Zu $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gibt es ein $A \in \mathfrak{M}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $Q \subseteq A$.

(b) $\mu^*(Q) \subseteq \mu(A)$.

(c) $\mu(b) = 0$ für alle $B \in \mathfrak{M}$ mit $B \subseteq A \setminus Q$.

Hinweis: Falls $\mu^*(Q) < \infty$, finde eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}$ mit $Q \subseteq A_n$ und $\mu(A_n) \leq \mu^*(Q) + \frac{1}{n}$. ■

Übung 3.3.2 : Zeige, daß auf dem von $\mathbb{I}^1$ erzeugten Ring $\mathfrak{R}$ genau ein Inhalt μ existiert, der

$$\mu(]a,b]) = \begin{cases} 1 & \text{für } a < 0 \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt. Ist μ σ-additiv?

■

Übung 3.3.3 : Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring und $\mu\colon \mathfrak{R} \to \mathbb{R}$ ein Inhalt. Setze $d_\mu(A,B) := \mu(A\backslash B \cup B\backslash A)$ und zeige, daß d_μ eine Pseudometrik auf $\mathfrak{R}$ ist, d.h. es gelten alle Axiome einer Metrik, bis auf die Implikation „$d_\mu(A,B) = 0 \;\to\; A = B$.“

■

Übung 3.3.4 :

Sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω und $\mathfrak{M}^*$ die σ-Algebra aller μ^*-meßbaren Teilmengen von Ω. Weiter sei ν die Einschränkung von μ^* auf $\mathfrak{M}^*$ und ν^* das von ν induzierte äußere Maß auf Ω. Zeige:

(i) Für $E \subseteq \Omega$ gilt $\mu^*(E) \leq \nu^*(E)$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn es ein $A \in \mathfrak{M}^*$ mit $A \supseteq E$ und $\mu^*(A) = \mu^*(E)$ gibt.

(ii) Wenn μ^* das von einem Prämaß μ induzierte äußere Maß ist, dann gilt $\mu^* = \nu^*$.

(iii) Konstruiere ein μ^* auf $\Omega = \{0,1\}$ so, daß $\mu^* \neq \nu^*$ gilt.

■

3.4 Maßdefinierende Funktionen

Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **maßdefinierende Funktion** über $\mathbb{R}$, falls sie monoton steigend und rechtsseitig stetig ist.
Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Verteilungsfunktion** über $\mathbb{R}$, falls sie monoton steigend, rechtsseitig stetig und **normiert**, d.h. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, ist.

Satz 3.4.1 : *Zu jeder maßdefinierenden Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein Maß μ_F über $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ mit*

$$\mu_F(]a,b]) \;=\; F(b) - F(a) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R} \;\; mit \;\; a \le b \tag{3.5}$$

Ist F eine Verteilungsfunktion, dann ist μ_F ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das mit P_F bezeichnet wird.

Beweis:

IDEE: Ausgangspunkt unseres Beweises ist der Semiring $\mathbb{I}^1$ der links offenen und rechts abgeschlossenen Intervalle $]a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$, auf dem, wie wir schon wissen, $\nu = \nu(]a,b]) := F(b) - F(a)$ einen Inhalt definiert (siehe Beispiel 3.2.1). Wir zeigen zuerst, daß ν auch σ–additiv bzw. ein Prämaß ist, das aufgrund des ersten Fortsetzungssatzes eindeutig zu einem Prämaß ψ auf dem von $\mathbb{I}^1$ erzeugten Ring $\mathfrak{R}(\mathbb{I}^1)$ fortgesetzt werden kann. Ist ν außerdem σ–endlich, dann existiert aufgrund des zweiten Fortsetzungssatzes auch eine eindeutige Fortsetzung von ψ zu einem Maß μ_F auf der von $\mathbb{I}^1$ erzeugten σ–Algebra $\sigma(\mathbb{I}^1) = \mathfrak{B}^1$.

Nach Beispiel 3.2.1 definiert $\nu = \nu(]a,b]) := F(b) - F(a)$ einen Inhalt auf dem Semiring $\mathbb{I}^1$.

1. Schritt: ν ist σ–additiv, d.h. ein Prämaß auf $\mathbb{I}^1$.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichne eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathbb{I}^1$ mit der Eigenschaft $A = \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{I}^1$. Mit ψ bezeichnen wir die durch den Fortsetzungssatz 3.3.1 garantierte eindeutige Fortsetzung von ν auf den von $\mathbb{I}^1$ erzeugten Ring $\mathfrak{R}(\mathbb{I}^1)$. Aufgrund der Additivität und der Monotonie von ψ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \nu(A_n) &= \sum_{n=1}^m \psi(A_n) && \text{da } \nu \text{ und } \psi \text{ auf } \mathbb{I}^1 \text{ übereinstimmen} \\
&= \psi\left(\dot\bigcup_{n=1}^m A_n\right) && \text{da wir lediglich } \dot\bigcup_{n=1}^m A_n \in \mathfrak{R}(\mathbb{I}^1) \text{ voraussetzen können,} \\
& && \text{müssen wir } \psi \text{ anstelle von } \nu \text{ heranziehen} \\
&\le \psi\left(\dot\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) && \text{aufgrund der Monotonie von } \psi \\
&= \nu\left(\dot\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) && \text{da } \dot\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathbb{I}^1 \text{ vorausgesetzt war und } \nu \text{ und } \psi \text{ auf } \mathbb{I}^1 \\
& && \text{übereinstimmen.}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\sum_{n=1}^\infty \nu(A_n) \;=\; \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m \nu(A_n) \;\le\; \nu\left(\dot\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \;=\; \nu(A). \tag{3.6}$$

Wir zeigen weiter, daß auch $\nu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \le \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$ gilt, was zusammen mit der eben bewiesenen Ungleichung die Beziehung $\nu(A) = \nu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$ und damit die σ-Additivität von ν beweisen würde.
Wir setzen $A =:]a,b]$ und $A_n =:]a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}$, und definieren für beliebige $\delta > 0$ und $\delta_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

$$A' :=]a+\delta, b] \quad \text{und} \quad A'_n :=]a_n, b_n + \delta_n].$$

Offensichtlich gilt:

$$A =]a, a+\delta] \cup]a+\delta, b] \quad \text{und} \quad A'_n =]a_n, b_n] \cup]b_n, b_n + \delta_n].$$

Die Additivität von ν liefert

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu(]a, a+\delta]) + \nu(]a+\delta, b]) = F(a+\delta) - F(a) + \nu(A'), \\
\nu(A'_n) &= \nu(]a_n, b_n]) + \nu(]b_n, b_n+\delta_n]) = \nu(A_n) + F(b_n+\delta_n) - F(b_n).
\end{aligned}$$

Da F als rechtsseitig stetig vorausgesetzt war, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und zu jedem $\varepsilon_n > 0$ ein $\delta_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, so daß gilt:

$$\nu(A) \le \nu(A') + \varepsilon \quad \text{und} \quad \nu(A'_n) \le \nu(A_n) + \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Für spätere Zwecke modifizieren wir dies zu

$$\nu(A) \le \nu(A') + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \nu(A'_n) \le \nu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{3.7}$$

Man beachte weiter, daß

$$A' =]a + \delta, b] \subseteq [a + \delta, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n + \delta_n[\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \tag{3.8}$$

und daß nach dem Überdeckungssatz von Heine–Borel endlich viele der A'_n zur Überdeckung der Menge $[a + \delta, b]$ ausreichen. Deshalb gilt

$$A' \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} A'_n \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N},$$

womit unter Verwendung von Proposition 3.2.3 schließlich folgt:

$$\begin{aligned}
\nu(A) &\le \nu(A') + \frac{\varepsilon}{2} && \\
&= \psi(A') + \frac{\varepsilon}{2} && \text{da } \nu = \psi \text{ auf } \mathbb{I}^1 \\
&\le \psi\left(\bigcup_{n=1}^{k} A'_n\right) + \frac{\varepsilon}{2} && \text{aufgrund von (3.8)} \\
&\le \sum_{n=1}^{k} \psi(A'_n) + \frac{\varepsilon}{2} && \text{da } \psi \text{ subadditiv ist} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \nu(A'_n) + \frac{\varepsilon}{2} && \text{da } \nu = \psi \text{ auf } \mathbb{I}^1 \\
&\le \sum_{n=1}^{k} \left(\nu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) + \frac{\varepsilon}{2} && \text{aufgrund von (3.7)} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) + \varepsilon && \text{da } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt hieraus zusammen mit (3.6) die Behauptung.

2. Schritt: ν ist σ-endlich.

Hierfür ist die Existenz einer Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{I}^1$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subset \dots$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ und $\nu(A_n) < \infty$ für alle n nachzuweisen. Hierfür wählen wir $A_n :=]-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$. Außerdem ist $\nu(] - n, n]) = F(n) - F(-n) < \infty$ für alle n, was zu zeigen war.

3. Schritt: Existenz von μ_F.

Da ν ein σ-endliches Prämaß auf $\mathbb{I}^1$ ist, können wir den Fortsetzungssatz 3.3.12 anwenden und finden ein eindeutig bestimmtes Maß $\mu_F : \sigma(\mathbb{I}^1) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, das ν fortsetzt und σ-endlich ist. Wegen $\sigma(\mathbb{I}^1) = \mathfrak{B}^1$ folgt die Behauptung.

4. Schritt: μ_F ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, falls F normiert ist.

Wir müssen zeigen, daß aus den beiden Aussagen $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ die Eigenschaft $\mu_F(\mathbb{R}) = 1$ folgt. Dafür beweisen wir zunächst, daß $F(x) = \mu_F(]-\infty, x])$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Da μ_F stetig von unten ist (siehe Proposition 3.2.4(i)), folgt:

$$\begin{aligned}
\mu_F(]-\infty, x]) &= \mu_F\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, x]\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_F(]-n, x]) \\
&= \lim_{n\to\infty} (F(x) - F(-n)) \\
&= F(x) - \lim_{n\to\infty} F(-n) \\
&= F(x) - 0 \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Darstellung $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n]$ und der Tatsache, daß μ_F stetig von unten ist (siehe Proposition 3.2.4(i)), folgert man analog

$$\mu_F(\mathbb{R}) \;=\; \mu_F\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n]\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu_F\big(]-\infty, n]\big) \;=\; \lim_{n\to\infty} F(n) \;=\; 1.$$

■

Satz 3.4.2 : *Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß P über $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$. Dann hat die durch $F(x) := P(]-\infty, x])$ definierte Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften:*

(i) *F ist monoton steigend.*

(ii) *F ist rechtsseitig stetig.*

(iii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *und* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$,

d.h., F ist eine Verteilungsfunktion.

Beweis:

Idee: Man übersetzt die insbesondere in Proposition 3.2.4 gewonnenen Eigenschaften von P in Eigenschaften von F.

Die Aussage (i) folgt unmittelbar aus der Annahme, daß P monoton ist (vgl. Satz 3.4.1). Für den Nachweis von (ii) muß man noch zeigen, daß für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ auch $\lim_{n\to\infty} \big(F(x + x_n) - F(x)\big) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Da P stetig von oben ist (siehe Proposition 3.2.4(ii)), gilt aber:

$$\lim_{n\to\infty} [F(x + x_n) - F(x)] = \lim_{n\to\infty} P(]x, x + x_n]) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}]x, x + x_n]\Big) = P(\emptyset) = 0.$$

Die Aussage (iii) läßt sich ebenfalls mit Hilfe von Proposition 3.2.4 beweisen:

$$\begin{aligned}
0 &= P(\emptyset) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, -n]) = \lim_{n\to\infty} P(]-\infty, -n]) = \lim_{n\to\infty} F(-n) \\
1 &= P(\mathbb{R}) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n]) = \lim_{n\to\infty} P(]-\infty, n]) = \lim_{n\to\infty} F(n)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.4.3 :

(i) Die Sätze 3.4.1 und 3.4.2 besagen, daß es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von Verteilungsfunktionen über $\mathbb{R}$ und Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ gibt.

(ii) Verteilungsfunktionen sind automatisch meßbar.

(iii) Wegen der Korrespondenz aus (i) spricht man häufig von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder einfach nur von Verteilungen. und meint damit wahlweise das Wahrscheinlichkeitsmaß oder die zugehörige Verteilungsfunktion.

■

Proposition 3.4.4 : (Rechenregeln für maßdefinierende Funktionen)
Sei F eine maßdefinierende Funktion über $\mathbb{R}$ und μ_F das korrespondierende Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$, dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

(i) $\mu_F(]a, b]) \;=\; F(b) - F(a),$

(ii) $\mu_F(]a, b[) \;=\; F(b-0) - F(a),$

(iii) $\mu_F([a, b]) \;=\; F(b) - F(a-0),$

(iv) $\mu_F(\{a\}) \;=\; F(a) - F(a-0),$

(v) $\mu_F([a, b[) \;=\; F(b-0) - F(a-0),$

wobei wir mit $F(x-0)$ den linksseitigen Grenzwert von F an der Stelle x bezeichnen (entsprechend $F(x+0)$).

Ist F eine Verteilungsfunktion über $\mathbb{R}$ und bezeichnet P_F das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^)$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

(vi) $P_F(]-\infty, x]) \;=\; F(x),$

(vii) $P_F(]-\infty, x[) \;=\; F(x-0),$

(viii) $P_F(]x, \infty[) \;=\; 1 - F(x).$

Beweis:

IDEE: Diese Aussagen lassen sich jeweils mit kleinen Rechnungen verifizieren. Das wichtigste Hilfsmittel ist dabei Proposition 3.2.4.

(i) Diese Behauptung ist gleichbedeutend mit (3.5).

(ii)

$$\begin{aligned}
\mu_F(]a, b[) &= \mu_F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}]a, b - \tfrac{1}{n}]\right) \\
&\overset{3.2.4}{=} \lim_{n\to\infty} \mu_F\left(]a, b - \tfrac{1}{n}]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} F\left(b - \tfrac{1}{n}\right) - F(a) \\
&=: F(b-0) - F(a).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\mu_F([a,b]) &= \mu_F\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\tfrac{1}{n}, b]\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_F\left(]a-\tfrac{1}{n}, b]\right) \qquad (\mu_F \text{ ist stetig von oben (siehe Proposition 3.2.4(ii)))}\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(F(b) - F(a-\tfrac{1}{n})\right)\\
&= F(b) - F(a-0).
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\mu_F(\{a\}) &= \mu_F\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\tfrac{1}{n}, a]\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_F\left(]a-\tfrac{1}{n}, a]\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(F(a) - F(a-\tfrac{1}{n})\right)\\
&= F(a) - F(a-0).
\end{aligned}$$

(v) $\mu_F([a,b[) = \mu_F(]a,b[\cup\{a\}) = \mu_F(]a,b[) + \mu_F(\{a\}) = F(b-0) - F(a-0).$

(vi) Wurde bereits unter (iii) im Beweis von Satz 3.4.2 gezeigt.

(vii)

$$\begin{aligned}
P_F(]-\infty,x[) &= P_F(]-\infty,x]\setminus\{x\})\\
&= P_F(]-\infty,x]) - P_F(\{x\})\\
&= F(x) - (F(x) - F(x-0))\\
&= F(x-0).
\end{aligned}$$

(viii) $P_F(]x,\infty[) = P_F(\mathbb{R}\setminus]-\infty,x]) = P_F(\mathbb{R}) - P_F(]-\infty,x]) = 1 - F(x).$

■

Beispiel 3.4.5 : Die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0,\\ \frac{1}{8} & 0 \le x < 1,\\ \frac{4}{8} & 1 \le x < 2,\\ \frac{7}{8} & 2 \le x < 3,\\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

definiert eine Verteilungsfunktion über $\mathbb{R}$. Man verifiziert leicht:

$$\begin{aligned}
P_F(]-1,5]) &= F(5) - F(-1) = 1 - 0 = 1.\\
P_F(]\tfrac{1}{2},2]) &= F(2) - F(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{7}{8} - \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4}.\\
P_F([\tfrac{3}{2},3)) &= F(3-0) - F(\tfrac{1}{2}-0) = \tfrac{7}{8} - \tfrac{4}{8} = \tfrac{3}{8}.\\
P_F(]0,1[) &= F(1-0) - F(0) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0.\\
P_F(\{2\}) &= F(2) - F(2-0) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}.\\
P_F(]-\infty,\tfrac{3}{2}]) &= F(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}.\\
P_F(]1,\infty[) &= 1 - F(1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

■

Beispiel 3.4.6 (Lebesgue–Maß): Das mit der maßdefinierenden Funktion

$$F(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

korrespondierende Maß $\lambda = \lambda_F$ (vgl. Bemerkung 3.4.3) über $\mathfrak{B}^1$ ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung des elementargeometrischen Inhalts

$$\lambda(]a,b]) = F(b) - F(a) = b - a, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b.$$

Es heißt das eindimensionale **Lebesgue–Maß** auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$. ∎

Beispiel 3.4.7 (Exponential–Verteilung):
Sei $\lambda > 0$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

definiert eine Verteilungsfunktion über $\mathbb{R}$. Man nennt F **Exponentialverteilung** mit dem Parameter λ. Für die Exponentialverteilung mit dem Parameter λ verwenden wir das Symbol $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Diese Verteilung ist von großer praktischer Bedeutung. Zum Beispiel wurde durch umfangreiche statistische Erhebungen nachgewiesen, daß Einfallabstände und Gesprächsdauern im Telefonverkehr in guter Näherung exponentialverteilt sind. Aber auch das Ausfallverhalten einer Maschine, d.h. die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ausfällen, kann gut durch eine Exponentialverteilung modelliert werden.

Man beachte, daß F stetig und an allen Stellen $x \neq 0$ differenzierbar ist:

$$f(x) := \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$P_F(]-\infty, x]) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

und

$$P_F(]a,b]) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\ dt, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b.$$

∎

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine über $\mathbb{R}$ integrierbare Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1.$$

Dann wird durch

$$F(x) := \int_{]-\infty,x]} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Verteilungsfunktion F über $\mathbb{R}$ und damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_F auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ definiert. Die Funktion f wird **Dichte** der Wahrscheinlichkeitsverteilung P_F genannt.

Beispiel 3.4.8 (Rechteckverteilung): Für jedes Paar $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ wird durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b], \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

eine Dichte über $\mathbb{R}$ definiert. Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß heißt **Rechteck**(a,b)**–Verteilung** oder **Gleichverteilung** auf $[a,b]$, kurz $R(a,b)$. Die zugehörige Verteilungsfunktion lautet:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

Die Rechteck–Verteilung spielt bei der Erzeugung von Zufallszahlen und der Simulation stochastischer Prozesse eine wichtige Rolle.

■

Beispiel 3.4.9 (Weibull-Verteilung): Für $\lambda, \beta > 0$ definiert

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \beta \cdot e^{-\lambda x^\beta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte über $\mathbb{R}$. Die zugehörige Verteilungsfunktion lautet:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^\beta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Das korrespondierende Wahrscheinlichkeitsmaß P_F über $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ heißt **Weibull–Verteilung** mit den Parametern λ, β. Die Substitution $y = x^\beta$, $dy = \beta x^{\beta-1} dx$ führt auf das Integral der Exponentialverteilung. Die Weibull–Verteilung findet Anwendung in der Zuverlässigkeitstheorie.

■

Beispiel 3.4.10 (Standardnormalverteilung):
Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

wird als **Gaußsche Glockenkurve** mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ bezeichnet und definiert eine Wahrscheinlichkeitsdichte über $\mathbb{R}$. Die korrespondierende Verteilungsfunktion lautet

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die zu $F(x)$ gehörende Verteilung P_F auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ wird **Normalverteilung** mit dem Parameter μ und σ genannt. Im Fall $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ spricht man von der **Standard–Normalverteilung**. Für die Normalverteilung verwendet man das Symbol $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Im Falle der Standard–Normalverteilung verwendet man anstelle von $F(x)$ das Symbol $\Phi(x)$ und anstelle von $f(x)$ das Symbol $\varphi(x)$.

Um die Werte der Normalverteilung zu berechnen, genügt es, die Standard–Normalverteilung zu kennen. Denn vermöge der Substitutionen $y = (t - \mu)/\sigma$ und $\sigma \cdot dy = dt$ erhält man

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-y^2/2}\, dy = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \varphi(y)\, dy. = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

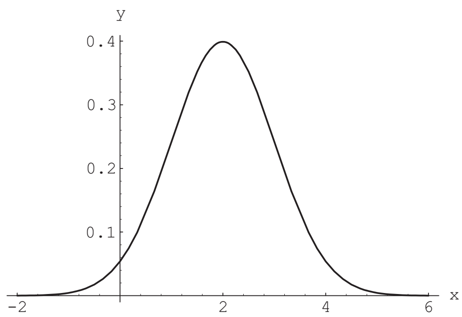


Abbildung 3.1: Dichtefunktion der Normalverteilung mit Lokalisationsparameter $\mu = 2$ und Streuparameter $\sigma = 1$.

Dies ist der Grund, warum in Statistik–Büchern lediglich die Standard–Normalverteilung tabelliert ist. Für den Nachweis von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$$

benutzt man die Beziehung

$$\begin{aligned} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt \Big)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(-\frac{y^2}{2})\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2}\Big)\, dx\, dy, \end{aligned}$$

die man mit Hilfe von Polarkoordinaten, d.h. mit Hilfe der Substitution $dx\, dy = r\, d\vartheta\, dr$, in

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp(-\frac{r^2}{2}) r\, dr\, d\vartheta \;=\; -2\pi \exp(-\frac{r^2}{2})\Big|_0^{\infty} \;=\; 2\pi$$

überführen kann.

■

Beispiel 3.4.11 (Logarithmische Normalverteilung): Für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ definiert auch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}}\, e^{-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte über $\mathbb{R}$. Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ heißt **logarithmische Normalverteilung**. Sie wird als Modellverteilung bei Lebensdauer– und Festigkeitsproblemen eingesetzt. ■

Beispiel 3.4.12 (Cauchy–Verteilung):
Für $\lambda > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ definiert

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte über $\mathbb{R}$. Denn es ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^2}dx \qquad \left(z := \frac{x-\mu}{\lambda} \quad dz = \frac{1}{\lambda}dx\right)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}dz\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+z^2}dz + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}dz\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{1}{1+z^2}dz + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{1+z^2}dz\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\lim_{a\to-\infty}(-\arctan a) + \lim_{b\to\infty}(\arctan b)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \;=\; 1.
\end{aligned}$$

Die zu f gehörende Verteilungsfunktion heißt **Cauchy–Verteilung**. ■

Beispiel 3.4.13 (Gammaverteilung):
Seien $b, p \in \mathbb{R}^+$. Das zur Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

mit der durch $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ definierten Gammafunktion gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ heißt **Gammaverteilung** mit den Parametern b und p, kurz Gamma(b, p).

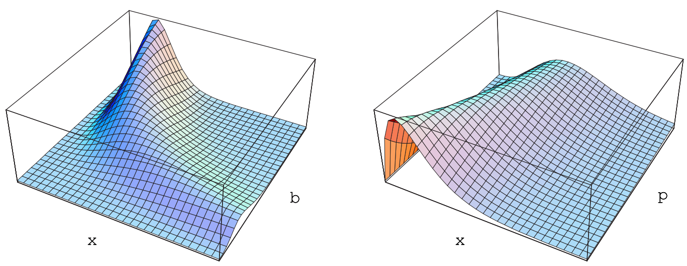


Abbildung 3.2: Dichtefunktion der Gammaverteilung mit variablem Parameter b bei konstantem p (links) bzw. variablem p bei konstantem b (rechts).

Die Tatsache, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\;dx = 1$, folgt aus der Beziehung

$$\int_0^\infty b^p x^{p-1} e^{-bx}\;dx = \int_0^\infty (bx)^{p-1}e^{-bx}b\;dx = \int_0^\infty z^{p-1}e^{-z}\;dz = \Gamma(p).$$

Die Gammaverteilung wird unter anderem als Modellverteilung in der Zuverlässigkeitstheorie und der Warteschlangentheorie verwendet. Als Spezialfälle der Gammaverteilung ergeben sich die χ^2–Verteilung und die Erlang–Verteilung (siehe unten).

■

Beispiel 3.4.14 (χ^2–Verteilung):
Das Wahrscheinlichkeitsmaß P mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

heißt χ^2–**Verteilung** mit n Freiheitsgraden, $n \in \mathbb{N}$. Die χ^2–Verteilung ergibt sich aus der Gammaverteilung, indem man $p = \frac{n}{2}$ und $b = \frac{1}{2}$ setzt.

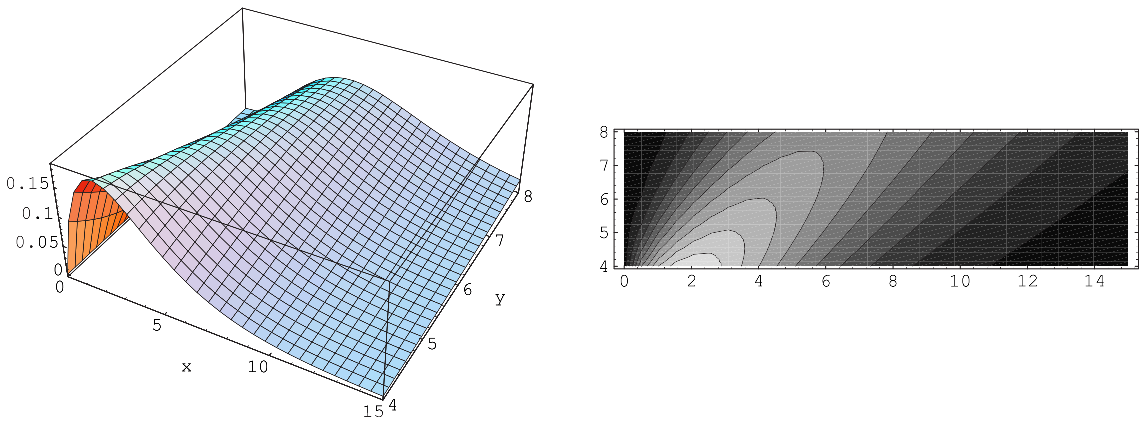


Abbildung 3.3: Dichtefunktion der χ^2–Verteilung mit variablen Freiheitsgrad n.

Die χ^2–Verteilung spielt eine zentrale Rolle in der mathematischen Statistik.

■

Beispiel 3.4.15 (Erlang-Verteilung):
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}^+$. Das zur Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-bx} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ heißt **Erlang–Verteilung** mit den Parametern b und n, kurz Erlang(b, n). Für diesen Spezialfall der Gammaverteilung läßt sich die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$ in geschlossener Form darstellen:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(bx)^k}{k!} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Die Behauptung läßt sich durch Differenzieren rasch verifizieren:

$$F'(x) = -\Big(-b \cdot e^{-bx} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(bx)^k}{k!} + e^{-bx} \cdot b \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(bx)^{k-1}}{(k-1)!} \Big) = \quad b \cdot e^{-bx} \cdot \frac{(bx)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{b^n}{(n-1)!} x^{n-1} \cdot e^{-bx}$$

für $x \geq 0$. Die Erlang–Verteilung verdankt ihren Namen dem dänischen Mathematiker A.K. Erlang, der 1908 Mitarbeiter der Copenhagen Telephone Company wurde und mit seinen Arbeiten zur Leistungsbewertung von Fernsprechvermittlungssystemen den Grundstein für die Warteschlangentheorie legte. ∎

Beispiel 3.4.16 (Betaverteilung):
Das Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p-q}}{B(p,q)}(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1} & , \ x \in]a,b[\\ 0 & , \ x \notin]a,b[\end{cases}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $p, q > 0$ heißt **Betaverteilung 1.Art** über dem Intervall $]a,b[$. Dabei steht Ausdruck

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} \, dt$$

für die Eulersche **Betafunktion**. Für die Betaverteilung mit dem Parameter p und q verwenden wir das Symbol Beta(p,q). Die Betaverteilung hat Anwendungen in der Netzplantechnik, wo sie zur Modellierung von Übergangszeiten verwendet wird.

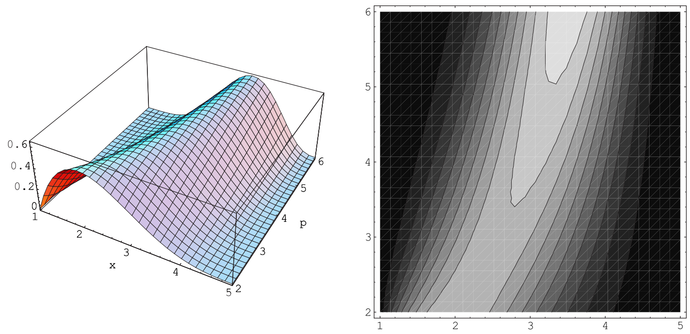


Abbildung 3.4: Dichtefunktion der Betaverteilung mit Parameter $q = 4$ und variablem p.

∎

Kapitel 4

Zerlegung von Maßen

4.1 Signierte Maße

Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum. Ein **signiertes Maß** auf $(M, \mathfrak{M})$ ist eine Abbildung $\nu \colon \mathfrak{M} \to [-\infty, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\nu(\emptyset) = 0$.

(ii) ν nimmt höchstens einen der Werte $\pm\infty$ an.

(iii) Für jede Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Elementen A_j von $\mathfrak{M}$ gilt:

$$\nu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(A_j)$$

und die Reihe konvergiert absolut, falls $\nu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) \in \mathbb{R}$.

Damit ist jedes Maß auf $(M, \mathfrak{M})$ insbesondere ein signiertes Maß. Um den Unterschied zu betonen, nennt man manchmal ein Maß auch ein **positives Maß**.

Beispiel 4.1.1 : Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum.

(i) Für zwei Maße μ_1, μ_2 auf $(M, \mathfrak{M})$, von denen mindestens eines endlich ist, ist $\nu := \mu_1 - \mu_2$ ein signiertes Maß.

(ii) Sei μ ein Maß auf $(M, \mathfrak{M})$. Für eine meßbare Funktion $f \colon M \to [-\infty, \infty]$, für die mindestens eines der Integrale $\int_M f^{\pm}\, d\mu$ endlich ist, definiert

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu$$

ein signiertes Maß. Wir nennen f in diesem Fall **erweitert μ-integrierbar** und schreiben $d\nu := f\, d\mu$.

Bemerkung 4.1.2 : Sei ν ein signiertes Maß auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$. Mit den im Beweis von Proposition 3.2.4 (siehe auch Übung 2.1.1) benützten Argumenten erhält man die folgenden Stetigkeitsaussagen.

(i) Aus $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

(ii) Aus $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $\nu(A_1) < \infty$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

(iii) Die Voraussetzung $\nu(A_1) < \infty$ in Teil (ii) ist nicht überflüssig.

■

Sei ν ein signiertes Maß auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$. Eine Menge $A \in \mathfrak{M}$ heißt **positiv** bzw. **negativ** bzgl. ν, wenn für alle $B \in \mathfrak{M}$ mit $B \subseteq A$ gilt $\nu(B) \geq 0$ bzw. $\nu(B) \leq 0$. Eine Menge, die positiv und negativ ist, heißt **Nullmenge**.

Beispiel 4.1.3 : In der Situation von Beispiel 4.1.1(ii) ist A bzgl. ν positiv, bzw. negativ genau dann, wenn auf A μ-fast überall gilt $f \geq 0$, bzw. $f \leq 0$. ■

Lemma 4.1.4 : *Sei ν ein signiertes Maß auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bzgl. ν positiven Mengen. Dann ist auch $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ eine bzgl. ν positive Menge.*

Beweis:

Setze $B_n := A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$. Dann ist $B_n \subseteq A_n$ meßbar, also ist B_n positiv bzgl. ν. Die B_n sind offensichtlich paarweise disjunkt. Wenn jetzt $C \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ meßbar ist, dann gilt

$$\nu(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(C \cap B_n) \geq 0.$$

■

Satz 4.1.5 (Hahn–Zerlegung): *Sei ν ein signiertes Maß auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$.*

(i) *Es gibt eine disjunkte Zerlegung von M in eine bzgl. ν positive Menge $P \in \mathfrak{M}$ und eine bzgl. ν negative Menge $N \in \mathfrak{M}$.*

(ii) *Die Zerlegung aus* (i) *ist im wesentlichen eindeutig. Genauer, wenn $P' \cup N' = M$ eine weitere solche Zerlegung ist, dann gilt*

$$\nu(P \setminus P') = \nu(P' \setminus P) = 0 = \nu(N \setminus N') = \nu(N' \setminus N).$$

Beweis:

Idee: Finde zu jedem $A \in \mathfrak{M}$ mit $\nu(A) > -\infty$ eine positive Teilmenge $P_A \subseteq A$ mit $\nu(P_A) \geq \nu(A)$. Dabei verlangt man zunächst für die Teilmengen nicht, daß $\nu(B) \geq 0$, sondern nur $\nu(B) \geq -\epsilon$.

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß ν den Wert ∞ nicht annimmt (sonst betrachte $-\nu$ statt ν). Außerdem schließen wir den trivialen Fall, daß ν konstant gleich $-\infty$ ist, aus. Sei $A \in \mathfrak{M}$.

Behauptung 1: Wenn $\nu(A) > -\infty$, dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $B \in \mathfrak{M}$ mit $B \subseteq A$ und

(a) $\nu(B) \geq \nu(A)$,

(b) $\nu(C) > -\epsilon$ für alle $C \in \mathfrak{M}$ mit $C \subseteq B$.

Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so, daß für jedes $B \in \mathfrak{M}$ mit $B \subseteq A$ und $\nu(B) \geq \nu(A)$ ein $C \in \mathfrak{M}$ mit $C \subseteq B$ und $\nu(C) \leq -\epsilon$ existiert. Mit $B = A$ findet man ein $C_1 \in \mathfrak{M}$ mit $C_1 \subseteq A$ und $\nu(C_1) \leq -\epsilon$. Wegen

$$\nu(A \setminus C_1) = \nu(A) - \nu(C_1) \geq \nu(A)$$

findet man dann ein $C_2 \in \mathfrak{M}$ mit $C_2 \subseteq A \setminus C_1$ und $\nu(C_2) \leq -\epsilon$. Jetzt gilt

$$\nu\big(A \setminus (C_1 \cup C_2)\big) = \nu((A \setminus C_1) \setminus C_2) = \nu(A \setminus C_1) - \nu(C_2) \geq \nu(A \setminus C_1) \geq \nu(A)$$

und wir sehen, daß wir induktiv eine Folge $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ disjunkter Mengen in $\mathfrak{M}$ finden können, die in A enthalten sind und $\nu(C_j) \leq -\epsilon$ erfüllen. Aber dann gilt für $C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j$, daß

$$\nu(A \setminus C) = \nu(A) - \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(C_j) = \infty$$

im Widerspruch zur Annahme.

Behauptung 2: Wenn $\nu(A) > -\infty$, dann gibt es eine bzgl. ν positive Menge $P_A \subseteq A$ mit $\nu(P_A) \geq \nu(A)$.

Setze $A_1 := A$ und definiere A_n induktiv wie folgt: Zu A_{n-1} gibt es nach Behauptung 1 eine Menge $A_n \in \mathfrak{M}$ mit $A_n \subseteq A_{n-1}$ und $\nu(A_n) \geq \nu(A_{n-1})$ sowie

$$C \in \mathfrak{M}, C \subseteq A_n \quad : \quad \nu(C) > -\tfrac{1}{n}$$

Dann ist $P_A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A$ positiv bzgl. ν und mit Bemerkung 4.1.2 finden wir

$$\nu(P_A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \nu(A),$$

was Behauptung 2 beweist.

Mit Behauptung 2 finden wir eine Folge $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von bzgl. ν positiven Mengen, die

$$s := \lim_{j\to\infty} \nu(P_j) = \sup\{\nu(A) \mid A \in \mathfrak{M}\}$$

erfüllt. Setze $P := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} P_j$. Dann gilt $\nu(P) = s$ und nach Lemma 4.1.4 ist P positiv. Wenn $C \in \mathfrak{M}$ zu P disjunkt ist, dann gilt $\nu(P \cup C) = \nu(P) + \nu(C)$, also $\nu(C) \leq 0$. Dies zeigt, daß $N := M \setminus P$ bzgl. ν negativ ist. Damit ist (i) bewiesen.

Um (ii) zeigen, stellen wir einfach fest, daß $P \setminus P' \subseteq P \cap N'$ bzgl. ν sowohl positiv als auch negativ, also eine Nullmenge ist. Analog schließt man für $P' \setminus P$ sowie für $N \setminus N'$ und $N' \setminus N$.

■

Eine disjunkte Zerlegung $P \cup N = M$ wie in Satz 4.1.5 heißt eine **Hahn-Zerlegung** für ν. Seien jetzt ν und μ zwei positive Maße auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$. Dann heißt ν **singulär** bzgl. μ, falls es eine disjunkte Zerlegung $A \cup B = M$ mit $A, B \in \mathfrak{M}$ und $\nu(A) = 0 = \mu(B)$ gibt. Offensichtlich ist ν singulär bzgl. μ genau dann, wenn μ singulär bzgl. ν ist. Man trägt dem Rechnung, indem man schreibt $\nu\perp\mu$, falls ν singulär bzgl. μ ist.

Satz 4.1.6 : *Sei ν ein signiertes Maß auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$. Dann gibt es eindeutig bestimmte positive Maße ν^+ und ν^-, für die gilt*

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \quad \textit{und} \quad \nu^+ \perp \nu^-.$$

Beweis:

IDEE: Betrachte für $A \in \mathfrak{M}$ die Schnitte von A mit den beiden Mengen einer Hahn-Zerlegung.

Sei $M = P \cup N$ eine Hahn-Zerlegung für ν. Wir setzen

$$\nu^+(A) := \nu(A \cap P) \quad \text{und} \quad \nu^-(A) := -\nu(A \cap N)$$

für $A \in \mathfrak{M}$. Dann ist es Routine zu zeigen, daß $\nu^\pm$ positive Maße sind, die $\nu = \nu^+ - \nu^-$ und $\nu^+ \perp \nu^-$ erfüllen.

Um die Eindeutigkeitsaussage zu beweisen, nehmen wir an, daß $\mu^\pm$ positive Maße mit $\nu = \mu^+ - \mu^-$ und $\mu^+ \perp \mu^-$ sind. Es gibt dann nach Definition eine disjunkte Zerlegung $A \cup B = M$ mit $A, B \in \mathfrak{M}$ und $\mu^-(A) = 0 = \mu^+(B)$. Also ist $A \cup B = M$ eine Hahn-Zerlegung für ν. Nach Satz 4.1.5(ii) gilt $\nu(P \setminus A \cup A \setminus P) = 0$. Für jedes $C \in \mathfrak{M}$ finden wir also

$$\mu^+(C) = \mu^+(C \cap A) = \nu(C \cap A) = \nu(C \cap P) = \nu^+(C),$$

d.h. $\mu^+ = \nu^+$. Für $\mu^- = \nu^-$ argumentiert man analog. ■

Man nennt $\nu^\pm$ den **positiven** bzw. den **negativen Teil** von ν. Die Zerlegung $\nu = \nu^+ - \nu^-$ heißt die **Jordan-Zerlegung** von ν. Das signierte Maß ν heißt **endlich**, wenn sowohl ν^+ als auch ν^- endliche Maße sind. Das positive Maß

$$|\nu| := \nu^+ + \nu^-$$

nennt man die **totale Variation** von ν. Schließlich setzen wir

$$L^1(M, \nu) := L^1(M, \mathbb{R}, \nu^+) \cap L^1(M, \mathbb{R}, \nu^-)$$

und für $f \in L^1(M, \nu)$

$$\int f \, d\nu := \int f \, d\nu^+ - \int f \, d\nu^-.$$

Seien μ und ν signierte Maße auf M. Dann heißt μ ein **singulär** bzgl. ν, wenn dies für ihre totalen Variationen gilt.

Übung 4.1.1 : Seien ν und μ signierte Maße auf einem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$ und $E \in \mathfrak{M}$.

(i) Zeige, daß $\nu(F) = 0$ für alle $E \supseteq F \in \mathfrak{M}$ genau dann, wenn $|\nu|(F) = 0$ für alle $E \supseteq F \in \mathfrak{M}$.

(ii) Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (a) $\nu \perp \mu$.

  (b) $|\nu| \perp \mu$.

  (c) $\nu^+ \perp \mu$ und $\nu^- \perp \mu$.

(iii) Zeige, daß $|\mu + \nu| \leq |\nu| + |\mu|$.

■

Übung 4.1.2 : Sei ν ein signiertes Maß auf einem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$ und $E \in \mathfrak{M}$. Zeige:

(i) $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) \mid F \in \mathfrak{M}, F \subseteq E\}$.

(ii) $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) \mid F \in \mathfrak{M}, F \subseteq E\}$.

(iii) $|\nu|(E) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^n \nu(E_j) \;\middle|\; E_j \in \mathfrak{M}, E = \dot{\bigcup}_{j=1}^n E_j \right\}$.

■

4.2 Der Satz von Radon-Nikodym

Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum. Weiter sei ν ein signiertes Maß und μ ein positives Maß auf $(M, \mathfrak{M})$. Dann heißt ν **absolut stetig** bzgl. μ, falls

$$\forall A \in \mathfrak{M} \ : \quad \mu(A) = 0 \ \Rightarrow \ \nu(A) = 0.$$

In diesem Fall schreibt man $\nu \ll \mu$.

Beispiel 4.2.1 : Wenn μ ein positives Maß auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$ ist und f eine erweitert μ-integrierbare Funktion, dann ist das durch $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ definierte signierte Maß absolut stetig bzgl. μ. Es ist endlich, falls $f \in L^1(M, \mathbb{R}, \mu)$. ■

Bemerkung 4.2.2 : Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum. Weiter sei ν ein signiertes Maß und μ ein positives Maß auf $(M, \mathfrak{M})$.

(i) $\nu \ll \mu$ ist äquivalent zu $|\nu| \ll \mu$.

(ii) $\nu \ll \mu$ ist äquivalent zu
$$\nu^+ \ll \mu \quad \text{und} \quad \nu^- \ll \mu.$$

(iii) Wenn $\nu \ll \mu$ und $\nu \perp \mu$, dann gilt $\nu = 0$.

■

Lemma 4.2.3 : *Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum. Weiter sei ν ein endliches signiertes Maß und μ ein positives Maß auf $(M, \mathfrak{M})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$\nu \ll \mu$.*

(2) *Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit*
$$\forall A \in \mathfrak{M}, \mu(A) < \delta \ : \quad \nu(A) < \epsilon.$$

Beweis:

IDEE: Nur „(1) ⇒ (2)“ erfordert Arbeit: Konstruiere aus der Negierung von (2) eine Menge B mit $\mu(B) = 0$, aber $\nu(B) \geq \epsilon$.

Beachte, daß wir wegen

$$|\nu(A)| = |\nu^+(A) - \nu^-(A)| \leq \nu^+(A) + \nu^-(A) = |\nu|(A)$$

und Bemerkung 4.2.2(i) o.B.d.A. ν als positiv annehmen können.

Die Implikation „(2) ⇒ (1)“ ist klar. Für die Umkehrung halten wir $\epsilon > 0$ fest und nehmen an, daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $A_n \in \mathfrak{M}$ mit

$$\mu(A_n) < 2^{-n} \quad \text{und} \quad \nu(A_n) \geq \epsilon$$

gibt. Setze $B_k := \bigcup_{n=k}^\infty A_n$ und $B := \bigcap_{k=1}^\infty B_k$. Dann gilt $\mu(B_k) < 2^{1-k}$ und $\mu(B) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$ (vgl. Bemerkung 4.1.2). Andererseits gilt $\infty > \nu(B_k) \geq \epsilon$, also $\nu(B) = \lim_{k\to\infty} \nu(B_k) \geq \epsilon$ und ν ist nicht absolut stetig bzgl. μ. ■

Bemerkung 4.2.4 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ Maßraum und $f \in L^1(M, \mathbb{R}, \mu)$. Wenn man wie in Beispiel 4.2.1 aus f ein signiertes Maß ν auf $(M, \mathfrak{M})$ konstruiert, liefert Lemma 4.2.3 folgende Aussage.

$$\text{Zu jedem } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0 \text{ mit:} \quad (\forall A \in \mathfrak{M}, \mu(A) < \delta) \quad |\int_A f\, d\mu| < \epsilon.$$

Die Aussage ist auch für $f \in L^1(M, \mathbb{C}, \mu)$ richtig, wie man sofort sieht, wenn man f in Real- und Imaginärteil aufspaltet. ∎

Lemma 4.2.5 : *Seien ν und μ endliche, positive Maße auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$. Dann gilt entweder $\nu \perp \mu$ oder aber es gibt ein $\epsilon > 0$ und ein $A \in \mathfrak{M}$ mit*

(a) $\mu(A) > 0$,

(b) $\nu \geq \epsilon\mu$ *auf A, d.h. A ist positiv bzgl. $\nu - \epsilon\mu$.*

Beweis:

IDEE: Betrachte Hahn-Zerlegungen für $\nu - \frac{1}{n}\mu$.

Sei $M = P_n \cup N_n$ eine Hahn-Zerlegung für $\nu - \frac{1}{n}\mu$. Setze $P := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ und $N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_n = M \setminus P$. Dann ist N negativ bzgl. $\nu - \frac{1}{n}\mu$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also gilt

$$0 \leq \nu(N) \leq \tfrac{1}{n}\mu(N)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\nu(N) = 0$. Wenn $\mu(P) = 0$, dann ist μ singulär bzgl. ν. Andernfalls gilt $\mu(P) > 0$ und man findet ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(P_n) > 0$ (vgl. Bemerkung 4.1.2). Da P_n nach Definition positiv bzgl. $\nu - \frac{1}{n}\mu$ ist, ist $A := P_n$ eine Menge der gesuchten Art. ∎

Wir nennen ein signiertes Maß σ**-endlich**, wenn seine totale Variation σ-endlich ist.

Satz 4.2.6 (Radon-Nikodym): *Seien $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum, ν ein σ-endliches signiertes Maß auf $(M, \mathfrak{M})$ und μ ein σ-endliches positives Maß auf $(M, \mathfrak{M})$. Dann gibt es eindeutig bestimmte σ-endliche signierte Maße λ und ρ auf $(M, \mathfrak{M})$ mit*

$$\lambda \perp \mu, \quad \rho \ll \mu, \quad \nu = \lambda + \rho.$$

Außerdem gibt es eine erweitert μ-integrierbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit

$$d\rho = f d\mu.$$

Wenn $h\colon M \to \mathbb{R}$ eine weitere μ-integrierbare Funktion ist, die $d\rho = h d\mu$ erfüllt, dann gilt $h = f$ μ-fast überall.

Beweis:

Wir nehmen zunächst an, daß μ und ν endliche positive Maße sind und setzen

$$\mathcal{F} := \{f\colon M \to [0, \infty] \mid (\forall A \in \mathfrak{M}) \ \int_A f\, d\mu \leq \nu(A)\}.$$

Seien $f, g \in \mathcal{F}$ und $h := \max(f, g)$. Wenn $B := \{x \in M \mid f(x) \geq g(x)\}$ und $A \in \mathfrak{M}$, dann gilt

$$\int_A f\, d\mu = \int_{A\cap B} f\, d\mu + \int_{A\setminus B} g\, d\mu \leq \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) = \nu(A),$$

also $h \in \mathcal{F}$.

Für $a := \sup\{\int_M f\, d\mu \mid f \in \mathcal{F}\}$ gilt $a \leq \nu(M) < \infty$. Wir wählen eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_M f_n\, d\mu = a$ und setzen $g_n := \max(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{F}$ sowie $f := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Dann liefert der Satz 2.2.4 von der monotonen Konvergenz

$$\int_M f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M g_n\, d\mu = a.$$

Insbesondere ist f μ-fast überall endlich und wir können o.B.d.A. annehmen, daß $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Behauptung: Das durch $d\lambda = d\nu - f\, d\mu$ definierte signierte Maß λ erfüllt $\lambda \perp \mu$.

Wir nehmen an, dem wäre nicht so. Dann gibt es nach Lemma 4.2.5 ein $A \in \mathfrak{M}$ und ein $\epsilon > 0$ mit $\mu(A) > 0$ und $\lambda \geq \epsilon\mu$ auf A. Aber dann gilt

$$\epsilon\chi_A\, d\mu \leq d\lambda = d\nu - f\, d\mu$$

und daher $f + \epsilon\chi_A \in \mathcal{F}$. Außerdem finden wir

$$\int_M (f + \epsilon\chi_A)\, d\mu = a + \epsilon\mu(A) > a,$$

im Widerspruch zur Definition von a.

Für den Beweis des Satzes für positive endliche Maße fehlt jetzt nur noch die Eindeutigkeitsaussage. Um diese zu zeigen, nehmen wir an, daß $d\nu = d\lambda' + h\, d\mu$ sowie $\lambda \perp \mu$ und $\lambda' \perp \mu$. Dann folgt $d\lambda - d\lambda' = (f - h) d\mu$, also $\lambda - \lambda' \ll \mu$, und $(\lambda - \lambda') \perp \mu$. Aber dann gilt $\lambda = \lambda'$ nach Bemerkung 4.2.2(iii).

Jetzt nehmen wir an, daß μ und ν beides σ-endliche positive Maße sind. Dann finden wir eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von disjunkten Elementen in $\mathfrak{M}$ mit $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ sowie $\mu(A_j) < \infty$ und $\nu(A_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wir setzen $\mu_j(C) = \mu(C \cap A_j)$ und $\nu_j(C) = \nu(C \cap A_j)$ für alle $C \in \mathfrak{M}$. Jetzt wenden wir den ersten Teil des Beweises auf A_j an und finden Maße λ_j und Funktionen $f_j\colon M \to \mathbb{R}$ mit

$$d\nu_j = d\lambda_j + f_j d\mu_j, \quad \lambda_j \perp \mu_j, \quad \lambda_j(M \setminus A_j) = 0, \quad f|_{M\setminus A_j} \equiv 0.$$

Dann erfüllen $\lambda := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j$ und $f := \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j$

$$d\nu = d\lambda + f d\mu, \quad \lambda \perp \mu$$

und die Existenzaussage des Satzes ist bewiesen. Die Eindeutigkeit folgt wie im Falle der endlichen Maße.

Schließlich ist noch der Fall zu betrachten, in dem ν ein signiertes Maß ist. Dieser Fall folgt aber aus obigem angewandt auf ν^+ und ν^-. ∎

Die Zerlegung $\nu = \lambda + \rho$ mit $\lambda \perp \mu$ und $\rho \ll \mu$ heißt die **Lebesgue–Zerlegung** von ν bzgl. μ. Wenn $\nu \ll \mu$, dann liefert Satz 4.2.6 eine erweitert μ-integrierbare Funktion mit $d\nu = f\, d\mu$. Dieses, bis auf μ-Nullmengen eindeutig bestimmte f heißt die **Radon-Nikodym Ableitung** von ν nach μ. Sie wird auch mit $\frac{d\nu}{d\mu}$ bezeichnet.

Man sieht sofort, daß

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu},$$

aber es gilt z.B. auch eine Version der Kettenregel für die Radon–Nikodym Ableitung:

Proposition 4.2.7 : *Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum und ν ein signiertes σ-endliches Maß auf $(M, \mathfrak{M})$. Seien μ und λ zwei σ-endliche Maße auf $(M, \mathfrak{M})$, die $\nu \ll \mu \ll \lambda$ erfüllen.*

(i) *Wenn* $g \in L^1(M, \mathbb{C}, \nu)$, *dann gilt* $g\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(M, \mathbb{C}, \mu)$ *und*

$$\int_M g\, d\nu = \int_M g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

(ii) *Es gilt* $\nu \ll \lambda$ *und*

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \quad \lambda - \textit{fast überall.}$$

Beweis:

(i) Wir können o.B.d.A. annehmen, daß ν ein positives Maß ist, indem wir $\nu^{\pm}$ separat behandeln. Wenn $A \in \mathfrak{M}$ und $g = \chi_A$, dann gilt

$$\int_M g\, d\nu = \nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_M g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Dies beweist (i) für charakteristische Funktionen. Über positive Linearkombinationen und Grenzwerte davon findet man (i) für positive integrierbare Funktionen und dann über Linearkombinationen für alle integrierbaren Funktionen.

(ii) Sei $A \in \mathfrak{M}$ und $g := \chi_A \frac{d\nu}{\mu}$. Dann liefert (i)

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\, d\lambda,$$

also (ii).

■

Übung 4.2.1 : Seien ν_j für $j \in \mathbb{N}$ und μ signierte Maße auf einem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$. Zeige:

(i) Wenn $\nu_j \perp \mu$ für alle $j \in \mathbb{N}$, dann gilt $\sum_{j\in\mathbb{N}} \nu_j \perp \mu$.

(ii) Wenn $\nu_j \ll \mu$ für alle $j \in \mathbb{N}$, dann gilt $\sum_{j\in\mathbb{N}} \nu_j \ll \mu$.

■

Übung 4.2.2 : Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß in Lemma 4.2.3 nicht auf die Endlichkeit von ν als Voraussetzung verzichtet werden kann. ■

Übung 4.2.3 : Seien ν_i und μ_i für $i = 1, 2$ jeweils σ-endliche signierte Maße auf den meßbaren Räumen $(M_i, \mathfrak{M}_i)$. Zeige: Wenn $\nu_i \ll \mu_i$, dann gilt

(i) $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$.

(ii) $\frac{d(\nu_1\otimes\nu_2)}{d(\mu_1\otimes\mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2)$.

■

4.3 Komplexe Maße

Ein **komplexes Maß** auf einem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$ ist eine Abbildung $\nu\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ mit

(a) $\nu(\emptyset) = 0$,

(b) Wenn $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in $\mathfrak{M}$ ist, dann ist die Reihe $\sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(A_j)$ absolut konvergent und es gilt

$$\nu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(A_j).$$

Insbesondere ist ein signiertes Maß nur dann ein komplexes Maß, wenn es endlich ist.

Beispiel 4.3.1 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in L^1(M, \mathbb{C}, \mu)$. Dann definiert $\nu(A) := \int_A f d\mu$ ein komplexes Maß. Wir schreiben, ähnlich wie im Falles signierter Maße, $d\nu = f\, d\mu$. ■

Man kann ein komplexes Maß ν in offensichtlicher Weise als eine Summe $\mathrm{Re}\,\nu + i\,\mathrm{Im}\,\nu$ mit zwei signierten endlichen Maßen $\mathrm{Re}\,\nu$ und $\mathrm{Im}\,\nu$ schreiben, die man dann den **Realteil** und den **Imaginärteil** von ν nennt. Man setzt dann

$$L^1(M, \mathbb{C}, \nu) := L^1(M, \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,\nu) \cap L^1(M, \mathbb{C}, \mathrm{Im}\,\nu)$$

und

$$\int f\, d\nu := \int f\, d(\mathrm{Re}\,\nu) + i \int f\, d(\mathrm{Im}\,\nu).$$

Zwei komplexe Maße ν und μ heißen zueinander **singulär**, geschrieben $\nu \perp \mu$, wenn

$$\mathrm{Re}\,\nu \perp \mathrm{Re}\,\mu, \quad \mathrm{Re}\,\nu \perp \mathrm{Im}\,\mu, \quad \mathrm{Im}\,\nu \perp \mathrm{Re}\,\mu, \quad \mathrm{Im}\,\nu \perp \mathrm{Im}\,\mu.$$

Ein komplexes Maß ν heißt **absolut stetig** bzgl. eines positive Maßes λ, geschrieben $\nu \ll \lambda$, wenn $\mathrm{Re}\,\nu \ll \lambda$ und $\mathrm{Im}\,\nu \ll \lambda$.

Bemerkung 4.3.2 : Indem man die Resultate aus Abschnitt 4.2 auf Realteil und Imaginärteil anwendet, findet man Verallgemeinerungen der dortigen Resultate für komplex Maße. Insbesondere hat man eine komplexe Version des Satzes 4.2.6 von Radon-Nikodym.

Lemma 4.3.3 : *Sei ν ein komplexes Maß auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$.*

(i) *Es gibt ein endliches Maß μ auf $(M, \mathfrak{M})$ und eine Funktion $f \in L^1(M, \mathbb{C}, \mu)$ mit $d\nu = f\, d\mu$.*

(ii) *Wenn μ_1, μ_2 endliches Maße auf $(M, \mathfrak{M})$ mit $d\nu = f_1\, d\mu_1 = f_2\, d\mu_2$ für $f_i \in L^1(M, \mathbb{C}, \mu_i)$ sind, dann gilt auch*

$$|f_1|\, d\mu_1 = |f_2|\, d\mu_2.$$

Beweis:

(i) Setze $\mu := |\,\mathrm{Re}\,\nu| + |\,\mathrm{Im}\,\nu|$. Dann ist μ ein endliche Maß und es gilt $\nu \ll \mu$. Der komplexe Radon-Nikodym Satz (vgl. Bemerkung 4.3.2) liefert dann die Funktion $f \in L^1(M, \mathbb{C}, \mu)$ mit $d\nu = f\, d\mu$.

(ii) Setze $\lambda = \mu_1 + \mu_2$. Wegen $\mu_i \ll \lambda$ gilt nach Proposition 4.2.7

$$f_1 \frac{d\mu_1}{d\lambda}\, d\lambda = d\nu = f_2 \frac{d\mu_2}{d\lambda}\, d\lambda.$$

Da aber die Funktionen $\frac{d\mu_1}{d\lambda}$ nicht-negativ sind, folgt auch

$$|f_1| d\mu_1 = |f_1| \frac{d\mu_1}{d\lambda}\, d\lambda = |f_2| \frac{d\mu_2}{d\lambda}\, d\lambda = |f_2| d\mu_2.$$

■

Lemma 4.3.3 erlaubt es uns die **totale Variation** eines komplexen Maßes ν mit $d\nu = f\mu$ als

$$|\nu| := |f|\, d\mu$$

zu definieren. Da für ein endliches signiertes Maß ν gilt $\nu = (\chi_P - \chi_N)|\nu|$, wobei $M = P \cup N$ eine Hahn-Zerlegung für ν und $|\nu|$ die totale Variation von ν ist, ist die neue Definition der totalen Variation wegen $|\chi_P - \chi_N| \equiv 1$ kompatibel mit der alten.

Proposition 4.3.4 : *Sei ν ein komplexes Maß auf dem meßbaren Raum $(M, \mathfrak{M})$.*

(i) $\nu \ll |\nu|$ *und* $\left|\frac{d\nu}{d|\nu|}\right|$ *ist* $|\nu|$*-fast überall gleich* 1.

(ii) $|\nu(A)| \leq |\nu|(A)$ *für alle* $A \in \mathfrak{M}$.

(iii) $L^1(M, \mathbb{C}, \nu) = L^1(M, \mathbb{C}, |\nu|)$

(iv) $\left|\int_M f\, d\nu\right| \leq \int_M |f|\, d|\nu|$ *für alle* $f \in L^1(M, \mathbb{C}, \nu)$.

Beweis:

Wir beweisen nur (i), die anderen Aussagen sind dem Leser zur Übung überlassen.
$\nu \ll |\nu|$ ist klar. Wenn $d\nu = f\, d\mu$ und $g := \frac{d\nu}{d|\nu|}$, dann gilt

$$f\, d\mu = d\nu = g\, d|\nu| = g|f|\, d\mu.$$

Dies zeigt $f = g|f|$ μ-fast überall und daher auch $f = g|f|$ ν-fast überall. Da aber $|f| > 0$ ν-fast überall, finden wir $g = 1$ ν-fast überall. ∎

Kapitel 5

Radon-Maße

5.1 Der Rieszsche Darstellungssatz

Sei M ein lokal kompakter Hausdorff–Raum und $C_c(M)$ der Raum der stetigen Funktionen $f\colon M \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Ein lineares Funktional $I\colon C_c(M) \to \mathbb{C}$ heißt **positiv**, wenn $I(f) \geq 0$ falls $f \geq 0$.

Proposition 5.1.1 : *Sei $I\colon C_c(M) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional und $K \subseteq M$ kompakt. Dann gibt es eine Konstante C_K mit*

$$\forall f \in C_c(M), \operatorname{supp} f \subseteq K \ : \quad |I(f)| \leq C_K \|f\|_\infty.$$

Beweis:

IDEE: Wende das Lemma von Urysohn an.

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß f reellwertig ist. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine Funktion $\varphi \in C_c(M)$ mit Werten in $[0,1]$, die auf K konstant gleich 1 ist. Wenn jetzt $f \in C_c(M)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq K$ ist, dann gilt $|f| \leq \|f\|_\infty \varphi$. Dies liefert $\|f\|_\infty \varphi \pm f \geq 0$, also nach Voraussetzung $\|f\|_\infty I(\varphi) \pm I(f) \geq 0$ und damit $|I(f)| \leq I(\varphi)|f|_\infty$. ∎

Sei jetzt $\mathfrak{B}_M$ die Borel-σ-Algebra auf dem lokal kompakten Hausdorff-Raum M. Ein Maß μ auf $(M, \mathfrak{B}_M)$, für das gilt

$$\forall K \subseteq M \text{ kompakt} \ : \quad \mu(K) < \infty,$$

heißt ein **Borel-Maß** auf M.

Wenn μ ein Borel-Maß auf $(M, \mathfrak{B}_M)$ ist, dann gilt $C_c(M) \subseteq L^1(M, \mu)$ und

$$I(f) := \int_M f \, d\mu$$

definiert ein positives lineares Funktional auf $C_c(M)$.

Sei jetzt $A \in \mathfrak{B}_M$. Dann heißt μ **von außen regulär** auf A, wenn

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ offen}\},$$

und **von innen regulär** auf A, wenn

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid A \supseteq K, K \text{ kompakt}\}.$$

Ein Borel-Maß, das von innen und von außen regulär auf A ist, heißt **regulär** auf A. Ein **Radon-Maß** ist ein Borel-Maß, das auf allen Borelmengen in M von außen regulär und auf allen offenen Mengen in M von innen regulär ist.

Satz 5.1.2 (Rieszscher Darstellungssatz): *Sei M ein lokal kompakter Raum und $I\colon C_c(M) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Radon-Maß μ mit*

$$\forall f \in C_c(M) \qquad I(f) = \int_M f\, d\mu.$$

Das Maß hat darüber hinaus folgende Eigenschaften:

(a) *Für jede offene Teilmenge U von M gilt*

$$\mu(U) = \sup\{I(f) \mid f\colon M \to [0,1] \text{ stetig mit } \operatorname{supp} f \subseteq U\}.$$

(b) *Für jede kompakte Teilmenge K von M gilt*

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f\colon M \to \mathbb{R} \text{ stetig mit } f \geq \chi_K\}.$$

Beweis:

Idee: Die Eindeutigkeit ist leicht zu sehen. Für die Existenz konstruiere ein äußeres Maß μ^* via $\widetilde{\mu}(U) := \sup\{I(f) \mid f\colon M \to [0,1] \text{ stetig mit } \operatorname{supp} f \subseteq U\}$ und $\mu^*(A) := \inf\{\widetilde{\mu}(U) \mid A \subseteq U, U \text{ offen in } M\}$. Dieses schränkt man auf $\mathfrak{B}_M$ ein.

Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Sei μ ein Radon-Maß mit $I(f) = \int_M f\, d\mu$ für alle $f \in C_c(M)$ und $U \subseteq M$ offen. Wenn $f\colon M \to [0,1]$ stetig ist mit $\operatorname{supp} f \subseteq U$, dann folgt

$$I(f) \leq \mu(U).$$

Andererseits, wenn $K \subseteq U$ kompakt ist, dann findet man mit dem Lemma von Urysohn eine stetige Abbildung $f\colon M \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq U$ und $f|_K \equiv 1$. Für dieses f gilt

$$\mu(K) \leq \int_M f\, d\mu = I(f).$$

Da aber μ auf U von innen regulär ist, liefert dies die Eigenschaft (a). Damit sind die Werte von μ auf den offenen Mengen vollständig durch I bestimmt. Da die offenen Mengen die Borel σ-Algebra erzeugen, ist also μ durch I eindeutig festgelegt.

Um jetzt die Existenz von μ zu beweisen, *definieren* wir zunächst für jede offene Teilmenge U von M

$$\widetilde{\mu}(U) := \sup\{I(f) \mid f\colon M \to [0,1] \text{ stetig mit } \operatorname{supp} f \subseteq U\}$$

(endlich wegen Proposition 5.1.1) und dann für jede Teilmenge $A \subseteq M$

$$\mu^*(A) := \inf\{\widetilde{\mu}(U) \mid A \subseteq U, U \text{ offen in } M\}.$$

Es ist klar, daß $\widetilde{\mu}(U) \leq \widetilde{\mu}(V)$ falls $U \subseteq V$ zwei offene Teilmengen von M sind. Damit folgt sofort

$$\forall U \subseteq M \text{ offen} \;:\quad \widetilde{\mu}(U) = \mu^*(U).$$

Behauptung: Es gilt

(i) μ^* ist ein äußeres Maß.

(ii) Jede offene Teilmenge von M ist μ^*-meßbar.

(iii) Das durch den Satz 3.3.9 bestimmte Maß $\mu = \mu^*|_{\mathfrak{B}_M}$ erfüllt

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f\colon M \to \mathbb{R} \text{ stetig mit } f \geq \chi_K\}$$

für jede kompakte Teilmenge K von M.

(iv) μ ist ein Radon-Maß.

(v) $I(f) = \int_M f\, d\mu$ für jedes $f \in C_c(M)$.

Wenn diese Behauptungen bewiesen sind, hat man den Satz bewiesen.

Zu (i): Wir zeigen, daß für jede Folge $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen in M und $U := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ gilt $\widetilde{\mu}(U) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\mu}(U_j)$. Dann folgt für $E \subseteq M$

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\mu}(U_j) \,\Big|\, U_j \text{ offen}, E \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j\Big\}$$

und (i) folgt mit Lemma 3.3.5.

Sei also $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen Mengen in M und $U := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$. Für jede stetige Funktion $f\colon M \to [0,1]$ mit $K := \operatorname{supp}(f) \subseteq U$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$. Wir benützen eine Teilung der Eins auf K: Dies sind kompakt getragene stetige Funktionen $g_1, \ldots, g_n\colon M \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp}(g_j) \subseteq U_j$ und $\sum_{j=1}^n g_j \equiv 1$ auf K. Aber dann gilt $f = \sum_{j=1}^n f g_j$ und $\operatorname{supp}(f g_j) \subseteq U_j$, was zu

$$I(f) = \sum_{j=1}^n I(f g_j) \leq \sum_{j=1}^n \widetilde{\mu}(U_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \widetilde{\mu}(U_j)$$

führt. Da f mit den erwähnten Eigenschaften beliebig war, zeigt dies gerade $\widetilde{\mu}(U) \leq \sum_{j=1}^\infty \widetilde{\mu}(U_j)$.

Zu (ii): Seien zunächst $U, A \subseteq M$ beide offen. Dann ist $A \cap U$ offen, und zu $\epsilon > 0$ finden wir eine stetige Funktion $f\colon M \to [0,1]$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(f) \subseteq A \cap U$ und

$$I(f) > \widetilde{\mu}(A \cap U) - \epsilon.$$

Analog, weil $A \setminus \operatorname{supp}(f)$ offen ist, finden wir eine stetige Funktion $g\colon M \to [0,1]$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(g) \subseteq A \setminus \operatorname{supp}(f)$ und

$$I(g) > \widetilde{\mu}(A \setminus \operatorname{supp}(f)) - \epsilon.$$

Aber dann gilt $f + g\colon M \to [0,1]$ und $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq A$, also

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\mu}(A) & \geq & I(f) + I(g) \\ & > & \widetilde{\mu}(A \cap U) + \mu(A \setminus \operatorname{supp}(f)) - 2\epsilon \\ & \geq & \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) - 2\epsilon. \end{array}$$

Jetzt läßt man ϵ gegen 0 gehen und findet $\mu(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U)$.

Für ein allgemeines $A \subseteq M$ mit $\mu^*(A) < \infty$ findet man eine offene Umgebung $V \supseteq A$ mit $\widetilde{\mu}(V) \leq \mu^*(A) + \epsilon$ und rechnet

$$\begin{array}{rcl} \mu^*(A) + \epsilon & \geq & \widetilde{\mu}(V) \\ & \geq & \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \setminus U) \\ & \geq & \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U). \end{array}$$

Wieder mit ϵ gegen 0 ergibt sich $\widetilde{\mu}(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U)$, was nach Bemerkung 3.3.8 die Gleichheit

$$\widetilde{\mu}(A) = \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U)$$

zeigt.

Zu (iii): Das Maß μ ist von außen regulär nach Satz 3.3.9. Sei jetzt $K \subseteq M$ kompakt und $f \in C_c(M)$ mit $f \geq \chi_K$. Für $1 > \epsilon > 0$ betrachte die offene Menge $U_\epsilon := \{x \in M \mid f(x) > 1-\epsilon\}$. Für jede stetige Funktion $g\colon M \to [0,1]$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(g) \subseteq U_\epsilon$ gilt $g \leq (1-\epsilon)^{-1} f$, also $I(g) \leq (1-\epsilon)^{-1} I(f)$. Dies liefert

$$\mu(K) \leq \mu(U_\epsilon) \leq (1-\epsilon)^{-1} I(f)$$

und mit $\epsilon \to 0$ sogar $\mu(K) \leq I(f)$.

Umgekehrt, für eine offene Umgebung U von K findet man mit dem Lemma von Urysohn eine stetige Funktion $f\colon M \to [0,1]$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$ und $f|_K \equiv 1$. Es gilt also $f \geq \chi_K$ und $I(f) \leq \mu(U)$. Da μ von außen regulär ist, folgt die Behauptung.

Zu (iv): Bis jetzt haben wir gesehen, daß μ auf kompakten Mengen endliche Werte annimmt und von außen regulär ist. Bleibt zu zeigen, daß μ auf offenen Mengen von innen regulär ist. Sei dazu $U \subseteq M$ offen und $r \leq \mu(U)$. Wir wählen eine stetige Funktion $f\colon M \to [0,1]$ mit kompaktem Träger $K := \operatorname{supp}(f) \subseteq U$ und $I(f) > r$. Dann gilt nach (iii) $\mu(K) > r$, also die innere Regularität.

Zu (v): Es genügt zu zeigen, daß für jede kompakt getragene stetige Funktion $f\colon M \to [0,1]$ gilt $I(f) = \int_M f\,d\mu$, da diese Menge von Funktionen ganz $C_c(M)$ aufspannt. Sei also f so eine Funktion. Für $N \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq N$ setze $K_j := \{x \in M \mid f(x) \geq N^{-1} j\}$ sowie $K_0 := \operatorname{supp}(f)$. Wir definieren Funktionen $f_1, \ldots, f_N \in C_c(M)$ durch

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & x \notin K_{j-1} \\ f(x) - N^{-1}(j-1) & x \in K_{j-1} \setminus K_j \\ N^{-1} & x \in K_j \end{cases}$$

oder $f_j = \min\{\max\{f - N^{-1}(j-1), 0\}, N^{-1}\}$. Es gilt $N^{-1}\chi_{K_j} \leq f_j \leq N^{-1}\chi_{K_{j-1}}$, also

$$N^{-1}\mu(K_j) \leq \int_M f_j\,d\mu \leq N^{-1}\mu(K_{j-1}).$$

Da $f_j \in C_c(M)$, gilt für ein offenes $U \supseteq K_{j-1}$ die Ungleichung $I(f_j) \leq N^{-1}\mu(U)$. Wegen (iii) und der äußeren Regularität ergibt sich

$$N^{-1}\mu(K_j) \leq I(f_j) \leq N^{-1}\mu(K_{j-1}).$$

Mit $f = \sum_{j=1}^N f_j$ finden wir jetzt

$$N^{-1}\sum_{j=1}^N \mu(K_j) \leq \int_M f\,d\mu \leq N^{-1}\sum_{j=1}^N \mu(K_{j-1}),$$

$$N^{-1}\sum_{j=1}^N \mu(K_j) \leq I(f) \leq N^{-1}\sum_{j=1}^N \mu(K_{j-1}),$$

und

$$|I(f) - \int_M f\,d\mu| \leq N^{-1}(\mu(K_0) - \mu(K_N)) \leq N^{-1}\mu(\operatorname{supp}(f)).$$

Weil aber $\mu(\operatorname{supp}(f)) < \infty$ ergibt sich mit $N \to \infty$ die Behauptung.

■

Übung 5.1.1 : Sei M ein lokal kompakter Hausdorffraum, N eine abgeschlossene Teilmenge von M und ν ein Radon-Maß auf N. Zeige:

(i) $I(f) := \int_N f|_N \, d\nu$ ein positives lineares Funktional $I\colon C_c(M) \to \mathbb{C}$.

(ii) Das I induzierte Maß μ auf M ist durch $\mu(E) = \nu(E \cap N)$ gegeben.

■

Übung 5.1.2 : Sei μ ein Radon-Maß auf M.

(i) Sei N die Vereinigung aller offenen Teilmengen $U \subseteq X$ mit $\mu(U) = 0$. Zeige: $\mu(N) = 0$ und für jede offene Teilmenge $V \subseteq M$ mit $V \setminus N \neq \emptyset$ gilt $\mu(V) > 0$. Man nennt $M \setminus N$ den **Träger** von μ und bezeichnet ihn mit $\operatorname{supp} \mu$.

(ii) Zeige: Es gilt $x \in \operatorname{supp} \mu$ genau dann, wenn $\int_M f \, d\mu = 0$ für alle $f \in C_c(M, [0,1])$ mit $f(x) > 0$.

■

Übung 5.1.3 : Sei M die Einpunktkompaktifizierung einer diskreten Mengen. Zeige: wenn μ ein Radon-Maß auf M ist, dann ist $\operatorname{supp} \mu$ abzählbar. ■

Übung 5.1.4 : Sei $\mathbb{R}_d$ die Menge $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie und $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$ mit der zugehörigen Produkttopologie. Zeige:

(i) Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $C_c(X)$, wenn $f^y \in C_c(\mathbb{R})$ und $f^y = 0$ für alle bis auf endlich viele y (hierbei ist $f^y(x) = f(x,y)$).

(ii) Durch $I(f) := \sum_{y \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^y$ wird ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$ definiert.

(iii) Das zu I gehörige Radon-Maß μ erfüllt $\mu(E) = \infty$ für alle $E \subseteq X$ mit $E \cap (\mathbb{R} \times \{y\}) \neq \emptyset$ für überabzählbar viele $y \in \mathbb{R}_d$.

(iv) Sei $E = \{0\} \times \mathbb{R}_d$. Dann gilt $\mu(E) = \infty$, aber $\mu(K) = 0$ für jede kompakte Teilmenge K von E.

■

5.2 Approximationseigenschaften

Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen $f_n\colon M \to \mathbb{C}$. Man sagt, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert im Maß** gegen eine meßbare Funktion f, geschrieben $f_n \to_\mu f$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \ : \quad \mu\big(\big\{x \in M \;\big|\; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\big\}\big) \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Analog heißt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **Cauchy-Folge im Maß**, falls

$$\forall \epsilon > 0 \ : \quad \mu\big(\big\{x \in M \;\big|\; |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\big\}\big) \underset{n,m \to \infty}{\to} 0.$$

Wenn $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(M, \mathbb{C}, \mu)$ ist, dann sagt man $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert im L^1-Sinn** gegen $f \in L^1$, wenn

$$\|f_n - f\|_1 = \int_M |f_n - f| \, d\mu \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Proposition 5.2.1 : *Wenn $f_n \to f$ im L^1-Sinn, dann konvergiert $f_n \to_\mu f$.*

Beweis:

IDEE: Betrachte $A_{n,\epsilon} = \big\{x \in M \;\big|\; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\big\}$.

Setze $A_{n,\epsilon} = \big\{x \in M \;\big|\; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\big\}$. Dann gilt

$$\int_M |f_n - f| \, d\mu \geq \int_{A_{n,\epsilon}} |f_n - f| \, d\mu \geq \epsilon \mu(A_{n,\epsilon}).$$

Also hat man

$$\mu(A_{n,\epsilon}) \leq \epsilon^{-1} \|f_n - f\|_1 \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

was die Behauptung beweist. ■

Satz 5.2.2 : *Seien $(M,\mathfrak{M},\mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Maß. Dann gilt*

(i) *Es gibt eine meßbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ mit $f_n \to_\mu f$.*

(ii) *Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ die μ-fast überall gegen f konvergiert.*

(iii) *Wenn $f_n \to_\mu g$, dann gilt $f = g$ μ-fast überall.*

Beweis:

IDEE: Konstruiere eine Teilfolge $g_j := f_{n_j}$, für die $A_j := \{x \in M \mid |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geq 2^{-j}\}$ die Ungleichung $\mu(A_j) \leq 2^{-j}$ erfüllt und betrachte $F_k := \bigcup_{j=k}^\infty A_j$.

Wir wählen $g_j := f_{n_j}$ mit $\mu(A_j) \leq 2^{-j}$ für

$$A_j := \{x \in M \mid |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geq 2^{-j}\}.$$

Setze $F_k := \bigcup_{j=k}^\infty A_j$, dann gilt $\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^\infty 2^{-j} = 2^{1-k}$. Für $F := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ folgt $\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = 0$ mit Proposition 3.2.4.

Wenn $x \notin F_k$ und $i \geq j \geq k$, findet man

$$(*) \qquad |g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq 2^{1-j}.$$

Also ist $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ auf $M \setminus F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M \setminus F_k$ punktweise eine Cauchy-Folge. Wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{j\to\infty} g_j(x) & x \notin F \\ 0 & x \in F \end{cases}.$$

Dann liefert $(*)$ auch

$$\forall x \notin F_k, j \geq k \ : \quad |g_j(x) - f(x)| \leq 2^{2-j}.$$

Wegen $\mu(F_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt $g_j \to_\mu f$. Dann muß aber auch $f_n \to_\mu f$ gelten, weil

$$\{x \in M \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \subseteq \{x \in M \mid |f_n(x) - g_j(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x \in M \mid |g_j(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Damit sind (i) und (ii) bewiesen.

Für (iii) beachten wir, daß $f_n \to_\mu g$ und

$$\{x \in M \mid |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \subseteq \{x \in M \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x \in M \mid |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$$

die Identität $\mu(\{x \in M \mid |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) = 0$ für alle $\epsilon > 0$ zeigen. Mit $\epsilon = \frac{1}{k} \to 0$ ergibt sich $f = g$ μ-fast überall. ■

Korollar 5.2.3 : *Wenn $f_n \to f$ in L^1, dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, die μ-fast überall gegen f konvergiert.*

Beweis:

Dies ist einfach eine Kombination von Proposition 5.2.1 und Satz 5.2.2. ■

Satz 5.2.4 (Egorov): *Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und μ endlich, sowie f_n und f meßbare Funktionen auf M. Wenn $f_n \to f$ μ-fast überall, dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $A \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(A) \leq \epsilon$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $M \setminus A$.*

Beweis:

IDEE: Betrachte $A_n(k) := \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in M \mid |f_m(x) - f(x)| \geq k^{-1}\}$.

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $f_n \to f$ punktweise gilt. Für $k, n \in \mathbb{N}$ setze

$$A_n(k) := \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in M \mid |f_m(x) - f(x)| \geq k^{-1}\}.$$

Für festes k ist die Folge $(A_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und es gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n(k) = \emptyset$. Weil aber $\mu(M) < \infty$ können wir mit Proposition 3.2.4 schließen, daß $\mu(A_n(k)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Für $\epsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ wählen wir jetzt n_k so groß, daß $\mu\big(A_{n_k}(k)\big) < \epsilon 2^{-k}$ und setzen

$$A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n_k}(k).$$

Dann gilt $\mu(A) < \epsilon$ und wir haben

$$\forall n > n_k, x \notin A \ : \quad |f_n(x) - f(x)| < k^{-1}.$$

Also konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig auf $M \setminus A$. ∎

Lemma 5.2.5 : *Sei M ein lokal kompakter Raum und μ ein Radon-Maß auf M. Dann ist μ auf allen σ-endlichen Mengen von innen regulär.*

Beweis:

IDEE: Zeige zunächst die Regularität auf Mengen von endlichem Maß.

Sei $\mu(A) < \infty$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \supseteq A$ mit $\mu(U) < \mu(A) + \epsilon$ und eine kompakte Teilmenge $B \subseteq U$ mit $\mu(B) > \mu(U) - \epsilon$. Wegen $\mu(U \setminus A) < \epsilon$ finden wir auch eine offene Umgebung $V \supseteq U \setminus A$ mit $\mu(V) < \epsilon$. Dabei können wir annehmen, daß $V \subseteq U$. Dann erfüllt die kompakte Menge $K := B \setminus V \subseteq A$

$$\mu(K) = \mu(B) - \mu(B \cap V) > \mu(A) - \epsilon - \mu(V) > \mu(A) - 2\epsilon.$$

Damit ist μ von innen regulär auf A.

Wenn $\mu(A) = \infty$, aber $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, wobei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathfrak{B}_M$ mit $\mu(A_j) < \infty$ ist, dann gilt $\mu(A_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Also gibt zu $N \in \mathbb{N}$ ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_j) > N$ und der erste Teil des Beweises liefert eine kompakte Teilmenge $K \subseteq E_j$ mit $\mu(K) > N$. Damit ist also μ auch auf so einem A von innen regulär. ∎

Lemma 5.2.6 : *Sei M lokal kompakt und μ ein σ-endliches Radon-Maß auf $(M, \mathfrak{B}_M)$. Zu $A \in \mathfrak{B}_M$ und $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Umgebung U von A und eine abgeschlossene Teilmenge F von A mit $\mu(U \setminus F) < \epsilon$.*

Beweis:

IDEE: Überdecke Mengen A_i endlichen Maßes durch offene Mengen U_i so, daß die Reihe $\sum_i \mu(U_i \setminus A_i)$ konvergiert. Für abgeschlossene Menge argumentiere via Komplementbildung.

Schreibe A als disjunkte Vereinigung $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ mit $\mu(A_j) < \infty$. Zu jedem A_j findet man eine offene Umgebung U_j mit $\mu(U_j) < \mu(A_j) + \epsilon 2^{-j-1}$ und setzt $U := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$. Dann ist U offene Umgebung von A mit

$$\mu(U \setminus A) < \epsilon \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j-1} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Dasselbe Argument, angewandt auf $M \setminus A$, liefert eine offene Umgebung V von $M \setminus A$ mit $\mu(V \cap A) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Für $F := M \setminus V$ gilt dann $F \subseteq A$ und

$$\mu(U \setminus F) = \mu(U \setminus A) + \mu(A \setminus F) = \mu(U \setminus A) + \mu(A \cap V) < \epsilon.$$

■

Satz 5.2.7 : *Sei M lokal kompakt und jede offene Teilmenge von M sei abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen. Dann ist jedes Borel-Maß ist regulär und insbesondere ein Radon-Maß.*

Beweis:

IDEE: Konstruiere ein positives lineares Funktional aus μ und benütze die Regularitätseigenschaften des zugehörigen Radon-Maßes ν.

Sei μ ein Borel-Maß. Da dann μ auf allen kompakten Mengen endlich ist, gilt $C_c(M) \subseteq L^1(M,\mu)$ und $I(f) = \int_M f\,d\mu$ definiert ein positives lineares Funktional auf $C_c(M)$. Sei ν das nach dem Rieszschen Darstellungssatz 5.1.2 zugehörige Radon-Maß. Wenn $U \subseteq M$ offen ist, dann kann man es nach Voraussetzung als abzählbare Vereinigung $U = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$ von kompakten Mengen K_j schreiben. Wähle mit dem Lemma von Urysohn $f_1 \in C_c(M)$ mit $\operatorname{supp}(f_1) \subseteq U$ und $f|_{K_1} \equiv 1$. Dann definiert man induktiv $f_n \in C_c(M)$ mit $\operatorname{supp}(f_n) \subseteq U$ und $f|_{\bigcup_{j=1}^n K_j \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} \operatorname{supp}(f_j)} \equiv 1$. Dann konvergieren die f_n monoton und punktweise gegen χ_U. Der Satz 2.2.4 von der monotonen Konvergenz liefert

$$\mu(U) = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\,d\nu = \nu(U).$$

Wenn jetzt $A \in \mathfrak{B}_M$ und $\epsilon > 0$, dann finden wir mit Lemma 5.2.6 eine offene Umgebung V von A und eine abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq A$ mit $\nu(V \setminus F) < \epsilon$. Da aber $V \setminus F$ offen ist, folgt $\mu(V \setminus F) < \epsilon$. Insbesondere haben wir $\mu(V) \leq \mu(A) + \epsilon$, was die äußere Regularität von μ beweist. Wegen $\mu(F) \geq \mu(A) - \epsilon$ und der Tatsache, daß F sich als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen schreiben läßt (das gilt für M statt F und dann schneidet man die kompakten Mengen mit F), erhalten wir auch die innere Regularität von μ. ■

Lemma 5.2.8 : *Sei M ein lokal kompakter Raum und μ ein Radon-Maß auf M. Dann ist $C_c(M)$ dicht in $L^1(M,\mu)$.*

Beweis:

IDEE: Benütze Lemma 5.2.5 und das Lemma von Urysohn um charakteristische Funktionen zu approximieren.

Kombiniert man Lemma 2.2.3 mit dem Satz 2.2.4 von der monotonen Konvergenz, so sieht man (nach Aufteilung in Real- und Imaginärteil sowie anschließend in positive und negative Teile), daß die einfachen Funktionen dicht in $L^1(M,\mu)$ sind, also genügt es zu zeigen, daß für jedes $E \in \mathfrak{B}_M$ mit $\mu(E) < \infty$ die charakteristische Funktion χ_E in $L^1(M,\mu)$ durch Elemente von $C_c(M)$ approximiert werden kann. Mit Lemma 5.2.5 finden wir eine kompakte Teilmenge $K \subseteq E$ und eine offene Umgebung $U \supseteq E$ mit $\mu(U \setminus K) < \epsilon$. Das Lemma von Urysohn liefert dann eine stetige Funktion $f\colon M \to [0,1]$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$ und $f|_K \equiv 1$. Dies zeigt $\chi_K \le f \le \chi_U$ und daher

$$\|\chi_E - f\|_1 \le \mu(U \setminus K) < \epsilon.$$

∎

Satz 5.2.9 (Lusin): *Sei M ein lokal kompakter Raum und μ ein Radon-Maß auf M. Weiter sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion, für die gilt $\mu(\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\varphi \in C_c(M)$ mit*

$$\mu(\{x \in M \mid f(x) \neq \varphi(x)\}) < \epsilon.$$

Wenn f beschränkt ist, kann man φ so wählen, daß

$$\|\varphi\|_\infty \le \|f\|_\infty.$$

Beweis:

IDEE: Approximiere f durch eine Folge stetiger Funktionen und betrachte eine hinreichend große Menge, auf der die Konvergenz gleichmäßig ist.

Wir setzen $E := \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$ und nehmen zunächst an, daß f beschränkt ist. Dann gilt $f \in L^1(M,\mu)$ und Lemma 5.2.8 zeigt, daß es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c(M)$ gibt, die in $L^1(M,\mu)$ gegen f konvergiert. Mithilfe von Korollar 5.2.3 können wir annehmen (durch Übergang zu einer Teilfolge), daß $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall gegen f konvergiert. Jetzt wenden wir Egorovs Satz 5.2.4 an und finden eine Teilmenge $A \subseteq E$ auf der $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und für die gilt $\mu(E \setminus A) < \frac{\epsilon}{3}$.

Außerdem liefert Lemma 5.2.5 eine kompakte Teilmenge $B \subseteq A$ und eine offene Umgebung $U \supseteq E$ mit

$$\mu(A \setminus B) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{und} \quad \mu(U \setminus E) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Da $g_n \to f$ auf B gleichmäßig konvergiert und B kompakt ist, ist $f|_B$ stetig. Der Fortsetzungsatz **??** von Tietze liefert uns eine Funktion $g \in C_c(M)$ mit $g|_B = f|_B$ und $\operatorname{supp}(g) \subseteq U$. Also gilt

$$\{x \in M \mid f(x) \neq g(x)\} \subseteq U \setminus B$$

und letztere Menge hat Maß kleiner als ϵ.

Bleibt im Falle eines beschränkten f noch die Normabschätzung zu zeigen. Dazu betrachte die stetige Funktion $\beta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch

$$\beta(z) := \begin{cases} z & |z| \le \|f\|_\infty \\ \frac{z}{|z|}\|f\|_\infty & |z| > \|f\|_\infty \end{cases}$$

definiert ist. Dann erfüllt $\varphi := \beta \circ g$ die Ungleichung $\|\varphi\|_\infty \le \|f\|_\infty$, und es gilt $\varphi = f$ auf der Menge $\{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$.

Wenn f nicht beschränkt ist, setze $A_n := \{x \in M \mid 0 < |f(x)| \leq n\}$. Dann ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$. Also gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(E\backslash A_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Der erste Teil des Beweises liefert ein $\varphi \in C_c(M)$ mit $\varphi = f\chi_{A_n}$ außerhalb einer Menge vom Maß kleiner $\frac{\epsilon}{2}$. Damit ist also $\varphi = f$ außerhalb einer Menge vom Maß kleiner ϵ. ■

Übung 5.2.1 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n, f\colon M \to \mathbb{C}$ meßbar für $n \in \mathbb{N}$. Zeige, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

(1) $f_n \longrightarrow_\mu f$.

(2) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N \ : \quad \mu\big(\big\{x \in M \bigm| |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\big\} < \epsilon$$

gegeben.

■

Übung 5.2.2 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum sowie f_n und f meßbare Funktionen auf M. Weiter sei $g\colon M \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Wenn $f_n \to f$ μ-fast überall, dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $A \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(A) \leq \epsilon$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $M \setminus A$. ■

Übung 5.2.3 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum mit endlichem μ und $f\colon M \times [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Funktion, für die $f(\cdot, y)\colon M \to \mathbb{C}$ meßbar ist für jedes $y \in [0,1]$ sowie $f(x, \cdot)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig für jedes $x \in M$. Zeige:

(i) Für $0 < \epsilon, \delta < 1$ ist die Menge

$$E_{\epsilon,\delta} := \big\{x \in M \bigm| |f(x,y) - f(x,0)| \geq \epsilon \text{ für alle } y < \delta\big\}$$

meßbar.

(ii) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine meßbare Teilmenge $E \subseteq M$ mit $\mu(E) < \epsilon$ und $f(\cdot, y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} f(\cdot, 0)$ gleichmäßig auf $M \setminus E$.

■

Übung 5.2.4 : Sei μ ein Radon-Maß auf einem lokal kompakten Hausdorffraum M und $\phi \in C(M, [0, \infty[)$. Zeige: Durch $\nu(E) := \int_E \phi \, d\mu$ wird ein Radon-Maß ν auf M definiert. Hinweis: betrachte das Funktional $f \mapsto \int_M f\phi d\mu$. ■

5.3 Der Satz von Bochner

Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt **positiv definit**, wenn für jede endlich Auswahl $x_1, \ldots, x_N$ von Punkten in $\mathbb{R}^n$ die Matrix $(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$ mit

$$a_{ij} = f(x_i - x_j)$$

positiv semidefinit ist.

Beispiel 5.3.1 : Die Exponentialfunktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = e^{ix\cdot h}$, wobei $h \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt und $x \cdot h$ das euklidische innere Produkt von x und h ist, ist positiv definit. Um das zu sehen, rechnet man

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N e^{i(x_j - x_k)\cdot h} z_j \overline{z_k} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N e^{ix_j\cdot h} z_j \overline{e^{ix_k\cdot h} z_k} = \Big|\sum_{j=1}^N e^{ix_j\cdot h} z_j\Big|^2 \geq 0.$$

■

Bemerkung 5.3.2 : Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ positiv definit. Wähle $x_1 = 0$ und $x_2 = x$. Dann ist die zugehörige positiv semidefinite Matrix gleich

$$A = \begin{pmatrix} f(0) & f(-x) \\ f(x) & f(0) \end{pmatrix}$$

Da A insbesondere hermitesch ist, gilt $f(-x) = \overline{f(x)}$. Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz hat A nur nichtnegative Eigenwerte, also gilt $0 \leq \det(A) = f(0)^2 - f(x)f(-x)$. Der Test gegen den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigt $f(0) \geq 0$. Also folgt

$$f(0) \geq |f(x)|.$$

■

Bemerkung 5.3.3 : Sei μ ein endliches Radon–Maß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu \underset{\|f\|_\infty \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Insbesondere ist μ, betrachtet als lineares Funktional auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig, d.h., eine temperierte Distribution. Daher kann man die **Fourier–Transformierte** $\hat{\mu}$ eines endlichen Radon–Maßes μ betrachten. Mit dem Satz 2.4.5 berechnet sie sich durch

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mu}, \varphi \rangle &= \langle \mu, \hat{\varphi} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx\, d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(\xi)\, dx \end{aligned}$$

d.h., sie ist durch die temperierte (sogar beschränkte) Funktion

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(\xi)$$

gegeben, die wir ebenfalls mit $\hat{\mu}$ bezeichnen (vgl. Beispiel A.4.1). ■

Satz 5.3.4 (Bochner): *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist positiv definit.*

(2) *Es existiert ein endliches Radon-Maß μ mit*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x}\, d\mu(\xi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis:

„(2)⇒(1)“: Die Stetigkeit von f folgt sofort aus Satz 2.4.6(i) aus der Stetigkeit der beschränkten Funktion $(x, \xi) \mapsto e^{-ix\cdot\xi}$. Die Rechnung aus Beispiel 5.3.1 läßt sich ebenfalls unter das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N z_j \overline{z_k} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x_j - x_k)\cdot\xi}\, d\mu(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^N z_j e^{ix_j\cdot\xi} \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^N z_k e^{ix_k\cdot\xi} \right)}\, d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{j=1}^N z_j e^{ix_j\cdot\xi} \Big|^2\, d\mu(\xi) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

„(1)⇒(2)“: Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Schwartzfunktion. Nach Bemerkung 5.3.2 ist f beschränkt. Da φ nach Bemerkung A.2.4 integrierbar ist, ist auch die Funktion

$$(x, y) \mapsto f(x-y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}$$

integrierbar. Für $M \in \mathbb{N}$ zerlege den Würfel $]-M, M]^n$ in Würfel $W_1, \ldots, W_N$, die Translate von $]-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}]$ sind. Die Mittelpunkte dieser Würfel seien mit $x_1, \ldots, x_N$ bezeichnet. Weiter sei f_M die Funktion, die auf jedem Würfel W_j konstant mit dem Wert $f(x_j)$ ist. Analog definiert man die Funktionen φ_M. Dann konvergieren die f_M punktweise gegen f sowie die φ_M gegen φ und der Satz 2.4.4 von der dominierten Konvergenz zeigt, daß

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy = \lim_{M\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_j - x_k)\varphi(x_j)\overline{\varphi(x_k)}\mathrm{vol}W_j\mathrm{vol}W_k \geq 0,$$

wobei $\mathrm{vol}W_j = \frac{2^n}{M^n}$ das Volumen von W_j ist. Mit dem Satz 2.4.5 von Fubini ergibt sich über die Substitution $z = x - y$ (wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes)

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\overline{\varphi(x-z)}\,dx\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,(\varphi * \widetilde{\varphi})\,(z)\,dz,$$

wobei $\widetilde{\varphi}(z) = \overline{\varphi(-z)}$ ist und $\varphi * \widetilde{\varphi}$ die Faltung von φ und $\widetilde{\varphi}$. Nach Bemerkung A.2.5 gilt $\varphi * \widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, deren Fourier–Transformierte nach Satz A.3.2 durch

$$(\varphi * \widetilde{\varphi})^\wedge = \hat{\varphi}\,\hat{\widetilde{\varphi}} = \hat{\varphi}\,\overline{\hat{\varphi}} = |\hat{\varphi}|^2$$

ist. Wir betrachten die Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gemäß Beispiel A.4.1 als temperierte Distribution. Mit der Fourier–Inversionsformel aus Bemerkung A.4.10 ergibt sich also

$$0 \leq \langle f, \varphi * \widetilde{\varphi}\rangle = \langle (\check{f})^\wedge, \varphi * \widetilde{\varphi}\rangle = \langle \check{f}, |\hat{\varphi}|^2\rangle.$$

Da φ eine beliebige Schwartzfunktion war und die Fouriertransformation nach Korollar A.3.9 ein Automorphismus von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, finden wir, daß

$$0 \leq \langle f, |\psi|^2\rangle$$

für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sei jetzt $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ die Gauß–Funktion (vgl. Beispiel A.3.5), $0 \leq h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$. Dann ist $h + \epsilon^2 g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ strikt positiv. Mit der Kettenregel sieht man, daß $\psi = \sqrt{h + \epsilon^2 g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, aber da $\psi(x)$ außerhalb des Trägers von h mit $\sqrt{g(x)} = e^{-\frac{\pi}{2}|x|^2}$ übereinstimmt, gilt sogar $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, liefert die sich ergebende Ungleichung

$$0 \leq \langle \check{f}, |\hat{\varphi}|^2\rangle = \langle \check{f}, h\rangle + \epsilon^2\langle \check{f}, g\rangle,$$

daß $0 \leq \langle \check{f}, h\rangle$ für alle $0 \leq h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Beachte, daß $\check{f}$ nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma A.3.3 insbesondere temperiert ist. Also gilt nach Beispiel A.4.1, daß

$$\langle \check{f}, h\rangle := \int_{\mathbb{R}^n}\check{f}h.$$

Aber nach dem Satz von Stone-Weierstraß (angewendet auf eine feste kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$) ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $C_c(\mathbb{R}^n)$ bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz, woraus man ableitet, daß $0 \leq \langle \check{f}, h\rangle$ für alle $0 \leq h \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 5.1.2 bedeutet das aber gerade, daß $\check{f}$ durch ein Radon–Maß μ via

$$\langle \check{f}, h\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} h\,d\mu$$

gegeben ist. Mit Bemerkung 5.3.3 erhalten wir

$$f(x) = (\check{f})^\wedge(x) = \hat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}d\mu(\xi),$$

falls wir zeigen können, daß μ endlich ist.
Sei $\eta := g * \widetilde{g}$. Dann ist $\hat{\eta} = |\hat{g}|^2 = g^2 = \check{\eta}$ positiv und integrierbar, definiert also ein endliches Radon-Maß. Nach dem ersten Teil des Beweises ist dann $\eta = (\check{\eta})^\wedge$ positiv definit. Nach Beispiel A.3.5 gilt

$$\eta(x) = 2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|x|^2}.$$

Betrachte die Familie

$$\eta_t(x) = t^{-n} \eta\left(\tfrac{x}{t}\right) = (2t^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{2t^2}|x|^2}$$

von dilatierten Funktionen für $t > 0$. Die Fourier–Transformierten dieser Funktionen sind also durch

$$\hat{\eta}_t(\xi) = e^{-2t^2\pi|\xi|^2}$$

gegeben, also insbesondere positiv und integrierbar. Damit sind die η_t positiv definit, was man aber auch direkt aus der positiven Definitheit von η hätte ableiten können. Beachte, daß nach Beispiel A.3.5 und Satz A.1.6 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_t(x)\, dx = 1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f(0) &\geq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\eta_t(-x)\, dx \\ &= \langle f, \widetilde{\eta}_t \rangle \\ &= \langle \check{f}, \hat{\eta}_t \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\eta}_t|^2\, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2t^2\pi|\xi|^2}\, d\mu(\xi). \end{aligned}$$

Da aber $\xi \mapsto e^{-2t^2\pi|\xi|^2}$ für $t \to 0$ gleichmäßig auf Kompakta gegen 1 konvergiert, ergibt sich $\mu(K) \leq f(0)$ für jedes Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Da μ regulär ist, folgt die Behauptung.

■

5.4 Das Haarsche Maß

G bezeichne eine lokalkompakte topologische Gruppe, $C_c(G)$ den Raum der stetigen Funktionen auf G mit kompaktem Träger

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in G \colon f(x) \neq 0\}}$$

und $C_c^+(G)$ darin den Kegel der nicht-negativen Funktionen. Wir definieren eine Norm auf $C_c(G)$ durch $||f|| := \max\{|f(g)| \colon g \in G\}$. Die Gruppe G wirkt auf dem Raum $C_c(G)$ durch

$$G \times C_c(G) \to C_c(G), \qquad (g, f) \mapsto \lambda_g(f) := f \circ \lambda_{g^{-1}}$$

und durch

$$G \times C_c(G) \to C_c(G), \qquad (g, f) \mapsto \rho_g(f) := f \circ \rho_g,$$

wobei $\lambda_g(h) = gh$ und $\rho_g(h) = hg$ ist.

Angesichts des Rieszschen Darstellungssatzes 5.1.2 bezeichnen wir ein lineares Funktional μ auf $C_c(G)$, das auf $C_c^+(G)$ nicht-negativ ist, d.h.

$$\mu(f) \geq 0 \qquad \forall f \in C_c^+(G),$$

als ein **positives Maß** auf G. Man schreibt dann auch

$$\int_G f(x)d\mu(x) := \mu(f).$$

Ein positives Maß μ auf G heißt **linksinvariant**, wenn

$$\int_G f(gx)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x) \qquad \forall g \in G$$

und **rechtsinvariant**, wenn

$$\int_G f(xg)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x) \qquad \forall g \in G.$$

Ein links- bzw. rechtsinvariantes positives Maß μ auf G heißt **links- bzw. rechtsinvariantes Haarsches Maß** , wenn $\mu(f) > 0$ für $f \in C_c^+(G) \setminus \{0\}$ gilt.

Wir setzen nun $K := C_c(G), K_+ := C_c^+(G)$ und $K_+^* := K_+ \setminus \{0\}$. Für eine kompakte Teilmenge $C \subseteq G$ bezeichnen wir mit $C_c(C)$ die Menge aller Funktionen in K, deren Träger in C enthalten ist und setzen $K_+^*(C) := C_c(C) \cap K_+^*$.

Lemma 5.4.1 : *Für $g \in K_+^*$ und $f \in K$ existieren $s_1, \ldots, s_n \in G$, so daß $f \leq \sum_{i=1}^n c_i \lambda_{s_i}(g)$.*

Beweis:

Sei U eine offene Teilmenge von G mit $\inf_{s\in U} g(s) > 0$. Dann kann man $\operatorname{supp}(f)$ mit endlich vielen Mengen der Gestalt sU überdecken und erhält damit die Behauptung für hinreichend große c_i. ■

Lemma 5.4.2 : *Sei $(f : g)$ das Infimum der Zahlen $\sum_{i=1}^n c_i$ für alle Systeme $(c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$ mit $f \leq \sum_{i=1}^n c_i \lambda_{s_i}(g)$. Dann gelten folgende Aussagen :*

(i) $\big(\lambda_s f : g\big) = (f : g) \qquad \forall f \in K, g \in K_+^*, s \in G.$

(ii) $\big(rf : g\big) = r(f : g) \qquad \forall f \in K, g \in K_+^*, r \in \mathbb{R}^+.$

(iii) $\big((f + f') : g\big) \leq (f : g) + (f' : g) \qquad \forall f, f' \in K, g \in K_+^*.$

(iv) $(f : g) \geq \sup(f)/\sup(g) \qquad \forall f \in K, g \in K_+^*.$

(v) $(f : h) \leq (f : g)(g : h) \qquad \forall f \in K, g, h \in K_+^*.$

(vi) $0 < \frac{1}{(f_0:f)} \leq \frac{(f:g)}{(f_0:g)} \leq (f : f_0) \qquad \forall f, f_0, g \in K_+^*.$

(vii) *Seien $f, f', h \in K_+$ mit $h(s) \geq 1$ im Träger von $(f + f')$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert eine kompakte Einsumgebung V von 1 in G, so daß*

$$(f : g) + (f' : g) \leq \big((f + f') : g\big) + \epsilon(h : g) \qquad \forall g \in K_+^*(V).$$

Beweis:

Die Eigenschaften (i) bis (iii) sind evident.

(iv) Ist $f \leq \sum_i c_i \lambda_{s_i}(g)$ mit $c_i \geq 0$, so gilt

$$\sup f \leq (\sum_i c_i) \sup g.$$

(v) Ist $f \le \sum_i c_i \lambda_{s_i}(g)$ und $g \le \sum_j d_j \lambda_{t_j}(h)$ mit $c_i, d_j \ge 0$, so ist

$$f \le \sum_{i,j} c_i d_j \lambda_{s_i t_j}(h)$$

und somit $(f : h) \le \sum_{i,j} c_i d_j = (\sum_i c_i)(\sum_j d_j)$.

(vi) Hierzu wendet man (v) auf f_0, f, g an.

(vii) Wir setzen $F := f + f' + \frac{1}{2}\epsilon h$. Die Funktionen ϕ, ϕ', die auf dem Träger von $f + f'$ mit f/F, f'/F übereinstimmen und außerhalb verschwinden, gehören zu K_+^*. Also sind sie gleichmäßig stetig (Übung 5.4.1) und wir finden zu jedem $\eta > 0$ eine Einsumgebung $V \subseteq G$, so daß

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le \eta, \quad |\phi'(x) - \phi'(y)| \le \eta, \qquad \text{für} \quad y \in xV.$$

Sei nun $g \in K_+^*(V)$. Dann gilt $\phi\lambda_s(g) \le \big(\phi(s) + \eta\big)\lambda_s(g)$ und $\phi'\lambda_s(g) \le \big(\phi'(s) + \eta\big)\lambda_s(g)$ (Nachweis !). Sind $c_1, ..., c_n \ge 0$ und $s_1, ..., s_n \in G$ mit $F \le \sum_i c_i \lambda_{s_i}(g)$, so haben wir

$$f = \phi F \le \sum_i c_i \phi \lambda_{s_i} g \le \sum_i c_i \big(\phi(s_i) + \eta\big)\lambda_{s_i} g$$

und ebenso für f'. Damit ist

$$(f : g) + (f' : g) \le \sum_i c_i \big(\phi(s_i) + \phi'(s_i) + 2\eta\big) \le (1 + 2\eta)\sum_i c_i,$$

da $\phi + \phi' \le 1$. Mit der Definition von F und (ii), (iii) und (v) schließen wir nun

$$\begin{aligned}(f : g) + (f' : g) &\le (1 + 2\eta)(F : g)\\ &\le (1 + 2\eta)\Big(((f + f') : g) + \frac{1}{2}\epsilon(h : g)\Big)\\ &\le ((f + f') : g) + \frac{1}{2}\epsilon(h : g) + 2\eta((f + f') : h)(h : g) + \epsilon\eta(h : g).\end{aligned}$$

Hieraus folgt (vii) sofort, wenn man η ausreichend klein wählt. ∎

Satz 5.4.3 : *Auf einer lokalkompakten Gruppe existiert ein linksinvariantes und ein rechtsinvariantes Haar'sches Maß.*

Beweis:

Die Familie der Obermengen der Mengen $K_+^*(V)$ für $V \in \mathcal{U}(1)$ bilden einen Filter auf K_+^*. Sei $\mathcal{F}$ ein feinerer Ultrafilter und $f_0 \in K_+^*$ fest. Für $f \in K_+^*$ setzen wir

$$I_g(f) := \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} \qquad \text{und} \qquad \alpha : K_+^* \to [\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)],\ g \mapsto I_g(f)$$

(Lemma 5.4.2(vi)). Dann ist $\alpha(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf dem kompakten Raum $[\frac{1}{(f:f_0)}, (f : f_0)]$ (Satz B.6.9) und daher existiert $I(f) := \lim \alpha(\mathcal{F})$ (Satz B.6.11) und der Limes ist eindeutig, da Intervalle separiert sind. Nach iii) ist $I(f + f') \le I(f) + I(f')$ und mit vii) folgt $I(f) + I(f') \le I(f + f') + \epsilon I(h)$ für $\epsilon > 0$ und für jede Funktion $h \in K_+^*$ mit $h|_{\mathrm{supp}\,(f+f')} = 1$. Die Existenz so einer Funktion folgt aus dem Lemma von Urysohn. Also ist $I(f + f') = I(f) + I(f')$. Ist nun $f \in K$, so setzen wir zunächst $f_+ := \max(0, f)$ und $f_- := f_+ - f$. Wir definieren nun $I(0) = 0$ und $I(f) := I(f_+) - I(f_-)$. Dadurch wird auf K ein lineares Funktional definiert (Übung). Nach Lemma 5.4.2(i) gilt sogar

$$I(\lambda_g f) = I(f) \qquad \forall g \in G, f \in K$$

und damit ist I ein linksinvariantes Haarsches Maß. Die Existenz eines rechtsinvarianten Haarschen Maßes folgt aus der Existenz des linksinvarianten für die Gruppe $G^{op} = (G, *)$ mit dem Produkt $x * y = yx$. ∎

Unser nächstes Ziel ist es, die Eindeutigkeit bis auf einen positiven Faktor zu zeigen.

Lemma 5.4.4 : *Sei μ ein positives Maß auf G. Dann gelten folgende Aussagen :*

(i) $\mu(f) \leq \mu(f')$ *für* $f, f' \in C_c(G)$ *mit* $f \leq f'$.

(ii) $|\mu(f)| \leq \mu(|f|)$ *für* $f \in K$.

(iii) *Zu jeder kompakten Teilmenge* $V \subseteq G$ *existiert ein* $C_V > 0$ *mit*

$$|\mu(f)| \leq C_V ||f|| \qquad \forall f \in C_c(V).$$

Beweis:

(i) Das folgt aus $\mu(f') - \mu(f) = \mu(f' - f) \geq 0$.

(ii) Aus (i) folgt $\mu(f) \leq \mu(|f|)$ und $-\mu(f) = \mu(-f) \leq \mu(|f|)$ und damit die Behauptung.

(iii) Nach Satz A.42 finden wir $h \in K_+$ mit $h|_V = 1$. Für $f \in C_c(V)$ ist daher $|f| \leq ||f||h$. Also gilt

$$|\mu(f)| \leq \mu(|f|) \leq ||f||\mu(h).$$

■

Lemma 5.4.5 : *Sind* $V, V_1, V_2 \subseteq G$ *kompakt mit* $VV_1 \cup V_1V^{-1} \subseteq V_2$*, so ist sind die Abbildungen*

$$V \times \big(C_c(V_1), ||\cdot||\big) \to \big(C_c(V_2), ||\cdot||\big), \qquad (g, f) \mapsto \lambda_g f$$

und

$$V \times \big(C_c(V_1), ||\cdot||\big) \to \big(C_c(V_2), ||\cdot||\big), \qquad (g, f) \mapsto \rho_g f$$

stetig.

Beweis:

Wegen $\operatorname{supp}(\lambda_g f) = g \operatorname{supp}(f)$ ist $\lambda_g f \in C_c(V_2)$ für $f \in C_c(V_1)$. Sei nun $\epsilon > 0$ und $(g, f) \in V \times C_c(V_1)$. Da f gleichmäßig stetig ist (Übung 5.4.1), finden wir eine symmetrische Einsumgebung $W \subseteq G$ mit

$$|f(y^{-1}x) - f(x)| \qquad \forall y \in W, x \in G.$$

Ist nun $(g', f') \in V \times C_c(V_1)$ mit $g' \in Wg$ und $||f - f'|| \leq \epsilon$, so folgt

$$||\lambda_{g'} f' - \lambda_g f|| \leq ||\lambda_{g'}(f' - f)|| + ||\lambda_{g'} f - \lambda_g f|| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Die zweite Behauptung folgt analog. ■

Lemma 5.4.6 : *Sei* $h \in C_c(G \times G)$ *mit* $\operatorname{supp}(h) \subseteq V \times V$ *für eine kompakte Menge* $V \subseteq G$*. Dann gelten folgende Aussagen :*

(i) *Die Abbildungen*

$$G \to C_c(V), \qquad g \mapsto \big(x \mapsto h(g, x)\big)$$

und

$$G \to C_c(V), \qquad g \mapsto \big(x \mapsto h(x, g)\big)$$

sind stetig.

(ii) (Fubini) *Sind* μ *und* μ' *positive Maße auf* G*, so sind die Funktionen* $g \mapsto \int_G h(x,g)\ d\mu(x)$ *und* $g \mapsto \int_G h(g,x)\ d\mu'(x)$ *stetig mit*

$$\int_G \int_G h(x,y)\ d\mu(x) d\mu'(y) = \int_G \int_G h(x,y)\ d\mu'(y) d\mu(x).$$

Beweis:

(i) Das folgt sofort aus der gleichmäßigen Stetigkeit von h (Übung 5.4.1).

(ii) Die Stetigkeit der beiden Funktionen folgt aus (i) und Lemma 5.4.4 Damit sind beide Doppelintegrale wohldefiniert, da die Träger beider Funktionen wieder in V liegen. Nach Lemma 5.4.4 sind die linearen Abbildungen

$$\alpha\colon C_c(V \times V) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \int_G \int_G f(x,y)\ d\mu(x) d\mu'(y)$$

und

$$\beta\colon C_c(V \times V) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \int_G \int_G f(x,y)\ d\mu'(y) d\mu(x)$$

beide stetig bzgl. $||f|| := \max\{|f(x,y)|\colon x,y \in V\}$. Wie man sofort sieht, stimmen sie auf den Funktionen der Gestalt $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ überein. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß liegt der von diesen Funktionen aufgespannte Untervektorraum dicht in $C_c(V \times V)$. Daher stimmen die beiden stetigen Funktionen α und β sogar auf $C_c(V \times V)$ überein. ∎

Satz 5.4.7 : *Sind* μ *und* μ' *linksinvariante Haarsche Maße auf* G*, so existiert* $\lambda > 0$ *mit* $\mu' = \lambda\mu$*.*

Beweis:

Sei $f \in K$ mit $\mu(f) \neq 0$. Nach Lemma 5.4.4 und Lemma 5.4.5 ist die Funktion

$$D_f\colon G \to \mathbb{R}, \qquad s \mapsto \frac{1}{\mu(f)} \int_G f(ts)\ d\mu'(t)$$

stetig. Sei $g \in K$. Die Funktion $(s,t) \mapsto f(s) g(t^{-1}s)$ hat kompakten Träger in $G \times G$. Wir setzen $\check{g}(x) := g(x^{-1})$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mu(f)\mu'(\check{g}) &= \int_G f(s)\ d\mu(s) \int_G g(t^{-1})\ d\mu'(t) \\
&= \int_G f(s)\ d\mu(s) \int_G g(t^{-1}s)\ d\mu'(t) && \text{Linksinvarianz von } \mu' \\
&= \int_G \int_G f(s) g(t^{-1}s)\ d\mu'(t)\ d\mu(s) \\
&= \int_G \int_G f(s) g(t^{-1}s)\ d\mu(s)\ d\mu'(t) && \text{Fubini} \\
&= \int_G \int_G f(ts) g(s)\ d\mu(s)\ d\mu'(t) && \text{Linksinvarianz von } \mu \\
&= \int_G g(s) \int_G f(ts)\ d\mu'(t)\ d\mu(s) && \text{Fubini} \\
&= \mu(g \cdot \mu(f) D_f) = \mu(f)\mu(g \cdot D_f).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\mu'(g) = \mu(\check{g} \cdot D_f).$$

Aus Übung 5.4.2 folgt damit $D_f = D_{f'}$ für $f, f' \in K_+^*$. Wir setzen $D := D_f$. Hiermit ist

$$\mu'(f) = D(1)\mu(f) \quad \forall f \in K_+^*$$

und damit für alle $f \in K$. Die Ungleichung $D(1) > 0$ folgt, weil μ' ein linksinvariantes Haarsches Maß ist. ■

Beispiel 5.4.8 :

(i) Auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definiert das Lebesgue-Maß ein Haarsches Maß.

(ii) Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist

$$\mu(f) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \qquad \forall f \in C_c(\mathbb{Z})$$

ein Haarsches Maß.

(iii) Auf dem Kreis $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definiert

$$\mu(f) = \int_0^1 f(t+\mathbb{Z})\ dt \qquad \forall f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

ein Haarsches Maß.

(iv) Auf einer endlichen Gruppe (mit der diskreten Topologie) ist durch

$$\mu(f) = \sum_{g\in G} f(g)$$

ein Haarsches Maß gegeben.

■

Satz 5.4.9 : *Sei μ ein linksinvariantes Haarsches Maß auf der lokalkompakten Gruppe G. Dann existiert ein stetiger Homomorphismus*

$$\Delta\colon G \to \mathbb{R}_*^+ := (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \cdot)$$

mit

$$\mu \circ \rho_g = \Delta(g)\mu \qquad \forall g \in G.$$

Beweis:

Zunächst ist

$$\mu \circ \rho_g(\lambda_x f) = \mu(\rho_g \lambda_x f) = \mu(\lambda_x \rho_g f) = \mu(\rho_g f) = \mu \circ \rho_g(f).$$

Also ist $\mu \circ \rho_g$ ein linksinvariantes Haarsches Maß und es existiert $\Delta(g) \in]0,\infty[$ mit $\mu \circ \rho_g = \Delta(g)\mu$. Sei $f \in K_+^*$. Dann ist

$$\Delta(g) = \frac{1}{\mu(f)}\mu(\rho_g f)$$

und nach Lemma 5.4.5 ist Δ stetig. Die Homomorphie folgt sofort. ■

Man nennt die Funktion Δ aus Satz 5.4.9 auch die **modulare Funktion** von G (sie hängt nicht von μ ab). Eine lokalkompakte Gruppe G heißt **unimodular**, wenn ein linksinvariantes Haarsches Maß auf G auch rechtsinvariant ist, d.h. wenn $\Delta(G) = \{1\}$ ist.

Satz 5.4.10 :

(i) *Kompakte Gruppen sind unimodular.*

(ii) *Abelsche lokalkompakte Gruppen sind unimodular.*

(iii) *Lokalkompakte Gruppen mit dichter Kommutatorgruppe $G' = (G, G)$ sind unimodular.*

Beweis:

(i) In diesem Fall ist $\Delta(G)$ eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{R}_*^+$ und damit gleich $\{1\}$.

(ii) Klar, da $\rho_g f = \lambda_{g^{-1}} f$ für $f \in C_c(G)$ und $g \in G$.

(iii) Die Untergruppe $\Delta\big((G, G)\big) \subseteq (\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R}_*^+) = \{1\}$ ist dicht in $\Delta(G)$ und damit ist $\Delta(G) = \{1\}$. ■

Korollar 5.4.11 : *Auf einer kompakten Gruppe G existiert genau ein biinvariantes Haarsches Maß μ mit $\mu(1) = 1$.*

Beweis:

Das folgt aus Satz 5.4.10, dem Eindeutigkeitssatz und $1 \in K_+^*$. ■

Wir nennen ein Haarsches Maß μ auf einer kompakten Gruppe G mit $\mu(G) = 1$ ein **normiertes Haarsches Maß** .

Eine der wichtigsten Anwendungen des Haarschen Maßes auf kompakten Gruppen ist die folgende

Satz 5.4.12 : (Weylscher Trick) *Sei G eine kompakte Gruppe, V ein endlichdimensionaler Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ ein stetiger Homomorphismus. Dann existiert auf V ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, für das alle Abbildungen $\pi(g)$ orthogonal sind.*

Beweis:

Wir setzen

$$\langle x, y \rangle := \int_G \big(\pi(g)x, \pi(g)y\big)\, d\mu(g) \qquad \forall x, y \in V$$

für ein normiertes Haarsches Maß μ auf G. Das Integral ist wohldefiniert, da alle Funktionen $g \mapsto \big(\pi(g)x, \pi(g)y\big)$ stetig sind. Man prüft sofort nach, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symmetrisch und bilinear ist. Für $x = y$ ist $\langle x, x \rangle > 0$, da der Integrand eine positive Funktion ist. Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt. Für $g' \in G$ ist

$$\langle \pi(g')x, \pi(g')y \rangle = \langle x, y \rangle$$

wegen der Linksinvarianz des Haarschen Maßes. Also sind die Abbildungen $\pi(g)$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ alle orthogonal. ■

Übung 5.4.1 : Sei G eine lokalkompakte Gruppe und $f \in C_c(G)$. Dann ist f gleichmäßig stetig in dem Sinne, daß zu $\epsilon > 0$ eine Einsumgebung $V \subseteq G$ so existiert, daß

$$|f(x) - f(y)| \le \epsilon \quad \text{für} \quad y \in xV.$$

■

Übung 5.4.2 : **2.** Sei μ ein Haarsches Maß auf der lokalkompakten Gruppe G und $h \in C(G)$ mit $\mu(fh) = 0$ für alle $f \in C_c(G)$. Dann ist $h = 0$.
Hinweis: Ist $f \in K_+^*$, so ist auch $\mu(fh^2) = 0$. Man verwende nun Satz A.42, um für alle $g \in G$ eine Funktion $f \in K_+^*$ mit $f(g) = 1$ zu finden. ■

Übung 5.4.3 : Zeige, daß der Weylsche Trick für beliebige Hilberträume H funktioniert, wenn man nur voraussetzt, daß die Funktionen

$$g \mapsto \pi(g)y$$

für $y \in H$ stetig sind. ■

Übung 5.4.4 : Sei G eine lokalkompakte Gruppe, μ ein linksinvariantes Haarsches Maß auf G und $C_c(G)$ der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf G. Für $f, h \in C_c(G)$ definiere man die **Faltung**

$$f * h(g) := \int_G f(gx^{-1})h(x)\ d\mu(x)$$

und setze

$$||f||_1 := \int_G |f(x)|\ d\mu(x).$$

Man zeige:

(i) Mit dem Faltungsprodukt wird $C_c(G)$ zu einer assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra.

(ii) Für $f, h \in C_c(G)$ gilt $||f * h||_1 \leq ||f||_1 ||h||_1$, d.h. $\big(C_c(G), *, ||\cdot||_1\big)$ ist eine *normierte Algebra.*

(iii) Die Vervollständigung von $C_c(G)$ bzgl. der Norm $||\cdot||_1$ wird mit $L^1(G)$ bezeichnet. Man kann die Faltung zu einer assoziativen Multiplikation auf $L^1(G)$ fortsetzen, so daß $L^1(G)$ zu einer Banachalgebra wird.

(iv) Man überlege sich, wie die Faltung auf einer endlichen Gruppe aussieht.

(v) Was ist $L^1(G)$ für eine diskrete Gruppe, z.B. für $\mathbb{Z}$?

■

Übung 5.4.5 : Wir behalten die Bezeichnungen aus Übung 5.4.4 bei. Auf $C_c(G)$ betrachte man die Bilinearform

$$\langle f, h\rangle := \int_G f(x)h(x)\ d\mu(x).$$

Man zeige:

(i) Diese Bilinearform ist positiv definit auf $C_c(G)$.

(ii) Die Vervollständigung von $C_c(G)$ bzgl. der induzierten Norm

$$||f||_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

bezeichnet man mit $L^2(G)$. Durch die Fortsetzung des Skalarprodukts auf $L^2(G)$ wird dieser Banachraum zu einem Hilbertraum.

(iii) Man zeige, daß die Abbildungen $\lambda_g\colon f \mapsto f \circ \lambda_{g^{-1}}, C_c(G) \to C_c(G)$ sich zu unitären Abbildungen von $L^2(G)$ auf sich fortsetzen lassen.

■

Übung 5.4.6 : Zeige: das Haarsche Maß auf einer lokal kompakten Gruppe ist regulär. ■

Kapitel 6

Zeitmittel

6.1 Asymptotische Verteilungen und invariante Maße

Sei (M, ρ) ein metrischer Raum und $f\colon M \to M$ stetig. Für $x \in M$ ist die **Bahn** unter f die Menge $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$, wobei wir $f^0 := \mathrm{id}_X$ und $f^k := f \circ f^{k-1}$ setzen. Für $U \subseteq M$ betrachte die **Wiederkehrhäufigkeiten**

$$F_U(f, x, n) := \sharp\{k \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq k \leq n-1; f^k(x) \in U\},$$

die sich mit der charakteristischen Funktion χ_U von U auch durch

$$F_U(f, x, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U(f^k(x))$$

ausdrücken läßt. Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} F_U(f, x, n)$ existiert, nennt man ihn die **asymptotische Dichte** der Verteilung der Bahn von x unter f auf U und $M \setminus U$ und bezeichnet ihn mit $F_U(f, x)$. Es gilt dann

$$F_U(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U(f^k(x)).$$

Der Ausdruck $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U(f^k(x))$ heißt auch das **Zeitmittel** oder **Birkhoff-Mittel** der Funktion χ_U. Allgemein definiert man für eine Funktion $\varphi\colon M \to \mathbb{C}$ das Zeitmittel $I_x(\varphi)$ von φ in x durch

$$I_x(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

falls der Limes existiert.

Proposition 6.1.1 : *Wenn $I_x(\varphi)$ für alle $\varphi \in C(M, \mathbb{R})$ existiert, so gilt:*

(i) $I_x\colon C(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *ist* $\mathbb{R}$*-linear.*

(ii) $|I_x(\varphi)| \leq \sup_{y\in M} |\varphi(y)|$.

(iii) $I_x(\varphi) \geq 0$, *falls* $\varphi \geq 0$.

(iv) $I_x(1) = 1$.

(v) $I_x(\varphi \circ f) = I_x(\varphi) = I_{f(x)}(\varphi)$, *falls* φ *beschränkt ist.*

Beweis:

IDEE: Dies folgt direkt aus den Definitionen.

(i) Betrachte das $\mathbb{R}$-lineare Funktional

$$\begin{array}{rcl} I_x^{(n)}\colon C(M,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(f^k(x)). \end{array}$$

Dann rechnet man

$$\begin{aligned} I_x(r\varphi+s\psi) &= \lim_{n\to\infty} I_x^{(n)}(r\varphi+s\psi) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(rI_x^{(n)}(\varphi)+sI_x^{(n)}(\psi)\right) \\ &= r\lim_{n\to\infty} I_x^{(n)}(\varphi)+s\lim_{n\to\infty} I_x^{(n)}(\psi) \\ &= rI_x(\varphi)+sI_x(\psi). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} |I_x(\varphi)| &= |\lim_{n\to\infty} I_x^{(n)}(\varphi)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |I_x^{(n)}(\varphi)| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}|\varphi(f^k(x))| \\ &\leq \sup_{y\in M}|\varphi(y)| \end{aligned}$$

(iii) Dies ist klar, weil für $\varphi \geq 0$ auch $I_x^{(n)}(\varphi) \geq 0$ gilt.

(iv) Dies ist offensichtlich.

(v)

$$\begin{aligned} I_x(\varphi\circ f)-I_x(\varphi) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^{k+1}(x))-\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x))\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\varphi(f^n(x))-\varphi(x)\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit eine Konsequenz der Beschränktheit von φ ist.

■

Bemerkung 6.1.2 : Sei M kompakt und metrisierbar. Dann zeigen (i) und (ii) aus Proposition 6.1.1 zusammen mit Proposition 5.1.1, daß $I_x\colon C(M,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ ein positives lineares Funktional und somit stetig ist. Hier betrachten wir auf $C(M,\mathbb{R})$ die Topologie, die durch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegeben wird. ■

Ein Maßraum $(M,\mathfrak{M},\mu)$ heißt ein **Wahrscheinlichkeitsraum** oder kurz ein **W-Raum**, wenn μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist, d.h. wenn $\mu(M)=1$.

Sei $(M,\mathfrak{M},\mu)$ ein Maßraum und $f\colon M\to M$ meßbar. Dann heißt μ **invariant** unter f, wenn

$$\forall A\in\mathfrak{M}\ :\quad \mu(f^{-1}(A))=\mu(A).$$

Umgekehrt heißt in diesem Falle f **maßerhaltend**.

Proposition 6.1.3 : *Sei M kompakt und metrisierbar sowie $f\colon M \to M$ stetig. Falls I_x existiert, gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_x auf $(M, \mathfrak{B}_M)$, das unter f invariant ist.*

Beweis:

IDEE: Kombiniere Bemerkung 6.1.2 mit dem Rieszschen Darstellungssatz 5.1.2 und dem Satz 5.2.9 von Lusin.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 5.1.2 gibt es zu I_x ein eindeutig bestimmtes Radon-Maß μ_x mit $\int_M \varphi\, d\mu_x = I_x(\varphi)$ für alle $\varphi \in C(M)$. Insbesondere gilt $\mu_x(M) = I_x(1) = 1$. Damit ist μ_x ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Mit Proposition 6.1.1(v) findet man

$$(*) \qquad \int_M (\varphi \circ f)\, d\mu_x = I_x(\varphi \circ f) = I_x(\varphi) = \int_M \varphi\, d\mu_x$$

für alle $\varphi \in C(M, \mathbb{R})$. Mit dem Satz 5.2.9 von Lusin können wir charakteristische Funktionen durch stetige Funktionen approximieren und erhalten so das Analogon von $(*)$ auch für charakteristische Funktionen. Damit rechnet man dann

$$\begin{aligned} \mu_x(f^{-1}(A)) &= \int_{f^{-1}(A)} 1\, d\mu_x \\ &= \int_M \chi_{f^{-1}(A)}\, d\mu_x \\ &= \int_M (\chi_A \circ f)\, d\mu_x \\ &= \int_M \chi_A\, d\mu_x \\ &= \mu_x(A) \end{aligned}$$

und das beweist die Behauptung. ■

Lemma 6.1.4 : *Sei M kompakt und metrisierbar. Dann gibt es eine dichte Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(M)$.*

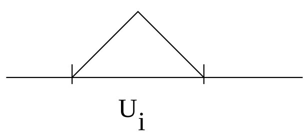
Beweis:

IDEE: Konstruiere eine abzählbare Basis $\{U_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ der Topologie und betrachte die von den Funktionen $g_j\colon M \to \mathbb{R}, x \mapsto \inf\{\rho(x,y) \mid y \in M \setminus U_j\}$erzeugte Unteralgebra von $C(M,\mathbb{R})$.

Wähle eine beliebige Metrik ρ auf M. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge $B_n \subseteq M$ mit $M = \bigcup_{x\in B_n} B(x; \frac{1}{n})$, wobei $B(x;r)$ die Kugel mit Radius r um x bzgl. der gewählten Metrik ist. Die Menge $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ist dann höchstens abzählbar und wenn $x \in M$ und $\epsilon > 0$, findet man ein $y \in B$ mit $\rho(x,y) < \epsilon$, d.h. A ist dicht in M. Die $B(x; \frac{1}{n})$ mit $x \in B$ bilden eine abzählbare Basis $\{U_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ der Topologie.

Betrachte jetzt die stetigen Funktionen

$$\begin{aligned} g_j\colon M &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf\{\rho(x,y) \mid y \in M \setminus U_j\} \end{aligned}$$



und die daraus gebildeten Monome $g_1^{m_1} \cdots g_n^{m_n}$ mit m_j für $j \in \mathbb{N}_0$. Die Familie dieser Monome ist wieder abzählbar, kann also in eine Folge $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ angeordnet werden. Schließlich betrachten wir noch endliche Linearkombinationen der h_j mit rationalen Koeffizienten. Diese Familie ist immer noch abzählbar und wir ordnen sie in eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ an. Diese Folge ist dann dicht in der Menge der Linearkombinationen der h_j mit reellen Koeffizienten, also der von den g_j erzeugten Unteralgebra A von $C(M,\mathbb{R})$.

Die Algebra A trennt die Punkte von M, weil für $x \neq y$ in M eine Umgebung U_j von x existiert mit $y \notin U_j$ und daher $g_j(x) > 0$ und $g_j(y) = 0$. Jetzt zeigt der Satz von Stone–Weierstraß, daß A dicht in $C(M,\mathbb{R})$ liegt. Also liegt die Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ebenfalls dicht in $C(M,\mathbb{R})$. Dies beweist das Lemma für $C(M,\mathbb{R})$ und der Fall $C(M) = C(M,\mathbb{C})$ folgt, indem man Funktionen in Real- und Imaginärteil aufspaltet. ∎

Satz 6.1.5 (Krylov-Bogolubov): *Sei M kompakt, metrisierbar und $f\colon M \to M$ stetig. Dann gibt es ein f-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M,\mathfrak{B}_M)$.*

Beweis:

IDEE: Kombiniere die Ideen der Propositionen 6.1.1 and 6.1.3 mit Lemma 6.1.4.

Sei $x \in M$ und $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine dichte Folge in $C(M)$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_j(f^k(x)) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

beschränkt. Dann findet man jetzt eine Folge $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ für die der Grenzwert

$$(*) \qquad \lim_{l\to\infty} \frac{1}{n_l} \sum_{k=0}^{n_l-1} \varphi_j(f^k(x)) =: J(\varphi_j)$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert. Hier benützt man das Cantorsche Diagonalargument: wähle eine konvergente Teilfolge $n_l^{(1)}$ für $j = 1$, darin eine konvergente Teilfolge $n_l^{(2)}$ für $j = 2$ etc., und setze dann $n_l := n_l^{(l)}$.

Sei jetzt $\varphi \in C(M)$ beliebig und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\|\varphi - \varphi_j\|_\infty \leq \epsilon$. Dies liefert für alle n_l

$$\left| \frac{1}{n_l} \sum_{k=0}^{n_l-1} \varphi(f^k(x)) - \frac{1}{n_l} \sum_{k=0}^{n_l-1} \varphi_j(f^k(x)) \right| \leq \frac{1}{n_l} \sum_{k=0}^{n_l-1} |\varphi(f^k(x)) - \varphi_j(f^k(x))| \leq \epsilon.$$

Wegen $(*)$ kann dann die beschränkte Folge $\frac{1}{n_l} \sum_{k=0}^{n_l-1} \varphi(f^k(x))$ höchstens einen Häufungspunkt haben, muß also konvergent sein. Setze

$$J(\varphi) := \lim_{l\to\infty} \frac{1}{n_l} \sum_{k=0}^{n_l-1} \varphi(f^k(x)).$$

Wie im Beweis von Proposition 6.1.1 sieht man, daß $J\colon C(M) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional mit $J(1) = 1$ ist, das unter f invariant bleibt. Dann folgt wie in Proposition 6.1.3, daß das zu J gemäß dem Rieszschen Darstellungssatz 5.1.2 gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß μ unter f invariant ist. ∎

Bemerkung 6.1.6 : Wenn M kompakt metrisierbar ist und $f\colon M \to M$ ein Homöomorphismus, dann gilt für jedes f-invariante Maß μ auf $(M, \mathfrak{B}_M)$

$$\forall A \in \mathfrak{B}_M \quad : \quad \mu(f(A)) = \mu(A),$$

wie man leicht sieht, wenn man die Definition auf $f(A)$ anwendet. ■

Sei $f\colon M \to M$ eine Abbildung. Wie üblich nennen wir eine Menge $A \subseteq M$ **f-invariant**, wenn $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq A$ gilt. Dagegen heißt A **f^{-1}-invariant**, wenn $f^{-1}(A) = \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subseteq A$, d.h., f^{-1}-Invarianz setzt die Invertierbarkeit von f *nicht* voraus! Wenn f invertierbar ist, fallen die beiden Interpretationen von f^{-1}-Invarianz zusammen. Beachte, daß folgende Bedingungen für $A \subseteq M$ äquivalent sind:

(1) A ist f-invariant und f^{-1}-invariant.

(2) $f^{-1}(A) = A$.

(3) $\chi_A \circ f = \chi_A$.

Falls diese Bedingungen gelten, nennen wir A **stark f-invariant**.

Übung 6.1.1 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f\colon M \to M$ maßerhaltend. Zeige, daß für jedes $\varphi \in L^1(M, \mu)$ gilt $\varphi \circ f \in L^1(M, \mu)$ und $\int_M (\varphi \circ f)\, d\mu = \int_M \varphi\, d\mu$. ■

Satz 6.1.7 (Birkhoffscher Ergodensatz): *Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f\colon M \to M$ maßerhaltend. Wenn $\varphi \in L^1(M, \mu)$, dann existiert das Zeitmittel*

$$\varphi_f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

für μ-fast alle $x \in M$.

Beweis:

IDEE: Mithilfe des Satzes 4.2.6 von Radon-Nikodym konstruiert man zu φ eine bzgl. $\mathfrak{I} := \{A \in \mathfrak{M} \mid f^{-1}(A) = A\}$ meßbare Funktion $\varphi_{\mathfrak{I}}$, die $\varphi\, d\mu = \varphi_{\mathfrak{I}}\, d\mu$ erfüllt. Diese ist dann μ-f.ü. gleich φ_f.

Sei $h \in L^1(M, \mathbb{R}, \mu)$ und $\mathfrak{I} := \{A \in \mathfrak{M} \mid f^{-1}(A) = A\}$ die σ-Algebra aller f^{-1}-invarianten meßbaren Mengen. Betrachte den „f^{-1}-invarianten“ meßbaren Raum $(M, \mathfrak{I})$ und darauf die Maße $h\,\mu$ und μ. Dann gilt $h\,\mu \ll \mu$ und nach dem Satz 4.2.6 von Radon-Nikodym gibt es eine $\mathfrak{I}$-meßbare Funktion $h_{\mathfrak{I}}\colon M \to \mathbb{C}$ mit $h\, d\mu = h_{\mathfrak{I}}\, d\mu$. Dann gilt aber $h_{\mathfrak{I}}^{-1}(z) \in \mathfrak{I}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Dies zeigt $(h_{\mathfrak{I}} \circ f)^{-1}(z) = h_{\mathfrak{I}}^{-1}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also $h_{\mathfrak{I}} \circ f = h_{\mathfrak{I}}$.

Betrachte jetzt $H_n := \max\{\sum_{k=0}^{m-1} h \circ f^k \mid 1 \le m \le n\}$. Wegen der Identität $\max(a, a+b) - b = a - \min(0, b)$ gilt

$$\begin{aligned}
H_{n+1} - H_n \circ f &= \max\nolimits_{1\le m\le n+1} \sum_{k=0}^{m-1} h \circ f^k - \max\nolimits_{1\le m\le n} \sum_{k=0}^{m-1} h \circ f^{k+1} \\
&= \max\left(h, h + \max\nolimits_{2\le m\le n+1} \sum_{k=1}^{m-1} h \circ f^k\right) - \max\nolimits_{2\le m\le n+1} \sum_{k=1}^{m-1} h \circ f^k \\
&= h - \min\left(0, \max\nolimits_{2\le m\le n+1} \sum_{k=1}^{m-1} h \circ f^k\right) \\
&= h - \min(0, H_n \circ f),
\end{aligned}$$

wobei mit max und min für Funktionen jeweils das punktweise Maximum und Minimum gemeint ist. Es ergibt sich

$$(*) \qquad H_{n+1} = h + \max(0, H_n \circ f).$$

Setze jetzt $A := \{x \in M \mid H_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\}$. Dann gilt $A \in \mathfrak{I}$. Wenn nämlich $y = f(x) \in A$, dann liefern $H_n(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $(*)$, daß $x \in A$. Umgekehrt, wenn $x \in A$ und $y = f(x)$, dann zeigt $(*)$ zusammen mit $H_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, daß $H_n(y) > 0$ für große n, also $H_n(y) = H_{n+1}(x) - h(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $y \in A$. Mit dem Satz 2.4.4 von der dominierten Konvergenz und der f-Invarianz von μ findet man

$$0 \le \int_A (H_{n+1} - H_n)\, d\mu = \int_A (H_{n+1} - H_n \circ f)\, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_A h\, d\mu = \int_A h_{\mathfrak{I}} d\mu.$$

Wenn insbesondere $h_{\mathfrak{I}}$ konstant und negativ ist, dann folgt $\mu(A) = 0$.
Weiter gilt

$$(**) \qquad \forall x \in M \setminus A \ : \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h \circ f^k(x) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{H_n(x)}{n} \le 0.$$

Jetzt wähle $h := \varphi - \varphi_{\mathfrak{I}} - \epsilon$. Dann gilt $h_{\mathfrak{I}} = -\epsilon < 0$, also $\mu(A) = 0$, und wegen $(**)$

$$\limsup_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k \Big) - \varphi_{\mathfrak{I}} - \epsilon \le 0$$

μ-fast überall. Ersetzt man φ durch $-\varphi$, findet man analog

$$\liminf_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k \Big) \ge \varphi_{\mathfrak{I}} - \epsilon$$

μ-fast überall und zusammen schließlich $\varphi_f = \varphi_{\mathfrak{I}}$ μ-fast überall. ■

Bemerkung 6.1.8 : Der Beweis von Satz 6.1.7 zeigt insbesondere, daß das Zeitmittel φ_f einer Funktion $\varphi \in L^1(M, \mu)$ meßbar (nach Proposition 1.2.7) und f-invariant ist. Insbesondere folgt aus $\varphi_f = \varphi_{\mathfrak{I}}$

$$\int_A \varphi_f\, d\mu = \int_A \varphi_{\mathfrak{I}}\, d\mu = \int_A \varphi\, d\mu,$$

für alle $A \in \mathfrak{M}$ mit $f^{-1}(A) = A$. ■

Bemerkung 6.1.9 : Wenn f invertierbar ist, kann man Satz 6.1.7 auch auf f^{-1} anwenden und erhält die μ-fast überall Konvergenz der Zeitmittel

$$\overline{\varphi}_f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{-k}(x))$$

für „negative Zeiten“, also auch für die beidseitigen Zeitmittel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} \sum_{k=-n+1}^{n-1} \varphi(f^{-k}(x)).$$

Das bringt allerdings keine neue Information, da $\varphi_f = \overline{\varphi}_f$ μ-fast überall. Wäre dem nicht so, dann könnte man (o.B.d.A. sei $\varphi \in L^1(M, \mathbb{R}, \mu)$) ein $\epsilon > 0$ und eine f^{-1}-invariante Menge $A \in \mathfrak{I}$ mit $\mu(A) > 0$ und

$$\forall x \in A \ : \quad \varphi_f(x) > \overline{\varphi}_f(x) + \epsilon \quad \text{oder} \quad \varphi_f(x) < \overline{\varphi}_f(x) - \epsilon$$

finden. Aber das ist nicht möglich, denn Bemerkung 6.1.8 liefert

$$\int_A \varphi_f \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu = \int_A \overline{\varphi}_f \, d\mu.$$

■

Satz 6.1.10 : *Sei M kompakt metrisierbar und $f\colon M \to M$ stetig. Dann hat die Menge*

$$A_f := \{x \in M \mid (\forall \varphi \in C(M)) \quad \text{existiert } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))\}$$

bzgl. jedes f-invarianten Borel-Wahrscheinlichkeitsmaßes das Maß 1. Wenn f ein Homöomorphismus ist, gilt das auch für die Menge

$$\{x \in M \mid (\forall \varphi \in C(M)) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{-k}(x))\}.$$

Beweis:

IDEE: Kombiniere den Birkhoffschen Ergodensatz 6.1.7 mit den Ideen aus Satz 6.1.5 und seinem Beweis.

Wähle ein f-invariantes Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ und eine dichte Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $C(M)$ (vgl. Lemma 6.1.4). Nach dem Birkhoffschen Ergodensatz 6.1.7 hat die Menge

$$B_f = \left\{x \in M \;\middle|\; (\forall j \in \mathbb{N}) \quad \text{existiert } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_j(f^k(x))\right\}$$

als abzählbarer Schnitt von Mengen mit vollem Maß selbst volles Maß. Jetzt argumentiert man wie im Beweis von Satz 6.1.5 und zeigt, daß $B_f = A_f$ gilt. Damit folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt dann aus Bemerkung 6.1.9. ■

Übung 6.1.2 : Zeige, daß es für die Abbildung $f\colon [0,1] \to [0,1]$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definiert ist, kein f-invariantes Borel-Maß auf $[0,1]$ gibt. ■

Übung 6.1.3 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathfrak{M}$ erfülle $\mu(A) > 0$. Weiter sei $T\colon M \to M$ maßerhaltend und μ_A das durch $\mu_A(B) = \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$ definierte Maß auf $(A, \mathfrak{M} \cap \mathfrak{P}(A))$. Für $x \in A$ setze $n(x) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in A\}$ und $T_A(x) := T^{n(x)}(x)$. Unter der Annahme, daß $n(x) < \infty$ ist für alle $x \in A$, zeige, daß $T_A\colon A \to A$ für μ_A maßerhaltend ist. ■

Übung 6.1.4 : Sei $\Omega_2 := \{(\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mid \omega_j \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ mit der Produkttopologie versehen (kompakt nach dem Satz von Tychonov). Weiter seien $\overline{0}$ und $\overline{1}$ die konstanten Folgen mit Werten 0 bzw. 1. Zeige

(i) Es gibt genau ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf Ω_2, das $\mu(\{\overline{0}\}) = \mu(\{\overline{1}\}) = \frac{1}{2}$ erfüllt.

(ii) μ ist invariant unter der Shift-Transformation $\sigma\colon \Omega_2 \to \Omega_2$, die durch $\sigma(\omega) = \omega'$ mit $\omega'_j = \omega_{j+1}$ definiert ist.

(iii) Es gibt einen Punkt $\omega \in \Omega_2$, der für jedes $\varphi \in C(\Omega_2)$ die Gleichung

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(\sigma^k(\omega)\big) = \frac{1}{2}\big(\varphi(\overline{0}) + \varphi(\overline{1})\big) = \int_{\Omega_2} \varphi \, d\mu$$

erfüllt.

■

6.2 Ergodizität

Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum und $f\colon M \to M$ eine meßbare Abbildung. Ein f-invariantes Maß μ auf $(M, \mathfrak{M})$ heißt **ergodisch**, wenn für jede stark f-invariante Menge $A \in \mathfrak{M}$ entweder $\mu(A) = 0$ gilt oder $\mu(M \setminus A) = 0$. In diesem Fall sagt man auch, f ist **ergodisch** bzgl. μ.

Lemma 6.2.1 : *Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein W-Raum und $f\colon M \to M$ eine maßerhaltende Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(1) *f ist ergodisch bzgl. μ.*

(2) *Jede f-invariante meßbare Funktion $\varphi\colon M \to \mathbb{C}$ ist μ-fast überall konstant.*

(3) *Jede beschränkte f-invariante meßbare Funktion $\varphi\colon M \to \mathbb{C}$ ist μ-fast überall konstant.*

Beweis:

IDEE: Betrachte die Urbildmenge $\varphi^{-1}(]-\infty, a[)$ für passendes $a \in \mathbb{R}$.

„(3)⇒(1)“ Dies ist klar, wenn man für φ die charakteristische Funktion einer stark f-invarianten Menge nimmt.

„(1)⇒(2)“ Betrachte die Borel-meßbare und monoton wachsende Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to [0,1] \\ a &\mapsto \mu\big(\varphi^{-1}(]-\infty, a[)\big), \end{aligned}$$

die $\lim_{a\to-\infty} g(a) = \mu(\emptyset) = 0$ und $\lim_{a\to\infty} g(a) = \mu(M) = 1$ erfüllt (vgl. Proposition 3.2.4).

Wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < g(a) < 1$ gibt, dann haben die beiden stark f-invarianten Mengen $\varphi^{-1}([a, \infty[)$ und $\varphi^{-1}(]-\infty, a[)$ beide positives Maß und f kann nicht bzgl. μ ergodisch sein.

Also gilt $g(\mathbb{R}) \subseteq \{0,1\}$ und wegen der Monotonie gilt mit $a = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid g(t) = 1\}$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ 1 & \text{für } t > a. \end{cases}$$

Damit sind die Mengen $A_n := \varphi^{-1}([a + \frac{1}{n}, \infty[)$ und $B_n := \varphi^{-1}(]-\infty, a - \frac{1}{n}[)$ ebenso Nullmengen, wie ihre Vereinigung $\varphi^{-1}(M \setminus \varphi^{-1}(a))$. Aber dann ist φ μ-fast überall konstant.

„(2)⇒(3)“ Dies ist trivial.

■

Übung 6.2.1 : Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum und $f\colon M \to M$ eine meßbare Abbildung und $\mu \neq \nu$ zwei bzgl. f ergodische W-Maße. Zeige, daß $\mu \perp \nu$. ■

Proposition 6.2.2 : *Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein W-Raum und $f\colon M \to M$ ergodisch bzgl. μ. Wenn $\varphi \in L^1(M, \mu)$, dann gilt für μ-fast alle $x \in M$*

$$\varphi_f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \int_M \varphi \, d\mu.$$

In anderen Worten: Für ergodische Abbildungen stimmen Zeitmittel und Ortsmittel überein.

Beweis:

IDEE: Kombiniere Lemma 6.2.1 mit Bemerkung 6.1.8.

Nach Bemerkung 6.1.8 ist φ_f f-invariant, also wegen der Ergodizität nach Lemma 6.2.1 μ-fast überall konstant. Dann zeigt dieselbe Bemerkung aber auch μ-fast überall

$$\varphi_f(x) = \int_M \varphi_f \, d\mu = \int_M \varphi \, d\mu.$$

■

Die Abbildung $f\colon M \to M$ heißt **eindeutig ergodisch**, wenn es genau ein f-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M, \mathfrak{M})$ gibt.

Proposition 6.2.3 : *Sei $(M, \mathfrak{M})$ ein meßbarer Raum und $f\colon M \to M$ eindeutig ergodisch. Dann ist das eindeutig bestimmte f-invariante Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(M, \mathfrak{M})$ ergodisch.*

Beweis:

IDEE: Betrachte das durch $\mu_A(B) := \frac{\mu(B\cap A)}{\mu(A)}$ für $\mu(A) > 0$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß μ_A.

Für $A \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(A) > 0$ und $B \in \mathfrak{M}$ setze

$$\mu_A(B) := \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}.$$

Dann ist μ_A ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das zudem f-invariant ist, falls A stark f-invariant ist:

$$\mu_A(f^{-1}(B)) = \frac{\mu(f^{-1}(B) \cap A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A))}{\mu(A)} = \frac{\mu(f^{-1}(B \cap A))}{\mu(A)} = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \mu_A(B).$$

Also gilt $\mu = \mu_A$ und das zeigt $\mu(A) = 1$.

■

Man nennt das Maß μ_A das **bedingte Maß** bzgl. A.

Proposition 6.2.4 : *Sei M ein kompakter metrisierbarer Raum und $f\colon M \to M$ eindeutig ergodisch. Dann konvergieren für jedes $\varphi \in C(M)$ die Zeitmittel*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

gleichmäßig gegen $c := \int_M \varphi \, d\mu$, wobei μ das eindeutig bestimmte f-invariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M, \mathfrak{B}_M)$ ist.

Beweis:

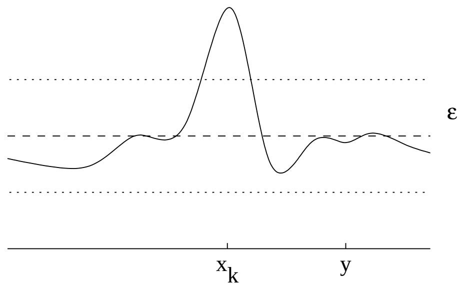
IDEE: Wenn die Behauptung für ein $\varphi \in C(M,\mathbb{R})$ nicht zutrifft, dann findet man mit den Methoden von Proposition 6.1.1 und Satz 6.1.5 zwei f-invariante positive lineare Funktionale, die auf φ unterschiedliche Werte annehmen.

Wir nehmen an, daß $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x))$ für ein $\varphi \in C(M,\mathbb{R})$ nicht gleichmäßig konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Folge $x_k \in M$ mit

$$(*) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \;:\; \left|\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\varphi(f^l(x_k)) - c\right| > \epsilon.$$

Andererseits gibt es nach Proposition 6.2.2 ein $y \in M$ mit

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\varphi(f^l(y)) - c\right| = 0.$$



Nach Übergang zu einer Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ können wir also annehmen, daß

$$\forall k \in \mathbb{N} \;:\; \left|\frac{1}{n_k}\sum_{l=0}^{n_k-1}\varphi(f^l(y)) - c\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nach $(*)$ können wir (wieder nach Übergang zu einer Teilfolge) entweder annehmen, daß

$$\forall k \in \mathbb{N} \;:\; \frac{1}{n_k}\sum_{l=0}^{n_k-1}\varphi(f^l(x_k)) > c + \epsilon$$

oder, daß

$$\forall k \in \mathbb{N} \;:\; \frac{1}{n_k}\sum_{l=0}^{n_k-1}\varphi(f^l(x_k)) < c - \epsilon$$

gilt. Insgesamt haben wir also folgende Situation: Es gibt zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und zwei Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten in M sowie eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$ und

$$\frac{1}{n_k}\sum_{l=0}^{n_k-1}\varphi\big(f^l(x_k)\big) < a < b < \frac{1}{n_k}\sum_{l=0}^{n_k-1}\varphi\big(f^l(y_k)\big).$$

Mit einem Diagonalargument vom Cantorschen Typ (vgl. Satz 6.1.5 und Satz 6.1.10) findet nach eine Teilfolge $(n_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, für die die folgenden Grenzwerte für alle $\psi \in C(M)$ existieren:

$$J_1(\psi) := \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_{k_j}}\sum_{l=0}^{n_{k_j}-1}\psi\big(f^l(x_{k_j})\big) \quad \text{und} \quad J_2(\psi) := \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_{k_j}}\sum_{l=0}^{n_{k_j}-1}\psi\big(f^l(y_{k_j})\big).$$

Wie in Proposition 6.1.1 sieht man, daß J_1 und J_2 f-invariante positive lineare Funktionale mit $J_1(1) = 1 = J_2(1)$ sind. Also gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz 5.1.2 zwei Radonsche Wahrscheinlichkeitsmaße μ_1 und μ_2 auf $(M, \mathfrak{B}_M)$ mit $J_1(\psi) = \int_M \psi \, d\mu_1$ und $J_2(\psi) = \int_M \psi \, d\mu_2$. Wie im Beweis von Satz 6.1.5 sieht man, daß μ_1 und μ_2 f-invariant sind. Wegen

$$J_1(\varphi) \leq a < b \leq J_2(\varphi)$$

gilt $\mu_1 \neq \mu_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Proposition 6.2.5 : *Sei M ein kompakter metrisierbarer Raum und die stetige Abbildung $f\colon M \to M$ eindeutig ergodisch. Sei μ das zugehörige f-invariante Wahrscheinlichkeitsmaß und $U \subseteq M$ offen mit $\mu(\partial U) = 0$. Dann konvergieren die Zeitmittel*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U(f^k(x))$$

gleichmäßig gegen $\mu(U)$.

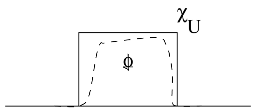
Beweis:

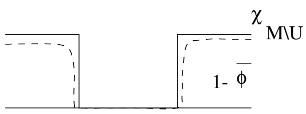
Idee: Approximiere χ_U durch stetige Funktionen und wende Proposition 6.2.4 an.

Seien $\overline{\varphi}_m \geq \chi_U$ und $\underline{\varphi}_m \leq \chi_U$ für $m \in \mathbb{N}$ zwei Folgen in $C(M)$ mit

$$\int_M \overline{\varphi}_m \, d\mu \underset{m\to\infty}{\to} \mu(U) \quad \text{und} \quad \int_M \underline{\varphi}_m \, d\mu \underset{m\to\infty}{\to} \mu(U)$$

(vgl. z.B. Satz von Lusin 5.2.9).





Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in M$ gilt dann

$$(*) \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\varphi}_m(f^k(x)) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U(f^k(x)) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi}_m(f^k(x)).$$

Proposition 6.2.4 und Proposition 6.2.2 zeigen, daß die linke Seite von $(*)$ gegen $\int_M \underline{\varphi}_m \, d\mu$ und die rechte Seite gegen $\int_M \overline{\varphi}_m \, d\mu$ konvergiert. Für $\delta > 0$ wähle jetzt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\int_M \overline{\varphi}_m \, d\mu > \mu(U) - \frac{\delta}{2}$ und $\int_M \underline{\varphi}_m \, d\mu < \mu(U) + \frac{\delta}{2}$. Es ergibt sich für große m

$$\mu(U) - \delta \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U(f^k(x)) \leq \mu(U) + \delta$$

und da δ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Proposition 6.2.6 : *Sei M ein kompakter metrisierbarer Raum und $f\colon M \to M$ stetig. Wenn für jedes φ aus einer dichten Teilmenge von $C(M)$ die Zeitmittel*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x))$$

gleichmäßig in x gegen eine Konstante konvergieren, dann ist f eindeutig ergodisch.

Beweis:

Idee: Kombiniere die Ideen von Satz 6.1.5 mit Bemerkung 6.1.8 um zu zeigen, daß die Integrale $\int_M \varphi\, d\mu$ unabhängig von μ durch die entsprechende Konstanten gegeben sind.

Wie im Beweis des Satzes 6.1.5 stellt man zunächst fest, daß die gleichmäßige Konvergenz für die Funktionen aus einer dichten Teilmenge von $C(M)$ schon die gleichmäßige Konvergenz für alle Funktionen in $C(M)$ zur Folge hat.

Sei jetzt μ ein f-invariantes Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei $\varphi \in C(M)$ und $c := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x))$, dann gilt mit Bemerkung 6.1.8

$$\int_M \varphi\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_M \varphi(f^k(x))\, d\mu = \int_M \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x))\, d\mu = \int_M c\, d\mu = c,$$

d.h. das Integral ist nicht von μ abhängig. Dies beweist die Behauptung. ∎

Übung 6.2.2 : Betrachte die durch $f(x,t) = (x+\alpha, t)$ mit irrationalem α definierte Abbildung $f\colon S^1\times[0,1] \to S^1\times[0,1]$. Zeige: für jede stetige Funktion $\varphi\colon S^1\times[0,1]\to\mathbb{C}$ konvergieren die Zeitmittel $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\big(f^k(x)\big)$ gleichmäßig in x gegen eine Konstante, aber f ist nicht eindeutig ergodisch. ∎

Beispiel 6.2.7 (Irrationale Rotationen auf dem Kreis): Sei $S^1 := \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi i t} \mid t\in\mathbb{R}\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Er ist eine kompakte topologische Gruppe bzgl. der Multiplikation auf $\mathbb{C}$. Als solche ist S^1 isomorph zum eindimensionalen **Torus** $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ via

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \to & S^1 \\ t+\mathbb{Z} & \mapsto & e^{2\pi i t}. \end{array}$$

Die **Rotation** R_α um den Winkel $2\pi\alpha$ ist auf S^1 durch

$$R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z$$

gegeben. Auf $\mathbb{T}$ wird das zu

$$R_\alpha(t+\mathbb{Z}) = (t+\alpha+\mathbb{Z}).$$

Wir benützen Proposition 6.2.6 um zu zeigen, daß die Rotation R_α für *irrationales* α eindeutig ergodisch ist. Man nennt dieses Resultat auch den **Gleichverteilungssatz von Kronecker und Weyl**. Um ihn zu beweisen, genügt es, zu zeigen, daß die Zeitmittel φ_{R_α} für eine dichte Teilmenge von Funktionen in $C(\mathbb{T})$ gleichmäßig gegen eine Konstante konvergieren.

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß sind die trigonometrischen Polynome so eine dichte Teilmenge und da mit zwei Funktionen auch alle Linearkombinationen das passende Verhalten im Zeitmittel haben, brauchen wir nur die für $m \in \mathbb{Z}$ durch $\chi_m(t+\mathbb{Z}) = e^{2\pi i m t}$ definierten Funktionen auf $\mathbb{T}$ zu betrachten. Wegen

$$(\chi_m \circ R_\alpha)(t+\mathbb{Z}) = e^{2\pi i m(t+\alpha)} = e^{2\pi i m\alpha}\chi_m(t+\mathbb{Z})$$

gilt

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\chi_m \circ R_\alpha)(t+\mathbb{Z})\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m k\alpha}\right| = \frac{|1-e^{2\pi i m n\alpha}|}{n|1-e^{2\pi i m\alpha}|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

für $m \neq 0$. Für $m = 0$ haben wir $\chi_m \equiv 1$ und das schließt den Beweis der Behauptung ab. ∎

Beispiel 6.2.8 (Irrationale Translationen auf dem Torus): Betrachte den n-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ und für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} T_\alpha\colon \mathbb{T}^n & \to & \mathbb{T}^n \\ t+\mathbb{Z}^n & \mapsto & t+\alpha+\mathbb{Z}^n. \end{array}$$

Wenn $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ rational unabhängig sind (d.h. linear unabhängig als Elemente des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{R}$), dann ist T_α ergodisch.

Um das einzusehen, betrachten wir eine beschränkte meßbare und T_α-invariante Funktion $\chi\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$. Sei

$$\chi(t_1, \dots, t_n) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \chi_{k_1,\dots,k_n} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^n k_j t_j\right)$$

die Fourier-Entwicklung von χ. Dann gilt

$$\begin{aligned} \chi(T_\alpha t) &= \chi(t_1+\alpha_1, \dots, t_n+\alpha_n) \\ &= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \chi_{k_1,\dots,k_n} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^n k_j(t_j+\alpha_j)\right) \\ &= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \chi_{k_1,\dots,k_n} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^n k_j\alpha_j\right) \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^n k_j t_j\right). \end{aligned}$$

Die Invarianz von χ unter T_α und die Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten liefert

$$\chi_{k_1,\dots,k_n} = \chi_{k_1,\dots,k_n} \exp(2\pi i \sum_{j=1}^n k_j t_j),$$

also $\exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^n k_j\alpha_j\right) = 1$ falls $\chi_{k_1,\dots,k_n} \neq 0$. Wegen der rationalen Unabhängigkeit von $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ folgt $\chi_{k_1,\dots,k_n} = 0$ für alle $(k_1, \dots, k_n) \neq 0$, d.h. χ ist konstant (bis auf eine Menge vom Maß 0). Da χ insbesondere die charakteristische Funktion einer beliebigen T_α^{-1}-invarianten meßbaren Menge sein kann, liefert das die Ergodizität von T_α. ∎

Beispiel 6.2.9 (Expansionen auf dem Torus): Für $m \in \{2, 3, \dots\}$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} E_m\colon \mathbb{T} & \to & \mathbb{T} \\ t+\mathbb{Z} & \mapsto & mt+\mathbb{Z} \end{array}$$

ergodisch bzgl. des Lebesgue-Maßes μ (das gleich dem Haar-Maß ist).

Um das einzusehen, betrachte eine E_m-invariante, meßbare und beschränkte Funktion $\varphi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ und ihre Fourierentwicklung

$$\varphi(t+\mathbb{Z}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k e^{2\pi i k t}.$$

Dann gilt

$$\varphi(t+\mathbb{Z}) = \varphi(E_m(t+\mathbb{Z})) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k e^{2\pi ikmt},$$

also $\varphi_k = \varphi_{mk}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach dem Riemann–Lebesgue Lemma gilt aber $\lim_{k\to\infty} |\varphi_k| = 0$, was dann $\varphi_k = 0$ für alle von Null verschiedenen k impliziert. ■

Bemerkung 6.2.10 : Sei M ein kompakter metrisierbarer Raum und $\mathcal{M}(M)$ die Menge aller Borel-Maße auf M. Wegen der Kompaktheit ist nach Definition jedes Borel-Maß auf M endlich. Nach Satz 5.2.7 ist außerdem jedes Borel-Maß regulär. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 5.1.2 liefert $I_\mu(f) = \int_M f\,d\mu$ eine Inklusion

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(M) & \hookrightarrow & C(M)^* \\ \mu & \to & I_\mu, \end{array}$$

wobei $C(M)^*$ den Raum der stetigen linearen Funktionale auf $C(M)$ bezeichnet. Das Bild der Einbettung sind genau die positiven Funktionale in $C(M)^*$. Damit erbt $\mathcal{M}(M)$ von $C(M)^*$ eine Topologie, die **schwach*-Topologie**, die durch

$$I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I \quad\Leftrightarrow\quad (\forall \varphi \in C(M))\ I_n(\varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I(\varphi)$$

definiert wird. Interpretiert man die Elemente von $C(M)^*$ also einfach als $\mathbb{C}$-wertige Funktionen auf $C(M)$, so ist dies die Topologie der punktweisen Konvergenz. Offensichtlich ist sowohl die Teilmenge der reellwertigen Funktionale als auch die der positive Funktionale abgeschlossen in dieser Topologie. Also ist $\mathcal{M}(M)$ eine abgeschlossenen Teilmenge von $C(M)^*$.

Sei $\mathcal{M}_1(M) := \{\mu \in \mathcal{M}(M) \mid \mu(M) = 1\}$ die Menge der Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf M. Dann ist $\mathcal{M}_1(M)$ in der schwach*-Topologie kompakt. Um das einzusehen, betrachte für $\varphi \in C(M)$ die kompakte Menge $D_\varphi := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le \|\varphi\|_\infty\}$ und setze

$$D := \prod_{\varphi\in C(M)} D_\varphi.$$

Dann ist D nach dem Satz von Tychonov kompakt. Die Menge D besteht aus allen $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen I auf $C(M)$, die $|I(\varphi)| \le \|\varphi\|_\infty$ erfüllen und die Topologie auf D ist in dieser Interpretation gerade die Topologie der punktweisen Konvergenz. Sei

$$B := \{I \in C(M)^* \mid I \text{ ist positiv und } (\forall \varphi \in C(M))\ |I(\varphi)| \le \|\varphi\|_\infty\}.$$

Dann stimmen die Topologien auf B, die einerseits von D, andererseits von der schwach*-Topologie induziert werden überein. Da $\mathcal{M}(M) \subseteq B$ abgeschlossen ist, bleibt also nur zu zeigen, daß B in D abgeschlossen ist. Das ist aber klar, weil die punktweise Addition und Multiplikation mit Skalaren stetig in der Produkttopologie sind. ■

Sei M kompakt metrisierbar und $f\colon M \to M$ stetig. Wir bezeichnen die Menge alle f-invarianten Elemente von $\mathcal{M}_1(M)$ mit $\mathcal{M}_1(f)$.

Proposition 6.2.11 : *Sei M kompakt metrisierbar und $f\colon M \to M$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$\mu \in \mathcal{M}_1(f)$ ist nicht ergodisch.*

(2) *Es gibt $\mu_1 \neq \mu_2$ in $\mathcal{M}_1(f)$ und ein $\lambda \in]0,1[$ mit $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$.*

Beweis:

„(1)⇒(2)“ Sei $A \in \mathfrak{B}_M$ f-invariant mit $0 < \mu(A) < 1$, dann gilt

$$\mu = \mu(A)\mu_A + (1 - \mu(A))\mu_{M\setminus A}.$$

„(2)⇒(1)“ Aus $\mu(A) = 0$ folgt mit (2) auch $\mu_1(A) = 0 = \mu_2(A)$, also gilt $\mu_i \ll \mu$ für $i = 1, 2$. Der Satz 4.2.6 von Radon-Nikodym liefert Funktionen ρ_i mit $d\mu_i = \rho_i \, d\mu$. Damit schreibt man (2) als

$$\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2 = 1 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Weil aber $\mu_1 \neq \mu_2$ zwei f-invariante Wahrscheinlichkeitsmaße sind, gilt außerdem $\rho_i \circ f = \rho_i$ sowie $\int_G \rho_i \, d\mu_i = 1$ und ρ_1 ist nicht μ–fast überall gleich ρ_2. Insbesondere können nicht beide ρ_i μ-fast überall konstant sein. Nach Lemma 6.2.1 ist also μ auch nicht ergodisch.

■

Geometrisch sagt diese Proposition, daß die Extrempunkte der konvexen Menge $\mathcal{M}_1(f)$ gerade die ergodischen Maße sind.

Satz 6.2.12 : *Sei M kompakt metrisierbar und $f\colon M \to M$ stetig. Dann gibt es ein ergodisches f-invariantes Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß.*

Beweis:

Sei $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine dichte Folge in $C(M, \mathbb{R})$ (vgl. Lemma 6.1.4) und definiere $\mathcal{A}_0 \supseteq \mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2 \supseteq \dots$ induktiv via $\mathcal{A}_0 := \mathcal{M}_1(f)$ und

$$\mathcal{A}_{j+1} := \{\mu \in \mathcal{A}_j \mid \int_M \varphi_{j+1} \, d\mu = \sup_{\nu\in\mathcal{A}_j} \int_M \varphi_{j+1} \, d\nu\}.$$

Diese Definition sinnvoll, weil für schwach*-abgeschlossenes (also kompaktes) $\mathcal{A}_j$ die schwach*-stetige Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_j & \to & \mathbb{R} \\ \nu & \mapsto & \displaystyle\int_M \varphi_{j+1} \, d\nu \end{array}$$

ihr Supremum annimmt und dementsprechend $\mathcal{A}_{j+1}$ nicht leer und schwach*-abgeschlossen ist. Damit folgt (wieder mit der Kompaktheit)

$$\emptyset \neq \mathcal{E} := \bigcap_{j\in\mathbb{N}_0} \mathcal{A}_j.$$

Wir zeigen, daß $\mathcal{E}$ aus Extrempunkten von $\mathcal{M}_1(f)$ besteht und schließen dann mit Proposition 6.2.11, daß alle Elemente von $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_1(f)$ ergodisch sind.

Seien also $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(f)$ und $\lambda \in]0, 1[$ so gewählt, daß $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2 \in \mathcal{E}$. Zu zeigen ist $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Wegen $\int_M \varphi \, d\mu = \lambda \int_M \varphi \, d\mu_1 + (1 - \lambda) \int_M \varphi \, d\mu_2$ für alle $\varphi \in C(M)$ und $\mu \in \mathcal{A}_{j+1}$ für $j \in \mathbb{N}_0$ finden wir

$$\int_M \varphi_{j+1} \, d\mu \geq \int_M \varphi_{j+1} \, d\mu_i, \quad i = 1, 2$$

und

$$\int_M \varphi_j \, d\mu = \int_M \varphi_j \, d\mu_1 = \int_M \varphi_j \, d\mu_2 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Aber dann gilt

$$\int_M \varphi \, d\mu = \int_M \varphi \, d\mu_1 = \int_M \varphi \, d\mu_2$$

für alle $\varphi \in C(M, \mathbb{R})$, weil die Folge der φ_j dicht war. Mit der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz 5.1.2 folgt dann $\mu = \mu_1 = \mu_2$. ■

Beispiel 6.2.13 (Translationen auf kompakten abelschen Gruppen): Sei G eine kompakte metrisierbare abelsche Gruppe. Dann gibt es auf G ein eindeutig bestimmtes Borelsches Wahrscheinlickeitsmaß μ_G, das unter allen **Linkstranslationen**

$$\begin{array}{rcl}\lambda_g\colon G & \to & G\\ h & \mapsto & gh\end{array}$$

invariant ist. Dieses Maß heißt das **Haarsche Maß**. Wir zeigen, daß jedes λ_g, das ergodisch bzgl. μ_G ist, dann schon automatisch eindeutig ergodisch ist.

Sei dazu μ ein beliebiges λ_g-invariantes Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf G. Da g mit allen $h \in G$ kommutiert, sind dann auch die durch

$$\mu_h(A) := \mu(\lambda_h(A)) \quad \forall A \in \mathfrak{B}_G$$

definierten Maße unter λ_g invariant. Da die Menge $\mathcal{M}_1(\lambda_g)$ konvex und schwach*-abgeschlossen ist, können wir für jedes $E \in \mathfrak{B}_G$ mit $\mu_G(E) > 0$ ein λ_g-invariantes Maß ν_E auf $(G, \mathfrak{B}_G)$ durch

$$\nu_E(A) := \frac{1}{\mu_G(E)} \int_E \mu_h(A)\, d\mu_G(h)$$

definieren. Wenn E_1, E_2 zwei disjunkte solche Mengen sind, dann findet man

$$(*) \qquad \mu_G(E_1 \cup E_2)\nu_{E_1 \cup E_2} = \mu_G(E_1)\nu_{E_1} + \mu_G(E_2)\nu_{E_2}.$$

Außerdem rechnet man

$$\begin{array}{rcl}\nu_G(\lambda_h^{-1}(A)) & = & \displaystyle\int_G \mu_k(\lambda_h^{-1}(A))\, d\mu_G(k)\\ & = & \displaystyle\int_G \mu(\lambda_{kh^{-1}}(A))\, d\mu_G(k)\\ & = & \displaystyle\int_G \mu(\lambda_{h^{-1}k}(A))\, d\mu_G(k)\\ & = & \displaystyle\int_G \mu(\lambda_k(A))\, d\mu_G(k)\\ & = & \displaystyle\int_G \mu_k(A)\, d\mu_G(k)\\ & = & \nu_G(A)\end{array}$$

und erhält die λ_h-Invarianz von ν_G für alle λ_h. Mit $\nu_G(G) = 1$ liefert die Eindeutigkeit des Haarschen Maßes die Identität $\nu_G = \mu_G$.

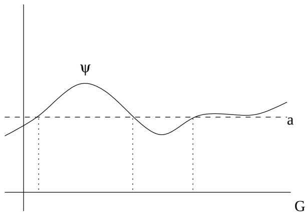
Wenn jetzt $\mu \neq \mu_G$ gilt, dann gibt es eine Funktion $\varphi \in C(G, \mathbb{R})$ mit $\int_G \varphi\, d\mu \neq \int_G \varphi\, d\mu_G$. Mit dem Satz von Fubini finden wir

$$(**) \qquad \int_G \varphi\, d\mu_G = \int_G \left(\int_G \varphi\, d\mu_G\right) d\mu_h = \int_G \left(\int_G \varphi\, d\mu_h\right) d\mu_G = \int_G \left(\int_G \varphi \circ \lambda_h\, d\mu\right) d\mu_G.$$

Betrachte die stetige Funktion

$$\begin{array}{rcl}\psi\colon G & \to & \mathbb{R}\\ h & \mapsto & \displaystyle\int_G \varphi \circ \lambda_h\, d\mu.\end{array}$$

Sei $1 \in G$ das Einselement der Gruppe. Wegen $(**)$ gilt dann $\psi(1) \neq \int_G \psi\, d\mu_G$, und folglich ist ψ nicht konstant. Also finden wir eine reelle Zahl a mit $\mu_G(\psi^{-1}([a, \infty[)) > 0$ und $\mu_G(\psi^{-1}(]-\infty, a[)) > 0$.



Es folgt

$$\int_{\psi^{-1}([a,\infty[)} \psi \, d\mu_G \geq \mu_G(\psi^{-1}([a,\infty[))a$$

und

$$\int_{\psi^{-1}(]-\infty,a[)} \psi \, d\mu_G < \mu_G(\psi^{-1}(]-\infty,a[))a$$

Mit $E := \psi^{-1}([a,\infty[)$ und $F = G \setminus E$ läßt sich das erst in

$$\frac{1}{\mu_G(F)} \int_F \psi \, d\mu_G < a \leq \frac{1}{\mu_G(E)} \int_E \psi \, d\mu_G$$

und dann mit

$$\int_G \eta \, d\nu_E = \frac{1}{\mu_G(E)} \int_E \int_G \eta \circ \lambda_h \, d\mu \, d\mu_G$$

(und der analogen Aussage für F - beides beweist man, indem man mit charakteristischen Funktionen startet und dominierte Konvergenz anwendet) in

$$\int_G \varphi \, d\nu_F < a \leq \int_G \varphi \, d\nu_E$$

umformulieren, was insbesondere $\nu_E \neq \nu_F$ zeigt. Mit $(*)$ findet man aber

$$\mu_G(E)\nu_E + \mu_G(F)\nu_F = \nu_G = \mu_G.$$

Nach Proposition 6.2.11 steht dies im Widerspruch zur Ergodizität von μ_G. ■

Übung 6.2.3 : Sei $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Zeige, daß die Abbildung $f\colon S^1 \to S^1$, die durch $f(x) := x + \frac{1}{10}\sin^2(\pi x) \mod 1$ definiert ist, eindeutig ergodisch ist. ■

Übung 6.2.4 : Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $T\colon M \to M$ maßerhaltend.

(i) Zeige, daß der durch $U_T f(x) := f(Tx)$ definierte Operator $U_T\colon L^2(M,\mu) \to L^2(M,\mu)$ unitär ist.

(ii) Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) T ist ergodisch bzgl. μ.

(2) 1 ist ein einfacher Eigenwert von U_T.

■

Übung 6.2.5 : Betrachte die Abbildung $A_\alpha\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2,\ (x,y) \mapsto (x+\alpha, y+x)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Sei α irrational. Zeige, daß A_α eindeutig ergodisch ist.

(ii) Sei α rational. Bestimme alle A_α-invarianten Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{T}^2$.

■

Übung 6.2.6 : Sei $L \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{Z})$ und $F_L\colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ definiert durch $F_L(x+\mathbb{Z}^n) = Lx + \mathbb{Z}^n$. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) F_L ist ergodisch.

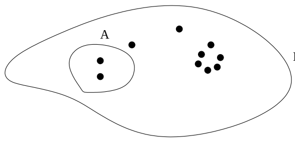
(2) L hat keinen Eigenwert, der eine Einheitswurzel ist.

■

6.3 Wiederkehr und Mischung

Satz 6.3.1 : (Poincaré-Wiederkehrsatz) *Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein W-Raum und $f\colon M \to M$ eine maßerhaltende Abbildung. Für $A \in \mathfrak{M}$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mu(\{x \in A \mid (\forall N \leq n \in \mathbb{N})\, f^n(x) \in M \setminus A\}) = 0.$$



Beweis:

Indem man f durch f^N ersetzt, kann man o.B.d.A. annehmen, daß $N = 1$. Die Menge

$$\widetilde{A} := \{x \in A \mid (\forall n \in \mathbb{N})\, f^n(x) \in M \setminus A\} = A \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(M \setminus A) \right)$$

ist meßbar. Es gilt $f^{-n}(\widetilde{A}) \cap \widetilde{A} = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch

$$f^{-n}(\widetilde{A}) \cap f^{-m}(\widetilde{A}) = \emptyset$$

für alle $n \neq m$ in $\mathbb{N}$. Da f das Maß μ erhält, gilt außerdem $\mu(f^{-n}(\widetilde{A})) = \mu(\widetilde{A})$. Wegen

$$1 = \mu(M) \geq \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(\widetilde{A}) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mu(f^{-n}(\widetilde{A})) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mu(\widetilde{A})$$

folgt schließlich $\mu(\widetilde{A}) = 0$. ∎

Sei M ein metrisierbarer Raum, der **separabel** ist. Das bedeutet, M enthält eine abzählbare dichte Teilmenge. Für einen metrischen Raum ist das äquivalent dazu, daß die Topologie hat eine abzählbare Basis hat (betrachte Kugeln mit rationalen Radii um die Punkte der dichten Folge). Für ein Borel-Maß μ auf M definiert man den **Träger** $\operatorname{supp}(\mu)$ durch

$$\operatorname{supp}(\mu) := \{x \in M \mid (\forall U \text{ offene Umgebung von } x),\ \mu(U) > 0\}.$$

Proposition 6.3.2 : *Sei μ ein Borel-Maß auf M. Dann gilt:*

(i) $\operatorname{supp}(\mu)$ *ist abgeschlossen in M.*

(ii) $\mu(M \setminus \operatorname{supp}(\mu)) = 0$.

(iii) *Für $A \in \mathfrak{B}_M$ mit $\mu(M \setminus A) = 0$ gilt* $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \overline{A}$.

Beweis:

(i) Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{supp}(\mu)$ ist mit $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \in M$, dann gilt für jede offene Umgebung U von x, daß $x_n \in U$ für große n. Nach Definition von $\operatorname{supp}(\mu)$ folgt $\mu(U) > 0$.

(ii) Jeder Punkt $y \in M \setminus \operatorname{supp}(\mu)$ hat eine offene Umgebung U mit $\mu(U) = 0$. Da M separabel ist, kann $M \setminus \operatorname{supp}(\mu)$ mit abzählbar vielen solcher Umgebungen überdeckt werden. Es folgt $\mu(M \setminus \operatorname{supp}(\mu)) = 0$.

(iii) Für $A \in \mathfrak{B}_M$ mit $\mu(M \setminus A) = 0$ betrachte $U := M \setminus \overline{A} \subseteq M \setminus A$. Dann ist U offen mit $\mu(U) = 0$, kann also kein Element von $\operatorname{supp}(\mu)$ enthalten. Es folgt $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \overline{A}$.

■

Sei M ein topologischer Raum und $f: M \to M$ stetig. Ein Punkt $x \in M$ heißt **rekurrent** bzgl. f, wenn es eine Folge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $n_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $x = \lim_{j\to\infty} f^{n_j}(x)$ gibt. D.h. rekurrente Punkte sind Häufungspunkte ihrer f–Bahnen. Der Abschluß der Menge aller bzgl. f rekurrenten Punkte wird mit $R(f)$ bezeichnet. Eine abgeschlossene f-invariante Teilmenge $\emptyset \neq A \subseteq M$ heißt **minimal** bzgl. f, wenn sie keine abgeschlossene f-invariante echte nichtleere Teilmenge hat.

Satz 6.3.3 : *Sei M ein vollständiger separabler metrisierbarer Raum und $f: M \to M$ stetig. Dann gilt*

(i) $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq R(f)$ *für jedes f-invariante Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(M, \mathfrak{B}_M)$.*

(ii) *Wenn μ ergodisch ist, dann hat die Einschränkung von f auf* $\operatorname{supp}(\mu)$ *eine dichte Bahn.*

(iii) *Wenn M kompakt ist und $f|_{\operatorname{supp}(\mu)}$ eindeutig ergodisch, dann ist* $\operatorname{supp}(\mu)$ *eine minimale Menge bzgl. f.*

Beweis:

Idee: Man benützt Poincaré-Wiederkehrsatz 6.3.1 für (i), Proposition 6.2.2 für (ii) und den Satz 6.1.5 von Krylov-Bogolubov für (iii).

(i) Wähle eine abzählbare Basis $\{U_1, U_2, \ldots\}$ der Topologie und bezeichne mit R die Menge der $x \in M$, für die mit $x \in U_m$ auch unendlich viele der $f^k(x)$ in U_m liegen. Dann wendet man den Poincaré-Wiederkehrsatz 6.3.1 auf jedes U_m separat an und findet, daß R volles Maß hat, d.h. $\mu(M \setminus R) = 0$. Mit Proposition 6.3.2(iii) folgt also, daß $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \overline{R}$. Wenn $x \in R$ und U eine offene Umgebung von x ist, dann gilt $x \in U_m \subseteq U$ für ein m und daher sind unendlich viele $f^k(x)$ in U. Da U beliebig klein sein kann, zeigt dies $R \subseteq R(f)$, also $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \overline{R} \subseteq R(f)$.

(ii) Sei jetzt $\{U_1, U_2, \ldots\}$ eine abzählbare Basis der auf $\operatorname{supp}(\mu)$ induzierten Topologie. Dann gilt nach Definition des Trägers $\mu(U_j) > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wir wenden Proposition 6.2.2 simultan auf jedes χ_{U_j} an und finden eine Menge $R \in \mathfrak{B}_M$ von vollem Maß mit

$$\forall x \in R, j \in \mathbb{N} \ : \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{U_j}(f^k(x)) = \mu(U_j) > 0.$$

Also schneidet die Bahn von $x \in R$ jedes U_j und ist daher dicht.

(iii) Wenn $\Lambda \subseteq \operatorname{supp}(\mu)$ eine echte f-invariante und abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{supp}(\mu)$ ist, dann gibt es nach dem Satz 6.1.5 von Krylov-Bogolubov ein $f|_\Lambda$-invariantes Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf Λ. Wir betrachten ν als Maß auf M indem wir $\nu(M \setminus \Lambda) = 0$ setzen. Dann ist $\operatorname{supp}(\nu) \subseteq \Lambda$, also insbesondere $\nu \neq \mu$. Andererseits rechnet man sofort nach, daß ν wegen $f^{-1}(M \setminus \Lambda) = M \setminus f^1(\Lambda) \subseteq M \setminus \Lambda$ invariant unter f ist. Dies liefert einen Widerspruch zur Voraussetzung.

■

Sei M ein topologischer Raum und $f: M \to M$ stetig. Dann heißt f **topologisch transitiv**, wenn es einen Punkt $x \in M$ gibt, für den die Bahn $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in M ist.

Lemma 6.3.4 : *Sei M ein lokal kompakter separabler metrischer Raum ohne offene Punkte und $f\colon M \to M$ stetig. Betrachte die folgenden Aussagen:*

(1) *f ist topologisch transitiv.*

(2) *Zu zwei nichtleeren offenen Teilmengen $U, V \subseteq M$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

(3) *Es gibt keine zwei nichtleeren disjunkten f^{-1}-invarianten offenen Mengen in M.*

(4) *Jede f-invariante Funktion in $C(M)$ ist konstant.*

Dann sind (1) *bis* (3) *äquivalent und die ersten drei implizieren* (4).

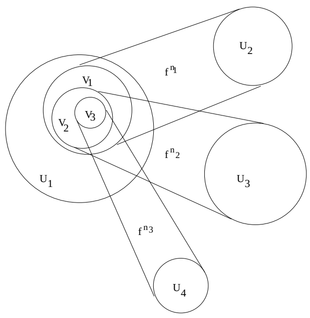
Beweis:

IDEE: Die Implikation „(2)⇒(1)“ benützt die Characterisierung kompakter Mengen über die endliche Schnitteigenschaft. Die anderen Implikationen können direkt aus den Definitionen abgeleitet werden.

„(1)⇒(2)“ Sei f topologisch transitiv ist und $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in M. Dann gibt es $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $f^n(x) \in U$ und $f^m(x) \in V$. Wenn $m \geq n$, dann gilt $f^m(x) = f^{m-n}(f^n(x)) \in f^{m-n}(U) \cap V$ und wir sind fertig. Wenn $n \geq m$, wählen wir eine offene Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $f^k(x) \notin V'$ für alle $0 \leq k \leq n$ (das geht, weil endliche Teilmengen nach Voraussetzung nicht offen sind). Dann gibt es ein $m' \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{m'}(x) \in V' \subseteq V$ und es folgt $m' \geq n$, also (2) mit dem ersten Teil des Argments.

„(2)⇒(1)“ Sei $U_1, U_2, \dots$ eine Basis der Topologie. Durch Verkleinern können wir annehmen, daß $\overline{U_1}$ kompakt ist. Es genügt jetzt, eine Bahn zu konstruieren, die jedes U_j schneidet. Wähle $n_1 \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{n_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann ist $U_1 \cap f^{-n_1}(U_2) \neq \emptyset$ offen und wir finden eine offene Menge V_1 mit $\overline{V_1} \subseteq U_1 \cap f^{-n_1}(U_2)$. Danach wähle $n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{n_2}(V_1) \cap U_3 \neq \emptyset$ und eine offene Menge V_2 mit $\overline{V_2} \subseteq V_1 \cap f^{-n_2}(U_3)$. Induktiv finden wir eine Folge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}_0$ und eine Folge $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen von M mit

$$\overline{V_{j+1}} \subseteq V_j \cap f^{-n_j}(U_{j+2}).$$



Da die $\overline{V_j}$ alle kompakt sind, ist $K := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} V_j = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{V_j} \neq \emptyset$. Mit $n_0 := 0$ gilt dann für $x \in K$

$$\forall j \in \mathbb{N} \ : \quad f^{n_{j-1}}(x) \in U_j.$$

„(2)⇒(3)“ Seien U, V zwei f^{-1}-invariante nichtleere offene Mengen. Dann gibt es nach (2) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Wegen $U \subseteq f^{-1}(U)$ folgt $U \cap V \supseteq f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ und wir haben (3).

„(3)⇒(2)“ Wenn (2) nicht gilt, dann findet man zwei nichtleere offene Mengen U und V mit $f^n(U) \cap V = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt aber allgemein die mengentheoretische Relation

$$(*) \qquad f^n(U) \cap V = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad U \cap f^{-n}(V) = \emptyset,$$

die für $n \in \mathbb{Z}$. Also haben wir $U \cap f^{-n}(V) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Setze $V' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^{-n}(V)$. Dann ist V' eine nichtleere offene f^{-1}-invariante Menge mit $V' \cap U = \emptyset$. Es folgt $V' \cap f^{-n}(U) = f^{-n}(V' \cap U) = \emptyset$, d.h. $U' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^{-n}(U)$ ist eine nichtleere offene f^{-1}-invariante Menge mit $V' \cap U' = \emptyset$. Dies zeigt, daß auch (3) nicht gilt.

„(3)⇒(4)“ Sei $\varphi \in C(M,\mathbb{R})$ f-invariant. Dann sind für $a \in \mathbb{R}$ die Mengen $\varphi^{-1}(]-\infty, a[)$ und $\varphi^{-1}(]a,\infty[)$ offen, disjunkt und f^{-1}-invariant. Je eine davon muß nach (3) also leer sein. Dann ist aber φ konstant.

■

Beachte, daß die Implikation „(1) ⇒ (2)“ in Lemma 6.3.4 für die Nachfolgerabbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x+1$ falsch ist: Die Bahn von $x = 1$ ist ganz $\mathbb{N}$ (versehen mit der diskreten Topologie) und für $V = \{1\}$ und $U = \{2\}$ gilt $f^k(U) \cap V = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel 6.3.5 (Irrationale Translationen auf dem Torus): Wenn $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ rational unabhängig sind, dann ist die Abbildung $T_\alpha\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ aus Beispiel 6.2.8 topologisch transitiv. Um das einzusehen, stellt man mit Beispiel 6.2.8 zunächst fest, daß T_α ergodisch bzgl. des Haarschen Maßes ist. Da das Haarsche Maß auf ganz $\mathbb{T}^n$ getragen wird, folgt die Behauptung jetzt aus Satz 6.3.3. ■

Übung 6.3.1 : Sei $T\colon [0,1] \to [0,1]$ eine Abbildung, die das Lebesgue-Maß λ erhält. Zeige: für λ-fast alle $x \in [0,1]$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} n|T^n(x) - x| \le 1.$$

■

Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Dann heißt eine maßerhaltende Abbildung $f\colon M \to M$ **mischend**, wenn gilt

$$\forall A, B \in \mathfrak{M} \;:\quad \mu(f^{-n}(A) \cap B) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)\mu(B).$$

Proposition 6.3.6 : *Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon M \to M$ mischend. Dann ist f ergodisch.*

Beweis:

Sei $A \in \mathfrak{M}$ stark f-invariant. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(f^{-n}(A) \cap (M \setminus A)) = \mu(A \cap (M \setminus A)) = 0$$

und weil f mischend ist, folgt $\mu(A)\mu(M \setminus A) = 0$. ■

Beispiel 6.3.7 (Irrationale Translationen auf dem Torus): Keine der Translationen $T_\alpha\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ ist mischend bzgl. des Lebesgue-Maßes μ auf $\mathbb{T}^n$. Um das einzusehen, können wir nach Proposition 6.3.6 o.B.d.A. annehmen, daß T_α ergodisch ist. Nach Satz 6.3.3 ist dann T_α topologisch transitiv und eine Isometrie bzgl. der von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{T}^n$ induzierten Metrik. Also gibt es eine kleine Kugel B und eine Folge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $n_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $T_\alpha^{-n_j}(B) \cap B = \emptyset$ für alle $j \in \mathbb{N}$ (betrachte z.B. ein Folge von Punkten in der Bahn von x, die gegen einen Punkt $y \ne x$ konvergiert). Aber dann gilt natürlich $\mu(T_\alpha^{-n_j}(B) \cap B) = 0 \ne \mu(B)^2$ und T_α kann nicht mischend sein. ■

Eine Familie $\mathfrak{U}$ von meßbaren Mengen in M heißt **dicht**, wenn man für $A \in \mathfrak{M}$ zu jedem $\epsilon > 0$ ein $A' \in \mathfrak{U}$ mit

$$\mu(A \triangle A') < \epsilon$$

finden kann, wobei $A\triangle A' := A\setminus A' \cup A'\setminus A$ die **symmetrische Differenz** von A und A' ist. Die Familie $\mathfrak{U}$ heißt **ausreichend**, die Vereinigungen von endlich vielen disjunkten Elementen von $\mathfrak{U}$ eine dichte Familie bilden.

Eine Teilmenge von $L^2(M,\mu)$ heißt **total**, wenn der von ihr aufgespannte lineare Unterraum dicht in $L^2(M,\mu)$ liegt.

Lemma 6.3.8 : *Sei $(M,\mathfrak{M},\mu)$ ein Maßraum und $f\colon M\to M$ maßerhaltend.*

(i) *Wenn für eine ausreichende Familie $\mathfrak{C}$ von meßbaren Mengen gilt*

$$\forall A,B\in\mathfrak{C}\ :\quad \mu(f^{-n}(A)\cap B)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mu(A)\mu(B),$$

dann ist f mischend.

(ii) *f ist mischend genau dann, wenn für eine in $L^2(M,\mu)$ totale Teilmenge Φ gilt*

$$\forall\varphi,\psi\in\Phi\ :\quad \int_M \varphi(f^n(x))\overline{\psi(x)}\,d\mu(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\left(\int_M\varphi\,d\mu\right)\left(\int_M\overline{\psi}\,d\mu\right).$$

Beweis:

IDEE: Für (i) approximiert man beliebige meßbare Mengen durch Elemente der ausreichenden Familie, für (ii) reduziert man das Problem zunächst durch ein Approximationsargument auf den Fall $\Phi = L^2(M,\mu)$ und betrachtet dann charakteristische Funktionen von Mengen.

(i) Seien $A_1,\dots,A_k,B_1,\dots,B_l\in\mathfrak{C}$ mit $A_i\cap A_{i'}=\emptyset$ für $i\neq i'$ und $B_j\cap B_{j'}=\emptyset$ für $j\neq j'$. Setze

$$A := \dot{\bigcup_{i=1}^k} A_i \quad\text{und}\quad B := \dot{\bigcup_{j=1}^k} B_j,$$

dann gilt

$$\mu(A)=\sum_{i=1}^k\mu(A_i)\quad\text{und}\quad \mu(B)=\sum_{j=1}^l\mu(B_j).$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\mu(f^{-n}(A)\cap B)=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l\mu(f^{-n}(A_i)\cap B_j)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l\mu(A_i)\mu(B_j)=\mu(A)\mu(B).$$

Damit hat man

$$\forall A,B\in\mathfrak{U}\ :\quad \mu(f^{-n}(A)\cap B)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mu(A)\mu(B)$$

für die dichte Familie $\mathfrak{U}$, die durch endliche Vereinigungen von disjunkten Elementen in $\mathfrak{C}$ entsteht.

Seien jetzt $A,B\in\mathfrak{M}$ und $\epsilon>0$ beliebig sowie $A',B'\in\mathfrak{U}$ mit

$$\mu(A\triangle A')<\frac{\epsilon}{4},\quad \mu(B\triangle B')<\frac{\epsilon}{4}.$$

Dann rechnet man

$$\begin{aligned}|\mu(f^{-n}(A)\cap B)-\mu(A)\mu(B)| &\le \mu(f^{-n}(A\triangle A')\cap B)+\mu(f^{-n}(A')\cap(B\triangle B'))\\ &\quad +|\mu(f^{-n}(A')\cap B')-\mu(A')\mu(B')|\\ &\quad +\mu(A)\mu(B\triangle B')+\mu(B')\mu(A\triangle A')\\ &\le |\mu(f^{-n}(A')\cap B')-\mu(A')\mu(B')|+\epsilon\end{aligned}$$

und erhält mit $\epsilon\to 0$ die Behauptung.

(ii) Wir können o.B.d.A. annehmen, daß Φ dicht in $L^2(M,\mu)$, da die Ausdrücke in (ii) sesquilinear in φ und ψ sind. In der Tat können wir sogar $\Phi = L^2(M,\mu)$ voraussetzen, wie das folgende Approximationsargument zeigt: Wenn $\varphi, \psi \in L^2(M,\mu)$ und $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in \Phi$ mit $\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_2 < \epsilon$ und $\|\psi - \widetilde{\psi}\|_2 < \epsilon$ (wobei $\|\cdot\|_2$ die Norm auf $L^2(M,\mu)$ ist), dann rechnet man

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_M \varphi(f^n(x))\overline{\psi(x)}\,d\mu(x) - \int_M \varphi\,d\mu \int_M \overline{\psi}\,d\mu\Big| \leq \\
\leq\ & \Big|\int_M \varphi(f^n(x))\overline{(\psi(x) - \widetilde{\psi}(x))}\,d\mu(x) + \int_M (\varphi(f^n(x)) - \widetilde{\varphi}(f^n(x)))\,d\mu(x) \\
&+ \int_M \varphi(f^n(x))\overline{\widetilde{\psi}(x)}\,d\mu(x) - \int_M \widetilde{\varphi}\,d\mu \int_M \overline{\widetilde{\psi}}\,d\mu \\
&+ \int_M \widetilde{\varphi}\,d\mu \int_M \overline{(\psi - \widetilde{\psi})}\,d\mu + \int_M (\varphi - \widetilde{\varphi})\,d\mu \int_M \overline{\widetilde{\psi}}\,d\mu\Big| \\
\leq\ & \|\varphi \circ f^n\|_2 \|\psi - \widetilde{\psi}\|_2 + \|(\varphi - \widetilde{\varphi}) \circ f^n\|_2 \\
&+ \Big|\int_M \widetilde{\varphi}(f^n(x))\overline{\widetilde{\psi}(x)}\,d\mu(x) - \int_M \widetilde{\varphi}\,d\mu \int_M \overline{\widetilde{\psi}}\,d\mu\Big| \\
&+ \Big|\int_M \widetilde{\varphi}\,d\mu\Big|\,\|\psi - \widetilde{\psi}\|_2 + \|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_2 \Big|\int_M \overline{\widetilde{\psi}}\,d\mu\Big| \\
\leq\ & \Big|\int_M \widetilde{\varphi}(f^n(x))\overline{\widetilde{\psi}(x)}\,d\mu(x) - \int_M \widetilde{\varphi}\,d\mu \int_M \overline{\widetilde{\psi}}\,d\mu\Big| + \epsilon\left(\|\varphi\| + 1 + \Big|\int_M \widetilde{\varphi}\,d\mu\Big| + \Big|\int_M \overline{\widetilde{\psi}}\,d\mu\Big|\right).
\end{aligned}
$$

Wenn aber

$$(*) \qquad \forall \varphi, \psi \in L^2(M,\mu) \ : \quad \int_M \varphi(f^n(x))\overline{\psi(x)}\,d\mu(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\int_M \varphi\,d\mu\right)\left(\int_M \overline{\psi}\,d\mu\right)$$

gilt, braucht man nur $\varphi := \chi_A$ und $\psi := \chi_B$ zu setzen, um zu sehen, daß f mischend ist. Umgekehrt bilden die charakteristischen Funktionen von meßbaren Mengen eine totale Familie Φ von Funktionen in $L^2(M,\mu)$, für die

$$\forall \varphi, \psi \in \Phi \ : \quad \int_M \varphi(f^n(x))\overline{\psi(x)}\,d\mu(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\int_M \varphi\,d\mu\right)\left(\int_M \overline{\psi}\,d\mu\right)$$

gilt, falls f mischend ist. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt dann aber schon $(*)$ und (ii) ist bewiesen.

■

Beispiel 6.3.9 (Expansionen auf dem Torus): Für $m \in \{2, 3, \ldots\}$ ist die Abbildung

$$
\begin{aligned}
E_m \colon \mathbb{T} &\to \mathbb{T} \\
t + \mathbb{Z} &\mapsto mt + \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

aus Beispiel 6.2.9 mischend bzgl. des Lebesgue-Maßes μ auf $\mathbb{T}$.

Um das einzusehen, müssen wir nach Proposition 6.3.8(i) nur

$$\forall A, B \text{ kleine Intervalle } : \quad \mu(f^{-n}(A) \cap B) \underset{n\to\infty}{\to} \mu(A)\mu(B)$$

zeigen. Hier soll ein kleines Intervall eine Menge der Form $I + \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{T}$ sein, wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ der Länge kleiner 1 ist. Das Urbild von $t + \mathbb{Z}$ unter E_m^n ist

$$\Big\{\frac{t+k}{m^n} + \mathbb{Z} \ \Big|\ k = 0, 1, \ldots, m^n - 1\Big\}.$$

Dementsprechend ist $E_m^{-n}(A)$ die disjunkte Vereinigung von m^n kleinen Intervallen der Länge $\frac{\mu(A)}{m^n}$, im Abstand von $\frac{1}{m^n}$ (der Anfangspunkte) gleichmäßig aufgereiht. Damit enthält B höchstens $m^n\mu(B)$, mindestens aber $(m^n-1)\mu(B)$ dieser kleinen Intervalle. Es ergibt sich also, mit $\epsilon_n \in [0,1]$ passend gewählt,

$$\mu(E_m^{-n}A \cap B) = (m^n + \epsilon_n)\mu(B)\frac{\mu(A)}{m^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(B)\mu(A).$$

■

Beispiel 6.3.10 (Hyperbolische Torus–Automorphismen): Sei $L := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine ganzzahlige Matrix mit Determinante ± 1 und von ± 1 verschiedenen Eigenwerten. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} F_L\colon \mathbb{T}^2 & \to & \mathbb{T}^2 \\ (x,y)+\mathbb{Z}^2 & \mapsto & (ax+by, cx+by)+\mathbb{Z}^2 \end{array}$$

ergodisch und sogar mischend bzgl. des Lebesgue-Maßes μ auf $\mathbb{T}^2$.

Betrachte dazu die **Charaktere**

$$\begin{array}{rcl} \chi_{m,n}\colon \mathbb{T}^2 & \to & S^1 \\ (x,y) & \mapsto & e^{2\pi i(mx+ny)} \end{array}$$

mit $m,n \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\chi_{m,n}(F_L(x,y)) = e^{2\pi i((am+cn)x+(bm+dn)y)} = \chi_{am+cn,bm+dn}(x,y),$$

d.h., wenn man die Charaktere von $\mathbb{T}^2$ via $\chi_{m,n} \longleftrightarrow (m,n)$ mit $\mathbb{Z}^2$ identfiziert, wirkt F_L wie die transponierte Matrix L^t von L. Nach den Voraussetzungen an L sind alle L^t-Bahnen in $\mathbb{Z}^2$ unendlich außer der von $(0,0)$.

Wenn jetzt φ eine beschränkte meßbare und F_L-invariante Funktion auf $\mathbb{T}^2$ ist und

$$\varphi = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \varphi_{m,n}\chi_{m,n}$$

ihre Fourier–Entwicklung, dann gilt

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{am+cn,bm+dn},$$

d.h. die Fourier–Koeffizienten sind konstant auf den L^t-Bahnen. Nach dem Riemann–Lebesgue Lemma gilt

$$|\varphi_{m,n}| \underset{m^2+n^2\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also verschwinden alle $\varphi_{m,n}$ bis auf $\varphi_{0,0}$. Dies zeigt, daß φ (μ-fast überall) konstant ist und daher mit Lemma 6.2.1 die Egodizität von φ.

Wir benützen Proposition 6.3.8(ii) um zu zeigen, daß F_L sogar mischend ist. Beachte dazu, daß die Menge der Charaktere $\chi_{m,n}$ total in $L^2(\mathbb{T}^2,\mu)$ ist. Wir müssen also nur

$$(*) \quad \forall (m,n),(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \ : \quad \int_{\mathbb{T}^2} \chi_{m,n}(F_L^N(x,y))\overline{\chi_{k,l}(x,y)}\, d\mu(x,y) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \left(\int_{\mathbb{T}^2} \chi_{m,n}\, d\mu\right)\left(\int_{\mathbb{T}^2} \overline{\chi}_{k,l}\, d\mu\right)$$

zeigen. Wenn $m=n=k=l=0$, dann sind alle Integrale in $(*)$ gleich 1. Wir können also $(m,n)\neq(0,0)$ annehmen. Dann ist aber die rechte Seite von $(*)$ gleich 0, weil alle nicht-konstanten Charaktere das Integral 0 haben (**Schur–Orthogonalität**). Außerdem gilt $(L^t)^N(m,n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und daher $(L^t)^N(m,n) \neq (k,l)$ für große N. Dies liefert (wieder mit Schur–Orthogonalität)

$$\int_{\mathbb{T}^2} \chi_{m,n}(F_L^N(x,y))\overline{\chi_{k,l}(x,y)}\, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{T}^2} \chi_{(L^t)^N(m,n)-(k,l)}\, d\mu = 0$$

und damit die Behauptung. ■

Beispiel 6.3.11 (Der Bernoulli–Shift): Sei $N \in \{2, 3, \dots\}$ und

$$\Omega_N := \{\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mid (\forall j \in \mathbb{Z})\ \omega_j \in \{0, 1, \dots, N-1\}\} = \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{Z}}$$

der **Shift–Raum** mit N Buchstaben. Wir versehen $\{0, 1, \dots, N-1\}$ mit der diskreten und Ω_N mit der Produkt–Topologie. Damit wird Ω_N ein kompakter separabler metrisierbarer Raum. Eine mögliche Metrik ist

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{\lambda^{|n|}},$$

wobei $\lambda > 1$ beliebig gewählt werden kann.

Für $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ in $\mathbb{Z}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ betrachtet man den **Zylinder**

$$C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} := \{\omega \in \Omega_N \mid (\forall i = 1, \dots, k)\, \omega_{n_i} = \alpha_i\}.$$

Die Zylinder bilden eine Basis der Topologie auf Ω_N.

Die durch

$$\sigma_N(\omega) = \omega', \quad \omega'_n = \omega_{n+1}$$

definierte Abbildung $\sigma_N \colon \Omega_N \to \Omega_N$ ist offensichtlich bijektiv und bildet Zylinder auf Zylinder ab. Damit wird sie zu einem Homöomorphismus, den man den **beidseitigen Shift** oder auch **Bernoulli–Shift** auf Ω_N nennt.

Wähle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p = (p_0, \dots, p_{N-1})$ auf $\{0, 1, \dots, N-1\}$, d.h. $p_i \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^{N-1} p_i = 1$. Dann kann man ein Produktmaß μ_p auf Ω_N, das **Bernoulli-Maß**, definieren, das auf den Zylindern durch

$$(*) \qquad \mu_p(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}) = \prod_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}$$

gegeben ist. Daraus kann man zunächst ein äußeres Maß und dann ein Maß konstruieren, von dem allerdings nachgewiesen werden muß, daß es wirklich auf der ganzen Borel σ-Algebra von Ω_N definiert ist. Wenn wir die Existenz von μ_p voraussetzen (was wir hier tun wollen), dann liefert Satz 2.1.3 die Eindeutigkeit. Wegen $(*)$ impliziert dies die σ_N-Invarianz von μ_P. Wir behaupten, daß σ_N immer mischend bzgl. μ_p ist.

Man kann zeigen, daß die Familie $\mathfrak{C}$ der **symmetrischen Zylinder**

$$C^m_\alpha := \{\omega \in \Omega_N \mid (\forall i = -m, \dots, m)\, \omega_{n_i} = \alpha_i\}$$

für $m \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha = (\alpha_{-m}, \dots, \alpha_m) \in \{0, 1, \dots, N-1\}^{2m+1}$ ausreichend im Sinne von Proposition 6.3.8 ist. Es reicht daher,

$$\mu_p(\sigma_N^{-n}(C^k_\alpha) \cap C^l_\beta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_p(C^k_\alpha)\mu_p(C^l_\beta) = \prod_{i=-k}^{k} p_{\alpha_i} \prod_{j=-l}^{l} p_{\beta_j}$$

für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \{0, \dots, N-1\}^{2k+1}, \beta \in \{0, \dots, N-1\}^{2l-1}$ zu zeigen. Wegen $\sigma_N^{-n}(C^k_\alpha) = C^{n-k,\dots,n+k}_{\alpha_{-k},\dots,\alpha_k}$ gilt für $n \geq k + l + 1$

$$\sigma_N^{-n}(C^k_\alpha) \cap C^l_\beta = C^{-l,\dots,l,n-k,\dots,n+k}_{\beta_{-l},\dots,\beta_l,\alpha_{-k},\dots,\alpha_k}$$

und das zeigt wegen

$$\mu(C^{-l,\dots,l,n-k,\dots,n+k}_{\beta_{-l},\dots,\beta_l,\alpha_{-k},\dots,\alpha_k}) = \prod_{j=-l}^{l} p_{\beta_j} \prod_{i=-k}^{k} p_{\alpha_i}$$

die Behauptung. ■

Beispiel 6.3.12 (Der Markov–Shift): Seien Ω_N und σ_N wie in Beispiel 6.3.11 definiert. Betrachte eine **stochastische Matrix** $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j=0,\dots,N-1}$, d.h. $\pi_{ij} \in [0,1]$ mit

$$\forall j = 0, \dots, N-1 \ : \quad \sum_{i=0}^{N-1} \pi_{ij} = 1.$$

Wir nehmen an, Π ist **transitiv**, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$, für das alle Einträge von Π^m positiv sind. Dann sagt der **Satz von Perron–Frobenius**, daß Π einen bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmten Eigenvektor p mit positiven Einträgen hat. Der zugehörige Eigenwert ist 1 und betragsmäßig echt größer als alle anderen Eigenwerte von Π. Wenn $p = (p_0, \dots, p_{N-1})$, dann normieren wir p durch

$$\sum_{i=0}^{N-1} p_i = 1,$$

und setzen

$$\mu_\Pi(C_\alpha^m) = p_{\alpha_m} \prod_{i=-m}^{m-1} \pi_{\alpha_i \alpha_{i+1}}.$$

Wie in Beispiel 6.3.11 erhält so ein Borel-Maß μ_Π auf Ω_N, das **Markov–Maß** zu Π. Dann ist $\mu_\Pi(C_j^0) = p_j$ und π_{ij} repräsentiert das Maß des Anteils von C_j^0, der von σ_N nach C_i^0 abgebildet wird. Wegen $\Pi p = p$ ist μ_Π σ_N-invariant.

Sei jetzt $A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,N-1}$ eine Matrix mit Einträgen in $\{0,1\}$ und

$$\Omega_A := \{\omega \in \Omega_N \mid (\forall i \in \mathbb{Z}) \ a_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1\}.$$

Wir nehmen an, daß $\pi_{i,j} = 0$ gilt falls $a_{ij} = 0$. Dann ist Ω_A invariant unter σ_N und σ_N^{-1}. Weiter gilt, daß $\operatorname{supp}(\mu_\Pi) \subseteq \Omega_A$, d.h., $\mu_\Pi(\Omega_A) = 1$. Mehr noch, $\sigma_N \colon \Omega_A \to \Omega_A$, der **Markov–Shift** zu Π ist mischend.

Um das einzusehen, stellen wir zunächst fest, daß für $n \geq m + k$ gilt

$$\sigma_N^{-n}(C_\alpha^m) \cap C_\beta^k = \bigcup_{\gamma_{m+1},\dots,\gamma_{n-m-1} \in \{0,\dots,N-1\}} C^{-k,\dots,k,k+1,\dots,n-m-1,n-m,\dots,n+m}_{\beta_{-k},\dots,\beta_k,\gamma_{k+1},\dots,\gamma_{n-m-1},\alpha_{-m},\dots,m}.$$

Weiter gilt

$$\mu_\Pi(C^{-k,\dots,k,k+1,\dots,n-m-1,n-m,\dots,n+m}_{\beta_{-k},\dots,\beta_k,\gamma_{k+1},\dots,\gamma_{n-m-1},\alpha_{-m},\dots,m}) = \mu_\Pi(C_\beta^k) p_{\beta_k}^{-1} \mu_\Pi(C_\alpha^m) \pi_{\beta_k \gamma_{k+1}} \prod_{r=1}^{n-m-k} \pi_{\gamma_{m+r}\gamma_{m+r+1}} \pi_{\gamma_n \alpha_m}.$$

Die Summation ergibt dann

$$\mu_\Pi(\sigma_N^{-n}(C_\alpha^m) \cap C_\beta^k) = \mu_\Pi(C_\beta^k) \mu_\Pi(C_\alpha^m) p_{\beta_k}^{-1} \pi_{\beta_k \gamma_{k+1}^{(n-m-k)}}.$$

Aus dem Satz von Perron-Frobenius folgt, daß für $\Pi^n = (\pi_{ij}^{(n)})_{i,j=1,\dots,N-1}$ gilt $\pi_{ij}^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_i$. Damit erhält man

$$\mu_\Pi(\sigma_N^{-n}(C_\alpha^m) \cap C_\beta^m) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_\Pi(C_\beta^m) \mu_\Pi(C_\alpha^m)$$

und weil die symmetrischen Zylinder eine ausreichende Familie bilden, folgt die Behauptung mit Proposition 6.3.8. ∎

Anhang

Anhang A

Die Fourier-Transformation

A.1 Die Faltung

Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Borel–meßbar. Die durch

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy$$

definierte Funktion (für die x, für die die rechte Seite definiert ist), heißt die **Faltung** von f und g.

Proposition A.1.1 : *Seien $f, g, h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Borel–meßbar. Dort wo alle auftretenden Integrale konvergieren, gelten folgende Identitäten:*

(i) $f * g = g * f$.

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(iii) $(f * g)^z = f^z * g = f * g^z$.

(iv) $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

Beweis:

(i) Mit einer Substitution (vgl. Satz C.4.6) rechnet man

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\, dz \\ &= (g * f)(x). \end{aligned}$$

(ii) Hier benützt man (i) und den Satz 2.3.5 von Fubini, um zu rechnen

$$\begin{aligned} \big((f * g) * h\big)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (g * f)(x-y)h(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y-z)f(z)h(y)\, dz\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y-z)h(y)\, dy\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\int_{\mathbb{R}^n} (h * g)(x-z)\, dz \\ &= \big(f * (g * h)\big)(x). \end{aligned}$$

(iii) Wegen

$$(f * g)^z(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z - y)g(y)\,dy = f^z * g(x)$$

und (i) gilt auch $(f * g)^z = (g * f)^z = g^z * f = f * g^z$.

(iv) Wenn $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ und $y \in \operatorname{supp} g$, dann gilt $x - y \notin \operatorname{supp} f$, was für alle y auf $f(x - y)g(y) = 0$ führt. Damit gilt aber $(f * g)(x) = 0$.

■

Lemma A.1.2 : (Youngsche Ungleichung) *Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert $(f * g)(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Darüber hinaus gilt*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p.$$

Beweis:

Mit der Minkowskiungleichung für Integrale (vgl. Proposition **??**) rechnen wir

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g^y(\cdot)\,dy \right\|_p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, \|g^y\|_p \, dy \\ &= \|f\|_1 \, \|g\|_p. \end{aligned}$$

■

Proposition A.1.3 : *Seien p und q konjugierte Exponenten und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sowie $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert $(f * g)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und es gilt*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Wenn $1 < p < \infty$ gilt darüber hinaus $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$|(f * g)(x)| < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Beweis:

Mit der Hölderungleichung (vgl. Lemma **??**) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)g(y)|\,dy \leq \|f\|_p \, \|g\|_q,$$

also existiert $(f * g)(x)$ in der Tat für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und erfüllt $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$. Mit Proposition A.1.1 rechnen wir jetzt

$$\begin{aligned} |(f * g)^y(x) - (f * g)(x)| &= \big|\big((f^y - f) * g\big)(x)\big| \\ &\leq \|f^y - f\|_p \, \|g\|_q. \end{aligned}$$

Für $p < \infty$ konvergiert nach Proposition **??** letzterer Ausdruck mit $y \to 0$ gegen 0, was mit Bemerkung **??** die gleichmäßige Stetigkeit von $f * g$ liefert. Für $p = \infty$ vertauscht man in diesem Argument einfach die Rollen von p und q.

Sei jetzt $1 < p, q < \infty$. Nach Lemma **??** kann man zwei Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{und} \quad \|g_n - g\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

finden. Mit Proposition A.1.1(iv) sieht man, daß $\operatorname{supp}(f_n * g_n)$ kompakt ist. Die schon bewiesene Stetigkeit von $f_n * g_n$ liefert also $f_n * g_n \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin rechnet man

$$\begin{aligned} |(f_n * g_n)(x) - (f * g)(x)| &\leq \big|\big(f_n * (g_n - g)\big)(x)\big| + \big|\big((f_n - f) * g\big)(x)\big| \\ &\leq \|f_n\|_p \, \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \, \|g\|_q \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert $f_n * g_n$ gleichmäßig gegen $f * g$ und dies beweist die Behauptung. ∎

Lemma A.1.4 : *Sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $L^p(\mu)$ mit Grenzwert $f \in L^p(\mu)$. Dann gibt es eine Teilfolge, die μ–fast überall gegen f konvergiert.*

Beweis:

Wir nehmen zunächst an, daß $p < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ setze

$$E_{n,\epsilon} := \{y \in M \mid |f_n(y) - f(y)| > \epsilon\}.$$

Dann gilt $\int_M |f_n(x) - f(x)|^p \geq \epsilon^p \nu(E_{n,\epsilon})$, also

$$\nu(E_{n,\epsilon}) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wir wählen eine Teilfolge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\nu(E_j) \leq \frac{1}{2^j}$ für $E_j = \{y \in M \mid |f_{n_j}(y) - f(y)| > \epsilon\}$. Dann gilt

$$f_{n_j}(y) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} g(y) \quad \forall y \in M \setminus \limsup_{j\in\mathbb{N}} E_j,$$

wobei $\limsup_{j\in\mathbb{N}} E_j := \bigcap_{k=1}^\infty \left(\bigcup_{j=k}^\infty E_j\right)$. Um das einzusehen, beachte

$$M \setminus \limsup_{j\in\mathbb{N}} E_j = \bigcup_{k=1}^\infty \left(\bigcap_{j=k}^\infty (M \setminus E_j)\right).$$

Also gibt es zu $y \in M \setminus \limsup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $y \notin E_j$ für alle $j \geq k$. Das bedeutet aber gerade $|f_{n_j}(y) - f(y)| \leq \frac{1}{2^j}$ für alle $j \geq k$, d.h. $f_{n_j}(y) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f(y)$. Andererseits gilt

$$\nu\left(\bigcup_{j=k}^\infty E_j\right) \leq \sum_{j=k}^\infty \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

woraus man $\nu(\limsup_{j\in\mathbb{N}} E_j) = 0$ schließt. ∎

Proposition A.1.5 : (Glättung) *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Wenn $\partial^\alpha g$ für alle $|\alpha| \leq k$ beschränkt ist, dann ist $g * f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\partial^\alpha (g * f) = \partial^\alpha g * f \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Beweis:

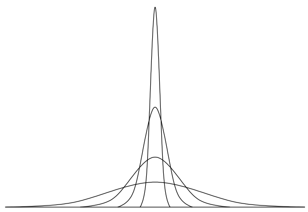
Die Existenz von $(\partial^\alpha g * f)(x)$ für alle x folgt aus

$$(\partial^\alpha g * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha g(x-y) f(y)\, dy,$$

weil $\partial^\alpha g$ beschränkt ist. Mit $\partial_x^\alpha g(x-y)f(y) = \partial_x^\alpha\big(g(x-y)f(y)\big)$ folgt die Behauptung jetzt aus Satz 2.4.6. ∎

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $t > 0$. Dann setzt man

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{x}{t}\right).$$



Satz A.1.6 : *Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = a$. Dann gilt*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x)\, dx = \int_M \varphi(x)\, dx = a.$

(ii) *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p < \infty$. Dann gilt $f * \varphi_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} af$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(iii) *Wenn f beschränkt und gleichmäßig stetig ist, dann ist die Konvergenz $f * \varphi_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} af$ gleichmäßig.*

(iv) *Wenn $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge auf der f stetig ist. Dann ist die Konvergenz $f * \varphi_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} af$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U.*

Beweis:

(i) Mit der Transformationsformel (vgl. Satz C.4.6) rechnet man

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\varphi(\frac{x}{t})\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, dy.$$

(ii) Mit der Rechnung

$$\begin{aligned}
(f * \varphi_t)(x) - af(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y) - f(x)\big)\varphi_t(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-tz) - f(x)\big)\varphi_t(tz)t^n\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-tz) - f(x)\big)\varphi(z)\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big(f^{tz}(x) - f(x)\big)\varphi(z)\, dz
\end{aligned}$$

und der Minkowskiungleichung aus Proposition **??** finden wir

$$\begin{aligned}
\|f * \varphi_t - af\|_p &= \left\|\int_{\mathbb{R}^n} \big(f^{tz}(\cdot) - f(\cdot)\big)\, \varphi(z)\, dz\right\|_p \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \big(\big|f^{tz}(x) - f(x)\big|\ |\varphi(z)|\big)^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}\ dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big\|f^{tz} - f\big\|_p\ |\varphi(z)|\, dz.
\end{aligned}$$

Beachte, daß $\|f^{tz} - f\|_p \leq 2\|f\|_p$. Nach Proposition **??** gilt $\|f^{tz} - f\|_p \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ falls $p < \infty$. Also liefert der Satz 2.4.4 von der dominierten Konvergenz $\|f * \varphi_t - af\|_p \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ und damit die Behauptung.

(iii) Dies geht genauso wie (ii), nur benötigt man die gleichmäßige Stetigkeit um $\|f^{tz} - f\|_\infty \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ schließen zu können (vgl. Bemerkung **??**). Dann liefert der Satz 2.4.4 von der dominierten Konvergenz $\|f * \varphi_t - af\|_\infty \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ und damit die Behauptung.

(iv) Sei $\epsilon > 0$ und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\int_{\mathbb{R}^n \setminus E} |\varphi(x)|\, dx \leq \epsilon$. Wenn jetzt $K \subseteq U$ eine kompakte Teilmenge ist und $x \in K$, dann gilt für $z \in E$ und kleine $t > 0$, daß $x - tz \in U$ und (vgl. Lemma **??**)

$$\sup_{x\in K, z\in E} |f(x - tz) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Damit rechnet man

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in K} |f * \varphi_t(x) - af(x)| \leq \\
&\leq \sup_{x\in K} \left(\int_E |(f(x - tz) - f(x)|\, |\varphi(z)|\, dz + \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} |(f(x - tz) - f(x)|\, |\varphi(z)|\, dz \right) \\
&\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)|\, dz + 2\|f\|_\infty \epsilon,
\end{aligned}$$

wobei t immer noch als klein angenommen wird. Damit folgt aber (iv) sofort.

■

A.2 Der Schwartz-Raum

Die Menge

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty,\ \forall\, N \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$$

heißt der **Schwartz–Raum**, wobei

$$\|f\|_{(N,\alpha)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^N |\partial^\alpha f(x)| \tag{A.1}$$

(„$\partial^\alpha f$ fällt schneller auf Null ab als jede Potenz von $\|x\|^N$“) und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Bemerkung A.2.1 : Die durch (A.1) definierten Funktionen $\|\cdot\|_{(N,\alpha)} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ sind Halbnormen. Wir versehen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit der von diesen Halbnormen im Sinne von Bemerkung **??** erzeugten Topologie. Sei $\{f_k\}_1^\infty$ eine Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann konvergiert $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn

$$\|f_k - f\|_{(N,\alpha)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall (N, \alpha).$$

Proposition A.2.2 : *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist* **vollständig**, *d.h. wenn für eine Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alle $\|f_k\|_{(N,\alpha)}$ Cauchy-Folgen sind, dann konvergiert f_k gegen ein $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis:

Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ wie in der Proposition beschrieben. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| \leq \|f\|_{(N,\alpha)},$$

konvergiert $\partial^\alpha f_k(x)$ lokal gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^n$. Nach Satz **??** ist die Grenzfunktion g_α dann stetig. Wir wollen zeigen, daß die Grenzfunktion g_0 der f_k unendlich oft differenzierbar ist und $\partial^\alpha g_0 = g_\alpha$ erfüllt. Dazu machen wir eine Induktion über $|\alpha|$.

Setze $v_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ und $\beta = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$ mit jeweils der 1 an der j-ten Stelle. Dann gilt

$$f_k(x + tv_j) - f_k(x) = \int_0^t \partial_j f_k(x + sv_j) ds$$

und die linke Seite konvergiert für $k \to \infty$ gegen $g_0(x + tv_j) - g_0(x)$, während die rechte Seite nach dem Satz 2.4.4 von der dominierten Konvergenz gegen $\int_0^t g_\beta(x+sv_j)ds$ konvergiert. Aber dann zeigt der Hauptsatz **??** der Differential- und Integralrechnung $\partial^\beta g_0(x) = \partial_j g_0(x) = g_\beta$. Damit hat man den Induktionsanfang und der Induktionsschritt geht ganz analog.

Halte jetzt (N, α) fest. Zu $\epsilon > 0$ findet man ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_l\|_{(N,\alpha)} < \varepsilon$ für alle $k, l > k_0$. Also gilt

$$|(1 + \|x\|)^N \big(\partial^\alpha f_k(x) - \partial^\alpha f_l(x)\big)| < \varepsilon \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ k, l > k_0$$

und das liefert

$$|\partial^\alpha f_k(x) - \partial^\alpha f_l(x)\ | \ \frac{\varepsilon}{(1 + \|x\|)^N} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n;\ k, l > k_0.$$

Wegen $g_\alpha(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \partial^\alpha f_k(x)$ gibt es also zu jedem x ein $k_x \in \mathbb{N}$ mit $|g_\alpha(x) - \partial^\alpha f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{(1+\|x\|)^N}$ für alle $l > k_x$ und man findet mit

$$|\partial^\alpha f_k(x) - g_\alpha(x)| \leq |\partial^\alpha f_k(x) - \partial^\alpha f_l(x)| + |\partial^\alpha f_l(x) - g_\alpha| \leq \frac{\varepsilon}{(1 + \|x\|)^N} + \frac{\varepsilon}{(1 + \|x\|)^N}$$

für alle $l \geq k_x, k$ die Abschätzung

$$|\partial^\alpha f_k(x) - g_\alpha(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{(1 + \|x\|)^N} \quad \forall\ k > k_0.$$

Damit gilt dann $f_k \to g_0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Proposition A.2.3 : *Für jede Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(2) $x^\alpha \partial^\beta f$ *ist beschränkt für jede Wahl von α und β.*

(3) $\partial^\alpha(x^\beta f)$ *ist beschränkt für jede Wahl von α und β.*

Beweis:

(1)⇒(2): Dies folgt sofort, weil $|x^\beta| \leq (1 + \|x\|)^N$ für alle $N \geq |\beta|$.

(2)⇒(1): Halte N fest und setze $m := \min\{\sum_{j=1}^n |x_j|^N \ \mid\ \|x\| = 1\} > 0$. Indem man die Fälle $\|x\| \leq 1$ und $\|x\| \geq 1$ separat betrachtet, sieht man die erste Ungleichung von

$$(1 + \|x\|)^N \leq 2^N(1 + \|x\|^N) \leq 2^N \left(1 + \tfrac{1}{m} \sum_{j=1}^n |x_j|^N\right);$$

die zweite ist klar für $\|x\| = 1$ und folgt dann allgemein aus dem identischen Homogenitätsverhalten von $\|x\|^N$ und $\sum_{j=1}^n |x_j|^N$.

(2)⇒(3): $\partial^\alpha(x^\beta f)$ ist nach der Produktregel eine endliche Linearkombination von Termen der Form $x^\gamma \partial^\delta f$.

(3)⇒(2): $x^\gamma \partial^\delta f$ ist nach der Produktregel eine endliche Linearkombination von Termen der Form $\partial^\alpha(x^\beta f)$.

■

Bemerkung A.2.4 : Aus Proposition A.2.3 sieht man sofort, daß $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$.

■

Proposition A.2.5 : *Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis:

Nach Proposition A.1.5 gilt $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mit

$$1 + \|x\| \leq 1 + \|x - y\| + \|y\| \leq (1 + \|x - y\|)(1 + \|y\|)$$

rechnet man

$$\begin{aligned} (1+\|x\|)^N \, |\partial^\alpha (f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x-y\|)^N \, |\partial^\alpha f(x-y)| \, (1+\|y\|)^N |g(y)| \, dy \\ &\leq \|f\|_{(N,\alpha)} \|g\|_{(N+n+1,0)} \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|y\|)^{-(n+1)} \, dy \end{aligned}$$

und eine Integration in Polarkoordinaten zeigt, daß $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|)^{-(n+1)} \, dy < \infty$. ■

Proposition A.2.6 : *Zu jedem $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis:

Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi|_B \equiv 1$, wobei $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\varphi_k(x) = \varphi(x) \; \psi\big(\frac{x}{k}\big)$. Dann gilt $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mit

$$\begin{aligned} \partial^\alpha\big(\varphi_k(x) - \varphi(x)\big) &= \partial^\alpha \Big(\varphi(x) \big(\psi(\frac{x}{k}) - 1 \big) \Big) \\ &= \left[\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ |\gamma| \geq 1}} c_{\beta,\gamma} \, \frac{1}{k^{|\gamma|}} \, \big(\partial^\gamma \psi(\frac{x}{k}) \big) \right] + \big(\partial^\alpha \varphi(x)\big) \big(\psi(\frac{x}{k}) - 1\big) \end{aligned}$$

findet man

$$\begin{aligned} (1 + |x|^N \partial^\alpha \big(\varphi_k(x) - \varphi(x)\big) \, | &\leq \frac{1}{k} \, c_1 + c_2 |\psi(\frac{x}{k}) - 1| (1 + |x|)^{-1} \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{k} \, c_1 & x \in kB \\ \frac{1}{k} \, c_1 + \frac{1}{k} c_2 & x \notin kB \end{cases} \end{aligned}$$

■

Bemerkung A.2.7 : Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es zu jedem $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ gibt es eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_k \to \varphi$ in $C^\infty(\Omega)$. Insbesondere ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $C^\infty(\Omega)$.

Um das einzusehen, betrachte eine Folge von offenen Mengen $U_j \subseteq \Omega$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\overline{U_j} \subseteq U_{j+1}$,

(b) $\overline{U_j}$ ist kompakt,

(c) $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j = \Omega$.

So eine Familie existiert, wie man sich mithilfe der Distanzfunktion $d(x) := \inf_{y\notin\Omega} |x-y|$ überlegen kann. Dann wählen wir unter Verwendung des C^∞-Urysohn-Lemmas **??** Funktionen $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\psi_j|_{\overline{U_j}} \equiv 1$ und $\operatorname{supp}\psi_j \subseteq U_{j+1}$. Setzt man jetzt $\varphi_k := \varphi\psi_k$, so gilt $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ und die φ_k konvergieren in Ω gleichmäßig auf Kompakta gegen φ. ∎

A.3 Die Fourier–Transformation

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx$$

die **Fourier–Transformierte** von f.

Die folgende Bemerkung ist eine unmittelbare Konsequenz der Definitionen und Satz 2.4.6.

Bemerkung A.3.1 :

(i) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(ii) $\hat{f}$ ist stetig.

∎

Satz A.3.2 : *Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

(i) $(f^y)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i y\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$ *und* $(\hat{f})^\eta = \hat{h}$ *mit* $h(x) = e^{2\pi i x\cdot\eta}\, f(x)$.

(ii) *Wenn* $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *für* $|\alpha| \leq k$ *gilt, dann hat man* $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\partial^\alpha \hat{f} = \big((-2\pi i x)^\alpha f\big)^\wedge.$$

(iii) *Wenn* $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *für* $|\alpha| \leq k$ *und* $\partial^\alpha f \in C_0$ *für* $|\alpha| \leq k-1$ *gilt, dann hat man*

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

(iv) *Sei* $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *und* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt*

$$(f \circ T)^\wedge = |\det T|^{-1}\hat{f} \circ (T^{-1})^\top.$$

(v) $(f * g)^\wedge = \hat{f}\,\hat{g}$.

Beweis:

(i) Dies folgt aus

$$
\begin{aligned}
(f^y)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i (z+y)\cdot\xi}dz \\
&= e^{2\pi i y\cdot\xi}\ \hat{f}(\xi)
\end{aligned}
$$

und einer analogen Rechnung für den zweiten Teil.

(ii) Hier rechnet man

$$
\begin{aligned}
\partial^\alpha \hat{f}(\xi) &= \partial_\xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_\xi^\alpha\left(e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-2\pi i x)^\alpha e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\
&= \big((-2\pi i x)^\alpha f(x)\big)^\wedge(\xi).
\end{aligned}
$$

(iii) Wir führen eine Induktion über n durch. Für $n = |\alpha| = 1$, d.h. für $f \in C_0$ hat man

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f'(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx &= \underbrace{f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-2\pi i\xi)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx(\xi) \\
&= 2\pi i\xi\hat{f}(\xi).
\end{aligned}
$$

Für n beliebig und $|\alpha| = 1$ ersetze f' in obiger Rechnung durch $\partial_j f$. Für $|\alpha > 1$ ersetze f' durch $\partial_j(\partial^\beta f)$ mit $|\beta| = |\alpha| - 1$.

(iv) Setze $S := (T^{-1})^\top$. Dann liefert die Transformationsformel aus Satz C.4.6

$$
\begin{aligned}
(f\circ T)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\
&= |\det T|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i T^{-1}x\cdot\xi}\,dy \\
&= |\det T|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i y\cdot S\xi}\,dy \\
&= |\det T|^{-1}\hat{f}(S\xi).
\end{aligned}
$$

(v) Mit dem Satz 2.3.5 von Fubini rechnet man

$$
\begin{aligned}
(f*g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\,e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-2\pi i (x-y)\cdot\xi}g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\,dx\,dy \\
&= \hat{f}(\xi)\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\,dy \\
&= \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Lemma A.3.3 : (Riemann–Lebesgue) *$\mathcal{F}$ bildet $L^1(\mathbb{R}^n)$ nach $C_0(\mathbb{R}^n)$, dem Raum der stetigen Funktionen f mit $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, ab.*

Beweis:

Wenn $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ ist, dann gilt $\partial_j f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und Satz A.3.2(iii) zusammen mit Bemerkung A.3.1 zeigt, daß $|\xi_j|\hat{f}(\xi)$ beschränkt ist. Damit folgt $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Nach Korollar **??** ist aber $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$, also können wir eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ wählen, für die $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Damit erhält man

$$|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x) - f(x)|\, dx = \|f_n - f\|_1$$

und dies zeigt die gleichmäßige Konvergenz von $\hat{f}_n$ gegen $\hat{f}$. Weil aber nach dem ersten Teil des Beweises $\hat{f}_n \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt, folgt auch $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. ∎

Korollar A.3.4 : *$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis:

Wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt nach Proposition A.2.3 wegen $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|x|^{n+1}} dx < \infty$, daß $x^\alpha \partial^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$. Jetzt liefert Satz A.3.2(iv) $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und wir können rechnen

$$\begin{aligned}
(x^\alpha \partial^\beta f)^\wedge &= \Big((-2\pi i x)^\alpha \big(\frac{\partial^\beta f}{(-2\pi i)^{|\alpha|}}\big)\Big)^\wedge \\
&\overset{A.3.2}{=} \partial_\xi^\alpha \big(\partial_x^\beta \frac{f}{(-2\pi i)^{|x|}}\big)^\wedge \\
&\overset{A.3.2}{=} \partial_\xi^\alpha \Big((2\pi i \xi)^\beta \big(\frac{1}{(-2\pi i)^{|\alpha|}}\big)^\wedge\Big) \\
&= \partial_\xi^\alpha \big((2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|}(-a)^{|\alpha|}\xi^\beta \hat{f}(\xi)\big) \\
&= c\, \partial_x i^\alpha \big(\xi^\beta \hat{f}(\xi)\big).
\end{aligned}$$

Jetzt zeigt Bemerkung A.3.1, daß $\partial_\xi^\alpha(\xi^\beta \hat{f})$ beschränkt ist und mit Proposition A.2.3 schließt man $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ∎

Beispiel A.3.5 : Sei $a > 0$ und $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$. Dann gilt

$$\hat{f}(\xi) = a^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}.$$

Für $n = 1$ rechnet man

$$\begin{aligned}
(\hat{f})'(\xi) &= \Big(-2\pi i x e^{-\pi a|x|^2}\Big)^\wedge(\xi) \\
&= \Big(\frac{i}{a}\Big(e^{-\pi a|x|^2}\Big)'\Big)^\wedge(\xi) \\
&= \frac{i}{a}(2\pi i \xi)\, \hat{f}(\xi) \\
&= -\frac{2\pi}{a}\xi \hat{f}(\xi),
\end{aligned}$$

was zunächst auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = -\frac{2\pi}{a}\xi\hat{f}(\xi)$$

und dann auf

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{\frac{\pi}{a}|\xi|^2}\hat{f}(\xi)\right) = 0$$

führt. Also ist $e^{\frac{\pi}{a}|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$ konstant und Auswertung in $\xi = 0$ liefert als Konstante

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a|x|^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Damit hat man den Fall $n = 1$ bewiesen. Für allgemeine n rechnet man jetzt mit dem Satz 2.3.5 von Fubini

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\pi|x|^2}e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \\
&= \prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-a\pi|x_j|^2}e^{-2\pi i x_j\xi_j}\,dx_j \\
&= \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\pi}{a}|\xi_j|^2} \\
&= \frac{1}{a^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

■

Lemma A.3.6 : *Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\,dx$.*

Beweis:

Dies folgt, indem man den Satz 2.4.5 auf das Integral $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)e^{-2\pi i y\cdot x}\,dy\,dx$ anwendet.

■

Proposition A.3.7 : *Die Fourier–Transformation $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.*

Beweis:

Wir benützen zunächst die Kompaktheit der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und die Homogenität von $|\xi_j|^N$ für folgende Abschätzung

$$(1+|\xi|)^N\;|\partial_\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)| \le c_1(1+c_2\sum|\xi_j^N|)\;|\partial_\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)| \le \sum_{|\beta|\le N} c_{\beta,\alpha}\;|\xi^\beta\partial_\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)|.$$

Mit Lemma A.3.6 und dem Beweis des Riemann-Lebesgue-Lemmas A.3.3 findet man die Identitäten

$$\big(\xi^\beta\partial_\xi^\alpha\widehat{\varphi}\big)^\wedge(x) = (-1)^{|\beta|}(2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|}\;\partial_x^\beta\big(x^\alpha\underbrace{\varphi(-x)}_{(\widehat{\varphi})^\wedge(x)}\big)$$

und

$$\begin{aligned}
\xi^\beta\partial_\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi) &\overset{\text{Lemma A.3.6}}{=} \int (-1)^{|\beta|}(2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|}\partial_x^\beta\big(x^\alpha\varphi(-1)\big)e^{2\pi i x\cdot\xi}dx \\
&\overset{x\mapsto -x}{=} \int \partial_x^\beta\big((-x)^\alpha\varphi(x)\big)(2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|}\;e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$|\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)| \le c \int |\partial_x^\beta\big((-x)^\alpha \varphi(x)\big)|dx.$$

Wegen $\partial_x^\beta\big((-x)^\alpha\varphi(x)\big) = \sum\limits_{\gamma,\delta} c_{\delta,\gamma}(x^\gamma \partial^\delta \varphi)$ und

$$\begin{aligned} |x^\gamma \partial^\delta \varphi(x)| &\le (1+|x|)^{|\gamma|}|\partial^\delta\varphi(x)| \\ &= (1+|x|)^{|\gamma|+n+1}|\partial^\delta\varphi(x)| \,\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} \\ &\le \|\varphi\|_{(|\gamma|+n+1,\delta)}\,\frac{1}{1+|x|^{n+1}} \end{aligned}$$

finden wir schließlich

$$|\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)| \le c_1 \sum c_{\gamma,\delta}\|\varphi\|_{|\gamma|+n+1,\delta}$$

■

Satz A.3.8 : (Fourierinversion) *Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Setzt man $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$, so gilt*

$$(\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge = f \qquad f.ü..$$

Beweis:

Für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ setze

$$\varphi(\xi) := e^{2\pi i x\cdot\xi - \pi t^2|\xi|^2}.$$

Dann rechnet man mit Beispiel A.3.5

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)e^{-2\pi i\xi\cdot y}\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi t^2|\xi|^2}e^{-2\pi i \xi\cdot(y-x)}\,d\xi \\ &= \frac{1}{t^n}e^{\frac{\pi}{t^2}|y-x|^2} \\ &= g_t(x-y), \end{aligned}$$

wobei $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Es ergibt sich in der Notation von Satz A.1.6

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi t^2|\xi|^2}e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\varphi(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{\varphi}(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g_t(x-y)\,dy \\ &= (f * g_t)(x). \end{aligned}$$

Satz A.1.6 zeigt, daß $f * g_t$ für $t \to 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen f konvergiert. Nach Lemma A.1.4 gibt es dann eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, für die $f * g_{t_n}$ fast überall gegen f konvergiert.

Andererseits folgt aus $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit dem Satz 2.4.4 von der dominierten Konvergenz, daß

$$f * g_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi t^2|\xi|^2}e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi = (\hat{f})^\vee(x),$$

d.h. f und $(\hat{f})^\vee$ sind fast überall gleich, also $f = (\hat{f})^\vee \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Identität $f = (\check{f})^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zeigt man völlig analog. ■

Korollar A.3.9 :

(i) *Wenn* $f \in L^1$ *und* $\hat{f} = 0$, *dann gilt* $f = 0$ *f.ü.*

(ii) $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist ein Isomorphismus von topologischen Vektorräumen.*

Beweis:

Der Teil (i) ist klar. Für Teil (ii) benützen wir das Korollar A.3.4 um zu sehen, daß $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit gilt aber auch $\check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ impliziert $f = (\hat{f})^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Behauptung folgt dann aus Proposition A.3.7, weil die Stetigkeit von $f \mapsto \check{f}$ sofort aus der Stetigkeit von $f \mapsto \hat{f}$ folgt. ■

Satz A.3.10 : (Plancherel) *Wenn* $f \in L^1 \cap L^2$, *dann gilt* $\hat{f} \in L^2$ *und* $\mathcal{F}|_{L^1\cap L^2}\colon L^1 \cap L^2 \to L^\infty \cap L^2$ *läßt sich zu einer bijektiven Isometrie* $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ *fortsetzen.*

Beweis:

Sei $\mathcal{X} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$. Nach der Fourier–Inversionsformel aus Satz A.3.8 und dem Riemann–Lebesgue–Lemma A.3.3 gilt $\mathcal{X} \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mit Proposition **??** liefert das $\mathcal{X} \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$. Andererseit gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{X}$ nach Bemerkung A.2.4 und Korollar A.3.4. Wegen $C_c(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und Korollar **??** ist also $\mathcal{X}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Seien jetzt $f, g \in \mathcal{X}$ und $h := \overline{\hat{g}}$. Dann liefert die Fourier-Inversionsformel

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\overline{\hat{g}}\,dx \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\hat{g}\,dx} \\
&= \overline{g(\xi)} \quad \text{f.ü.}
\end{aligned}$$

Lemma A.3.6 liefert dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{h}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}\,dx.$$

Das bedeutet, $\mathcal{F}$ erhält das L^2–Skalarprodukt. Da nach Satz A.3.8 gilt $\mathcal{F}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$, kann man also die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ zu einer Isometrie $\widetilde{\mathcal{F}}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen.

Als nächstes zeigen wir, daß $\widetilde{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{F}$ auf $L^1(R^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tatsächlich übereinstimmen. Sei also $f \in L^1(R^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Mit $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$, der Youngschen Ungleichung (vgl. Lemma A.1.2) und Satz A.1.6 findet man

$$\|f * g_t\|_p \leq \|f\|_p\,\|g_t\|_1 = \|f\|_p\,\|g_t\|_1,$$

also $f * g_t \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Weiter rechnet man mit Satz A.3.2 und Beispiel A.3.5

$$(f * g_t)^\wedge(\xi) = \hat{g}_t(\xi)\,\hat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2 t^2}\hat{f}(\xi).$$

Dies zeigt $(f * g_t)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also $f * g_t \in \mathcal{X}$. Da aber $f * g_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $L^2(\mathbb{R}^n)$. Der Beweis des Riemann–Lebesgue–Lemmas A.3.3 liefert jetzt die gleichmäßige Konvergenz $(f * g_t)^\wedge \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \hat{f}$. Andererseits gilt in $L^2(\mathbb{R}^n)$ auch $(f * g_t)^\wedge = \widetilde{F}(f * g_t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \widetilde{F}(f)$. Nach Lemma A.1.4 gibt es also eine Folge $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{j\to\infty} t_j = 0$ und $(f * g_{t_j})^\wedge \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{F}(f)$ fast überall.

Also ergibt sich schließlich $\hat{f} = \widetilde{F}(f)$ fast überall, d.h. $\hat{f} = \widetilde{F}$ als L^2–Funktionen.

Wegen Korollar A.3.9(ii) wissen wir jetzt, daß $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie mit dichtem Bild ist. Damit ist $\mathcal{F}$ automatisch injektiv, aber indem man ein $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch Vektoren im Bild approximiert, erhält man jetzt auch die Surjektivität aus der Isometrie. ■

Korollar A.3.11 : *Sei $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation. Dann ist $\mathcal{F}^{-1}$ auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ durch die inverse Fouriertransformation $f \mapsto \check{f}$ gegeben.*

Beweis:

Da $x \mapsto -x$ auf allen $L^p(\mathbb{R}^n)$ einen isometrischen Isomorphismus induziert, verifiziert man leicht, daß einen Plancherelsatz A.3.10 auch für die inverse Fouriertransformation. Die resultierende Transformation $\mathcal{F}^\sharp\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ schränkt sich auf dem dichten Unterraum $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ zu $f \mapsto \check{f}$ ein, also zeigt die Fourierinversion A.3.8, daß $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^\sharp = \mathrm{id}$. Analog sieht man $\mathcal{F}^\sharp \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}$, d.h. es ergibt sich $\mathcal{F}^\sharp = \mathcal{F}^{-1}$, also die Behauptung. ■

A.4 Temperierte Distributionen

Ein lineares Funktional $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ heißt **temperierte Distributionen**, wenn für $f_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $F(f_k) \to 0$. Wir bezeichnen den Raum aller temperierten Distributionen mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und schreiben

$$\langle F, \varphi\rangle := F(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Eine meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt **temperiert**, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(1 + |x|)^{-N} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gibt. Wir bezeichnen den Raum aller temperierten Funktionen mit $T(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel A.4.1 : Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ temperiert. Setze für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle F, \varphi\rangle := \int f\varphi.$$

Dann gilt

$$|\langle F, \varphi\rangle| \leq \int \left|\frac{f}{(1 + |x|)^N}\right| \, |(1 + |x|)^N \varphi| \leq \|(1 + |x|)^{-N} f\|_1 \, \|\varphi\|_{(N,0)}$$

und man sieht, daß F eine temperierte Distribution ist.

Beachte, daß jede Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ temperiert ist: Für $N > \frac{n}{q}$ gilt nämlich $\frac{1}{(1+|x|)^N} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und das zeigt für $q = p'$ mit der Hölderungleichung aus Lemma **??** die Behauptung. Wenn f_1 und f_2 fast überall gleich sind, dann gilt $F_1 = F_2$. ■

Beispiel A.4.2 : Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze

$$\langle F, \varphi\rangle = \partial^\alpha \varphi(x).$$

Dann gilt $|\langle F, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_{0,\alpha}$ und F ist eine temperierte Distribution. Für $\alpha = 0$ nennt man diese Distribution die **Diracsche δ-Distribution**. ■

Proposition A.4.3 : *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ temperiert und F die zugehörige temperierte Distribution (vgl. Beispiel A.4.1). Wenn $F = 0$, dann ist f fast überall Null, d.h. die temperierten Funktionen können als Teilmenge der temperierten Distributionen aufgefaßt werden.*

Beweis:

Schreibe $f = |f|\, e^{i\rho}$ für eine meßbare Funktion $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und wähle eine kompakte Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann existiert das Integral $\int_E |f| = \int_E f e^{-i\rho}$, weil f temperiert ist.

Nach Proposition **??** gibt es ein Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \to \chi_E e^{-i\rho}$ in L^p und damit fast überall (evtl. nach Übergang zu einer Teilfolge, vgl. Lemma A.1.4). Mit dem Satz 2.4.4 von der dominierten Konvergenz führt dies auf

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_E e^{-i\rho} = \int_E |f|,$$

also ist $f|_E$ und somit auch f fast überall Null. ∎

Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt **langsam wachsend**, wenn es zu jedem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, für das $\frac{\partial^\alpha f}{(1+|x|)^N}$ beschränkt ist.

Proposition A.4.4 : (Multiplikation mit Funktionen) *Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ langsam wachsend. Dann wird durch*

$$\langle fF, \varphi\rangle = \langle F, f\varphi\rangle \qquad F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

eine temperierte Distribution definiert.

Beweis:

Die Abbildung $\varphi \mapsto f\varphi$ ist stetig von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d.h. wenn $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir behaupten, daß dann auch gilt $f\varphi_k \to f\varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wegen

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial^\beta(f\varphi)| &= |x^\alpha \sum_{\gamma+\delta=\beta} \partial^\gamma f \partial^\delta \varphi| \\ &= \sum_{\gamma+\delta=\beta} \underbrace{\Big|\frac{\partial^\gamma f}{(1+|x|)^{N_\gamma}}\Big|}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\big|(1+|x|)^{N_\gamma+|\alpha|}\partial^\delta\varphi\big|}_{\text{beschränkt}} \end{aligned}$$

gilt $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Analog sieht man für $\varphi_k \to 0$

$$\begin{aligned} \|f\varphi_k\|_{(N,\alpha)} &= \sup\Big((1+|x|)^N |\partial^\alpha(f\varphi_k)|\Big) \\ &\le \sup \sum_{\substack{\gamma+\delta=\alpha \\ \text{endlich}}} \Big|\frac{\partial^\gamma f}{(1+|x|)^{N_\gamma}}\Big|\ |(1+|x|)^{N_\gamma+N}\ \partial^\delta\varphi_k| \\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. Wenn jetzt $\varphi_k \to 0$ gilt, so findet man

$$\langle fF, \varphi_k\rangle = \langle F, f\varphi_k\rangle \to 0,$$

weil F eine temperierte Distribution ist. Damit also ist auch fF eine temperierte Distribution. ∎

Proposition A.4.5 : (Translation) *Sei $y \in \mathbb{R}^n$ und $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert*

$$\langle F^y, \varphi\rangle := \langle F, \varphi^{-y}\rangle \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

eine temperierte Distribution.

Beweis:

Wenn $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann zeigen wir zunächst $\varphi_k^{-y} \to \varphi^{-y}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_k^{-y}\|_{(N,\alpha)} &= \sup_x \big(1+|x|\big)^N |\partial^\alpha \varphi_k^{-y}(x)| \\
&= \sup_x \big(1+|x|\big)^N |\partial^\alpha \varphi_k(x-y)| \\
&= \sup_x \big(1+|x-y|\big)^N |\partial^\alpha \varphi_k(x-y)| \big(1+|y|\big)^N \\
&= \big(1+|y|\big)^N \|\varphi_k\|_{(N,\alpha)}.
\end{aligned}$$

Wenn also $\varphi_k \to 0$ so gilt $\varphi_k^{-y} \to 0$ und das zeigt die Behauptung. Darüber hinaus sieht man

$$\langle F^y, \varphi_k\rangle = \langle F, \varphi_k^{-y}\rangle \to 0$$

und die Proposition ist bewiesen. ∎

Proposition A.4.6 : (Verknüpfung mit invertierbaren linearen Abbildungen) *Sei* $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *und* $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*. Dann definiert*

$$\langle F \circ S, \varphi\rangle := \frac{1}{\det S}\langle F, \varphi \circ S^{-1}\rangle \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

eine temperierte Distribution.

Beweis:

Wenn $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann zeigen wir zunächst $\varphi_k \circ S^{-1} \to \varphi \circ S^{-1}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Mit der Kettenregel findet man

$$\partial^\alpha(\varphi \circ S^{-1}) = \sum_{|\beta| \le |\alpha|} c_\beta \partial^\beta \varphi \circ S^{-1}$$

mit von S abhängigen Konstanten c_β. Wegen $0 < \|S\| < \infty$ findet man eine Konstante C mit

$$\|\varphi \circ S^{-1}\|_{(N,\alpha)} \le C \sum_{|\beta| \le |\alpha|} |c_\beta|\, \|\varphi\|_{(N,\beta)},$$

was die Behauptung beweist. Der Rest des Beweises geht wie der Beweis von Proposition A.4.5. ∎

Proposition A.4.7 : (Ableiten) *Sei* $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*. Durch*

$$\langle \partial^k F, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle F, \partial^\alpha \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

wird eine temperierte Distribution definiert.

Beweis:

Wenn $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ so gilt nach Definition der Topologie des Schwartzraums $\partial^\alpha \varphi_k \to \partial^\alpha \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Der Rest des Beweises geht wie der Beweis von Proposition A.4.5. ∎

Proposition A.4.8 : (Faltung) *Sei* $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *und* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *sowie* $\widetilde{\psi}(x) = \psi(-x)$. *Durch*

$$\langle F * \psi, \varphi \rangle = \langle F, \varphi * \widetilde{\psi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

wird eine temperierte Distribution definiert.

Beweis:

Wenn $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so gilt $\varphi_k * \psi \to \varphi * \psi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wie man aus der Abschätzung

$$(1 + |x|)^N |\partial^\alpha (\varphi_k * \psi)(x)| \leq c \|\varphi\|_{(N,\alpha)} \|\psi\|_{(N+n+1,0)}$$

sieht (vgl. Proposition A.2.5). Der Rest des Beweises geht wie der Beweis von Proposition A.4.5. ∎

Proposition A.4.9 : (Fourier–Transformation) *Sei* $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Durch*

$$\langle \widehat{F}, \varphi \rangle := \langle F, \widehat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

wird eine temperierte Distribution definiert.

Beweis:

Wenn $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt nach Proposition A.3.7 $\widehat{\varphi}_k \to \widehat{\varphi}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist der Beweis Routine (vgl. Beweis von Proposition A.4.5). ∎

Bemerkung A.4.10 : Völlig analog zu Proposition A.4.9 zeigt man, daß durch

$$\langle \check{F}, \varphi \rangle := \langle F, \check{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

für $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird eine temperierte Distribution definiert wird. Mit der Fourier–Inversionsformel aus Satz A.3.8 erhält man

$$\langle (\widehat{F})^\vee, \varphi \rangle = \langle \widehat{F}, \check{\varphi} \rangle = \langle F, (\check{\varphi})^\wedge \rangle = \langle F, \varphi \rangle,$$

also $(\widehat{F})^\vee = F$. Analog findet man $(\check{F})^\wedge = F$. Also ist die Fourier-Transformation $F \mapsto \widehat{F}$ ein linearer Isomorphismus von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wenn ein Netz $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ in der schwach*-Topologie von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gegen $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, dann zeigt die Charakterisierung der Konvergenz in dieser Topologie aus Proposition **??** zusammen mit Proposition A.3.7, daß

$$\langle \widehat{F}_\alpha, \varphi \rangle = \langle F_\alpha, \widehat{\varphi} \rangle \underset{\alpha \in A}{\longrightarrow} \langle F, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{F}, \varphi \rangle$$

und daher auch die Stetigkeit der Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Als Ergebnis erhalten wir, daß die Fouriertransformation ein Automorphismus des topologischen Vektorraums $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist, dessen Inverse durch die Fourier–Inversionsformel

$$(\widehat{F})^\vee = (\check{F})^\wedge = F \tag{A.2}$$

gegeben ist. ∎

Proposition A.4.11 : *Sei* $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *temperiert und* F *die zugehörige temperierte Distribution. Dann gilt*

(i) $\langle hF, \varphi\rangle = \int (hf)\varphi$ *für alle langsam wachsenden Funktionen* h *und* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\langle F^y, \varphi\rangle = \int f^y\varphi$ *für alle* $y \in \mathbb{R}^n$ *und* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\langle F \circ S, \varphi\rangle = \int (f \circ S)\varphi$ *für alle* $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}^n)$ *und* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(iv) $\langle \partial^\alpha F, \varphi\rangle = \int \partial^\alpha f\varphi$ *für alle* $|\alpha| \leq k$ *und* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *wenn* $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

(v) $\langle F * \psi, \varphi\rangle = \int (f * \psi)\varphi$ *für alle* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *und* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(vi) $\langle \hat{F}, \varphi\rangle = \int \hat{f}\varphi$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *wenn* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

(i) Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

(ii)
$$\int f^y\varphi = \int f(x-y)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x+y)dx = \int f\varphi^{-y}.$$

(iii) Mit der Transformationsformel aus Satz C.4.6 findet man
$$\int (f \circ S)\varphi = |\det S|^{-1} \int f\,(\varphi \circ S^{-1}).$$

(iv) Mit partieller Integration ergibt sich
$$\int \partial^\alpha f\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int f\,\partial^\alpha\varphi.$$

(v) Man rechnet
$$\int (f * \psi)\varphi = \int\int \psi(x-y)f(y)\varphi(x)dy\,dx$$
und
$$\begin{aligned}\int f(y)(\widetilde{\psi} * \varphi)(y)\,dy &= \int\int f(y)\widetilde{\psi}(y-x)\varphi(x)dy\,dx \\ &= \int\int f(y)\psi(x-y)\varphi(x)dy\,dx.\end{aligned}$$

(vi) Mit Lemma A.3.6 findet man $\int \hat{f}\varphi = \int f\hat{\varphi}$.

■

Proposition A.4.12 : *Sei* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompakt und konvex. Dann gibt es zu jedem* $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash K$ *ein* $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ *und ein* $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ *mit*

(a) $x_0 \cdot \xi_0 < \alpha_0$.

(b) $y \cdot \xi_0 > \alpha_0$ *für alle* $y \in K$.

Beweis:

Nach Satz **??** gibt es ein $y_0 \in K$ mit $0 < |y_0 - x_0| = \inf_{y\in K} |y - x_0|$. Wir setzen $\xi_0 := y_0 - x_0$ und $\alpha_0 := \frac{1}{2}\xi_0 \cdot (x_0 + y_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\xi_0 \cdot x_0 &= \frac{1}{2}\xi_o \cdot \Big((x_0 + y_0) + (x_0 - y_0)\Big)\\ &= \alpha_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)\cdot(y_0 - x_0)\\ &= \alpha_0 - \frac{1}{2}|x_0 - y_0|^2\\ &< \alpha_0.\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned}\xi_0 \cdot y_0 &= \frac{1}{2}\xi_o \cdot \Big((x_0 - y_0) + (y_0 - x_0)\Big)\\ &= \alpha_0 + \frac{1}{2}(y_0 - x_0)\cdot(y_0 - x_0)\\ &= \alpha_0 + \frac{1}{2}|x_0 - y_0|^2\\ &> \alpha_0.\end{aligned}$$

Wenn jetzt $y \in K$ beliebig ist, dann gilt $y(t) := y_0 + t(y - y_0)$

$$|y(t) - x_0|^2 = |y_0 - x_0|^2 + 2t(y_0 - x_0)\cdot(y - y_0) + t^2|y - y_0|^2 \geq |y_0 - x_0|^2 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Also kann die Ableitung des quadratischen Polynoms $t \mapsto |y(t) - x_0|^2$ in $t = 0$ nicht negativ sein. Damit gilt $(y_0 - x_0)\cdot(y - y_0) \geq 0$, d.h.,

$$\xi_o \cdot y = (y_0 - x_0)\cdot y \geq (y_0 - x_0)\cdot y_0 = \xi_0 \cdot y_0 > \alpha_0.$$

■

Lemma A.4.13 : *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex sowie $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $H(\xi) := \sup_{y\in K}\langle y, \xi\rangle$. Dann gilt*

$$K = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \xi \in \mathbb{R}^n)\ y \cdot \xi \leq H(\xi)\}.$$

Beweis:

Die Inklusion „$\subseteq$" folgt unmittelbar aus der Definition von H. Wenn jetzt $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K$, dann zeigt Proposition A.4.12, daß es ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \cdot \xi > \alpha > y \cdot \xi$ für alle $y \in K$ gibt. Aber damit gilt dann $x_0 \cdot \xi > H(\xi)$ und das zeigt „$\supseteq$". ■

Bemerkung A.4.14 : Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt aus Satz 2.4.6 und den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen (vgl. Satz **??**), daß durch die Formel

$$\hat{f}(\zeta) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\zeta}dx$$

eine holomorphe Funktion $\hat{f}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definiert wird, die nach Bemerkung **??** durch ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmt wird. ■

Satz A.4.15 : (Paley–Wiener) *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex sowie $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $H(\xi) := \sup_{x\in K}\langle x, \xi\rangle$. Dann sind für jede ganze (d.h. stetige und in jeder Variablen holomorphe) Funktion $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *$F = \hat{f}$ für eine Funktion $f \in C_c^\infty(K)$.*

(2) *Zu jedem $N \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $C_N > 0$ mit*

$$|F(\xi)| \le C_N(1 + |\zeta|)^{-N} e^{2\pi H(\operatorname{Im}\zeta)} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis:

„(1)⇒(2)“ Nach der Definition der Fourier–Transformation ist klar, daß

$$|\hat{g}(x)| \le \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} e^{2\pi H(\operatorname{Im}\zeta)}$$

für jede integrierbare Funktion. Mit Satz A.3.2 findet man also

$$|\partial^\alpha \hat{f}(\zeta)| \le C\|\partial^\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} e^{2\pi H(\operatorname{Im}\zeta)}.$$

Dies wiederum beweist die Abschätzung in (2), weil $|\zeta^\alpha|(1+|\zeta|)^{-N} \le 1$ für $|\alpha| \le N$ gilt.

„(2)⇒(1)“ Wir nehmen jetzt an, daß F die Abschätzung (2) für jedes N erfüllt. Dann ist die Einschränkung von F auf $\mathbb{R}^n$ eine temperierte Funktion, also gilt nach Bemerkung A.4.10, daß F auf $\mathbb{R}^n$ mit der Fourier–Transformierten der durch

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} F(\xi)\, d\xi$$

definierten (temperierten) Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ übereinstimmt. Wenn wir jetzt zeigen können, daß $\operatorname{supp} f \subseteq K$, dann definiert die Formel für die Fourier-Transformation eine ganze Funktion, die auf $\mathbb{R}^n$ mit F übereinstimmt, also (Referenz???) gleich F ist. Die Abschätzung (2) zusammen mit dem Cauchy–Integralsatz **??** zeigt, daß für jedes $\eta \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot(\xi+i\eta)} F(\xi + i\eta)\, d\xi.$$

Wendet man jetzt (2) mit $N = n + 1$ an, so ergibt sich

$$|f(x)| \le e^{-2\pi x\cdot\eta + 2\pi H(\eta)} C_{n+1} \int (1 + |\xi|)^{-n-1} d\xi.$$

Mit $t\eta$ statt η gibt das im Grenzwert für $t \to \infty$

$$u(x) = 0 \quad \text{für} \quad H(\eta) < x\cdot\eta.$$

Wenn aber $H(\eta) \ge x\cdot\eta$ für jedes $\eta \in R^n$, dann gilt nach Lemma A.4.13 $x \in K$, also folgt $\operatorname{supp} f \subseteq K$.

■

Anhang B

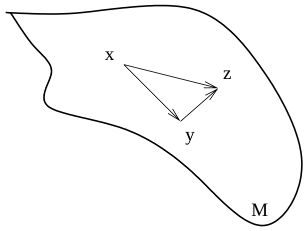
Topologie

B.1 Umgebungen

Sei M eine (nichtleere) Menge und $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das Paar (M, ρ) heißt ein **metrischer Raum**, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(M1) $\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,

(M2) $\rho(x, y) - \rho(x, z) \leq \rho(y, z)$ (**Dreiecksungleichung**).



Wir nennen die Funktion ρ eine **Metrik** auf M. Wenn die Metrik ρ aus dem Kontext klar ist oder ihre speziellen Eigenschaften nicht gebraucht werden, sagen wir einfach: M ist ein metrischer Raum.

Proposition B.1.1 : *Sei (M, ρ) ein metrischer Raum, dann gilt für alle $x, y, z \in M$*

(i) $\rho(x, y) \geq 0$.

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

(iii) $\rho(x, y) \geq |\rho(x, z) - \rho(y, z)|$.

Beweis:

IDEE: Dies folgt direkt aus den Definitionen.

(i): Dies folgt aus $0 \overset{(M1)}{=} \rho(x, x) \overset{(M2)}{\leq} \rho(x, y) + \rho(x, y)$.

(ii): Es gilt $\rho(y, x) \overset{(M2)}{\leq} \rho(y, y) + \rho(x, y) \overset{(M1)}{=} \rho(x, y)$. Durch Vertauschen der Rollen von x und y in diesem Argument folgt die Behauptung.

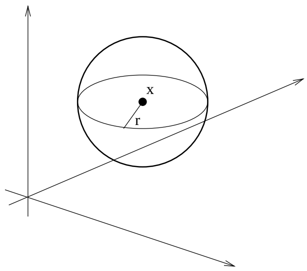
(iii): Aus $\rho(x, z) \overset{(M2)}{\leq} \rho(x, y) + \rho(z, y) \overset{(ii)}{=} \rho(x, y) + \rho(y, z)$ folgt $\rho(x, y) \geq \rho(x, z) - \rho(y, z)$. Wieder folgt die Behauptung, indem man in diesem Argument die Rollen von x und y vertauscht und (ii) ausnutzt.

■

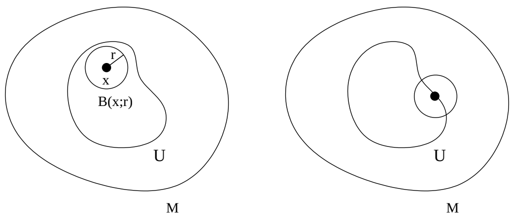
Sei (M, ρ) ein metrischer Raum, $x \in M$ und $r > 0$. Dann heißt die Menge

$$B_\rho(x; r) := \{y \in M \mid \rho(x, y) < r\}$$

die **offene Kugel um** x **mit Radius** r. Wenn die Metrik aus dem Kontext klar ist, schreiben wir lediglich $B(x; r)$ statt $B_\rho(x; r)$.

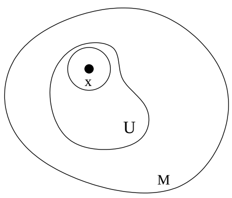


Es sei $x \in M$. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt eine **Umgebung** von x in M, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $B(x; r) \subseteq U$. Man beachte, daß x dann automatisch in U enthalten ist. Insbesondere sind also die offenen Kugeln $B(x; r)$ Umgebungen von x in M. Die Menge aller Umgebungen von x in M wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

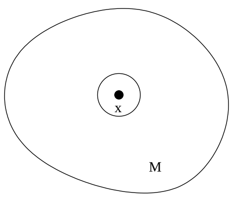


Proposition B.1.2 : *Sei (M, ρ) ein metrischer Raum und $x \in M$. Dann gilt*

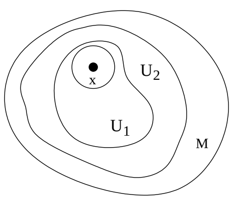
(U1) *$x \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$.*



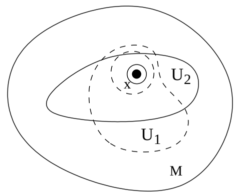
(U2) *$M \in \mathcal{U}(x)$.*



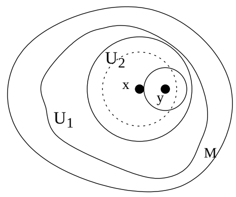
(U3) *Aus $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ und $U_1 \subseteq U_2 \subseteq M$ folgt $U_2 \in \mathcal{U}(x)$.*



(U4) *Aus* $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ *folgt* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.



(U5) *Wenn* $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ *ist, dann gibt es ein* $U_2 \in \mathcal{U}(x)$ *mit* $U_1 \in \mathcal{U}(y)$ *für alle* $y \in U_2$.



Beweis:

IDEE: Dies folgt direkt aus den Definitionen. Man denke dabei in Kugeln.

(U1), (U2) und (U3) folgen unmittelbar aus den Definitionen. Wenn $B(x;r_1) \subseteq U_1$ und $B(x;r_2) \subseteq U_2$ sind, gilt für jedes $0 < r \leq \min(r_1, r_2)$

$$B(x;r) \subseteq U_1 \cap U_2,$$

was (U4) zeigt. Um (U5) zu zeigen, wählen wir eine Kugel $B(x;r) \subseteq U_1$ und setzen $U_2 := B(x;r)$. Zu jedem $y \in U_2$ müssen wir nun eine Kugel $B(y;r')$ um y finden, die ganz in U_1 liegt. Es sei also $y \in U_2$. Als r' wähle $r - r_0$ mit $\rho(x,y) < r_0 < r$. Für $z \in B(y; r - r_0)$ gilt nun, daß

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < r_0 + (r - r_0) = r,$$

also ist $z \in B(x;r) \subseteq U_1$. Insgesamt haben wir $B(y; r - r_0) \subseteq U_1$, folglich $U_1 \in \mathcal{U}(y)$. ∎

B.2 Topologische Räume

In der Analysis einer reellen Variablen entwickelt man eine Theorie der Konvergenz und Stetigkeit, die wesentlich auf den Eigenschaften der über den Absolutbetrag definierten Abstandsmetrik beruht. Diese Theorie läßt sich problemlos auf allgemeine metrische Räume übertragen. Da aber nicht alle Mengen, auf denen man Konvergenz und Stetigkeit beschreiben möchte, mit einer Metrik versehen sind (man denke z.B. an Räume von differenzierbaren Funktionen), sucht man nach alternativen Formulierungen. Es stellt sich heraus, daß die in Proposition B.1.2 aufgeführten Eigenschaften (U1) - (U5) des Systems aller Umgebungen von Punkten in metrischen Räumen ausreichen, um eine Theorie von Konvergenz und Stetigkeit aufzubauen, die die Theorie für metrische Räume subsumiert. Auch wenn zunächst alle Mengen, auf denen wir Konvergenz und Stetigkeit untersuchen wollen, metrische Räume sein werden (manchmal ist die Metrik aber auch alles andere als kanonisch), rechtfertigen spätere Anwendungen daher die folgende Definition:

Sei M eine Menge und

$$\mathcal{P}(M) := \{N \subseteq M\}$$

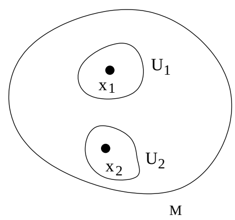
die **Potenzmenge** von M, d.h. die Menge aller Teilmengen von M. Ein Paar $(M,\mathcal{U})$, für das

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\colon M &\to \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(M)\big) = \{\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)\} \\ x &\mapsto \mathcal{U}(x) \end{aligned}$$

jedem $x \in M$ eine Menge von Teilmengen von M zuordnet, heißt ein **topologischer Raum**, wenn für jedes $x \in M$ das System $\mathcal{U}(x)$ die Eigenschaften (U1)-(U5) aus Proposition B.1.2 erfüllt. Wir nennen die Elemente von $\mathcal{U}(x)$ wieder **Umgebungen** von x in M. Wenn zusätzlich die Bedingung

$$\forall x_1, x_2 \in M \ : \quad \big(x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ \exists U_1 \in \mathcal{U}(x_1)\, \exists U_2 \in \mathcal{U}(x_2) : U_1 \cap U_2 = \emptyset\big)$$

gilt, dann heißt der topologische Raum nach dem Mathematiker Felix Hausdorff (1868–1942) ein **Hausdorff–Raum**.



Bemerkung B.2.1 : Seien $(M_1,\mathcal{U}_1)$ und $(M_2,\mathcal{U}_2)$ topologische Räume. Für $(x,y) \in M_1 \times M_2$ definiere

$$\mathcal{B}(x,y) := \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \mathcal{U}_1(x), U_2 \in \mathcal{U}_2(y)\}$$

sowie

$$\mathcal{U}(x,y) := \{V \subseteq M_1 \times M_2 \mid \exists\, B \in \mathcal{B}(x,y) : B \subseteq V\}.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß $(M_1 \times M_2,\mathcal{U})$ ein topologischer Raum ist (Übung!). Man nennt diesen Raum das **topologische Produkt** von $(M_1,\mathcal{U}_1)$ und $(M_2,\mathcal{U}_2)$ und $\mathcal{U}$ die **Produkttopologie** auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$. Es ebenfalls kein Problem, diese Konstruktion auf das Produkt endlich vieler topologischer Räume zu übertragen. ∎

B.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Sei $(M,\mathcal{U})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt **offen**, wenn sie Umgebung jedes Punktes ist, den sie enthält, d.h.

$$\forall x \in U : \ U \in \mathcal{U}(x).$$

Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr **Komplement** $\complement A := M \setminus A$ offen ist.

Proposition B.3.1 : *Sei $(M,\mathcal{U})$ ein topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) *Vereinigungen offener Mengen in M sind offen.*

(ii) *Endliche Schnitte offener Mengen in M sind offen.*

(iii) *Schnitte abgeschlossener Mengen in M sind abgeschlossen.*

(iv) *Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen in M sind abgeschlossen.*

(v) *$\emptyset$ und M sind sowohl abgeschlossen als auch offen.*

Beweis:

IDEE: Die Aussagen über offene Mengen folgen sofort aus den Definitionen und die Aussagen über abgeschlossene Mengen dann durch Komplementbildung.

Die letzte Behauptung ist klar mit den Definitionen. Seien U_γ, $\gamma \in \Gamma$, offen in M.

(i) Wenn $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$, dann gibt es ein γ_0 mit $x \in U_{\gamma_0}$ und U_{γ_0} ist Umgebung von x. Wegen $U_{\gamma_0} \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$ ist auch letztere Menge eine Umgebung von x.

(ii) Sei jetzt Γ endlich und $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$. Jedes U_γ ist Umgebung von x und mit Induktion folgt aus der Bedingung (U4) in der Definition eines topologischen Raums, daß endliche Schnitte von Umgebungen eines Punktes selbst Umgebungen dieses Punktes sind. Damit folgt die Behauptung.

Die nächsten beiden Behauptungen folgen aus den ersten beiden und den **de Morganschen Formeln**

$$M \setminus \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (M \setminus U_\gamma)$$

und

$$M \setminus \bigcap_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (M \setminus U_\gamma).$$

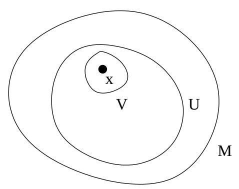
■

Satz B.3.2 : *Wenn man für einen topologischen Raum $(M,\mathcal{U})$ die Menge*

$$\mathcal{T} := \{V \subseteq M \mid V \text{ offen}\}$$

aller offenen Teilmengen kennt, kann man die Funktion $\mathcal{U}$ rekonstruieren:

$$\mathcal{U}(x) = \{U \subseteq M \mid \exists V \in \mathcal{T} :\ x \in V \subseteq U\}. \tag{B.1}$$

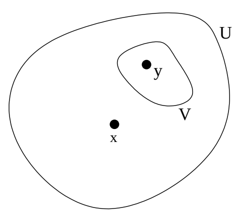


Beweis:

IDEE: Die Inklusion „$\supseteq$“ folgt sofort aus den Definitionen. Für die andere Inklusion betrachte zu $U \in \mathcal{U}(x)$ die Menge $U^o := \{y \in U \mid U \in \mathcal{U}(y)\}$ und zeige, daß sie offen ist.

„$\subseteq$“: Wenn $U \in \mathcal{U}(x)$, dann setze

$$U^o := \{y \in M \mid U \in \mathcal{U}(y)\}.$$



Es gilt $x \in U^o \subseteq U$ wegen (U1), also bleibt zu zeigen, daß U^o offen ist: Sei also $y \in U^o$. Dann gibt es nach der Eigenschaft (U5) in der Definition eines topologischen Raums (vgl. Proposition B.1.2) ein $V \in \mathcal{U}(y)$ derart, daß

$$\forall z \in V : \quad U \in \mathcal{U}(z).$$

Dann gilt $V \subseteq U^o$ und daher $U^o \in \mathcal{U}(y)$.

„$\supseteq$“: Bezeichne die rechte Seite der Gleichung (B.1) mit $\mathcal{U}'(x)$. Wenn $U \in \mathcal{U}'(x)$ und $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in V \subseteq U$, dann gilt $V \in \mathcal{U}(x)$ und nach (U3) auch $U \in \mathcal{U}(x)$.

■

Auf Grund der in Satz B.3.2 beschriebenen Beziehung (B.1) zwischen Umgebungen und offenen Mengen wird in vielen Büchern ein topologischer Raum durch Angabe seiner offenen Teilmengen definiert. Man nennt dann die Menge $\mathcal{T}$ der offenen Teilmengen von M die Topologie von M. Dies führt auf die folgende Definition:

Sei M eine Menge. Eine **Topologie** auf M ist eine Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von M mit folgenden Eigenschaften:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T},\ M \in \mathcal{T}$.

(T2) $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \mathcal{T} \ \Rightarrow\ (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \in \mathcal{T}$.

(T3) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \ \Rightarrow\ (\bigcap_{i=1}^{n} U_i) \in \mathcal{T}$.

Natürlich ist nicht jede Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von M eine Topologie. Aus Proposition B.3.1 folgt aber sofort, daß die Menge der offenen Mengen in M eine Topologie ist. Ist umgekehrt auf M eine Topologie $\mathcal{T}$ gegeben, so ist das durch (B.1) definierte Paar $(M,\mathcal{U})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{T}$ gerade die Menge der offenen Teilmengen von $(M,\mathcal{U})$ (Übung!).

Es gibt also eine leicht zu beschreibende Bijektion zwischen der Menge der Umgebungssysteme $\mathcal{U}$ und den Topologien $\mathcal{T}$ auf M. Daher nennt man auch das Paar $(M,\mathcal{T})$ einen **topologischen Raum**. Ob man $\mathcal{U}$ oder $\mathcal{T}$ zur Beschreibung des topologischen Raumes benützt, ist dann Geschmacksache und hängt ein wenig vom Kontext ab. Wenn $\mathcal{U}$ und damit $\mathcal{T}$ (und umgekehrt) aus dem Kontext klar sind oder nicht explizit benannt werden müssen, nennen wir einfach M einen topologischen Raum. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen **offene Mengen**.

Sei M ein topologischer Raum und $B \subseteq M$ beliebig. Die Menge

$$\overline{B} := \bigcap \{A \mid A \supseteq B, A \text{ abgeschlossen}\}$$

ist die kleinste abgeschlossene Menge, die B enthält. $\overline{B}$ heißt der **Abschluß** von B. Die Menge

$$B^\circ := \bigcup \{U \mid U \subseteq B, U \text{ offen}\} = \{y \in M \mid B \in \mathcal{U}(y)\}$$

(vgl. Beweis von Satz B.3.2) ist die größte offene Menge, die in B enthalten ist. B° heißt das **Innere** von B. Die Differenz $\overline{B} \setminus B^\circ$ heißt der **Rand** von B und wird mit ∂B bezeichnet.

Für eine Teilmenge $E \subseteq M$ heißt eine Menge $U \subseteq M$ eine **Umgebung** von E, wenn $E \subseteq U^\circ$. Also ist U eine Umgebung von E genau dann, wenn U eine Umgebung jeden Punktes von E ist.

Proposition B.3.3 : *Sei $(M,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq M$. Dann gilt:*

(i) $\overline{A} = A \cup \mathrm{HP}(A)$.

(ii) *A ist genau dann abgeschlossen, wenn* $\mathrm{HP}(A) \subseteq A$.

Beweis:

IDEE: Dies folgt direkt aus den Definitionen.

(i) Aus $x \notin \overline{A}$ folgt $x \in \complement\overline{A} \in \mathcal{T}$, also ist $\complement\overline{A}$ eine Umgebung von x. Wegen $A \cap \complement\overline{A} = \emptyset$ ist dann $x \notin \mathrm{HP}(A)$. Also gilt $\mathrm{HP}(A) \subseteq \overline{A}$ und damit $A \cup \mathrm{HP}(A) \subseteq \overline{A}$.
Umgekehrt folgt aus $x \notin \mathrm{HP}(A) \cup A$, daß es ein $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ und $A \cap U = \emptyset$ gibt. Also gilt $\overline{A} \subseteq \complement U$ und damit $x \notin \overline{A}$, d.h. $\overline{A} \subseteq A \cup \mathrm{HP}(A)$.

(ii) A ist genau dann abgeschlossen, wenn $A = \overline{A}$, was aber nach (i) äquivalent zu $\mathrm{HP}(A) \subseteq A$ ist.

■

B.4 Erzeugung von Topologien

Sei M eine Menge und $\mathcal{T}_1$ sowie $\mathcal{T}_2$ Topologien auf M. Dann heißt $\mathcal{T}_1$ **gröber** als $\mathcal{T}_2$ (und $\mathcal{T}_2$ **feiner** als $\mathcal{T}_1$), wenn $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

Bemerkung B.4.1 : Sei M eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Dann gibt es genau eine gröbste Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ auf M, die $\mathcal{E}$ enthält, nämlich

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}) := \bigcap\{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M) \mid \mathcal{T} \text{ Topologie auf } M, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}\}.$$

In diesem Fall heißt $\mathcal{E}$ auch eine **Subbasis** für $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ und $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ **erzeugte Topologie**. (Übung: Zeige, daß $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ tatsächlich eine Topologie ist.) ■

Proposition B.4.2 : *Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Dann ist $\mathcal{E}' := \{\bigcap_{endlich} V \mid V \in \mathcal{E}\}$ eine Basis der von $\mathcal{E}$ erzeugten Topologie.*

Beweis:

IDEE: Überprüfe, daß $\mathcal{O} := \{\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \mid B \text{ beliebige Indexmenge}, U_\beta \in \mathcal{E}'\}$ eine Topologie auf M ist, die $\mathcal{E}$ enthält und zeige, daß $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ für jedes $\mathcal{T} \in \{\mathcal{T} \in \mathcal{P}(M) \mid \mathcal{T} \text{ Topologie auf } M, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}\}$.

Die Details seien dem Leser zur Übung überlassen. ■

Proposition B.4.3 : *Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Dann gilt*

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \Big\{ \bigcup_{\substack{beliebig\\viele}} \big(\bigcap_{\substack{endlich\\viele}} E_\alpha \big) \,\Big|\, E_\alpha \in \mathcal{E} \Big\}.$$

Beweis:

Setze $\widetilde{\mathcal{E}} := \{ \bigcap_{\substack{\text{endlich}\\\text{viele}}} E_\alpha \mid E_\alpha \in \mathcal{E}\}$, dann folgt aus Proposition B.4.2, daß $\widetilde{\mathcal{E}}$ die Basis einer Topologie ist. Diese Topologie ist gerade

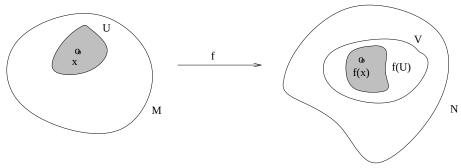
$$\Big\{ \bigcup_{\substack{\text{beliebig}\\\text{viele}}} E_\alpha \,\Big|\, E_\alpha \in \widetilde{\mathcal{E}} \Big\}$$

und somit gröber als $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, d.h. gleich $\mathcal{T}(\mathcal{E})$. ■

B.5 Stetigkeit von Abbildungen

Seien $(M,\mathcal{U})$ und $(N,\mathcal{V})$ topologische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt f **stetig in** $x_0 \in M$, wenn

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0))\ \exists U \in \mathcal{U}(x_0) : f(U) \subseteq V.$$



Wenn f in jedem Punkt von M stetig ist, dann sagt man einfach, f ist **stetig**. Die Menge der stetigen Abbildungen $f\colon M \to N$ wird mit $C(M,N)$ oder auch mit $C^0(M,N)$ bezeichnet.

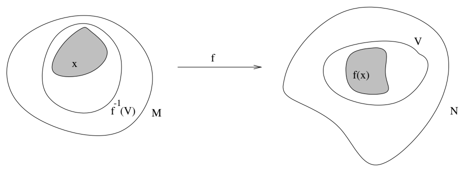
Proposition B.5.1 : *Seien $(M,\mathcal{U})$ und $(N,\mathcal{V})$ topologische Räume, $x_0 \in M$ und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist stetig in x_0.*

(2) *Wenn $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, dann ist $f^{-1}(V) = \{x \in M \mid f(x) \in V\} \in \mathcal{U}(x_0)$, d.h. Urbilder von Umgebungen von $f(x_0)$ sind Umgebungen von x_0.*

Beweis:

IDEE:



„(2)⇒(1)“: Wenn aus $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ folgt $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$, dann zeigt $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, daß f in x_0 stetig ist.

„(1)⇒(2)“: Umgekehrt, wenn f in x_0 stetig ist und $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $f(U) \subseteq V$. Also haben wir $U \subseteq f^{-1}(V)$, was $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$ zur Folge hat.

■

Proposition B.5.2 : *Seien $(M,\mathcal{U})$ und $(N,\mathcal{V})$ topologische Räume sowie $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist stetig.*

(2) *Wenn $V \subseteq N$ offen ist, dann ist $f^{-1}(V) \subseteq M$ offen.*

(3) *Wenn $V \subseteq N$ abgeschlossen ist, dann ist $f^{-1}(V) \subseteq M$ abgeschlossen.*

Beweis:

IDEE: Benütze Proposition B.5.1.

„(2)⇔(3)": Dies folgt sofort aus der Mengengleichheit

$$f^{-1}(N \setminus A) = M \setminus f^{-1}(A),$$

die für jede Teilmenge $A \subseteq N$ und ohne jede Voraussetzung an f gilt.

„(2)⇒(1)": Wenn $x \in M$ und $V \in \mathcal{V}(f(x))$, dann gilt $f(x) \in V^\circ$, d.h. $x \in f^{-1}(V^\circ)$, und V° ist offen. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(V^\circ)$ offen, also eine Umgebung von x. Damit ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$, also ist f nach Proposition B.5.1 stetig in x.

„(1)⇒(2)": Sei f stetig in jedem $x \in M$. Wenn $V \subseteq N$ offen ist, dann gilt für $x \in f^{-1}(V)$, daß $f(x) \in V$ ist und folglich ist $V \in \mathcal{V}(f(x))$. Wegen der Stetigkeit von f in x gibt es nach Definition ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$, also $U \subseteq f^{-1}(V)$. Damit ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$. Da $x \in f^{-1}(V)$ beliebig war, ist $f^{-1}(V)$ offen.

■

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von topologischen Räumen. Für eine Familie von Abbildungen $f_\alpha \colon X \to Y_\alpha$ nennt man die von

$$\{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \subseteq Y_\alpha \text{ offen}, \alpha \in A\}$$

erzeugte Topologie auf X die von $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ erzeugte **initiale** oder **schwache Topologie** auf X. Man nennt diese Topologie auch die von den f_α **induzierte Topologie** auf X.

Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von (als disjunkt betrachteten) Mengen, dann heißt

$$X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \{f \colon A \to \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha\}$$

das **mengentheoretische Produkt** der X_α. Dabei ist die $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ die *disjunkte* Vereinigung der X_α. Man schreibt die Elemente von X als $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, wenn $f(\alpha) = x_\alpha$.

Beispiel B.5.3 : Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von topologischen Räumen, dann heißt die von den Projektionen

$$\begin{array}{rcl} p_\beta \colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha & \to & X_\beta \\ (x_\alpha)_{\alpha \in A} & \mapsto & x_\beta \end{array}$$

auf $X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ erzeugte schwache Topologie auch die **Produkttopologie** auf X und der topologische Raum X heißt das **topologische Produkt** der X_α. (Übung: Man zeige, daß dies mit der Definition der Produkttopologie in Beispiel B.2.1 kompatibel ist.) ■

Wenn die Indexmenge A überabzählbar ist, dann hat die Produkttopologie keine abzählbare Basis und die Verwendung von Folgen in der Beschreibung der Konvergenz in so einem Produktraum reicht nicht mehr aus.

Eine Gruppe G, die zugleich ein topologischer Raum ist, heißt **topologische Gruppe**, wenn gilt:

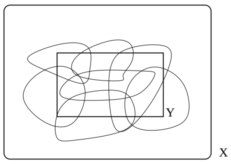
(a) $\mu \colon G \times G \to G, \mu(g,h) = gh$, ist stetig.

(b) $\iota \colon G \to G, \iota(g) = g^{-1}$, ist stetig.

B.6 Kompakte Mengen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X heißt eine **Überdeckung** von Y, wenn

$$Y \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F.$$



Eine Überdeckung $\mathcal{F}$ heißt **offen**, wenn alle $F \in \mathcal{F}$ offen in X sind. Die Menge Y heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{F}$ von Y eine endliche **Teilüberdeckung** hat, d.h. wenn es eine endliche Teilmenge $\mathcal{F}'$ von $\mathcal{F}$ gibt, die selbst eine Überdeckung von Y ist.

In einem topologischen Raum X sagt man, eine Familie $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von Teilmengen von X habe die **endliche Schnitteigenschaft**, wenn für alle endlichen Teilmengen $B \subseteq A$ gilt $\bigcap\limits_{\beta \in B} F_\beta \neq \emptyset$.

Satz B.6.1 : *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Dann gilt:*

(i) *Ist X kompakt und $Y \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch Y kompakt.*

(ii) *Ist X hausdorffsch und $Y \subseteq X$ kompakt, so ist Y abgeschlossen.*

(iii) *Ist X kompakt und $f\colon X \to X'$ stetig, so ist $f(X) \subseteq X'$ kompakt.*

(iv) *Ist X kompakt, X' hausdorffsch sowie $f\colon X \to X'$ stetig und bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon X' \to X$ stetig.*

Beweis:

Idee: Die Aussagen (i)-(iii) folgen direkt aus den Definitionen. Teil (iv) leitet man mithilfe von Proposition B.5.2 her.

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X mit $Y \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Dann gilt $X = \complement Y \cup \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ und davon gibt es eine endliche Teilüberdeckung, die dann auch eine endliche Teilüberdeckung von Y ist.

(ii) Zu $x \in X \setminus Y$ und $y \in Y$ gibt es Umgebungen U_y und V_y von x und y mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Dann gilt $Y \subseteq \bigcup\limits_{y \in Y} V_y$ und es existiert eine endliche Teilüberdeckung $V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}$ von Y. Setze

$$U := \bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i} \quad \text{und} \quad V := \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}.$$

Dann ist U eine Umgebung von x und $V \supseteq Y$. Außerdem gilt $U \cap V = \emptyset$. Dies zeigt $x \in U \subseteq X \setminus Y$ und damit ist $X \setminus Y$ offen.

(iii) Sei $f(X) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$, wobei die $V_\alpha \subseteq X'$ offen sind. Dann sind auch die $f^{-1}(V_\alpha)$ offen in X und es gilt $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha)$. Also existiert eine endliche Teilüberdeckung $X \subseteq f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{\alpha_k})$ so, daß $f(X) \subseteq V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_k}$ endliche Teilüberdeckung ist.

(iv) Wir zeigen (vgl. Proposition B.5.2)

$$F \subseteq X \text{ abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad f(F) \subseteq X' \text{ abgeschlossen.}$$

Wenn also $F \subseteq X$ abgeschlossen ist, so liefert (i), daß F kompakt ist. Nach (iii) ist dann auch $f(F)$ kompakt und (ii) zeigt schließlich, daß $f(F)$ abgeschlossen ist.

■

Wir haben im Beweis von Satz B.6.1(ii) stillschweigend das Auswahlaxiom benützt.

Lemma B.6.2 : (Alexander) *Seien $X \neq \emptyset$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *$(X, \mathcal{T})$ ist kompakt.*

(2) *Jede Überdeckung von X durch Elemente von $\mathcal{E}$ hat eine endliche Teilüberdeckung.*

Beweis:

IDEE: Die eine Richtung ist trivial, für die andere betrachte

$$\big\{\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \mid U_\alpha \text{ offen}, X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \text{ hat keine endliche Teilüberdeckung }\}.$$

„(1) ⇒ (2)“: Diese Richtung ist trivial.

„(2) ⇒ (1)“: $(X, \mathcal{T})$ sei nicht kompakt. Die Menge

$$\mathbb{A} = \big\{\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \mid U_\alpha \text{ offen}, X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \text{ hat keine endliche Teilüberdeckung }\}$$

ist durch die Inklusion partiell geordnet. Wir wollen das Zornsche Lemma anwenden und müssen dazu zeigen, daß A induktiv geordnet ist. Sei $\{\mathcal{A}_\beta\}_{\beta\in B}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathbb{A}$ und $U_1, \ldots, U_n \in \bigcup_{\beta\in B} \mathcal{A}_\beta$. Dann gibt es ein $\beta_0 \in B$ mit $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{A}_{\beta_0}$ und es gilt $X \neq \bigcup_{j=1}^{n} U_j$. Also ist auch $\bigcup_{\beta\in B} \mathcal{A}_\beta \in \mathbb{A}$, d.h. die total geordnete Teilmenge $\{\mathcal{A}_\beta\}_{\beta\in B}$ hat eine obere Schranke in $\mathbb{A}$.
Jetzt liefert das Zornsche Lemma ein maximales Element $\mathcal{A}$ von $\mathbb{A}$. Wenn eine offene Menge $U \subseteq X$ nicht in $\mathcal{A}$ liegt, dann hat wegen der Maximalität $\mathcal{A} \cup \{U\}$ eine endliche Teilüberdeckung von X. Wir setzen $\mathcal{B} := \mathcal{A} \cap \mathcal{E}$.

Behauptung: $\mathcal{B}$ ist eine Überdeckung von X.

Um das zu sehen, nehmen wir an, daß es ein $x \in X \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ gibt. Wähle $U \in \mathcal{A}$ mit $x \in U$, dann gibt es nach Proposition B.4.3 Elemente $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{E}$ mit $x \in \bigcap_{j=1}^{k} V_j \subseteq U$. Es folgt $V_j \notin \mathcal{A}$ für alle j, weil sonst $x \in V_j \in \mathcal{B}$ wäre. Also gibt es wegen der Maximalität von $\mathcal{A}$ zu $j = 1, \ldots, k$ jeweils endliche Vereinigungen W_j von Elementen in $\mathcal{A}$ mit $W_j \cup V_j = X$. Damit findet man

$$U \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{k} W_j\Big) \supseteq \Big(\bigcap_{j=1}^{k} V_j\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{k} W_j\Big) = X$$

so, daß $\mathcal{A}$ eine endliche Teilüberdeckung hat. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Abschließend stellt man noch fest, daß die Überdeckung $\mathcal{B}$ keine endliche Teilüberdeckung zuläßt, weil sonst auch $\mathcal{A}$ eine hätte, d.h. (2) gilt nicht.

■

Satz B.6.3 : (Tychonoff) *Sei* $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *eine Familie kompakter topologischer Räume. Dann ist das topologische Produkt* $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *kompakt.*

Beweis:

IDEE: Benütze das Lemma B.6.2 von Alexander für Überdeckungen durch Teilmengen der Form $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ mit offenen $U_\alpha \subseteq X_\alpha$.

Nach dem Lemma B.6.2 von Alexander genügt es zu zeigen, daß jede Überdeckung von X durch Teilmengen der Form $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ mit offenen $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ eine endliche Teilüberdeckung hat. Sei $\mathcal{A}$ eine solche Überdeckung und

$$\mathcal{A}_\alpha := \{U \subseteq X_\alpha \mid U \text{ offen und } p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{A}\}.$$

Behauptung: Es gibt ein $\beta \in A$ mit $X_\beta = \bigcup_{U\in\mathcal{A}_\beta} U$.

Wenn nicht, dann gibt es ein $x \in X$ mit $p_\alpha(x) \notin \bigcup_{U\in\mathcal{A}_\alpha} U$ für alle $\alpha \in A$. Aber dann gilt $x \notin \bigcup_{\substack{U\in\mathcal{A}_\alpha\\ \alpha\in A}} p_\alpha^{-1}(U) = \bigcup_{V\in\mathcal{A}} V$ und $\mathcal{A}$ wäre keine Überdeckung. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Jetzt nützen wir die Kompaktheit von X_β aus, um zu sehen, daß es $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{A}_\beta$ mit $X_\beta = \bigcup_{j=1}^k U_j$ gibt. Aber dann gilt $p_\beta^{-1}(U_j) \in \mathcal{A}$, also hat $\mathcal{A}$ wegen

$$X = p_\beta^{-1}(X_\beta) = p_\beta^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup p_\beta^{-1}(U_k)$$

eine endliche Teilüberdeckung. ■

Ein nichtleeres System $\mathcal{F}$ von Teilmengen einer Menge X heißt **Filter** auf X, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

F1) Jede Obermenge einer Menge aus $\mathcal{F}$ gehört zu $\mathcal{F}$.

F2) Der Durchschnitt von zwei Mengen aus $\mathcal{F}$ gehört zu $\mathcal{F}$.

F3) Die leere Menge gehört nicht zu $\mathcal{F}$.

Wegen F2) gehören sogar endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{F}$ wieder zu $\mathcal{F}$. Ist $\mathcal{G}$ ein weiterer Filter auf X, so heißt $\mathcal{G}$ **feiner** bzw. **gröber** als $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Ein Filter $\mathcal{U}$ heißt **Ultrafilter**, wenn es keinen von $\mathcal{U}$ verschiedenen Filter auf X gibt, der feiner als $\mathcal{U}$ ist.

Beispiel B.6.4 : Sei $x \in X$.

(a) Dann ist $\mathcal{U}(x)$, die Menge aller Umgebungen von x, ein Filter, der **Umgebungsfilter von** x.

(b) Dann ist die Menge aller Obermengen von $\{x\}$ ein Ultrafilter, der feiner als $\mathcal{U}(x)$ ist. Die Menge der Obermengen einer Teilmenge $A \subseteq X$ mit mindestens zwei Elementen ist ebenfalls ein Filter, aber kein Ultrafilter (wähle $x \in A$ und betrachte alle Mengen, die x enthalten).

■

Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt **konvergent** gegen $x \in X$, wenn $\mathcal{F}$ feiner als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ist. Man schreibt dafür auch kurz $\mathcal{F} \to x$ oder $x \in \lim \mathcal{F}$. Die Schreibweise $x = \lim \mathcal{F}$ bedeutet zusätzlich, daß $\mathcal{F}$ nur gegen x konvergiert.

Übung B.6.1 : Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und $x \in M$. Zeige:

(i) Die Menge aller Obermengen von Mengen der Form $\{x_m \mid m \geq n\}$ bildet einen Filter auf M, den sogenannten **Endstücksfilter** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen x, wenn ihr Endstücksfilter den Umgebungsfilter von x enthält.

■

Übung B.6.2 : Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $E \subseteq M$ und $x \in M$. Zeige, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $x \in \overline{E}$.

(2) Es gibt einen Filter $\mathcal{F}$, der E enthält und gegen x konvergiert.

■

Übung B.6.3 : Es sei M eine nichtleere Menge und $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ ein Netz in M. Setze

$$B_\alpha := \{x_\beta \in M \mid \beta \succsim \alpha\}$$

für $\alpha \in A$ und betrachte die Menge $\mathcal{F}(x_\alpha)$ aller Obermengen der Mengen B_α, d.h.

$$\mathcal{F}(x_\alpha) := \{F \subseteq M \mid \exists\, \alpha \in A\colon B_\alpha \subseteq F\}.$$

Zeige: $\mathcal{F}(x_\alpha)$ ist ein Filter auf M.
($\mathcal{F}(x_\alpha)$ heißt der **durch das Netz $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ erzeugte Filter.**) ■

Übung B.6.4 : Es sei M eine nichtleere Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf M. Zeige, dass es ein Netz $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ in M gibt mit $\mathcal{F}(x_\alpha) = \mathcal{F}$. ■

Übung B.6.5 : Es sei M ein topologischer Raum. Dann gilt:

(i) Konvergiert das Netz $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ gegen $x \in M$, dann konvergiert auch $\mathcal{F}(x_\alpha)$ gegen x.

(ii) Konvergiert der Filter $\mathcal{F}$ gegen $x \in M$ und ist $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ ein Netz mit $\mathcal{F}(x_\alpha) = \mathcal{F}$, dann konvergiert $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ gegen x.

■

Lemma B.6.5 : *In der Menge aller Filter auf X (geordnet durch Inklusion) besitzt jede Kette K eine obere Schranke.*

Beweis:

Idee: Für eine Kette K von Filtern auf X betrachte $\{A \subseteq X \mid (\exists \mathcal{F} \in K)\ A \in \mathcal{F}\}$.

Sei K eine Kette von Filtern auf X. Wir setzen

$$\mathcal{M} := \{A \subseteq X \mid (\exists \mathcal{F} \in K)\ A \in \mathcal{F}\}.$$

Um zu beweisen, daß $\mathcal{M}$ ein Filter ist, zeigen wir nur F2), der Rest sei dem Leser zur Übung überlassen. Sind F_1 und $F_2 \in \mathcal{M}$, so existieren $\mathcal{F}_i \in K$ mit $F_i \in \mathcal{F}_i$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Dann ist aber $F_i \in \mathcal{F}_2$ für $i = 1, 2$ und daher

$$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{M}.$$

■

Proposition B.6.6 : *Zu jedem Filter gibt es einen feineren Ultrafilter.*

Beweis:

IDEE: Dies folgt direkt aus dem Zornschen Lemma, angewendet auf die Menge aller Filter, die feiner sind als der vorgegebene, und Lemma B.6.5. ■

Lemma B.6.7 : *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und das Komplement der Teilmenge A von X nicht in $\mathcal{F}$ enthalten. Dann existiert ein Filter $\mathcal{G}$ auf X, der A enthält und feiner als $\mathcal{F}$ ist.*

Beweis:

IDEE: $G \in \mathcal{G}$, wenn es $F \in \mathcal{F}$ mit $F \cap A \subseteq G$ gibt.

Wir definieren $\mathcal{G}$ als das System aller Obermengen der Schnitte der Mengen aus $\mathcal{F}$ mit der Menge A und zeigen, daß $\mathcal{G}$ ein Filter ist. Enthielte $\mathcal{G}$ die leere Menge, so gäbe es in $\mathcal{F}$ eine Menge $F \subseteq X \setminus A$ und es wäre folglich $X \setminus A \in \mathcal{F}$, was wir ausgeschlossen haben. Die Eigenschaft F1) ist trivial. Sind $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, so existieren $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ mit $F_i \cap A \subseteq G_i$. Also ist

$$F_1 \cap F_2 \cap A \subseteq G_1 \cap G_2$$

und daher $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$.

■

Satz B.6.8 : *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge A von X entweder A oder $X \setminus A$ zu $\mathcal{F}$ gehört.*

Beweis:

IDEE: Mit Lemma B.6.7 folgt das direkt aus den Definitionen.

Sei zuerst $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Nach Lemma B.6.7 existiert ein feinerer Filter (der dann natürlich mit $\mathcal{F}$ übereinstimmt), der A enthält. Folglich ist $A \in \mathcal{F}$. Ist umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, der für jede Menge entweder die Menge selbst oder ihr Komplement enthält, so ist er maximal, denn man kann keine weitere Menge zu $\mathcal{F}$ hinzunehmen ohne F2) oder F3) zu verletzen. ■

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann bezeichnen wir mit $f(\mathcal{F})$ den Filter aller Obermengen der Bilder der Elemente von $\mathcal{F}$ (Übung: zeige, daß das wirklich ein Filter ist).

Korollar B.6.9 : *Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist $f(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf Y.*

Beweis:

IDEE: Mit Satz B.6.8 folgt das direkt aus den Definitionen.

Nach Satz B.6.8 ist zu zeigen, daß für jede Teilmenge $A \subseteq Y$ entweder A oder $Y \setminus A$ zu $f(\mathcal{F})$ gehört. Dies folgt aber sofort daraus, daß A genau dann zu $f(\mathcal{F})$ gehört, wenn $f^{-1}(A)$ zu $\mathcal{F}$ gehört und Satz B.6.8. ∎

Proposition B.6.10 : *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn das Bild $f\big(\mathcal{U}(x)\big)$ als Filter gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis:

IDEE: Dies folgt direkt aus den Definitionen.

Sei f stetig in x und V eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x und $f\big(f^{-1}(V)\big) \subseteq V$. Also ist $V \in f\big(\mathcal{U}(x)\big)$, und $f\big(\mathcal{U}(x)\big)$ konvergiert gegen $f(x)$. Sei dies umgekehrt der Fall, $O \subseteq Y$ offen und $x \in f^{-1}(O)$. Wir haben zu zeigen, daß $f^{-1}(O)$ eine Umgebung von x ist. Wegen unserer Annahme finden wir eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq O$, da O eine Umgebung von $f(x)$ ist. Damit ist aber auch $x \in U \subseteq f^{-1}(O)$.

∎

Satz B.6.11 : *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *X ist kompakt.*

(2) *In jeder Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit leerem Durchschnitt gibt es eine endliche Teilfamilie, deren Durchschnitt leer ist.*

(3) *Jeder Ultrafilter auf X ist konvergent.*

Beweis:

IDEE: „(1)⇔(2)⇒(3)“ folgt direkt aus den Definitionen. Für „(3) ⇒ (2)“ sucht man einen Ultrafilter, der zu einer Familie von abgeschlossenen Teilmengen mit endlicher Durchschnittseigenschaft die endlichen Durchschnitte enthält.

„(1) ⇔ (2)“: Erhält man durch Komplementbildung.

„(2) ⇒(3)“: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Wegen (2) und F2), F3) ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen in $\mathcal{F}$ nicht leer. Sei x in diesem Durchschnitt und U eine offene Umgebung von x. Dann ist $X \setminus U$ nicht in $\mathcal{F}$ und daher $U \in \mathcal{F}$ (vgl. Satz B.6.8). Also konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x.

„(3) ⇒ (2)“: Sei $\mathcal{K}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit leerem Durchschnitt und $\mathcal{F}$ die Menge der Obermengen endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{K}$. Angenommen, keiner dieser endlichen Durchschnitte ist leer. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, zu dem nach Proposition B.6.6 ein feinerer Ultrafilter $\mathcal{F}'$ existiert. Nach Voraussetzung konvergiert $\mathcal{F}'$ gegen ein $x \in X$. Sei $F \in \mathcal{K}$ und U eine Umgebung von x. Dann gehören F und U zu $\mathcal{F}'$, also ist $F \cap U \neq \emptyset$. Wir schließen daraus (vgl. Proposition B.3.3), daß $x \in F$ ist, im Widerspruch zu $\bigcap_{F \in \mathcal{K}} F = \emptyset$.

■

Bemerkung B.6.12 : Die Ergebnisse über Filter erlauben einen sehr ökonomischen Beweis der Satzes B.6.3 von Tychonoff: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ und $p_\alpha \colon X \to X_\alpha$ die kanonische Projektionen für $a \in A$. Nach Korollar B.6.9 sind die Bildfilter $p_\alpha(\mathcal{F})$ Ultrafilter auf den X_α. Nach Satz B.6.11 sind also die $p_\alpha(\mathcal{F})$ konvergent (wenn man die X_α als kompakt voraussetzt). Also findet man zu jedem $\alpha \in A$ ein $x_\alpha \in X_\alpha$ so, daß $p_\alpha(\mathcal{F})$ eine Umgebungsbasis für x_α in X_α enthält. Sei jetzt U eine Umgebung von $x := (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Dann enthält U eine Umgebung von x der Form $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ mit $U_\alpha = X_\alpha$ für alle $\alpha \in A \setminus B$, wobei $B \subseteq A$ endlich ist. Wähle $F_\beta \in F$ mit $p_\beta(F_\beta) \in U_\beta$ für alle $\beta \in B$. Dann ist $F := \bigcap_{\beta \in B} F_\beta \in \mathcal{F}$ und es gilt $F \subseteq U$. Also konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x und die Kompaktheit von X folgt aus Satz B.6.11. ■

B.7 Lokal kompakte Räume und Kompaktifizierungen

Ein hausdorffscher topologischer Raum X heißt **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

Lemma B.7.1 : *In einem lokal kompakten topologischen Raum X enthält jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine kompakte Umgebung.*

Beweis:

IDEE: Betrachte den Filter der Obermengen von kompakten Umgebungen von x und zeige, daß er gegen x konvergiert. Nutze dazu die Existenz eines dazugehörigen Ultrafilters aus, um einen Widerspruchsbeweis zu bauen.

Nach Voraussetzung ist die Menge $\mathcal{F}$ der Obermengen kompakter Umgebungen von x ein Filter in X. Es reicht zu zeigen, daß er gegen x konvergiert. Sei K eine feste kompakte Umgebung von x. Da es ausreicht, die Behauptung für den Filter $\mathcal{F} \cap K := \{F \cap K \mid F \in \mathcal{F}\}$ zu zeigen, können wir annehmen, daß X kompakt ist. Sei U eine beliebige offene Umgebung von x. Wir nehmen an, daß keine Menge von $\mathcal{F}$ in U enthalten ist. Dann ist $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F} \cap (X \setminus U)$ ein Filter. Sei $\mathcal{F}_1'$ ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}_1$ verfeinert (Proposition B.6.6). Der Ultrafilter $\mathcal{F}_1'$ konvergiert gegen einen Punkt $y \in X$ (Satz B.6.11). Wir führen dies zu einem Widerspruch. Zunächst ist $x = y$ unmöglich, da U nicht in $\mathcal{F}_1'$ enthalten sein kann. Also ist $y \neq x$ und wir finden disjunkte offene Umgebungen U_1 von x und U_2 von y. Dann ist $X \setminus U_2$ nach Satz B.6.1 eine kompakte Umgebung von x und somit ist die Menge $(X \setminus U_2) \setminus U = X \setminus (U \cup U_2)$ in $\mathcal{F}_1'$ enthalten. Wegen $U_2 \in \mathcal{F}_1'$ liefert dies einen Widerspruch. ■

Lemma B.7.2 : *Sei X lokal kompakt, $K \subseteq X$ kompakt und $U \supseteq K$ offen. Dann existiert eine kompakte Menge $V \subseteq X$ mit*

$$K \subseteq V^\circ \subseteq V \subseteq U.$$

Beweis:

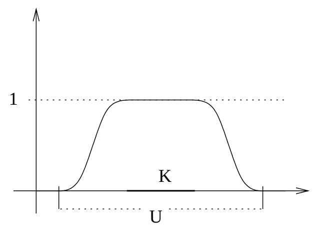
IDEE: Dies folgt aus Lemma B.7.1.

Zu jedem Punkt von $x \in K$ wählen wir eine kompakte Umgebung $V_x \subseteq U$ (Lemma B.7.1). Dann existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$, so daß $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}^\circ$. Wir setzen $V := \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \subseteq U$. ■

Sei M ein topologischer Raum. Der **Träger** supp (f) einer stetigen Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, auf deren Komplement f verschwindet.

Lemma B.7.3 : (Lemma von Urysohn für lokal kompakte Räume) *Sei X lokal kompakt, $K \subseteq X$ kompakt und $U \supseteq K$ offen. Dann existiert eine stetige Funktion h mit kompaktem Träger auf X mit*

$$h|_K = 1 \quad \textit{und} \quad h|_{X\setminus U} = 0.$$



Beweis:

IDEE: Konstruiere mit Lemma B.7.2 induktiv eine Folge von offenen relativ kompakten Mengen $U(\frac{k}{2^n})$ mit $\overline{U(\frac{k}{2^n})} \subseteq U(\frac{k+1}{2^n})$ für $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, ergänze dies durch $U(r) := \bigcup_{\frac{k}{2^n} \leq r} U(\frac{k}{2^n})$ und setze $f(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x \in U(t)\}$.

Wir setzen $U(1) := U$. Mit Lemma B.7.2 finden wir eine offene relativ kompakte Menge $U(0)$ mit $K \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1)$. Nochmalige Anwendung dieses Lemmas führt zu einer Menge $U(\frac{1}{2})$ mit

$$\overline{U(0)} \subseteq U(\tfrac{1}{2}) \subseteq \overline{U(\tfrac{1}{2})} \subseteq U(1).$$

Mit Induktion über n finden wir für jede rationale Zahl der Gestalt $\frac{k}{2^n} \in [0,1]$ eine offene, relativ kompakte Menge $U(\frac{k}{2^n})$ mit

$$\overline{U(r)} \subseteq U(r')$$

für $r, r' \in \{\frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, k = 0, \ldots 2^n\}$ und $r < r'$. Dabei gehen wir folgendermaßen von $n-1$ zu n über: Für k gerade ist mit Induktion $U(\frac{k}{2^n})$ schon bekannt. Sei k ungerade: Mit Lemma B.7.2 finden wir eine offene relativ kompakte Menge $U(\frac{k}{2^n})$ mit

$$\overline{U(\tfrac{k-1}{2^n})} \subset U(\tfrac{k}{2^n}) \subset \overline{U(\tfrac{k}{2^n})} \subset U(\tfrac{k+1}{2^n}).$$

Für eine beliebige reelle Zahl $r \in [0,1]$ setzen wir nun

$$U(r) := \bigcup_{\frac{k}{2^n} \leq r} U(\frac{k}{2^n}).$$

Für $r = \frac{k}{2^n}$ ist dies konsistent mit der bisherigen Definition. Für $t < t'$ finden wir nun $r = \frac{k}{2^n}$ und $r' = \frac{k+1}{2^n}$ mit $t < r < r' < t'$ und daher ist auch in diesem Fall

$$\overline{U(t)} \subseteq \overline{U(r)} \subseteq U(r') \subseteq U(t').$$

Wir setzen noch $U(t) = \emptyset$ für $t < 0$ und $U(t) = X$ für $t > 1$. Wir definieren

$$f(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x \in U(t)\}.$$

Dann ist $f(K) \subseteq \{0\}$ und $f(X \setminus U) \subseteq \{1\}$.

Wir zeigen, daß f stetig ist. Sei dazu $x_0 \in X$, $f(x_0) = t_0$ und $\epsilon > 0$. Wir setzen $V := U(t_0+\epsilon)\setminus\overline{U(t_0 - \epsilon)}$. Das ist eine Umgebung von x_0. Aus $x \in V \subseteq U(t_0+\epsilon)$ folgt $f(x) \leq t_0+\epsilon$.

Ist $f(x) < t_0 - \epsilon$, so folgt $x \in U(t_0 - \epsilon) \subseteq \overline{U(t_0 - \epsilon)}$, ein Widerspruch. Also ist $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ auf V und damit ist f stetig. Wir setzen $h := 1 - f$.

Damit ist alles gezeigt bis auf die Kompaktheit von $\operatorname{supp}(h)$. Wenn wir aber die Konstruktion für das V° aus Lemma B.7.2 statt für U durchführen, gilt $\operatorname{supp}(h) \subseteq V$ und $\operatorname{supp}(h)$ ist als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge nach Satz B.6.1 kompakt. ∎

Anhang C

Spezielle Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns speziell mit dem Lebesgue-Maß. Als erstes betrachten wir Regularitätseigenschaften, die im Verlauf nützliche Anwendungen haben. Insbesondere benötigen wir die Aussage, daß das Lebesgue-Maß einer Borelmenge E als das Infimum aller Maße der offenen Mengen, die E enthalten, geschrieben werden kann. Damit läßt sich dann das Lebesgue-Maß aus Kapitel **??** *als die Vervollständigung des Lebesgue-Maßes aus Kapitel 2 identifizieren. Das eigentliche Hauptergebnis dieses Kapitels ist der Transformationssatz, der eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel ist und beschreibt, wie sich Integrale unter stetig differenzierbaren Abbildungen verhalten.*

C.1 Regularität

Für Funktionen auf $\mathbb{R}$ betrachten wir hier den Integrierbarkeitsbegriff, wie er in der Integralrechnung einer reellen Variablen entwickelt wurde.

Lemma C.1.1 : *Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, und sei χ_E integrierbar. Dann ist E meßbar im Sinne von* Übung **??** *und es gilt*

$$\int \chi_E = \inf\{\lambda^1(U) \mid E \subseteq U,\ U \text{ offen in } \mathbb{R}\}.$$

Beweis:

IDEE: Mit Lemma **??** findet man eine Entwicklung χ_E als Reihe von Stufenfunktionen, deren Betragsintegrale sich zu wenig mehr als $\int \chi_E$ aufsummieren. Zerlege die Stufenfunktionen in Linearkombinationen von Funktionen der Form $\chi_{[a_k,b_k[}$. Dann wählt man $\widetilde{\alpha}_k < \alpha_k$ so nah an α_k, daß $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \lambda^1(]\widetilde{a}_k, b_k[) < \int \chi_E + \epsilon$. Mit $U_m = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \chi_{]\widetilde{a}_k,b_k[}(x) > \frac{1}{1+\epsilon}\}$ findet man dann $E \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$ und $\lambda^1(\bigcup_{m=1}^{\infty} U_m) \leq (1+\epsilon)(\epsilon + \int \chi_E)$.

Da χ_E integrierbar ist, gibt es nach Lemma **??** zu $\epsilon > 0$ eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $\chi_E \simeq \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k| < \int \chi_E + \frac{\epsilon}{2}.$$

Indem wir jedes f_k durch die endlich vielen Vielfachen von Elementarfunktionen ersetzen, die in die kanonische Darstellung von f_k eingehen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad f_k = \alpha_k \chi_{[a_k,b_k[}.$$

Wähle jetzt $\widetilde{a}_k < a_k$ so, daß
$$\sum_k (a_k - \widetilde{a}_k)|\alpha_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$
Dann gilt
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \lambda^1(]\widetilde{a}_k, b_k[) < \int \chi_E + \epsilon.$$
Setze jetzt
$$U_m = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \chi_{]\widetilde{a}_k, b_k[}(x) > \frac{1}{1+\epsilon}\}$$
Dann ist U_m offen und es gilt $U_{m+1} \subseteq U_m$.

Sei $x \in E$. Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_{[a_k, b_k[}(x)$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie gegen 1. Also ist wegen $\chi_{[a_k,b_k[} \leq \chi_{]\widetilde{a}_k, b_k[}$ *jedes* $x \in E$ in einem U_m enthalten, d.h.
$$E \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m =: U.$$
Also finden wir mit
$$\lambda^1(U_m) \leq (1+\epsilon) \int \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \chi_{]\widetilde{a}_k, b_k[} \leq (1+\epsilon)(\epsilon + \int \chi_E),$$
daß
$$\lambda^1(U) \leq (1+\epsilon)(\epsilon + \int \chi_E).$$
■

Betrachte jetzt den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda^n)$.

Satz C.1.2 : *Sei $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Es gilt*

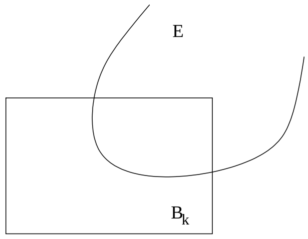
(i) $\lambda^n(E) = \inf\{\lambda^n(U) \mid E \subseteq U,\ U$ *offen in* $\mathbb{R}^n\}$.

(ii) $\lambda^n(E) = \sup\{\lambda^n(K) \mid K \subseteq E,\ K$ *kompakt in* $\mathbb{R}^n\}$.

Beweis:

IDEE: Als erstes zeigt man, daß es ausreicht, beschränkte Mengen zu betrachten. Dazu schneidet man mit einer wachsenden Familie $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von offenen Würfeln und approximiere darin so gut, daß die Fehler sich immer noch zu einer kleinen Zahl summieren (geometrische Reihe). $\mathfrak{C} := \{F \subseteq B_k \mid \lambda^n(F) = \inf\{\lambda^n(U) \mid F \subseteq U \subseteq B_k$ offen$\}$ die Eigenschaften (a) und (b) aus Lemma 1.1.6 hat. Dieses Lemma liefert dann (i). Den Teil (ii) beweist man zuerst für Mengen, die abgeschlossen und beschränkt sind (dann folgt die Behauptung trivialerweise aus dem Satz **??** von Heine–Borel), dann für beliebige beschränkte Mengen (abschließen und (i) auf die Differenz Menge–Abschluß anwenden; das K ist dann der Abschluß ohne die gefundene offen Menge) und schließlich für beliebige Mengen (mit $B_{k+1} \setminus B_k$ schneiden, die bisherigen Ergebnisse anwenden und wieder die geometrische Reihe benützen).

(i) Wir zeigen zunächst, daß wir o.B.d.A. annehmen können, daß E beschränkt ist und daher endliches Maß hat. Betrachte dazu die Mengen
$$B_k := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (\forall j = 1, \ldots, n)\ |x_j| < k\}.$$



Wenn jetzt $U_k \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist mit $E \cap B_k \subseteq U_k$, und

$$\lambda^n(U_k) - \lambda^n(E \cap B_k) < \frac{1}{2^k},$$

dann gilt $E \subseteq \bigcup_{j=k}^{\infty} U_j =: U_k'$, und es folgt

$$\lambda^n(U_k' \setminus E) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda^n(U_k \setminus (E \cap B_k)) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Dies zeigt aber die Behauptung.
Sei also $E \subseteq B_k$. Wir zeigen, daß die Familie

$$\mathfrak{C} := \{F \subseteq B_k \mid \lambda^n(F) = \inf\{\lambda^n(U) \mid F \subseteq U \subseteq B_k \text{ offen}\}$$

die Eigenschaften (a) und (b) aus Lemma 1.1.6 hat.
Zu (a): Wenn $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$ mit $F_j \in \mathfrak{C}$ und $F := \bigcup_j F_j$, dann wähle $F_j \subseteq U_j \subseteq B_k$ mit

$$\lambda^n(U_j \setminus F_j) \leq \frac{1}{2^j}.$$

Mit $U_m' := \bigcup_{j=m}^{\infty} U_j$ finden wir $F \subseteq U_m'$ und

$$\lambda^n(U_m' \setminus F) \leq \sum_{j=m}^{\infty} \lambda^n(U_j \setminus F_j) \leq \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Dies zeigt $F \in \mathfrak{C}$.
Zu (b): Wenn $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ mit $F_j \in \mathcal{C}$ und $F := \bigcap_j F_j$, dann wähle wieder $F_j \subseteq U_j \subseteq B_k$ mit

$$\lambda^n(U_j \setminus F_j) \leq \frac{1}{j}.$$

Mit $U_m' := \bigcap_{j=1}^{m} U_j$ finden wir $F \subseteq U_m'$ und

$$\lambda^n(U_m' \setminus F) = \lambda^n(U_m' \setminus F_m) + \lambda^n(F_m \setminus F) \leq \lambda^n(U_m \setminus F_m) + \lambda^n(F_m \setminus F).$$

Um zu zeigen, daß $F \in \mathfrak{C}$ genügt es also, zu zeigen, daß

$$\lim_{m\to\infty} \lambda^n(F_m \setminus F) = 0.$$

Wegen

$$\lambda^n(B_k \setminus F_m) = \lambda^n(B_k) - \lambda^n(F_m)$$

und

$$\lambda^n(B_k \setminus F) = \lambda^n(B_k) - \lambda^n(F)$$

folgt dies aber aus Satz 2.2.4, angewendet auf die monoton steigende Folge der $\chi_{B_k \setminus F_m}$ mit Grenzwert $\chi_{B_k \setminus F}$.
Als nächstes stellen wir fest, daß Lemma 1.1.6 tatsächlich auf $\mathfrak{C}$ anwendbar ist: Nach Lemma C.1.1 sind alle meßbaren Quader Elemente von $\mathfrak{C}$, weil die Maße der Quader von oben durch Maße offener Quader approximiert werden können. Nach Übung 1.1.1 besteht die von den meßbaren Quadern in B_k erzeugte Algebra aus endlichen disjunkten Vereinigungen solcher Quader, ist also auch in $\mathfrak{C}$ enthalten. Jetzt liefert Lemma 1.1.6, daß $\mathfrak{C}$ alle meßbaren Mengen in B_k, also auch E enthält. Dies beweist (i).

(ii) Wir unterscheiden mehrere Fälle: Wenn E beschränkt und abgeschlossen ist, dann ist E kompakt nach dem Satz **??** von Heine–Borel und die Behauptung ist trivial.

Wenn E beschränkt ist, aber nicht abgeschlossen, dann ist der Abschluß $\overline{E}$ von E ebenso wie $\overline{E} \setminus E$ kompakt und meßbar. Nach (i) findet man zu $\epsilon > 0$ ein offenes $U \supseteq \overline{E} \setminus E$ mit

$$\lambda^n(U) \leq \lambda^n(\overline{E} \setminus E) + \epsilon.$$

Für $K := \overline{E} \setminus U \subseteq E$ gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda^n(K) &= \lambda^n(E) - \lambda^n(E \cap U) \\ &= \lambda^n(E) - (\lambda^n(U) - \lambda^n(U \setminus E)) \\ &\geq \lambda^n(E) - \lambda^n(U) + \lambda^n(\overline{E} \setminus E) \\ &\geq \lambda^n(E) - \epsilon. \end{aligned}$$

Schließlich sei E unbeschränkt. Setze

$$E_k := E \cap (B_{k+1}/B_k).$$

Dann gibt es $K_k \subseteq E_k$, kompakt mit

$$\lambda^n(K_k) \geq \lambda^n(E_k) - \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Dann ist $\widetilde{K}_k := \bigcup_{j=1}^k K_j \subseteq E$ kompakt mit

$$\lambda^n(\widetilde{K}_k) = \sum_{j=1}^k \lambda^n(K_j) \geq \sum_{j=1}^k \lambda^n(E_j) - 2\epsilon = \lambda^n(\bigcup_{j=1}^k E_j) - 2\epsilon.$$

Wegen $\lambda(E) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda^n(\bigcup_{j=1}^k E_j)$ folgt die Behauptung.

■

Die in Satz C.1.2 beschriebenen Eigenschaften des Lebesgue–Maßes lassen sich allgemein für Maße auf lokalkompakten Räumen (mit der Borel-σ-Algebra) formulieren:

Sei $(M,\mathcal{U})$ ein topologischer Hausdorff-Raum, der **lokalkompakt** ist, d.h., für den jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat. Ein Maß $\mu\colon \mathfrak{B}_M \to [0,\infty]$ heißt **regulär**, wenn für jedes $E \in \mathcal{B}_M$ gilt:

(i) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E \subseteq U, U \text{ offen in } M\}$.

(ii) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ kompakt in } M\}$.

C.2 Charakterisierung des Lebesgue-Maßes

Wir zeigen, daß die Integrierbarkeit einer Funktion auf $\mathbb{R}$ gleichbedeutend ist mit der Integrierbarkeit bzgl. der in Übung 2.2.1 behandelten Vervollständigung $(\lambda^1)^*$ des Lebesgue-Maßes λ^1.

Wir beginnen mit dem Vergleich der beiden verschiedenen Begriffe von Nullmengen. Dabei schreiben wir $\int f$ für das Integral im Sinne der Integralrechnung einer Variablen und $\int f d(\lambda^1)^*$ für das Integral bzgl. des Maßes.

Proposition C.2.1 : *Für $N \subseteq \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *N ist eine Nullmenge (vgl. Proposition **??**).*

(2) *Es gibt eine λ^1-Nullmenge $\widetilde{N} \subseteq \mathbb{R}$ mit $N \subseteq \widetilde{N}$.*

(3) *N ist eine $(\lambda^1)^*$-Nullmenge.*

Beweis:

IDEE: Um die wesentliche Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)“ (die Umkehrung folgt aus Proposition **??**) zu zeigen, approximiert man Nullmengen via Lemma C.1.1 durch offene Mengen vom Maß $\frac{1}{n}$ und schneidet diese dann.

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Wenn N eine Nullmenge im Sinne von Proposition **??** ist, dann ist χ_N integrierbar, und es gilt $\int \chi_N = 0$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß N beschränkt ist (andernfalls betrachte $N \cap]-k, k[$ für alle $k \in \mathbb{N}$). Jetzt zeigt Lemma C.1.1, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein offenes U_ϵ mit $N \subseteq U_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$ und

$$\lambda^1(U_\epsilon) \leq \int \chi_N + \epsilon = \epsilon$$

gibt. Wenn man jetzt $\widetilde{N} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$ setzt, dann gilt $\widetilde{N} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda^1(\widetilde{N}) \leq \lambda^1(U_{\frac{1}{n}}) \leq \frac{1}{n}.$$

Damit ist $\widetilde{N}$ aber eine λ^1-Nullmenge, die N enthält.

„(2) $\Leftrightarrow$ (3)“: Dies folgt direkt aus der Definition der Vervollständigung.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Wegen $0 = \lambda^1(\widetilde{N}) = \int \chi_{\widetilde{N}}$ ist $\widetilde{N}$ eine Nullmenge im Sinne von Proposition **??**. Dann zeigt diese Proposition, daß N ebenfalls eine Nullmenge im Sinne von Abschnitt **??** ist.

■

Beachte, daß Proposition C.2.1 insbesondere zeigt, daß (f.ü.) im Sinne von (**??**) dasselbe ist wie ($(\lambda^1)^*$-f.ü.).

Satz C.2.2 : *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist integrierbar (im Sinne von (**??**) und (**??**)).*

(2) *f ist $(\lambda^1)^*$-integrierbar.*

Wenn die beiden Aussagen zutreffen, dann stimmen auch die beiden Integralbegriffe überein.

Beweis:

IDEE: Beide Beweisrichtungen beruhen wesentlich auf der Möglichkeit, die Funktionen durch Elementarfunktionen bzw. Stufenfunktionen zu approximieren. Dann wendet man jeweils den Satz von der monotonen Konvergenz an.

Wir nehmen zunächst an, daß (2) gilt. Nach (2.1) sind dann auch $f^\pm$ bzgl. $(\lambda^1)^*$ integrierbar, und wir können annehmen, daß $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$. Nach Lemma 2.2.3 gibt es eine monoton steigende Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nichtnegativer einfacher Funktionen, die kleiner gleich f sind und punktweise gegen f konvergieren. Die ϕ_n sind nach Beispiel 2.1.2 alle lokal integrierbar (vgl. Proposition **??**), und es gilt

$$\int \phi_n = \int \phi_n d\lambda^1 = \int \phi_n d(\lambda^1)^*.$$

Wegen $\int \phi_n d(\lambda^1)^* \leq \int f d(\lambda^1)^*$ zeigt der Satz 2.2.4 von der monotonen Konvergenz, daß es eine integrierbare Funktion $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, gegen die $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (f.ü.) konvergiert mit

$$\int \widetilde{f} = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n.$$

Dann gilt auch $f = \widetilde{f}$ (f.ü.) und somit ist $f - \widetilde{f}$ eine Nullfunktion (d.h. $\int |f| = 0$). Jetzt zeigt Proposition **??**, daß f im integrierbar ist mit

$$\int f = \int \widetilde{f} = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n d(\lambda^1)^* = \int f d(\lambda^1)^*.$$

Sei jetzt umgekehrt f integrierbar im Sinne von (**??**) und (**??**). Weiter sei $f \simeq \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ für Stufenfunktionen f_j. Mit Beispiel 2.1.2 ist klar, daß Stufenfunktionen $(\lambda^1)^*$-integrierbar sind und die beiden Integralbegriffe für solche Funktionen zusammenfallen. Setze

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} |f_j|$$

und beachte, daß $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von $(\lambda^1)^*$-integrierbaren Funktionen ist, für die gilt

$$\int s_n d(\lambda^1)^* = \int s_n \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| < \infty.$$

Dann sagt der Satz 2.2.4 von der Monotonen Konvergenz, daß $s := \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$ eine $(\lambda^1)^*$-integrierbare Funktion ist, die

$$\int s\, d(\lambda^1)^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int s_n d(\lambda^1)^* < \infty$$

erfüllt. Setze jetzt $t_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$. Dann ist t_n eine $(\lambda^1)^*$-integrierbare Funktion, und es gilt $t_n \leq s$. Weil t_n nach Proposition **??** (f.ü.) gegen f konvergiert, zeigt der Satz 2.4.4 von der Dominierten Konvergenz, daß f $(\lambda^1)^*$-integrierbar ist mit

$$\int f d(\lambda^1)^* = \lim_{n\to\infty} \int t_n d(\lambda^1)^* = \lim_{n\to\infty} \int t_n = \int f.$$

■

Korollar C.2.3 : *Sei $E \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *E ist meßbar im Sinne von Abschnitt* **??**.

(2) *E ist $(\lambda^1)^*$-meßbar.*

Beweis:

Wende Satz C.2.2 auf die charakteristischen Funktionen $\chi_{E\cap[-n,n]}$ an. ■

Dieses Korollar zeigt zusammen mit Satz C.2.2, daß die Vervollständigung $(\lambda^1)^*$ von λ^1 tatsächlich nichts anderes ist als das Lebesgue-Maß aus Abschnitt **??**.

Übung C.2.1 : Projekt: Der Satz von Vitali: „Es gibt kein translationsinvariantes Maß auf der Potenzmenge von $\mathbb{R}$“. ■

C.3 Affine Transformationen

Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda^n)$. Wir untersuchen das Verhalten des Lebesgue-Maßes und von Lebesgue-Integralen unter affinen Transformationen des Raums. Wir erinnern daran, daß jede stetige Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ meßbar ist. Insbesondere sind mit E alle verschobenen Mengen $E + x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y - x \in E\}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ meßbar.

Proposition C.3.1 : (Translationsinvarianz) *Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$(\forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \quad \lambda^n(E + x) = \lambda^n(E).$$

Beweis:

IDEE: Man weist die Gleichheit für Quader nach und argumentiert dann mit Satz 2.1.3.

Wir definieren eine Abbildung

$$\mu\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty], E \mapsto \lambda^n(E + x).$$

Da die Verschiebung von Mengen mit Vereinigungen vertauscht:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j + x) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) + x,$$

verifiziert man sofort, daß μ ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ ist. Wenn $E = A_1 \times \ldots \times A_n$ ein meßbarer Quader ist, gilt

$$E + x = (A_1 + x_1) \times \ldots \times (A_n + x_n)$$

sowie

$$\mu(E) = \lambda^1(A_1 + x_1) \cdot \ldots \cdot \lambda^1(A_n + x_n) \quad \text{und} \quad \lambda^n(E) = \lambda^1(A_1) \cdot \ldots \cdot \lambda^1(A_n).$$

Da die von den meßbaren Quadern erzeugte Algebra aus disjunkten Vereinigungen von Quadern besteht, erhalten wir mit Satz 2.1.3 die Gleichheit $\lambda^n = \mu$, wenn wir die Behauptung für $n = 1$ zeigen können.

Sei also $n = 1$. Wenn E ein Intervall oder eine endliche Vereinigung disjunkter Intervalle ist, ist die Gleichheit $\mu(E) = \lambda^1(E)$ offensichtlich. Also folgt die Behauptung wieder mit Satz 2.1.3, diesmal angewendet auf die von den Intervallen erzeugte Algebra, die offensichtlich aus endlichen Vereinigungen disjunkter Intervalle besteht. ■

Bemerkung C.3.2 : Wenn $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ und $0 \neq c \in \mathbb{R}$, dann zeigen dieselben Argumente wie im Beweis von Proposition C.3.1, daß für $cE = \{cx \in \mathbb{R} \mid x \in E\}$ gilt

$$\lambda^1(cE) = |c|\lambda^1(E),$$

weil dies für Intervalle so ist. Also gilt die Formel

$$\int f(x) d\lambda^1(x) = |c| \int f(cx) d\lambda^1(x)$$

für alle einfachen Funktionen:

$$\int \chi_{cE}(x) d\lambda^1(x) = \lambda^1(cE) = |c|\lambda^1(E) = |c| \int \chi_E(x) d\lambda^1(x) = |c| \int \chi_{cE}(cx) d\lambda^1(x).$$

Durch Supremumsbildung folgt sie dann auch für beliebige Funktionen in $\mathcal{L}^+(\mathbb{R})$ und schließlich für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. ■

Satz C.3.3 : *Sei $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar.*

(i) *Wenn $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ meßbar ist, dann ist auch $f \circ T$ meßbar.*

(ii) *Wenn $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ oder $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, dann gilt*

$$\int f d\lambda^n = |\det T| \int (f \circ T) d\lambda^n.$$

(iii) *Wenn $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, dann gilt $T(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ und*

$$\lambda^n(T(E)) = |\det T| \lambda^n(E).$$

Beweis:

Idee: Wesentlich ist die Formel in (ii). Man beweist sie mit dem Satz 2.3.5 von Fubini für Streckungen, Scherungen und Permutationen und nützt dann aus, daß sich jede invertierbare lineare Abbildung als Produkt von solchen schreiben läßt.

Die erste Aussage folgt mit Beispiel 1.2.1 und Bemerkung 1.2.2 sofort aus der Stetigkeit von T. Die letzte Aussage folgt aus der zweiten mit $f = \chi_E$.

Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil sowie anschließende Aufspaltung in positiven und negativen Teil können wir o.B.d.A. annehmen, daß $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$.

Wenn die Gleichung aus (ii) für zwei invertierbare lineare Abbildungen $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gilt, dann auch für $T_1 \circ T_2$:

$$\begin{aligned} \int f &= |\det T_1| \int f \circ T_1 \\ &= |\det T_1||\det T_2| \int (f \circ T_1) \circ T_2 \\ &= |\det(T_1 \circ T_2)| \int f \circ (T_1 \circ T_2) \end{aligned}$$

Der Gaußalgorithmus zeigt, daß sich jede invertierbare lineare Selbstabbildung von $\mathbb{R}^n$ als ein Produkt von Abbildungen der Form

$$M(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, cx_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

mit $c \neq 0$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ (Multiplikation),

$$S(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + dx_k, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

mit $d \in \mathbb{R}$ und $j \neq k \in \{1, \ldots, n\}$ (Scherung) sowie

$$\begin{aligned} & P(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ = \quad & (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

mit $j \neq k \in \{1, \ldots, n\}$ (Permutation) geschrieben werden kann. Es genügt also, die Behauptung für diese drei Transformationen zu beweisen.

Wir beginnen mit M. Nach dem Satz 2.3.5 von Fubini können wir zuerst nach der j-ten Variablen integrieren:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \\ = \quad & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) d\lambda^1(x_j) \right) d\lambda^{n-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \hat{x}_j, x_{j+1}, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

wobei $\hat{x}_j$ bedeutet, daß diese Komponente weggelassen wird. Bemerkung C.3.2 zeigt, daß

$$\int_{\mathbb{R}} (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) d\lambda^1(x_j) = |c| \int_{\mathbb{R}} (x_1, \ldots, x_{j-1}, cx_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) d\lambda^1(x_j),$$

was

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = |c| \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, cx_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) d\lambda^n(x_1, \ldots, x_n)$$

zur Folge hat. Wegen $\det M = c$ zeigt dies die Behauptung für M.

Für S geht man genauso vor, benützt aber statt Bemerkung C.3.2 die Proposition C.3.1, um

$$\int_{\mathbb{R}} (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) d\lambda^1(x_j) = \int_{\mathbb{R}} (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1} + dx_k, \ldots, x_n) d\lambda^1(x_j)$$

zu zeigen, und die Relation $\det S = 1$.

Die Behauptung für P folgt wegen $\det P = \pm 1$ sofort aus Satz 2.3.5, weil es gleichgültig ist, ob man zuerst über die Variable x_j oder über die Variable x_k integriert. ∎

Übung C.3.1 : Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Berechne

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx.$$

∎

Übung C.3.2 : Seien $a, b, c > 0$. Berechne das Volumen des Ellipsoids

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

∎

Übung C.3.3 : Seien $a_1, \ldots, a_n$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Unter dem von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannten **Parallelepiped** versteht man die Menge

$$P := \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j : 0 \leq \lambda_j \leq 1 \text{ für } j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Zeige:

$$\lambda^n(P) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|.$$

∎

C.4 Die Transformationsformel für Diffeomorphismen

In diesem Abschnitt beweisen wir den eigentlichen Transformationssatz. Er behandelt folgende Situation: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine offene Menge, und $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung, deren Bild $\Phi(\Omega)$ ebenfalls offen ist. Außerdem soll die Umkehrabbildung $\Psi\colon \Phi(\Omega) \to \Omega$ von $\Phi\colon \Omega \to \Phi(\Omega)$ existieren und selbst stetig differenzierbar sein (eine solche Abbildung nennt man einen **Diffeomorphismus**). Angestrebt wird die **Transformationsformel**

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda^n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) |J_\Phi| \, d\lambda^n,$$

wobei J_Φ die Funktionaldeterminante von Φ ist. Diese Formel reduziert sich für $n = 1$ und stetiges f auf die Substitutionsregel (**??**).

Die Grundidee für den Beweis ist, Φ lokal durch sein Taylorpolynom erster Ordnung, d.h. eine affine Transformation, zu approximieren und die Resultate von Abschnitt C.3 zu benützen. Die Strategie ist, zunächst die Ungleichung

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda^n \leq \int_\Omega (f \circ \Phi)|J_\Phi| \, d\lambda^n$$

zu zeigen und diese dann auch für Ψ statt Φ zu verwenden. Genauer: Betrachte zunächst die konstante Funktion 1. Dann wird die Ungleichung zu

$$\lambda^n(\Phi(\Omega)) \leq \int_\Omega |J_\Phi|.$$

Wenn man so eine Ungleichung für jedes meßbare E statt Ω hat, läßt sich die gesuchte Ungleichung mit Approximation von f durch einfache Funktionen gewinnnen.

Proposition C.4.1 : *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist U die Vereinigung einer abzählbaren Familie $Q_1, Q_2, \ldots$ von meßbaren Quadern Q_j der Form*

$$(*) \qquad [a_1, a_1 + h] \times \ldots \times [a_n, a_n + h]$$

mit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, h > 0$ und

$$(\forall j \neq k \in \mathbb{N}) \quad Q_j^o \cap Q_k^o = \emptyset.$$

Beweis:

IDEE: Zerteile den Raum in Würfel, die durch benachbarte Punkte des Gitters $\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}^n$ aufgespannt werden. Suche diejenigen Würfel heraus, die in U liegen, verfeinere dann durch Vergrößerung von k und wähle wieder die Würfel, die nicht in den vorherigen Würfeln, aber noch in U liegen. Für $k \to \infty$ findet man alle Punkte von U.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{D}_k$ die Familie der Quader von der Form $(*)$ mit

$$a_i \in \frac{1}{2^k}\mathbb{Z}^n \text{ und } h = \frac{1}{2^k}.$$

Für $Q \neq Q' \in \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{D}_k$ mit $Q^o \cap (Q')^o \neq \emptyset$ gilt entweder $Q \subseteq Q'$ oder $Q' \subseteq Q$: Wenn nämlich $Q \in \mathcal{D}_k$, $Q' \in \mathcal{D}_{k'}$ und $Q \not\subseteq Q'$, dann gibt es eine Ecke a von Q', die in Q^o liegt. Also liegt $a \in \frac{1}{2^{k'}}\mathbb{Z}$ nicht in dem Gitter $\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}$, und daher gilt $k' > k$. Aber dann liegen auch alle benachbarten Gitterpunkte von a in $\frac{1}{2^{k'}}\mathbb{Z}$ immer noch in dem Quader Q, der ja die Kantenlänge $\frac{1}{2^k}$ hat, und folglich gilt $Q' \subseteq Q$.

Jetzt definiere induktiv:

$$F_1 := \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{D}_1 \\ Q \subseteq U}} Q$$

und

$$F_k := \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{D}_k, Q \subseteq U \\ (\forall Q' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{D}_k, Q' \subseteq F_{k-1}) \; Q^o \cap (Q')^o = \emptyset}} Q.$$

Es genügt jetzt zu zeigen, daß

$$U = \bigcup_{k=1}^\infty F_k,$$

weil man Quader, die zu F_k beitragen, aber schon in einem Quader, der zu einem der $F_1, \ldots, F_{k-1}$ beigetragen hat, enthalten sind, in der Aufzählung einfach nicht berücksichtigt.

Wenn $x \in U$, dann ist

$$\delta := \inf_{y \notin U} \|x - y\|_\infty > 0.$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$ so, daß $\frac{1}{2^k} < \delta$. Dann folgt $Q \subseteq U$ für alle $Q \in \mathcal{D}_k$ mit $x \in Q$. Da es immer so ein Q gibt und dieses dann in $\bigcup_{k=1}^\infty F_k$ liegt, sehen wir, daß $U \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty F_k$. Die Umkehrung ist klar, also folgt die Behauptung. ∎

Wir greifen jetzt die Notation vom Anfang des Abschnitts auf und beweisen die Transformationsformel in einer Reihe von Lemmata. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ als normierten Vektorraum mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

Lemma C.4.2 : *Seien $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$, $h > 0$ und*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|a - x\|_\infty \leq h\} \subseteq \Omega.$$

Dann gilt für jedes invertierbare $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

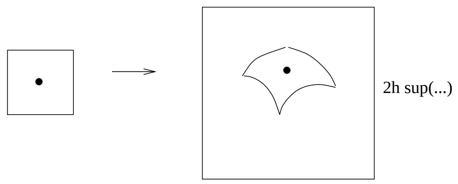
$$\lambda^n(\Phi(Q)) \leq |\det T|\, \lambda^n(Q) \left(\sup_{y \in Q} \|T^{-1}\Phi'(y)\|_{\mathrm{op}}\right)^n.$$

Beweis:

Idee: Schätze $\|\Phi(x) - \Phi(a)\|_\infty$ mithilfe des Mittelwertsatz **??** für für $x, a \in Q$ ab und kombiniere das Ergebnis mit Satz C.3.3 und der Kettenregel, **??** um die Behauptung zu erhalten.

Nach dem Mittelwertsatz **??** gilt für alle $x \in Q$

$$\|\Phi(x) - \Phi(a)\|_\infty \leq h \sup_{y \in Q} \|\Phi'(y)\|_{\mathrm{op}}.$$



Dann gilt

$$\lambda^n(\Phi(Q)) \leq (2h \sup_{y \in Q} \|\Phi'(y)\|_{\mathrm{op}})^n = \lambda^n(Q)(\sup_{y \in Q} \|\Phi'(y)\|_{\mathrm{op}})^n.$$

Dies beweist die Behauptung für $T = \mathrm{id}$.

Für den allgemeinen Fall setze $\widetilde{\Phi} = T^{-1} \circ \Phi$ und rechne mit Satz C.3.3 und der Kettenregel **??**

$$\begin{aligned}
\lambda^n(\Phi(Q)) &= \lambda^n(T(\widetilde{\Phi}(Q))) \\
&= |\det T|\, \lambda(\widetilde{\Phi}(Q)) \\
&\leq |\det T|\, \lambda^n(Q)(\sup_{y \in Q} \|\widetilde{\Phi}'(y)\|_{\mathrm{op}})^n \\
&= |\det T|\, \lambda^n(Q)(\sup_{y \in Q} \|T^{-1}\Phi'(y)\|_{\mathrm{op}})^n
\end{aligned}$$

∎

Lemma C.4.3 : *Seien $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$, $h > 0$ und $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|a - x\|_\infty \leq h\} \subseteq \Omega$. Dann gilt*

$$\lambda^n(\Phi(Q)) \leq \int_Q |J_\Phi|.$$

Beweis:

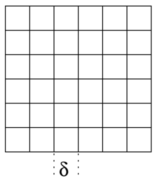
Idee: Zerlege den Quader in kleine Quader, auf denen man J_Φ durch konstante lineare Abildungen approximiert. Für die wendet man dann Lemma C.4.2 an.

Wegen der Stetigkeit von Φ' und der Kompaktheit von Q können wir zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wählen mit

$$(\forall y, z \in Q, \|y-z\|_\infty \leq \delta) \quad \|\Phi'(z)^{-1}\Phi'(y)\|_{\text{op}}^n \leq 1+\epsilon.$$

Wir schreiben Q als Vereinigung von kompakten Quadern $Q_1, \ldots, Q_m$ mit Seitenlänge kleiner als δ, d.h.

$$(\forall y, z \in Q_j) \quad \|y-z\|_\infty < \delta.$$



Außerdem nehmen wir an, daß

$$(\forall i \neq j \in \{1, \ldots, m\}) \quad Q_i^o \cap Q_j^o = \emptyset.$$

Wähle $a^{(j)} \in Q_j$ für $j = 1, \ldots, m$ so, daß

$$|\det \Phi'(a^{(j)})| = \inf_{x \in Q_j} |\det \Phi'(x)|.$$

Wendet man jetzt Lemma C.4.2 auf Q_j und $T_j := \Phi'(a^{(j)})$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lambda^n(\Phi(Q)) &\leq \sum_{j=1}^m \lambda^n(\Phi(Q_j)) \\
&\leq \sum_{j=1}^m |\det \Phi'(a^{(j)})| \lambda^n(Q_j) \left(\sup_{y \in Q_j} \|\Phi'(a^{(j)})^{-1}\Phi'(y)\|_{\text{op}} \right)^n \\
&\leq (1+\epsilon) \sum_{j=1}^m |\det \Phi'(a^{(j)})|\, \lambda^n(Q_j) \\
&\leq (1+\epsilon) \int |\det \Phi'(x)|\, d\lambda^n(x) \\
&= (1+\epsilon) \int |J_\Phi(x)|\, d\lambda^n(x),
\end{aligned}$$

und dies beweist die Behauptung, weil $\epsilon > 0$ beliebig war. ∎

Lemma C.4.4 : *Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \Omega$ gilt*

$$\lambda^n(\Phi(U)) \leq \int_U |J_\Phi|$$

Beweis:

IDEE: Kombiniere Proposition C.4.1 und Lemma C.4.3.

Schreibe $U = \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ wie in Proposition C.4.1. Dann rechnet man mit Lemma C.4.3

$$\begin{aligned}
\lambda^n(\Phi(U)) &= \lambda^n(\Phi(\bigcup_j Q_j)) = \lambda^n(\bigcup_j \Phi(Q_j)) \\
&\leq \sum_{j=1}^\infty \lambda^n(\Phi(Q_j)) \\
&\leq \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} |J_\Phi| = \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j^o} |J_\Phi| \\
&= \int_U \sum_{j=1}^\infty \chi_{Q_j^o} |J_\Phi| \\
&= \int_U |J_\Phi|,
\end{aligned}$$

weil alle $Q_j \setminus Q_j^o$ Nullmengen sind. ∎

Lemma C.4.5 : *Für meßbare Teilmengen $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ von Ω gilt*

$$\lambda^n(\Phi(E)) \leq \int_E |J_\Phi|$$

Beweis:

IDEE: Schöpfe Ω durch kompakte Mengen aus und wende auf diese den Satz C.1.2 an. Dabei kann man die offenen Approximationen so wählen, daß die Vereinigung U der offenen Mengen $\int_U |J_\Phi| \leq \epsilon + \int_E |J_\Phi|$ erfüllt. Dann folgt die Behauptung aus Lemma C.4.4.

Nach Proposition C.4.1 läßt sich Ω als Vereinigung von kompakten Mengen $K_1, K_2, \ldots$ schreiben, wobei wir o.B.d.A. annehmen können, daß $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ gilt. Für $j \in \mathbb{N}$ setze

$$E_j := E \cap K_j.$$

Zu $\epsilon > 0$ gibt es nach Satz C.1.2 offene Umgebungen U_j von E_j in Ω mit

$$(\forall j \in \mathbb{N}) \quad \lambda^n(U_j \setminus E_j) < \epsilon \left(2^j \sup_{x \in K_j} |J_\Phi| \right)^{-1}.$$

Daraus folgt mit

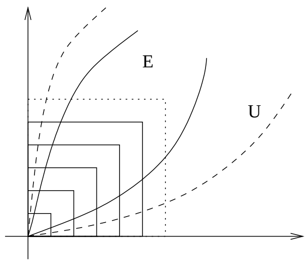
$$U_j \cap (K_j \setminus K_{j-1}) \subseteq (U_j \setminus E_j) \cup (E_j \setminus E_{j-1}),$$

daß

$$\int_{U_j \cap (K_j \setminus K_{j-1})} |J_\Phi| \leq \frac{\epsilon}{2^j} + \int_{E_j \setminus E_{j-1}} |J_\Phi|.$$

Für $U := \bigcup_{j=1}^\infty U_j$ liefert der Satz 2.2.4 von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}
\int_U |J_\Phi| &= \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{j=1}^k (U_j \cap (K_j \setminus K_{j-1}))} |J_\Phi| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k \int_{U_j \cap (K_j \setminus K_{j-1})} |J_\Phi| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\epsilon}{2^j} + \int_{E_j \setminus E_{j-1}} |J_\Phi| \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\epsilon(1 - 2^{-k}) + \int_{E_k} |J_\Phi| \right) \\
&= \epsilon + \int_E |J_\Phi|.
\end{aligned}$$



Mit Lemma C.4.4 finden wir

$$\lambda^n(\Phi(E)) \le \lambda^n(\Phi(U)) \le \int_U |J_\Phi| \le \epsilon + \int_E |J_\Phi|,$$

und dies beweist die Behauptung, da $\epsilon > 0$ beliebig war. ■

Satz C.4.6 : (Transformationsformel) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und sei $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit offenem Bild $\Phi(\Omega)$ und stetig differenzierbarer Umkehrabbildung $\Psi\colon \Phi(\Omega) \to \Omega$.*

(i) *Sei $f\colon \Phi(\Omega) \to \mathbb{C}$ nichtnegativ oder integrierbar. Dann gilt*

$$\int_{\Phi(\Omega)} f = \int_\Omega (f \circ \Phi)|J_\Phi|.$$

(ii) *Wenn $E \subseteq \Omega$ meßbar ist, dann ist auch $\Phi(E)$ meßbar, und es gilt*

$$\lambda^n(\Phi(E)) = \int_E |J_\Phi|.$$

Beweis:

IDEE: Wesentlich ist (i), und das folgt für einfache Funktionen aus Lemma C.4.5. Nichtnegative Funktionen approximiert man durch einfache und benützt den Satz 2.2.4 von der Monotonen Konvergenz. Integrierbare Funktionen spaltet man in Positiv- und Negativteil auf.

(ii) folgt mit $f = \chi_{\Phi(E)}$ sofort aus (i). Für eine einfache Funktion $\phi = \sum_j a_j \chi_{A_j}$ liefert Lemma C.4.5, daß

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(\Omega)} \phi &= \sum_j a_j \lambda^n(A_j \cap \Phi(\Omega)) \\ &\le \sum_j a_j \int_{\Phi^{-1}(A_j \cap \Phi(\Omega))} |J_\Phi| \\ &= \int_\Omega (\phi \circ \Phi)|J_\Phi|.\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.3 können wir f durch solche ϕ monoton approximieren, und dann liefert Satz 2.2.4

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \le \int_\Omega (f \circ \Phi)|J_\Phi|.$$

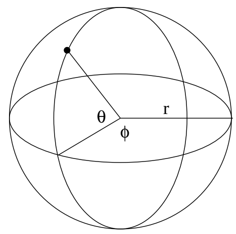
Wir wenden diese Ungleichung jetzt auf Ψ und $(f \circ \Phi)|J_\Phi|$ an, was wegen $|J_\Psi(x)| = |J_\Phi \circ \Psi(x)|^{-1}$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f \circ \Phi)|J_\Phi| &\le \int_{\Phi(\Omega)} (f \circ \Phi \circ \Psi)\,|J_\Phi \circ \Psi|\,|J_\Psi| \\ &= \int_{\Phi(\Omega)} f.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Beispiel C.4.7 : (**Polarkoordinaten**) Betrachte die Abbildung

$$\Phi\colon\ ]0,\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3,\ (r,\theta,\phi)\mapsto (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).$$



Dann ist die darstellende Matrix von $\Phi'(r,\theta,\phi)$ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Als Funktionaldeterminante erhält man dann

$$J_\Phi(r,\theta,\phi) = r^2\sin\theta.$$

Will man jetzt z.B. das Volumen der euklidischen Kugel $B(0;R)$ mit Radius R ausrechnen, so stellt man fest, daß

$$\Phi(]0,R[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[) = B(0;R)\setminus\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0 \text{ und } x>0\}.$$

Letzteres unterscheidet sich von $B(0;R)$ nur durch eine Nullmenge, also gilt

$$\lambda^3(B(0;R)) = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\ d\phi\ d\theta\ dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

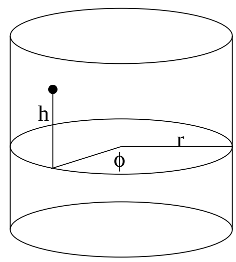
Für die Sphäre $S(0;R)=\{v\in\mathbb{R}^3 \mid \|v\|=R\}$ zeigt dann der Satz von der Monotonen Konvergenz, daß

$$\lambda^3(S(0;R)) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{4}{3}\pi((R+\epsilon)^3-(R-\epsilon)^3) = 0.$$

Also ist die Sphäre eine Lebesgue-Nullmenge. ∎

Beispiel C.4.8 : (**Zylinderkoordinaten**) Betrachte die Abbildung

$$\Phi\colon\ ]0,\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ (r,\phi,h)\mapsto(r\sin\phi, r\cos\phi, h).$$



Dann ist die darstellende Matrix von $\Phi'(r,\phi,h)$ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als Funktionaldeterminante erhält man dann

$$J_\Phi(r,\phi,h) = -r.$$

Will man jetzt z.B. das Volumen des Zylinders

$$Z(R,H) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < H, x^2+y^2 < R^2\}$$

ausrechnen, so stellt man fest, daß

$$\Phi(]0,R[\times]0,2\pi[\times]0,h[) = Z(R,H) \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ und } x > 0\}.$$

Letzteres unterscheidet sich von $Z(H,R)$ nur durch eine Nullmenge, also gilt

$$\lambda^3(Z(H,R)) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H r dr\ d\phi\ dh = \frac{1}{2}\pi R^2 H.$$

Für die **Mantelfläche** $M(H,R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < H, x^2+y^2 = R^2\}$ zeigt dann der Satz von der Monotonen Konvergenz, daß

$$\lambda^3(M(H,R)) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{H\pi}{2}((R+\epsilon)^2 - (R-\epsilon)^2) = 0.$$

Also ist die Mantelfäche eine Lebesgue-Nullmenge. ■

Übung C.4.1 : (**Polarkoordinaten**) Betrachte die Abbildung

$$\Phi\colon]0,\infty[\times]0,\pi[^{n-2}\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^n,\ (r,\theta,\phi) \mapsto x = (x_1,\dots,x_n),$$

die durch

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ &\ \vdots \\ x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{aligned}$$

gegeben ist. Fülle die Details der folgenden Rechnung ein:

Wir setzen

$$s_j = \sin\theta_j, c_j = \cos\theta_j.$$

Dann ist die darstellende Matrix von $\Phi'(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})$ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -rs_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_1c_2 & rc_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \ddots & \vdots \\ s_1\cdots s_{n-2}c_{n-1} & rc_1s_2\cdots rs_{n-2}c_{n-1} & \cdot & \cdot & -rs_1\cdots s_{n-1} \\ s_1\cdots s_{n-2}s_{n-1} & rc_1s_2\cdots rs_{n-2}s_{n-1} & \cdot & \cdot & rs_1\cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Indem man die Determinante dieser Matrix durch Entwicklung nach der ersten Zeile berechnet, kommt mit Induktion auf das Ergebnis

$$J_\Phi(r,\theta,\phi) = r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}(\sin\theta_2)^{n-3}\cdots(\sin\theta_{n-2}).$$

(Beachte, daß es nicht so ohne weiteres möglich ist, mit diesem Resultat das Volumen der euklidischen Kugel $B(0;R) \subseteq \mathbb{R}^n$ zu bestimmen). ■

Übung C.4.2 : (**Kugelvolumen**) Für $p > 0$ und $R > 0$ setze

$$B_p^n(0;R) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n |x_j|^p < R^p\}$$

und zeige

$$\lambda^n(B_p^n(0;R)) = R^n 2^n \frac{\Gamma(\frac{1}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}$$

durch Nachprüfen der folgenden Rechnungen:

- Es genügt, die Formel für $R = 1$ zu verifizieren und dann die die Transformationsformel für die Streckung $x \mapsto Rx$ anzuwenden.
- Setze $\alpha_p(n) := \lambda^n(B_p^n(0;1))$ und beachte, daß für $0 < t < 1$ gilt

$$B_p^{n-1}(0;(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x',t) \in B_p^n(0;1)\}$$

  sowie

$$\lambda^{n-1}(B_p^{n-1}(0;(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}) = (1-|t|^p)^{\frac{n-1}{p}} \alpha_p(n-1).$$

- Benütze die Beta-Funktion für folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \alpha_p(n) &= \alpha_p(n-1)\int_1^1 (1-|t|^p)\frac{n-1}{p}dt \\ &= \frac{2}{p}\alpha_p(n-1)B\left(\frac{n+p-1}{p},\frac{1}{p}\right) \\ &= 2\alpha_p(n-1)\frac{\Gamma(\frac{n-1}{p}+1)\Gamma(\frac{1}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)} \end{aligned}$$

- Zeige mit Induktion, daß

$$\alpha_p(n) = 2^n \frac{\Gamma(\frac{1}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}.$$

Für den Fall $p = 2$ haben wir jetzt das Volumen der n-dimensionalen euklidischen Kugel berechnet:

$$\lambda^n(B_2^n(0;1)) = 2^n \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}.$$

Mit diesen Resultaten zeigt man leicht, daß die Mengen

$$S_p^n(0;R) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n |x_j|^p = R^p\}$$

Lebesgue-Nullmengen sind. ■

Übung C.4.3 : Sei $\gamma > 0$. Berechne den Inhalt der Fläche, die von der positiven x-Achse und der Spur der Archimedischen Spirale

$$f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) := (\gamma t\cos t, \gamma t \sin t)$$

eingeschlossen wird, d.h., zu berechnen ist der Flächeninhalt von

$$M := \{(r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le r \le \gamma\phi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi\}.$$

■

Übung C.4.4 : Beweise die bekannte Identität

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

auf folgende Weise: Sei $(r,\phi) \to (r\cos\phi, r\sin\phi)$ die Transformation auf Polarkoordinaten. Berechne mit der Transformationsformel das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}d(x,y).$$

■

Übung C.4.5 : Berechne das Volumen des Kugelsektors

$$S := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2;\ \sqrt{x^2+y^2} \leq cz \right\},$$

wobei c und r positive Konstanten sind. ■

Übung C.4.6 : Sei M ein k-dimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^n$ mit $k < n$. Zeige, daß M eine Lebesgue Nullmenge ist. ■

Index

Literaturverzeichnis

[Bar01] Bartle, R.G., *A Modern Theory of Integration*, AMS, 2001

[Bau91] Bauer, H., *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 1991

[BN88] Behnen, W., Neuhaus, G., *Grundkurs Stochastik*, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1988

[Ber92] Berger, M. A., *An Introduction to Probability and Stochastic Processes*, Springer Verlag, New York, 1992

[Bi86] Billingsley, P., *Probability and Measure*, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, 1986

[El96] Elstrodt, J. *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, New York, 1996

[EG92] Evans, L.C., Gariepy, R.F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC, Boca Raton, 1992

[Fi89] Fisz, M., *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften 1989

[GS77] Gänsler, P., Stute, W., *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer–Verlag, Berlin, 1977

[Ha74] Halmos, P.R., *Measure Theory*, Springer, New York, 1974

[He71] Henze, E., *Einführung in die Maßtheorie*, Bibl. Institut, Mannheim, 1971

[Hin80] Hinderer, K., *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer–Verlag, 1980

[Hue95] Hübner, G., *Stochastik. Eine Einführung für Mathematiker, Informatiker und Ingenieure.*, Vieweg Verlag, 1995.

[Kre91] Krengel, U., *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg, 1991