Mengentheoretische Topologie

Karsten Evers

2. Februar 2011

Felix Hausdorff (1868-1942), Begründer der Mengentheoretischen Topologie.

Vorsicht Baustelle! Betreten auf eigene Gefahr!

Um Missverständnisse auszuschließen gleich vorne weg: Dieses Skript ist nicht und war auch niemals Grundlage irgendeiner Lehrveranstaltung. Ich schreibe es aus reinem Spaß an der Freude. Die Auswahl der Kapitel und Ergebnisse, ebenso die Anordnung sind demnach ausschließlich durch meine Vorlieben bestimmt. Dieses Skript ist gewissermaßen ein ”work in progress” und wird von mit ständig überarbeitet und ergänzt. Auf der folgenden Internetseite gibt es eine aktuelle (und kostenlose) Version[1] zum downloaden.

http://mathekarsten.npage.de

Vorausgesetzt wird (ungefähr) der Stoff aus dem ersten Semester Analysis und Lineare Algebra (alles notwendige findet man beispielsweise in *Analysis 1* von Konrad Königsberger [26] bzw. in *Lineare Algebra* von Gerd Fischer [17].

Der Titel *Mengentheoretische Topologie* (oftmals auch *Allgemeine Topologie*) kommt daher, da die meisten der hier behandelten Themen eher mengentheoretischer Natur sind. Ich hoffe, ich schrecke dadurch niemanden ab! Entgegen einer häufig vertretenden Auffassung bin ich nämlich der Meinung, dass die Mengentheoretische Topologie quick lebendig ist! Wer das nicht glaubt, überzeuge sich z.B. durch die Bücher: [2], [21], [23], [28], [33], [34], [38], [48].

Inzwischen hat aber sogar ein bischen Algebraische Topologie Einzug erhalten (in Form eines Kapitels zur singulären Homologietheorie). In Planung ist außerdem eine Erweiterung des Kapitels *Einführung in die Nichtstandard Topologie*. Aber das wird noch ein Weilchen auf sich warten lassen.

Da ich versucht habe die meisten Lemmas und Sätze selbständig zu beweisen, (angeregt durch verschiedene Bücher), ist es natürlich sehr wahrscheinlich, dass sich Fehler[2] eingeschlichen haben (neben Tippfehlern möglicherweise auch Fehler inhaltlicher Art). Ich bitte dies daher zu entschuldigen und freue mich natürlich über jede ernstgemeinte Frage oder Kritik. Kontaktieren kann man mich z.B. per email unter: *karsten.evers@uni-rostock.de*

Rechtschreibfehler sind gewollt und dienen der allgemeinen Belustigung!

[1] Alle Rechte an diesem Skript gehören mir!

[2] Als ich mit dem Schreiben begann, besaß ich zu Hause noch kein funktionierendes TeX-System. Ich hab den Text mit einem gewöhnlichen Editor gschrieben und das entsprechende pdf ca. einmal pro Woche in einem PC-Pool erstellt. Insbesondere dadurch haben sich in der Anfangszeit viele Fehler eingeschlichen.

Inhaltsverzeichnis

Les structures sont les armes du mathématicien.

Nicolas Bourbaki

1 Mengentheoretische Grundlagen

"In a sense set theory can be regarded as the geometrization of logic."
Masoud Khalkhali

1.1 Einführende Bemerkungen zur Mengentheorie

Die Sätze und Definitionen dieses ersten Kapitels werden wir im Rest vom Skript (in der Regel) OHNE explizit darauf hinzuweisen frei verwenden.

Wir setzen die Zermelo-Fraenkel-Axiome (ZF) der Mengenlehre voraus (einschließlich dem Auswahlaxiom $\Rightarrow$ ZFC), halten es uns aber ebenso frei den Klassenbegriff zu benutzen. Auf die Axiome selber und die Art und Weise wie diese in die einzelnen Aussagen eingehen, gehen wir nicht näher ein. Der daran interessierte Leser findet all dies (und noch viel mehr) im ersten Kapitel des sehr schönen Buchs [24] von Thomas Jech.

Die Klasse all derer x, die eine Eigenschaft $\phi(x)$ haben bezeichnen wir mit $\{x \mid \phi(x)\}$. Wenn wir bereits wissen, dass es sich um eine Teilmenge einer Menge y handelt, dann schreiben wir auch $\{x \in y \mid \phi(x)\}$. Manchmal definieren wir eine Menge indem wir einfach alle Elemente hinschreiben wie z.B. so: $\{1,2,3\}$, die Menge mit den Elementen $1,2,3$. Elemente von Mengen sind selber auch Mengen! Deshalb verwenden wir sowohl kleine Buchstaben, als auch große Buchstaben um Mengen zu bezeichnen (wenn wir Klassen benutzen werden wir das deutlich kennzeichnen). Insbesondere verwenden wir keine Urelemente. Wir sagen x ist eine Teilmenge von y, wenn jedes Element aus x auch in y ist und schreiben $x \subseteq y$ (die Relation $\subseteq$ bezeichnen wir auch oft mit Inklusion). Die Menge aller Teilmengen von x bezeichnen wir mit $\mathscr{P}(x)$. Die Menge aller Elemente welche in x, aber nicht in y ist bezeichnen wir mit $x \setminus y$. Die Menge aller Elemente welche sowohl in x, als auch in y (in wenigstens einem von beiden) sind bezeichnen wir als den Schnitt (Vereinigung) von x mit y und schreiben $x \cap y$ ($x \cup y$). Haben zwei Mengen keine gemeinsamen Elemente, so nennen wir sie disjunkt. Das geordnete Paar (x,y) ist die Menge $\{\{x\},\{x,y\}\}$. Induktiv geht das dann weiter: $(x,...,y,z) := ((x,...,y),z)$. Bei der Gelegenheit: Das Symbol $:=$ benutzen wir zur Definition. Der auf der Seite des Doppelpunktes stehende Ausdruck wird durch den anderen Ausdruck definiert. Das Kartesische Produkt $x \times y$ ist die Menge $\{(u,v) \mid u \in x \text{ und } v \in y\}$, die Menge aller geordneten Paare, induktiv dann $x \times ... \times y \times z := (x \times ... \times y) \times z)$. Für das n-fache Produkt einer Menge x mit sich selbst schreiben wir x^n. Eine Funktion (oder Abbildung) f zwischen zwei Mengen x,y ist eine Teilmenge von $x \times y$ mit der Eigenschaft: Für alle $u \in x$ gibt es ein $v \in y$ mit $(u,v) \in f$ und wenn $(u,v) \in f$ und $(u,w) \in f$, dann bereits $v = w$ in Symbolen $f : x \to y$. Wenn $(u,v) \in f$, so schreiben wir auch $v = f(u)$ (Man beachte, dass wir den Ausdruck f ist eine Funktion zwischen zwei Mengen x,y g.d.w. ... definiert haben, keineswegs lediglich den Ausdruck f ist eine Funktion g.d.w. ... .Das ist insofern wichtig, als das man sonst von einer Funktion, die lediglich als Teilmenge irgendeines Kreuzproduktes (mit irgendwelchen Eigenschaften) definiert wäre, nicht entscheiden könnte ob sie surjektiv ist.). Eine n-stellige Relation R, über einer Menge x, ist eine Teilmenge von x^n. Statt $(x,...,y) \in R$ schreiben wir auch $R(x,...,y)$ sei erfüllt, oder einfach nur $R(x,...,y)$. Für eine Funktion zwischen zwei Mengen definieren wir den Definitionsbereich $dom(f) := \{x \mid \text{es gibt ein } y, \text{ mit } (x,y) \in f\}$ und den Wertebereich $rg(f) := \{y \mid \text{es gibt ein } x, \text{ mit } (x,y) \in f\}$, analog für zweistellige Relationen. $f\{u\} := \{f(a) \mid a \in u\}$, für ein

$u \subseteq x$ und $f : x \to y$ ist als dass Bild von u unter f definiert.

Leider benutze ich diese Schreibweise nicht seit ich dieses Skript schreibe. Infolge dessen verwende ich an einigen Stellen auch für das Bild von u unter f einfach die Schreibweise $f(u)$. Ich bemühe mich diese Stellen nach und nach zu verbessern.

Eine Abbildung $f : x \to y$ heißt injektiv (surjektiv; bijektiv) wenn $f(u) = f(u') \Rightarrow u = u'$ ($\forall v \in y \exists u \in x$ mit $f(u) = v$; injektiv + surjektiv). Ist $f : x \to y$ eine Funktion von x nach y und $z \subseteq x$, so ist $f|z := f \cap (z \times y)$ als die Einschränkung von f auf z definiert $f|z : z \to y$. Wir schreiben $|x| = |y|$, wenn es eine Bijektion zwischen x und y gibt, $|x| \leq |y|$ für eine Surjektion von y nach x (mittels Auswahlaxiom gleichwertig zur Existenz einer Injektion von x nach y) und $|x| < |y|$ wenn es keine Surjektion von x nach y gibt (näheres im Abschnitt über Kardinalzahlen). Für zwei Mengen x, y bezeichnet y^x die Menge aller Abbildungen von x nach y. Sei I eine nicht leere Menge und für jedes $i \in I$ sei x_i eine Menge. Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Mengen ist dann definiert, als eine Abbildung von I in $\{x_i \mid i \in I\}$, die jedem $i \in I$ eben genau das x_i zuordnet. Wenn nun eine Familie von Mengen gegeben ist, so ist das Produkt $\prod_{i \in I} x_i$ definiert, als die Menge aller Abbildungen von I in die Vereinigung der x_i, die jedes i in x_i abbilden. Mit $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bezeichnen wir in dieser Reihenfolge die natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen. Mit der Abkürzung *o.B.d.A.* ist *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* gemeint. Das bedeutet soviel wie: Es wird eine weitere Annahme getroffen, die nicht in den Voraussetzungen des Satzes, oder was auch immer steht, aber ganz einfach gefolgert werden kann (meistens um unnötige Fallunterscheidungen zu vermeiden). Die Lemmas, Sätze und Definitionen aus dem Abschnitt "Mengentheoretische Grundlagen" werden wir im Rest des Skriptes (in der Regel), OHNE explizit darauf hinzuweisen, frei verwenden.

1.2 Ordinalzahlen

Beginnen wir diese Einführung mit einem kleinen Lemma (der Beweis bleibt als leicht Aufgabe).

1.2.1 Lemma

X, Y seien Mengen, $(A_i)_{i \in I}$, $(B_j)_{j \in J}$ Familien von Teilmengen von X bzw. Y, weiter sei $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$ und $f : X \to Y$ sei eine Abbildung.

a) $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i$
b) $X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i$
c) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$
d) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$
e) $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$
f) $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$
g) $M \subseteq f^{-1}(f(M))$
h) $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$
i) $f^{-1}(Y \setminus N) = X \setminus f^{-1}(N)$

An den Stellen, an den $\subseteq$ statt $=$ steht, können die Inklusionen echt sein.

Bevor es mit Ordinalzahlen losgeht, kommen wir zu dem klassischen Satz von Schröder-Bernstein. Dieser sagt aus: Wenn es zu zwei Mengen A, B injektive Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ gibt, dann gibt es auch eine Bijektion $h : A \to B$. Wir werden diesen Satz an vielen Stellen verwenden, aber in der Regel nicht darauf hinweisen. Vorbereitet wird dieser durch ein ebenfalls recht interessantes Lemma.

1.2.2 Lemma

Sei $g : \mathscr{P}(M) \to \mathscr{P}(M)$ eine monotone Abbildung (d.h. $A \subseteq B \Rightarrow g(A) \subseteq g(B)$, für $A, B \in \mathscr{P}(M)$), dann hat g einen $\subseteq$-minimalen/maximalen Fixpunkt (d.h. es gibt Mengen $A, B \in \mathscr{P}(M)$ mit $g(A) = A$ und $g(B) = B$ und wann immer auch $g(C) = C$ gilt für $C \in \mathscr{P}(M)$, dann ist $A \subseteq C \subseteq B$).

Beweis: Wir setzen $X := \{A \subseteq M \mid g(A) \subseteq A\}$ und $Y := \{B \subseteq M \mid B \subseteq g(B)\}$. Damit ist dann $M \in X$ und $\emptyset \in Y$, also $X \neq \emptyset \neq Y$. Sei $A := \bigcap_{A' \in X} A'$ und $B := \bigcup_{B' \in Y} B'$. Nun ist g monoton und $A \subseteq A'$, für jedes $A' \in X$ und es folgt dann $g(A) \subseteq g(A')$, für jedes $A' \in X$, also $g(A) \subseteq \bigcap_{A' \in X} g(A') \subseteq \bigcap_{A' \in X} A' = A$. Außerdem ist $g(g(A)) \subseteq g(A)$ (wieder Monotonie von g), also $g(A) \in X$ und somit $A \subseteq g(A)$. Insgesamt demnach $g(A) = A$. Mit B ist es ähnlich. Wir haben $B = \bigcup_{B' \in Y} B' \subseteq \bigcup_{B' \in Y} g(B') \subseteq g(\bigcup_{B' \in Y} B') = g(B)$, denn g ist monoton und $B' \subseteq \bigcup_{B' \in Y} B'$, also $g(B') \subseteq g(\bigcup_{B' \in Y} B')$. Weiter ist $g(B) \subseteq g(g(B))$ (wieder Monotonie), also $g(B) \in Y$ und somit $g(B) \subseteq B$. Auch hier also $g(B) = B$. Bei A und B handelt es sich also um Fixpunkte. Wenn für $C \subseteq M$ ebenfalls ein Fixpunkt ist, also $g(C) = C$ gilt, so ist $C \in X$ und $C \in Y$, und somit $A \subseteq C \subseteq B$.

1.2.3 Satz von Schröder-Bernstein

Seien A, B zwei Mengen und $f : A \to B$ injektiv und $g : B \to A$ injektiv. Dann gibt es eine Bijektion $h : A \to B$.

Beweis: Definiere $F : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ durch

$$F(P) := A \setminus g(B \setminus f(P))$$

(mit $f(P)$ ist natürlich $\{f(p) \mid p \in P\}$ gemeint). Dann hat F einen Fixpunkt P_0, denn die Abbildung F ist monoton.

Offensichtlich ist $h : A \to B$ definiert durch $h(x) := f(x)$ falls $x \in P_0$ und sonst $h(x) := g^{-1}(x)$ wohldefiniert und bijektiv (man male sich am besten eine kleine Skizze).

1.2.4 Definition: Wohlordnung

Eine Klasse A heißt Wohlgeordnet durch $\leq$, falls A durch $\leq$ total geordnet wird ($a \leq a$ für $a \in A$, $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$, $a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$, $a, b \in A \Rightarrow a \leq b$ oder $b \leq a$), und jede nichtleere Teilklasse von A ein kleinstes Element hat. Generell werden Ordnungsrelationen auf Mengen natürlich als Teilmengen entsprechender Kartesischer Produkte definiert. Die Schreibweise $(x,y) \in \leq$ ist ungewohnt und wir verwenden statt dessen die übliche Schreibweise $x \leq y$.

1.2.5 Lemma

Sei $<$ eine Wohlordnung auf einer beliebigen Menge X und $f : X \to X$ eine Abbildung mit $x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$. Dann gilt:

a) $\forall x \in X$: $x \leq f(x)$.

b) $f = id_X$ ist die einzige bijektive Abbildung von X nach X mit $x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$.

c) X ist zu keinem Anfangstück $X_x := \{y \in X \mid y < x\}$ ordnungsisomorph (zwei geordnete Mengen X, Y heißen ordnungsisomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt mit $x < x' \;\Leftrightarrow\; f(x) < f(x')$ für alle $x, x' \in X$).

Beweis: a) Andernfalls betrachte das kleinste Element $x \in X\}$ mit $f(x) < x$. Offensichtlich gilt dann auch $f(f(x)) < f(x) < x$ im Widerspruch zur Minimalität von x.

b) Sei $f : X \to X$ bijektiv mit $x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$. Annahme: $f \neq id$. Sei $x \in X$ minimal mit $f(x) \neq x$. Dann gilt $x < f(x)$. Sei $f(y) = x$. Dann gilt auch $y < f(y)$ (sonst y=f(y)=x und dann x=f(x)), also $y < x$ im Widerspruch zur Minimalität von x.

c) Annahme es gibt ein $f : X \to X_x$ bijektiv mit $y < z \;\Rightarrow\; f(y) < f(z)$. Für x ist offensichtlich $f(x) \in X_x$, also $f(x) < x$ im Widerspruch zu a).

1.2.6 Transfinite Induktion

Sei $\leq$ eine Wohlordnung auf der Klasse A. Für jedes $a \in A$ sei $\varphi(a)$ eine Aussage mit der Eigenschaft: $\forall a \in A$ gilt: ($\forall b < a$ ist $\varphi(b)$ eine wahre Aussage) $\Rightarrow$ $\varphi(a)$ ist eine wahre Aussage. Außerdem gilt (Induktionsvoraussetzung): Es gibt ein $a' \in A$ für das $\varphi(a')$ gilt. Dann ist $\varphi(a)$ für jedes $a \geq a'$ eine wahre Aussage.

Beweis: Annahme es gibt ein $a \geq a'$ für die $\varphi(a)$ falsch ist. Dann gibt es auch ein minimales $a \geq a'$ für die $\varphi(a)$ falsch ist. Das heißt für jedes $b < a$ ist die Aussage $\varphi(b)$ wahr. Nach Voraussetzung gilt dann aber auch die Aussage $\varphi(a)$. Dies ist ein Widerspruch. Also gilt tatsächlich für jedes $a \geq a'$ die Aussage $\varphi(a)$.

1.2.7 Definition: Ordinalzahl

Eine Menge α heißt Ordinalzahl, falls die folgenden drei Bedingungen an α erfüllt sind:

1. $\forall \beta (\beta \in \alpha \;\Rightarrow\; \beta \subseteq \alpha)$ diese Eigenschaft nennt man **Transitivität**.

2. $\forall \beta, \gamma (\beta, \gamma \in \alpha \;\Rightarrow\; (\beta = \gamma \text{ oder } \beta \in \gamma \text{ oder } \gamma \in \beta))$

3. $\forall A((A \subseteq \alpha \text{ und } A \neq \emptyset) \Rightarrow \exists \beta \in A \text{ mit } \beta \cap A = \emptyset)$

1.2.8 Lemma

α bezeichne im Folgenden eine Ordinalzahl.

a) $\neg\exists \delta, \gamma, \beta$ mit $\beta \in \delta \in \gamma \in \beta \in \alpha$. Also insbesondere $\alpha \notin \alpha$, $\forall \beta(\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \notin \beta)$ und $\neg\exists \beta, \gamma$ mit $\beta \in \gamma \in \beta \in \alpha$.

b) $\in$ definiert auf α eine Wohlordnung.

c) Jedes $\beta \in \alpha$ ist wieder eine Ordinalzahl.

d) Für jedes transitive β gilt: $\beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta \subsetneq \alpha$.

e) Für jede Klasse Ω von Ordinalzahlen ist $\alpha := \bigcap_{\omega \in \Omega} \omega$ wieder eine Ordinalzahl. Und es gilt sogar $\alpha \in \Omega$.

f) Für je zwei Ordinalzahlen α, β gilt entweder $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$.

g) Sei Ω eine Menge von Ordinalzahlen. Behauptung: $\alpha := \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega$ ist eine Ordinalzahl. Offensichtlich handelt es sich um das Supremum von Ω.

h) Die Klasse *Ord* aller Ordinalzahlen wir durch $\in$ wohlgeordnet! Desweiteren ist $\alpha \cup \{\alpha\}$ der direkte Nachfolger von einem $\alpha \in Ord$ und verschiedene Ordinalzahlen sind nicht Ordnungsisomorph. Für $\alpha \in \beta$ schreiben wir auch $\alpha < \beta$.

Beweis: a) Annahme, es gibt doch solche Elemente. Setze $\emptyset \neq A := \{\delta, \gamma, \beta\}$. Offensichtlich widerspricht dieses A der dritten Forderung an Ordinalzahlen.

b) Die Irreflexivität folgt aus a). Sei $\delta \in \gamma \in \beta \in \alpha$ aus 1) folgt $\delta, \gamma, \beta \in \alpha$ und aus 2) folgt dann $\delta = \beta$ oder $\delta \in \beta$ oder $\beta \in \beta$. Und a) reduziert die Möglichkeiten zu $\delta \in \beta$. Also haben wir die Transitivität. Je zwei Elemente sind außerdem schon per Definition vergleichbar. Zum Nachweis der Wohlordnung nehmen wir uns einfach mal ein $\emptyset \neq A \subseteq \alpha$. Aus 3) folgern wir: Es gibt ein $\beta \in A$ mit $A \cap \beta = \emptyset$. Offensichtlich handelt es sich bei diesem β um das kleinste Element von A. Also handelt es sich um eine Wohlordnung.

c) Nachzuweisen sind die Eigenschaften 1) bis 3). Sei $\beta \in \alpha$. Zu 1): Sei $\gamma \in \beta$. Falls $\delta \in \gamma$, so folgern wir aus der Transitivität $\delta \in \beta$, also $\gamma \subseteq \beta$

zu 2): Für $\delta, \gamma \in \beta$ gilt dann $\delta, \gamma \in \alpha$. Von α setzen wir aber voraus, dass es sich um eine Ordinalzahl handelt. Also gilt $\delta = \gamma$ oder $\delta \in \gamma$ oder $\gamma \in \delta$.

Zu 3): Falls $\emptyset \neq A \subseteq \beta$, so auch $A \subseteq \alpha$ und man folgert die Gültigkeit für 3).

d) Sei $\beta \subsetneq \alpha$ Dann existiert ein $\gamma \in \alpha \setminus \beta$ mit $\gamma \cap (\alpha \setminus \beta) = \emptyset$. Also schon mal $\gamma \subseteq \alpha \setminus (\alpha \setminus \beta) = \beta$. Nehmen wir mal an es gibt ein $\delta \in \beta \setminus \gamma$, also insbesondere $\delta \notin \gamma$. Es tritt also einer der folgenden zwei Fälle ein.

Fall 1: $\delta = \gamma$, dann aber $\gamma \in \beta$ im Widerspruch zu $\gamma \in \alpha \setminus \beta$.

Fall 2: $\gamma \in \delta$. Aus der Transitivität folgern wir, da $\delta \in \beta$, dass dann ebenfalls $\gamma \in \beta$ sein muss. Also ist $\beta \setminus \gamma = \emptyset$ und somit $\beta \subseteq \gamma$. Insgesamt erhalten wir $\beta = \gamma \in \alpha$, also auch $\beta \in \alpha$. Die Rückrichtung folgt aus a).

e) Der Nachweis von 1) bis 3) folgt unmittelbar aus der Definition einer Ordinalzahl und der Eigenschaft von Schnitten.

Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt natürlich: $\alpha \subseteq \omega$. Annahme, für alle ω gilt sogar $\alpha \subsetneq \omega$, dann folgt: $\forall\, \omega \in \Omega$ gilt $\alpha \in \omega$, also $\alpha \in \bigcap_{\omega\in\Omega} \omega = \alpha \;\Rightarrow\;$ Widerspruch! Es muss also ein $\omega \in \Omega$ geben mit $\alpha = \omega$. Und somit $\alpha \in \Omega$.

f) Das höchstens einer der drei Fälle eintreten kann ist klar. Zu zeigen bleibt, dass mindesten einer eintritt.

Annahme sowohl $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$ als auch $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $\gamma \in \alpha \setminus \beta$ mit $\gamma \cap (\alpha \setminus \beta) = \emptyset$. Da $\gamma \subseteq \alpha$ folgt das auch $\gamma \subseteq \alpha \setminus (\alpha \setminus \beta) = \alpha \cap \beta$. Dies führt zu $\gamma \subseteq \beta$. Währe sogar $\gamma \subsetneq \beta$, dann währe $\gamma \in \beta$ im Widerspruch zu $\gamma \in \alpha \setminus \beta$. Also gilt $\gamma = \beta$ und somit $\beta \in \alpha$, also auch $\beta \subsetneq \alpha$. Nach Voraussetzung existiert aber auch ein $\delta \in \beta \setminus \alpha$. Da aber schon $\beta \subsetneq \alpha$ führt dies zum Widerspruch.
Insgesamt erhalten wir also $\alpha \setminus \beta = \emptyset$ oder $\beta \setminus \alpha = \emptyset$, also $\alpha \subseteq \beta$ oder $\beta \subseteq \alpha$. Die Behauptung folgt.

g) Die Eigenschaften 1), 2), 3) müssen nachgewiesen werden. 1) ist trivial.
2): Sei $\beta, \gamma \in \alpha$. Dann gibt es $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit $\beta \in \omega_1$ und $\gamma \in \omega_2$. O.B.d.A. gilt $\omega_1 \subseteq \omega_2$. Also $\beta \in \omega_2$. Da ω_2 eine Ordinalzahl ist, folgern wir $\beta = \gamma$ oder $\beta \in \gamma$ oder $\gamma \in \beta$.
3): Sei $\emptyset \neq A \subseteq \alpha$. Dann gibt es ein $\omega \in \Omega$ mit $A \cap \omega \neq \emptyset$. Also existiert ein $\gamma \in A \cap \omega$ mit $\gamma \cap A \cap \omega = \emptyset$. Falls $\gamma \cap A \neq \emptyset$, so gibt es ein $\delta \in \gamma \cap A$, also auch $\delta \in \omega$ (Transitivität) und damit $\delta \in \gamma \cap A \cap \omega \;\Rightarrow\;$ Widerspruch. Also $\gamma \in A$ und $\gamma \cap A = \emptyset$.
Sei auch β eine Ordinalzahl mit: $\forall\, \omega \in \Omega$ gilt $\omega \in \beta$. Dann ist offensichtlich $\alpha := \bigcup_{\omega\in\Omega} \omega \subseteq \beta$, also $\alpha = \beta$ oder $\alpha \in \beta$. Somit gilt tatsächlich $\alpha = sup\,\Omega$.

h) Folgt sofort aus Lemma 1.2.5 und a) bis g).

1.2.9 Bemerkung

Ordinalzahlen α die nicht von der Form $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ sind nennen wir Limesordinalzahlen.

1.2.10 Lemma

Jede wohlordenbare Menge W ist zu genau einer Ordinalzahl ordnungsisomorph.

Beweis: Wir setzen $A := \{x \in W \mid W_x$ ist ordnungsisomorph zur Ordinalzahl $a_x\}$. Offensichtlich ist das kleinste Element aus W auch in A. Sei $x \in W$ und $z \in A$, für jedes $z < x$. Wir unterscheiden zwei Fälle: 1.Fall zu jedem $y < x$ gibt es ein z mit $y < z < x$. Wir wählen dann für jedes $z < x$ die eindeutig bestimmte Ordinalzahl α_z mit (eindeutig bestimmten) Ordnungsisomorphismus $f_z : W_z \to \alpha_z$, setzen $\alpha_x := \bigcup_{z<x} \alpha :_z$ und $f_x := \bigcup_{z<x} f_z$ und haben somit einen Ordnungsisomorphismus $f_x : W_x \to \alpha_x$.

2.Fall Es gibt ein $z < x$, so dass für jedes $y < x$ bereits $y \leq z$ gilt. Dann wählen wir wieder α_z und f_z und definieren $f_x : W_x \to \alpha_z \cup \{\alpha_z\} := \alpha_x$ durch $f_x(y) := f_z(y)$, für $y < z$ und $f_x(z) := \alpha_z$. Auch hier bekommen wir einen Ordnungsisomorphismus $f_x : W_x \to \alpha_x$. isgesammt bekommen wir somit $A = W$.

Um zu zeigen, dass auch W zu einer Ordinalzahl ordnungsisomorph ist, unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

1.Fall es gibt kein größtes Element in W, dann setzen wir einfach $\alpha := \bigcup_{x\in A} \alpha_x$ und $f := \bigcup_{x\in A} f_x$. Aufgrund der Eindeutigkeit der f_x ist f dann der gesuchte Ordnungsisomorphismus.

2.Fall Es gibt ein größtes Element x_g in W. Dann definieren wir $f(x) := f_{x_g}(x)$, für $x < x_g$ und $f(x_g) := \alpha_{x_g}$ und erhalten so einen Ordnungsisomorphismus $f : W \to \alpha_{x_g} \cup \{\alpha_{x_g}\}$

1.2.11 Satz von Hartog; ohne Auswahlaxiom

Zu jeder Menge A gibt es eine Ordinalzahl α mit der Eigenschaft: Es gibt keine Abbildung $f : \alpha \to A$, welche injektiv ist.

Beweis: Sei A eine vorgegebene Menge (o.B.d.A. ist A unendlich). Setze dann

$\Omega := \{\alpha \mid \exists B \subseteq A$ und $\exists <\subseteq B \times B$ derart, dass $<$ eine Wohlordnung auf B ist und α ordnungsisomorph zu B ist $\}$

Aus den obigen Aussagen folgt: Ω ist eine Menge von Ordinalzahlen. Sei dann $\beta := \bigcup_{\alpha\in\Omega} \alpha$ und $\alpha' := \beta \cup \{\beta\}$.

Annahme es gibt ein $f : \alpha' \to A$ injektiv. Dann könnte man auf $\{f(\delta) \mid \delta \in \alpha'\} \subseteq A$ die Wohlordnung von α' induzieren. Und demzufolge währe $\alpha' \in \Omega$ und somit $\alpha' \subseteq \beta \in \alpha'$ - Widerspruch!

1.2.12 Transfinite Rekursion

Sei S eine Klasse, W eine durch $<$ wohlgeordnete Menge. Ferner haben wir für jedes $x \in W$ eine Abbildung K_x, welche jeder Abbildung f von $W_x := \{y \in W \mid y < x\}$ in S ein Element $K_x(f) \in S$ zuordnet. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi : W \to S$ mit $\varphi(x) = K_x(\varphi|W_x)$, für jedes $x \in W$.

Beweis: Sei x' das kleinste Element aus W. Wir setzen $A := \{x \in W \mid x = x'$ oder $\exists\, \varphi_x : W_x \to S$ mit $\forall y < x :\ \varphi_x(y) = K_y(\varphi_x|W_y)\}$. Wir zeigen zuerst durch transfinite Induktion in W_y, dass für $x, y \in A$ mit $y < x$ bereits $\varphi_x|W_y = \varphi_y$ gilt und bezeichnen diese Eigenschaft mit $(*)$. Es gilt $\varphi_x(x') = K_{x'}(\varphi_x\|W_{x'}) = K_{x'}(\emptyset) = K_{x'}(\varphi_y|W_{x'}) = \varphi_y(x')$. Sei $\varphi_x(z) = \varphi_y(z)$, für alle $z < x'' < y$. Dann gilt $\varphi_x(x'') = K_{x''}(\varphi_x|W_{x''}) = K_{x''}(\varphi_y|W_{x''}) = \varphi_y(x'')$. Also $\varphi_x|W_y = \varphi_y$.

Die Eindeutigkeit der Abbildung φ (im Fall der Existenz) beweist sich vollkommen analog. kommen wir also zu Existenz:

Wir zeigen mittels transfiniter Induktion, dass $A = W$ gilt. Bezeichnet x'' den Nachfolger von x', so sieht man $x', x'' \in A$. Sei $x \in W$ und $z \in A$, für alle $z < x$. 1.Fall $\forall z < x \exists z' \in W$ mit $z < z' < x$, dann setze $\varphi_x := \bigcup_{z<x} \varphi_z$. Für $y < x$ gibt es dann ein z mit $y < z < x$ und es gilt $\varphi_x(y) = \varphi_z(y) = K_y(\varphi_z|W_y) = K_y(\varphi_x|W_y)$ (Eigenschaft $(*)$!). 2.Fall Es gibt ein $\exists z < x \forall y(y < x \to y \le z)$. Definiere dann $\varphi_x : W_x \to S$ durch $\varphi_x(y) := \varphi_z(y)$, für $y < z$ und $\varphi_x(z) := K_z(\varphi_z)$. Dann gilt wieder $\varphi_x(y) = K_y(\varphi_x|W_y)$, für $y < x$. Insgesamt bekommen wir $x \in A$ und somit $A = W$.

Zur Definition von $\varphi : W \to S$ unterscheiden wir wieder zwei Fälle. 1.Fall es gibt kein größtes Element in W. Dann setzen wir einfach $\varphi := \bigcup_{x \in A} \varphi_x$. Aus der Eigenschaft $(*)$ folgt unmittelbar, das φ sinnvoll definiert ist und die geforderte Eigenschaft besitzt. 2.Fall es gibt ein größtes Element $x_g \in W$. Dann definieren wir $\varphi(x) := \varphi_{x_g}(x)$, für $x < x_g$ und $\varphi(x_g) := K_{x_g}(\varphi_{x_g})$. Das so definierte φ hat dann die geforderte Eigenschaft.

1.3 Äquivalente Formulierungen des Auswahlaxioms

Das Auswahlaxiom ist wohl das berühmteste unter den Axiomen der Mengenlehre. Zur Wiederholung. Wir nennen $f : \mathscr{P}(A) \to A$ eine Auswahlfunktion, wenn $f(A) \in A$ ist, für jedes $A \in \mathscr{P}(A)$. Das Auswahlaxiom besagt nun: Jede Menge $A \neq \emptyset$ hat eine Auswahlfunktion. Es gibt eine ganze Reihe zum Auswahlaxiom (natürlich auf Basis der übrigen Axiome) äquivalente Formulierungen. Einige von ihnen behandeln wir in diesem Abschnitt. Zur Abkürzung schreiben wir für Auswahlaxiom einfach AC (axiom of choice).

Im ersten der beiden nun folgenden Sätze geht es um die Äquivalenz des Auswahlaxioms zu so genannten Maximalprinzipien. Im zweiten Satz lernen wir drei weitere wichtige Prinzipien der Mengenlehre kennen. Zum einen den Wohordnungssatz, der besagt, dass sich auf jeder Menge eine Wohlordnung finden lässt. Den Multiplikationssatz, der besagt für unendliche Mengen M gilt $|M \times M| = |M|$. Und last but not least den Vergleichbarkeitssatz. Anschaulich besagt jener, dass sich zwei Mengen bzgl. der "Anzahl" ihrer Elemente immer vergleichen lassen.

1.3.1 Satz (äquivalente Formulierungen des Auswahlaxioms I)

Folgende Aussaagen sind äquivalent:

a) Das Auswahlaxiom.

b) (Lemma von Zorn) Sei $\emptyset \neq M$ durch $<$ partiell geordnet, mit der Eigenschaft, dass jede total geordnete Teilmenge K von M eine obere in M gelegene Schranke besitzt. Dann gibt es ein maximales Element in M.

c) (Hausdorff‘s Maximalkettensatz) In jeder partiell geordneten Menge M gibt es maximale total geordnete Teilmengen.

d) (Lemma von Teichmüller-Tuckey) Sei $T \neq \emptyset$ eine Menge mit $\forall\, x\, (x \in T \;\Leftrightarrow \forall\, y\, (y \subseteq x \;\wedge\; y\text{: endlich} \;\Rightarrow\; y \in T))$, dann existiert ein $\subseteq$-maximales Element in T)

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) Der Satz von Hartog liefert eine Ordinalzahl α, welche sich nicht injektiv in M einbetten lässt. Sei z eine Menge, mit $z \notin M$. Nun ist α ist eine wohlgeordnete Menge und wir definieren für jedes $\delta \in \alpha$ eine Abbildung K_δ, welche jeder Abbildung $f : \delta \to M \cup \{z\}$ ein Element aus $M \cup \{z\}$ nach folgender Regel zuordnet. Falls $M_f := \{m \in M \mid \forall\, \delta' \in \delta : f(\delta') < m\} \neq \emptyset$, so sei $K_\delta(f)$ ein beliebiges Element aus M_f. Falls hingegen $M_f = \emptyset$, dann sei $K_\delta(f) = z$ (Auswahlaxiom!). Mittels transfiniter Rekursion schließt man auf die Existenz einer Abbildung $\psi : \alpha \to M \cup \{z\}$ mit $\psi(\delta) = K_\delta(\psi|\delta)$. Falls $\delta < \delta'$ und $\psi(\delta), \psi(\delta') \in M$, dann $\psi(\delta') = K_{\delta'}(\psi|\delta') > \psi(\delta)$. Es muss nun ein $\delta < \alpha$ geben, mit $\psi(\delta) = z$ (sonst wäre $\psi : \alpha \to M$ injektiv). Wir wählen dann das $\delta \in \alpha$ minimal mit $\psi(\delta) = z$ und definieren $K := \{\psi(\delta') \mid \delta' < \delta\}$. Dann ist K eine Kette in M und nach Voraussetzung gibt es dann ein maximales Element $\psi(\delta')$ in K. Dann kann es aber kein δ'' geben, mit $\delta' < \delta'' < \delta$ (sonst $\psi(\delta') < \psi(\delta'')$ und $\psi(\delta'') \in M$ - Widerspruch). Also $\delta = \delta' \cup \{\delta'\}$ und somit ist $\psi(\delta')$ maximal in M (andernfalls wäre $\psi(\delta) = K_\delta(\psi|\delta) \neq z$).

b) $\Rightarrow$ d): Sei $T \neq \emptyset$ eine Menge mit $\forall\, x\, (x \in T \ \Leftrightarrow \forall\, y\, (y \subseteq x \ \wedge \ y$: endlich $\Rightarrow \ y \in T))$. T wird durch die Inklusion partiell geordnet. Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge aus T. Setze $x := \bigcup_{i \in I} x_i$. Sei $y \subseteq x$ und y: endlich, dann $\exists\, i \in I$ mit $y \subseteq x_i$. Nach Voraussetzung an x_i also $y \in T$. Und damit auch $x \in T$. Offensichtlich ist x eine obere in T gelegene Schranke von $(x_i)_{i \in I}$, nach dem Zornschen Lemma hat T ein maximales Element bezüglich Inklusion.

d) $\Rightarrow$ c): Sei M durch $<$ partiell geordnet. Setze $T := \{x \subseteq M \mid x :$ total geordnet $\}$.
Falls $x \in T$ dann folgt klarerweise $\forall\, y\, (y \subseteq x \ \wedge \ y$: endlich $\Rightarrow \ y \in T)$.
Falls umgekehrt $\forall\, y\, (y \subseteq x \ \wedge \ y$: endlich $\Rightarrow \ y \in T)$, so ist zu zeigen: $x \in T$. Selbstverständlich ist $x \subseteq M$ und damit schon partiell geordnet. Die totale Ordnung sieht man so: $z_1, z_2 \in x \Rightarrow \{z_1, z_2\} \subseteq x$, also $\{z_1, z_2\} \in T$. Damit folgt o.B.d.A. $z_1 \leq z_2$. Also $x \in T$. Nach Teichmüller-Tuckey existiert eine max. total geordnete Teilmenge in M.

c) $\Rightarrow$ b): Ist offensichtlich.

b) $\Rightarrow$ a): Man betrachte eine Menge A zu der man eine Auswahlfunktion haben möchte. Setze $\mathscr{A} := \{f : \mathscr{P}(B) \to B \mid B \subseteq A$ und $\forall C \in \mathscr{P}(B)$ gilt $f(C) \in C\}$. Die Menge $\mathscr{A}$ wird partiell durch die Inklusion geordnet und total geordnete Teilmengen von $\mathscr{A}$ haben obere in $\mathscr{A}$ gelegenen Schranken (man betrachte die Vereinigung einer solchen total geordneten Teilmenge). Maximale Elemente in $\mathscr{A}$ müssen dann Auswahlfunktionen für A sein.

1.3.2 Satz (äquivalente Formulierungen des Auswahlaxioms II)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) Das Auswahlaxiom.

b) Jede Menge M lässt sich wohlordnen, d.h. es gibt eine totale Ordnung auf M mit der Eigenschaft: Jede nichtleere Teilmenge von M hat ein minimales Element.

c) Von zwei Mengen M, N lässt sich eine stets injektiv in die andere einbetten.

d) Für jede unendliche Menge M gilt: $|M| = |M \times M|$.

Beweis: Wir führen aus Spaß an der Freude keinen minimalen Kreisschluss. Der Leser ist aufgefordert sich weitere Äquivalenzen direkt zu überlegen.

a) $\Rightarrow$ b) Wir verwenden den Satz von Hartog und transfinite Rekursion. Sei also α so gewählt (Ordinalzahl), dass es keine injektive Abbildung $f : \alpha \to M$ gibt. Sei z eine Menge, mit $z \notin M$. Nun ist α ist eine wohlgeordnete Menge und wir definieren für jedes $\delta \in \alpha$ eine Abbildung K_δ, welche jeder Abbildung $f : \delta \to M \cup \{z\}$ ein Element aus $M \cup \{z\}$ nach folgender Regel zuordnet. Falls $M_f := \{m \in M \mid \forall\, \delta' \in \delta :\ f(\delta') \neq m\} \neq \emptyset$, so sei $K_\delta(f)$ ein beliebiges Element aus M_f. Falls hingegen $M_f = \emptyset$, dann sei $K_\delta(f) = z$ (Auswahlaxiom!). Mittels transfiniter Rekursion schließt man auf die Existenz einer Abbildung $\psi : \alpha \to M \cup \{z\}$ mit $\psi(\delta) = K_\delta(\psi|\delta)$. Falls $\delta < \delta'$ und $\psi(\delta), \psi(\delta') \in M$, dann $\psi(\delta') = K_{\delta'}(\psi|\delta') \in M \setminus \{\psi(\delta)\}$, also $\psi(\delta') \neq \psi(\delta)$. Es muss nun ein $\delta < \alpha$ geben, mit $\psi(\delta) = z$ (sonst wäre $\psi : \alpha \to M$ injektiv). Wir wählen dann das $\delta \in \alpha$ minimal mit $\psi(\delta) = z$. Die Abbildung ψ engeschränkt auf δ, also $\psi|\delta : \delta \to M$ ist dann injektiv. Sie ist aber auch surjektiv, denn sonst wäre $\psi(\delta) = K_{delta}(\psi|\delta) \in M$. Also ist $\psi|\delta : \delta \to M$ bijektiv und wir können auf M die Wohlordnung von δ induzieren.

a) $\Rightarrow$ c): Seien M und N zwei Mengen. Betrachte $\mathscr{M} := \{(X,Y,f) \mid X \subseteq M \text{ und } Y \subseteq N \text{ und } f : X \to Y \text{ ist bijektiv }\}$. Durch $(X,Y,f) \leq (X',Y',f')$ falls $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$ und $f'|X = f$ wird auf $\mathscr{M}$ eine partielle Ordnung definiert. Offensichtlich hat jede total geordnete Teilmenge von $\mathscr{M}$ eine obere in $\mathscr{M}$ gelegene Schranke. Das Zornsche Lemma (äquivalent zum Auswahlaxiom) garantiert uns ein maximales Element (X,Y,f). Dann muss aber bereits $X = M$ oder $Y = N$ sein.

c) $\Rightarrow$ b) lässt sich seht einfach beweisen: Sei M eine beliebige (unendliche Menge). Aus dem Satz von Hartog (siehe Anhang) folgern wir: Es gibt eine Ordinalzahl α, die sich nicht injektiv in M einbetten lässt. Aus dem Vergleichbarkeitssatz schließen wir dann aber, dass sich M injektiv in α einbetten lassen muss. Auf M können wir also mittels f eine Wohlordnung induzieren.

a) $\Rightarrow$ d): Sei M eine unendliche Menge. Setze $\mathscr{M} := \{(X,f) \mid X \subseteq M \text{ und } f : X \to X \times X \text{ ist eine Bijektion }\}$. Da M eine unendliche Menge ist, besitzt M eine abzählbar unendliche Teilmenge N. Nun ist aber offensichtlich $|N| = |N \times N|$. Also $\mathscr{M} \neq \emptyset$. Auf $\mathscr{M}$ definieren wir durch $(X,f) \leq (Y,g)$ falls $X \subseteq Y$ und $g|X = f$ eine partielle Ordnung. Falls $(X_i, f_i)_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge darstellt, dann ist $(\bigcup_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} f_i)$ eine obere in $\mathscr{M}$ gelegene Schranke. Sei dann (X,f) ein maximales Element in $\mathscr{M}$ (Zornsches Lemma). Annahme $\exists m \in M \setminus X$. Dann gilt
$|(X \cup \{m\}) \times (X \cup \{m\})| = |(X \times X) \cup (\{m\} \times X) \cup (X \times \{m\}) \cup \{(m,m)\}| = |Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup \{(m,m)\}|$, wobei $|Y_i| = |X|$ für $i = 1,2,3$. Nun ist aber $|Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3| \leq |X \times X| = |X|$, also $|Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup \{(m,m)\}| \leq |X \cup \{(m,m)\}| = |X \cup \{m\}|$ im Widerspruch zur Maximalität von X.

d) $\to$ b): Wir benötigen wieder den Satz von Hartog. Sei X eine beliebige Menge und α eine Ordinalzahl mit $\neg(\alpha \leq X)$ (Satz von Hartog). Es gilt nun: $|X \times \alpha| \leq |(X \times X) \cup (X \times \alpha) \cup (\alpha \times X) \cup (\alpha \times \alpha)| = |(X \cup \alpha) \times (X \cup \alpha)| = |X \cup \alpha|$. Sei also $f : X \times \alpha \to X \cup \alpha$ eine injektive Abbildung.
1 Fall: $\exists x \in X$ mit $f(\{x\} \times \alpha) \subseteq X$. Dann folgt aus $|\alpha| = |\{x\} \times \alpha|$ und der Injektivität von f sofort $\alpha \leq X$, im Widerspruch zur Voraussetzung an α.
Also 2. Fall: Für alle $x \in X$ gilt $f(\{x\} \times \alpha) \nsubseteq X$. Das heißt für jedes $x \in X$ ist $\gamma_x := \{\beta \in \alpha \mid f(x,\beta) \in \alpha\} \neq \emptyset$.
Für $x \in X$ sei $g(x)$ das minimale Element aus γ_x. Also haben wir eine Abbildung $h : X \to \alpha$ definiert durch $h(x) := f(x, g(x))$. h ist dann injektiv und wir können auf X eine Wohlordnung induzieren.

b) $\Rightarrow$ a) Wir wählen auf A eine Wohlordnung und wählen für jedes $B \in \mathscr{P}(A)$ einfach das kleinste Element aus B. Das definiert eine Auswahlfunktion.

1.4 Kardinalzahlen

Wir nennen eine Ordinalzahl α Kardinalzahl, wenn $\forall \beta \in \alpha$ gilt $\neg\exists f : \alpha \to \beta$ bijektiv. Die Klasse aller Kardinalzahlen ist als Teilklasse der Ordinalzahlen natürlich wieder wohlgeordnet.

Zur Erinnerung: Für zwei Mengen X,Y hatten wir den Ausdruck $|X| = |Y|$ als Abkürzung für "$\exists f : X \to Y$ bijektiv" eingeführt.

Wir definieren nun den Ausdruck $|X|$, für eine Menge X, als die kleinste Ordinalzahl α mit $|X| = |\alpha|$. Ist das sinnvoll? Ja, denn X lässt sich wohlordnen und ist somit ordnungsisomorph zu einer Ordinalzahl β insbesondere also $|X| = |\beta|$. Die Klasse $A := \{\beta \mid \beta$ ist Ordinalzahl und $|X| = |\beta|\}$ ist also nicht leer und besitzt somit ein kleinstes Element α. Damit muss α also auch bereits eine Kardinalzahl sein!

Den Ausdruck $|X| = |Y|$ können wir nun also auf zwei Weisen lesen. zum einen "$\exists f : X \to Y$ bijektiv" und zum anderen "die X zugeordnete Kardinalzahl ist gleich der Y zugeordneten Kardinalzahl". Letztendlich bringt beides die gleiche Vorstellung über X und Y zu Tage, nämlich: X und Y haben "gleich viele Elemente". Sprechen wir also in Zukunft von der Anzahl der Elemente einer Menge X, so meinen wir $|X|$. Der Ausdruck $|X| \leq |Y|$ hat also die Bedeutung $\alpha \leq \beta$, wenn $|X| = \alpha$ und $|Y| = \beta$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass es eine Injektion $f : X \to Y$ gibt. $|X| < |Y|$ hat hingegen stärker die Bedeutung $\alpha < \beta$, es gibt also eine Injektion $f : X \to Y$, aber es gibt keine Surjektion $X \to Y$.

1.4.1 Lemma

a) A, B, C seinen Mengen, mit $B \cap C = \emptyset$. Dann gilt: $|A^{B\cup C}| = |A^B \times A^C|$.

b) A, B, C seien diesmal vollkommen beliebige Mengen, dann gilt $|(A^B)^C| = |A^{B\times C}|$ und $|A^C \times B^C| = |(A\times B)^C|$.

Beweis: Übungsaufgabe!

1.4.2 Lemma

Sei X eine unendliche Menge,

Λ eine Menge von Mengen mit $|\Lambda| \leq |X|$ und $\forall\, \lambda \in \Lambda$ gilt $|\lambda| \leq |X|$,

$\Gamma := \{\gamma \subseteq \mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \mid X = \bigcup \gamma$ und $\forall\, g_1, g_2 \in \gamma$ gilt $(g_1 \neq g_2 \;\Rightarrow\; g_1 \cap g_2 = \emptyset)\}$ (die Menge aller Zerlegungen von X),

$\mathscr{P}_{<\omega}(X) := \{A \subset X \mid A$:endlich $\}$ und $\mathscr{P}_{|X|}(X) := \{A \subseteq X \mid |A| = |X|\}$.

Dann gilt:

a) $|\bigcup \Lambda| \leq |X|$

b) $|X| = |X^n| = |\mathscr{P}_{<\omega}(X)|$

c) $|\Gamma| = |\mathscr{P}(X)| = |\{0,1\}^X| = |X^X| = |\mathscr{P}_{|X|}(X)|$

d) $|X \times Y| = max(|X|, |Y|)$.

Beweis: Übungsaufgabe!

1.4.3 Lemma (von König)

$(M_i)_{i\in I}$, $(N_i)_{i\in I}$ seien zwei Familien von Mengen mit $\forall\ i \in I\ |M_i| < |N_i|$. dann gilt: $|\bigcup_{i\in I} M_i| < |\prod_{i\in I} N_i|$. Speziell erhalten wir: $|X| < |\mathscr{P}(X)|$ für jede Menge X.

Beweis: Annahme $\exists\ f : \bigcup_{i\in I} M_i \to \prod_{i\in I} N_i$ surjektiv, weiter seien $p_j : \prod_{i\in I} N_i \to N_j$ für $j \in I$ die natürlichen Projektionen. Wir betrachten dann $x = (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in N_i \setminus p_i(f(M_i))$; letztere Menge ist $\neq \emptyset$, wegen $\forall\ i \in I\ |M_i| < |N_i|$. Also gibt es ein $z \in M_i$ für ein $i \in I$ mit $f(z) = x$. Dann ist aber $x_i = p_i(f(z)) \in p_i \circ f(M_i)$ im Widerspruch zur Wahl von x_i.

1.4.4 Definition von Summe und Produkt von Kardinalzahlen

Sei $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Kardinalzahlen. Dann sind die Kardinale Summe und Das Kardinale Produkt folgendermaßen definiert: $\sum_{i\in I} \alpha_i := |\bigcup_{i\in I} \alpha_i \times \{i\}|$ bzw. $\prod_{i\in I} \alpha_i := |\prod_{i\in I} \alpha_i|$.

1.4.5 Definition: Kofinalität

Sei A eine geordnete Menge. Eine geordnete Menge B heißt kofinal in A, wenn es eine unbeschränkte Funktion $f : B \to A$ gibt, also mit der Eigenschaft: Für alle $a \in A$ existiert ein $b \in B$ mit $a \leq f(b)$. Für eine Ordinalzahl α definieren wir $cf(\alpha) :=$ kleinste Ordinalzahl β, so dass β kofinal in α ist. Z.B. $cf(0) = 0$ und falls α keine Limesordinalzahl ist, also wenn $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ so ist $cf(\alpha) = 1$.

1.4.6 Lemma

a) Für alle Ordinalzahlen α gilt $cf(\alpha) \leq \alpha$.
b) Für $\gamma = |cf(\alpha)|$ gibt es auch eine monotone unbeschränkte Funktion $f : \gamma \to \alpha$.
c) $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$

Beweis: a) Folgt aus der Definition.
b) Sei $g : \gamma \to \alpha$ unbeschränkt (o.B.d.A. sei α eine Limesordinalzahl). Definiere $f : \gamma \to \alpha$ durch $f(\delta) := \bigcup\{g(\beta) \mid \beta < \delta\}$. Wenn nämlich $\delta < \gamma$, dann ist $g|\delta : \delta \to \alpha$ nicht unbeschränkt, also $f(\delta) < \alpha$. Andererseits ist $g : \gamma \to \alpha$ offensichtlich unbeschränkt in α und nach Konstruktion auch monoton.
c) Ist wieder offensichtlich.

1.4.7 Lemma

Sei α eine unendliche Kardinalzahl. Dann ist $cf(\alpha)$ die kleinste Kardinalzahl λ derart, dass eine Folge $(S_\gamma)_{\gamma<\lambda}$ von Teilmengen von α existiert mit: $\alpha = \bigcup_{\gamma<\lambda} S_\gamma$ und $|S_\gamma| < \alpha$ für alle $\gamma < \lambda$.

Beweis: Sei $f : cf(\alpha) \to \alpha$ unbeschränkt. Dann ist $(S_\gamma)_{\gamma<cf(\alpha)}$ definiert durch

$$S_\gamma := \{f(\delta) \mid \delta < \gamma\}$$

die gewünschte Familie.

Sei andererseits $\lambda < cf(\alpha)$. Nehmen wir mal an es gibt trotzdem eine entsprechende Folge $(S_\gamma)_{\gamma<\lambda}$. Wegen $\lambda < cf(\alpha)$ ist $\mu := sup\{|S_\gamma| \mid \gamma < \lambda\} < \alpha$. Für $\delta < \alpha$ sei $g(\delta) := inf\{\gamma < \lambda \mid \delta \in S_\gamma\}$ und für $\gamma < \lambda$ sei $f_\gamma : S_\gamma \to |S_\gamma|$ eine Bijektion. Dann ist aber $h : \alpha \to \lambda \times \mu$, $h(\delta) := (g(\delta), f_{g(\delta)}(\delta))$ injektiv, also $\alpha \leq \lambda \times \mu = max(\lambda, \mu) < \alpha$ - ein Widerspruch.

1.4.8 Lemma

Sei α eine unendliche Kardinalzahl. Dann gilt:
a) $\alpha < \alpha^{cf(\alpha)}$ b) $\alpha < cf(2^\alpha)$

Beweis: a) Sei $\alpha = \sum_{\xi<cf(\alpha)} \alpha_\xi$ mit $\alpha_\xi < \alpha$ für $\xi < cf(\alpha)$. Dann folgt aus dem Satz von König $\alpha = \sum_{\xi<cf(\alpha)} \alpha_\xi < \prod_{\xi<cf(\alpha)} \alpha = \alpha^{cf(\alpha)}$.
b) Angenommen $cf(2^\alpha) \leq \alpha$. Dann folgt mit a) $2^\alpha < (2^\alpha)^{cf(2^\alpha)} \leq (2^\alpha)^\alpha = 2^{\alpha\times\alpha} = 2^\alpha$ - ein Widerspruch.

2 Erste Topologische Konzepte

"I am a most unhappy man. I have unwittingly ruined my country. A great industrial nation is controlled by its system of credit. Our system of credit is concentrated. The growth of the nation, therefore, and all our activities are in the hands of a few men. We have come to be one of the worst ruled, one of the most completely controlled and dominated Governments in the civilized world no longer a Government by free opinion, no longer a Government by conviction and the vote of the majority, but a Government by the opinion and duress of a small group of dominant men."
Woodrow Wilson, 1919, after having been tricked to sign the Federal Reserve Act

2.1 Topologische Räume

"Wer sich keinen Punkt denken kann, der ist einfach zu faul dazu."
Mathematiklehrer Brenneke in *Eduards Traum* von Wilhelm Busch

In diesem Abschnitt definieren wir den zentralen Begriff des Skriptes, den topologischen Raum.

2.1.1 Definition grundlegender Begriffe

Ein **Topologischer Raum** ist ein geordnetes Paar (X,τ), wobei X eine Menge ist und τ folgenden Bedingungen genügt:

1. $X \in \tau \subseteq \mathscr{P}(X)$
2. $\forall A,B \in \tau$ ist auch $A \cap B \in \tau$
3. $\forall \sigma \subseteq \tau$ ist auch $\bigcup_{S\in\sigma} S \in \tau$

Die Elemente aus τ heißen offenen Mengen, deren Komplemente heißen abgeschlossene Mengen. Aus 3. folgt also z.B. $\emptyset = \bigcup_{S\in\emptyset} S \in \tau$. Eine Menge $V \subseteq X$ heißt **Umgebung** des Punktes x, wenn es ein $U \in \tau$ gibt mit $x \in U \subseteq V$. Eine Menge α von Umgebungen eines Punktes $x \in X$ heißt Umgebungsbasis von x, wenn es zu jedem $O \in \tau$ mit $x \in O$ ein $V \in \alpha$ gibt, mit $V \subseteq O$. Analog sprechen wir von Umgebungen von Teilmengen. U ist eine Umgebung von $A \subseteq X$, wenn es ein $O \in \tau$ gibt mit $A \subseteq O \subseteq U$. Analog ist eine Menge α von Umgebungen von A eine **Umgebungsbasis** von A, wenn es zu jeder offenen Menge O mit $A \subseteq O$ ein $U \in \alpha$ gibt mit $U \subseteq O$.

Wir führen eine **wichtige Notation** ein. Für $x \in X$ setzen wir $\dot{x} := \{A \subseteq X \mid x \in A\}$. Die Menge aller offenen Umgebungen von x schreibt sich dann einfach als $\dot{x} \cap \tau$ (siehe dazu auch den Abschnitt über Filter und Ultrafilter).

Wenn (X,τ) ein top. R. ist und $Z \subseteq X$, so wird (Z,τ_Z) mit $\tau_Z := \{O \cap Z \mid O \in \tau\}$ ein topologischer Raum. τ_Z heißt dann die **Spurtopologie** und (Z,τ_Z) ist dann ein **Teilraum** von (X,τ). Jede im Teilraum Z offene Menge U ist also von der Form $U = O \cap Z$, für ein in X offenes O. Ist A eine im Teilraum Z abgeschlossene Menge, so ist $Z \setminus A = O \cap Z$, mit $O \in \tau$. Es folgt

$A = (X \setminus O) \cap Z$. Setzen wir $B := X \setminus O$, so ist B in X abgeschlossen und es gilt $A = B \cap Z$. Die in Z abgeschlossenen Mengen sind also ebenfalls die Spuren von in X abgeschlossenen Mengen.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig** bezüglich den topologischen Räumen $(X,\tau),(Y,\sigma)$, falls $\forall O \in \sigma \; f^{-1}(O) \in \tau$. Wenn klar ist welche Topologie wir auf X bzw. Y betrachten schreiben wir auch einfach: Sei $f : X \to Y$ stetig. Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ heißt ein **Homöomorphismus**, falls f und f^{-1} stetig sind. Wir nennen eine Abbildung $f : X \to Y$ eine homöomorphe Einbettung (oder auch nur eine Einbettung), wenn $f : X \to f(Y)$ ein Homöomorphismus (bzgl. der Spurtopologie) ist.

Wenn wir zwei Topologien τ und σ auf X haben, so sagen wir τ ist **feiner** als σ bzw. σ ist **gröber** als τ, wenn $\sigma \subseteq \tau$. Offensichtlich ist τ feiner als σ genau dann, wenn $id_X : (X,\tau) \to (X,\sigma)$ stetig ist.

Die Potenzmenge ist offensichtlich eine Topologie und wird die **diskrete Topologie** genannt (Symbol: τ_{dis}). $\{\emptyset, X\}$ ist offensichtlich auch eine Topologie auf einer Menge X. Sie wird die **indiskrete Topologie** genannt (Symbol: τ_{ind}).

Wenn (X,τ) ein topologischer Raum ist, so gilt $\tau_{ind} \subseteq \tau \subseteq \tau_{dis}$. Anders gesagt ist τ_{ind} die gröbste und τ_{dis} die feinste Topologie auf X.

Falls (X,τ) ein topologischer Raum ist und $\mathscr{B} \subseteq \tau$, mit der Eigenschaft: $\forall O \in \tau \; \exists \, \mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$ derart, dass $O = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_0} B$, dann heißt $\mathscr{B}$ eine **Basis** von τ. Desweiteren heißt $\mathscr{S}$ eine **Subbasis** von τ, falls es eine Basis $\mathscr{B}$ von τ gibt mit: $\forall B \in \mathscr{B} \, \exists S_1,\ldots,S_n \in \mathscr{S}$ mit $B = S_1 \cap \ldots \cap S_n$.

Wenn der Raum X eine abzählbare Basis hat, dann nennen wir ihn ein A2-Raum, oder er genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom. Wenn es ein zweites Abzählbarkeitsaxiom gibt, dann gibt es natürlich auch ein erstes (zur Abkürzung mit A1 bezeichnet); und zwar sagen wir X ist ein A1-Raum, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis hat. Jeder A2-Raum ist also auch ein A1-Raum.

Der Schnitt von beliebig vielen Topologien auf einer Menge X ist wieder eine Topologie (Beweis?). Die Vereinigung der Topologien, muss keine Topologie mehr sein (Gegenbeispiel?). Allerdings gilt:

2.1.2 Satz

Sei X eine Menge und $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$. Dann gibt es eine gröbste Topologie $top(\alpha)$ auf X, welche α umfasst (also $\alpha \subseteq top(\alpha) \subseteq \tau$ für jede Topologie τ mit $\alpha \subseteq \tau$).

Beweis: Setze $\mathscr{B} := \{\bigcap_{k=1}^n A_k \mid A_k \in \alpha \text{ für } k = 1\ldots n \leq 1\} \cup \{X\}$ und $top(\alpha) := \{\bigcup \beta \mid \beta \subseteq \mathscr{B}\}$. Offensichtlich $top(\alpha) \subseteq \mathscr{P}(X)$ und $X \in top(\alpha)$. Seien $\bigcup \beta, \bigcup \beta' \in top(\alpha)$ dann ist $\bigcup \beta \cap \bigcup \beta' = \bigcup_{(B,B') \in \beta \times \beta'} B \cap B' = \bigcup \gamma$, wobei $\gamma := \{B \cap B' \mid (B,B') \in \beta \times \beta'\} \subseteq \mathscr{B}$. Also $\bigcup \beta \cap \bigcup \beta' \in top(\alpha)$. Für $\sigma \subseteq top(\alpha)$ gilt (offensichtlich) $\bigcup \sigma \in top(\alpha)$. Somit ist $top(\alpha)$ als Topologie erkannt. Andererseits muss jede Topologie, welche α umfasst auch $top(\alpha)$ umfassen (Def. der Topologie!), also ist $top(\alpha)$ die gröbste derartige Topologie (man kann sie auch so definieren: Setze $T := \{\tau \subseteq \mathscr{P}(X) \mid \tau \text{ ist eine Topologie und } \alpha \subseteq \tau\}$ und dann $top(\alpha) := \bigcap_{\tau \in T} \tau$. Da $T \neq \emptyset$ kann hier nichts schiefgehen.).

Wenn $X = \bigcup \alpha$ ist dann ist α eine Subbasis von $top(\alpha)$.

2.1.3 Variante des Zornschen Lemmas

Sei $(X,<)$ eine partiell geordnete Menge. Für jedes $Y \subseteq X$ setzen wir $<_Y := < \cap (Y \times Y)$ und nennen $<_Y$ die auf Y von X induzierte Ordnung. Sei nun X mit der Eigenschaft, dass jede mit der induzierten Ordnung wohlgeordnete Teilmenge $Y \subseteq X$ eine obere Schranke in X hat. Dann gibt es in X maximale Elemente.

Beweis: Sei $Z := \{W \subseteq X \mid W \text{ ist durch } < \text{ eingeschränkt auf } W \text{ wohlgeordnet}\}$. Auf Z führen wir durch $V \prec W :\Leftrightarrow V \subsetneq W$ eine partielle Ordnung ein. Ist nun $(W_i)_{i \in I}$ eine Kette aus Z, dann ist $W := \bigcup_{i \in I} W_i$ mit der aus X induzierten Ordnung ebenfalls eine wohlgeordnete Menge, also $W \in Z$. Das "original" Zornsche Lemma angewendet sichert uns somit die Existenz maximaler Elemente in Z. Sei W solch ein maximales Element aus Z. Nach Voraussetzung an X hat W eine obere Schranke x in X. Dann muss aber bereits $x \in W$ sein (ansonsten könnte man die Wohlordnung einfach verlängern). Und nun muss x aber auch maximal in X sein (sonst könnte man wieder einfach die Wohlordnung verlängern).

2.1.4 Satz

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und P eine Eigenschaft, die Teilmengen von X zukommen kann.

Sei ferner $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ und $\mathscr{B}$ unendlich $\subseteq \mathscr{P}(X)$ mit $\forall V \in \tau \, \exists \mathscr{B}_V \subseteq \mathscr{B}$ mit $V = \bigcup \mathscr{B}_V$.

Außerdem gelte

a) $\forall \tau' \subseteq \tau$ gilt $\bigcup \tau' \in \tau$, **ODER** b) $\forall \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ gilt $\bigcup \mathscr{B}' \in \tau$.

Hat nun mit jeder durch Inklusion ($U \leq V \Leftrightarrow U \subseteq V$) wohlgeordneten Menge $\tau' \subseteq \tau$, die $|\tau'| \leq \alpha := |\mathscr{B}|$ erfüllt und deren Elemente alle die Eigenschaft P haben, auch $\bigcup \tau'$ die Eigenschaft P, dann gibt es in τ maximale Elemente mit der Eigenschaft P.

Beweis: Wir versehen $\sigma := \{V \in \tau \mid V \text{ hat die Eigenschaft } P\}$ mit der Inklusion als Ordnung. Sei σ' eine wohlgeordnete Teilmenge von σ. Für jedes $V \in \sigma'$ gibt es ein $\mathscr{B}_V \subseteq \mathscr{B}$ mit $\bigcup \mathscr{B}_V = V$. Wir setzen $\mathscr{B}' := \bigcup_{V \in \sigma'} \mathscr{B}_V \subseteq \mathscr{B}$.

Zu jedem $B \in \mathscr{B}'$ gibt es ein $V_B \in \sigma'$ mit $B \subseteq V_B$.

Es gilt $U := \bigcup \sigma' = \bigcup \mathscr{B}' \subseteq \bigcup_{B \in \mathscr{B}'} V_B \subseteq \bigcup \sigma' = U$ und somit ist $U \in \tau$. Außerdem ist $\sigma'' := \{V_B \mid B \in \mathscr{B}'\}$ als Teilmenge von σ' ebenfalls wohlgeordnet und erfüllt $U = \bigcup \sigma''$ und $|\sigma''| \leq \alpha$. Somit hat nach Voraussetzung auch U die Eigenschaft P und ist natürlich eine obere Schranke in σ für die Elemente aus σ'. Aus der oben stehenden Variante des Zornschen Lemmas schließen wir, dass es in σ maximale Elemente gibt.

2.1.5 Korollar (Reduktionssatz von Brouwer)

Sei (X,τ) ein top. Raum mit einer abzählbaren Basis $\mathscr{B}$ und sei P eine Eigenschaft für abgeschlossenen Mengen, so dass wenn $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und jedes A_i die Eigenschaft P hat, auch $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ die Eigenschaft P hat, dann gibt es minimale abgeschlossene Mengen, welche die Eigenschaft P haben.

Beweis: Wir definieren eine Eigenschaft P' für offene Mengen: $O \in \tau$ habe die Eigenschaft P', wenn $X \setminus O$ die Eigenschaft P hat. Aus obigem Satz folgt, dass es maximale (bzgl. Inklusion) offene Mengen U gibt, mit der Eigenschaft P'. Offenbar ist $A := X \setminus U$ dann eine minimale abgeschlossene Menge mit der Eigenschaft P.

2.1.6 Lemma

Seien $\mathscr{B}$ und $\mathscr{B}^*$ zwei Basen einer Topologie, mit $|\mathscr{B}^*| \leq |\mathscr{B}|$. Dann gibt es ein $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ mit $|\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{B}^*|$ und $\mathscr{B}'$ ist eine Basis derselben Topologie. Eine analoge Aussage gilt auch für Subbasen.

Beweis: Für $B \in \mathscr{B}^*\ \exists f(B) \subseteq \mathscr{B}$ mit $\bigcup f(B) = B$. Für $A \in f(B)\ \exists g_B(A) \subseteq \mathscr{B}^*$ mit $\bigcup g_B(A) = A$. Da $\bigcup_{A\in f(B)} g_B(A) \subseteq \mathscr{B}^*$, folgt $|\bigcup_{A\in f(B)} g_B(A)| \leq |\mathscr{B}^*|$. Für $C \in \bigcup_{A\in f(B)} g_B(A)$ wähle je ein $B_C \in \mathscr{B}$ mit $C \subseteq B_C \subseteq B$. Setze dann $\mathscr{B}_C := \{B_C \mid C \in \bigcup_{A\in f(B)} g_B(A)\}$ und $\mathscr{B}' := \bigcup_{B\in\mathscr{B}^*} \mathscr{B}_B$. Dann gilt $|\mathscr{B}_B| \leq |\mathscr{B}^*|$, also auch $|\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{B}^*|$ und außerdem ist $\mathscr{B}'$ eine Basis der Topologie. Denn $B \in \mathscr{B}^*$ impliziert $B = \bigcup(\bigcup_{A\in f(B)} g_B(A)) = \bigcup \mathscr{B}_B$ und $\mathscr{B}_B \subseteq \mathscr{B}'$.
Für den zweiten Teil der Behauptung seien $\mathscr{S}_1$ und $\mathscr{S}_2$ zwei Subbasen der Topologie. Für ein Mengensystem $\mathscr{M}$ führen wir folgende Schreibweise ein: $\mathscr{B}(\mathscr{M}) := \{\bigcap_{i=1}^n M_i \mid M_i \in \mathscr{M}\}$. Dann sind nämlich $\mathscr{B}(\mathscr{S}_1)$ und $\mathscr{B}(\mathscr{S}_2)$ Basen unserer Topologie und aus dem eben bewiesenem folgt, dass es eine Basis $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}(\mathscr{S}_1)$ der Topologie gibt, mit $|\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{B}(\mathscr{S}_2)|$. Für ein $B \in \mathscr{B}'\ \exists$ ein endliches $A_B \subseteq \mathscr{B}(\mathscr{S}_1)$, mit $B = \bigcap_{a\in A_B} a$. Setze dann $\mathscr{S}_0 := \bigcup_{B\in\mathscr{B}'} A_B \subseteq \mathscr{S}_1$. Offensichtlich ist $\mathscr{S}_0$ dann eine Subbasis unserer Topologie, mit $|\mathscr{S}_0| \leq |\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{B}(\mathscr{S}_2)| = |\mathscr{S}_2|$.

2.1.7 Definition des Offenen Kerns, Abschluß und Rand einer Menge

Sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes (X,τ). Dann heißt $Y^\circ := \{x \in Y \mid \exists O \in \tau$ mit $x \in O \subseteq Y\}$ der offenen Kern von Y und $\overline{Y} := \{x \in X \mid \forall O \in \tau$ mit $x \in O$ gilt $O \cap Y \neq \emptyset\}$ der Abschluss von Y.

2.1.8 Einfachste Eigenschaften

Es gilt: $Y^\circ = \bigcup_{O\in\tau, O\subseteq Y} O$ (folgt unmittelbar aus der Definition), also ist Y° die "größte" offene Menge in Y (insbesondere ist der offene Kern also offen). Analog ist $\overline{Y} = \bigcap_{X\setminus A\in\tau, Y\subseteq A} A$ (Beweis: Grundsätzlich halten wir fest: $Y \subseteq \overline{Y}$. Sei nun $x \in \overline{Y}$ und A abgeschlossen mit $Y \subseteq A$. Nun ist $X \setminus A$ offen. Wäre $x \in X \setminus A$, so währe $Y \cap (X \setminus A \neq \emptyset$ - ein Widerspruch. Also

$\overline{Y} \subseteq \bigcap_{X\setminus A\in\tau, Y\subseteq A} A$. Andererseits ist $\overline{Y}$ selber auch abgeschlossen, denn zu $z \in X \setminus \overline{Y}$ gibt es eine offenen Menge O mit $z \in O \subseteq X \setminus Y$. Damit ist dann aber auch jedes $z' \in O$ bereits im Komplement von $\overline{Y}$, also $O \subseteq X \setminus \overline{Y}$ - $\overline{Y}$ ist abgeschlossen. Damit ist $\overline{Y}$ selber eine der am Schnitt von $\overline{Y}$ beteiligten Mengen; es gilt also auch $\bigcap_{X\setminus A\in\tau, Y\subseteq A} A \subseteq \overline{Y}$.).

$\overline{Y}$ ist somit die "kleinste" abgeschlossene Menge, welche Y enthält. $\partial Y := \overline{Y} \setminus Y^\circ$ wird als der Rand von Y definiert. Es gelten folgende Rechenregeln:

1) $Y^\circ \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$, 2) $X \setminus Y^\circ = \overline{X \setminus Y}$ 3) $Y^{\circ\circ} = Y^\circ$ 4) $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ 5) $Y_1 \subseteq Y_2$ impliziert $Y_1^\circ \subseteq Y_2^\circ$ und $\overline{Y_1} \subseteq \overline{Y_2}$ 6) $\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2} = \overline{Y_1 \cup Y_2}$ und $Y_1^\circ \cap Y_2^\circ = (Y_1 \cap Y_2)^\circ$ 7) $\emptyset^\circ = \emptyset$ und $\overline{\emptyset} = \emptyset$

Die Beweise sind allesamt Routine. Wir sagen $Y \subseteq X$ liegt **dicht** in X, falls $\overline{Y} = X$. Jede nichtleere offene Menge enthält also Punkte aus Y. Wen ein Raum eine abzählbare dicht Teilmenge enthält, so bekommt er einen extra Namen: Man nennt ihn separabel.

2.1.9 Beispiel einer interessanten Topologie auf $\mathbb{Z}$

Wir betrachten Teilmengen $N_{a,b} := \{a + nb \mid n \in \mathbb{Z}\}$, mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b > 0$, der ganzen Zahlen und setzen $\tau := \{O \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall a \in O \exists b > 0 \text{ mit } N_{a,b} \subseteq O\}$. Man zeige (am besten der Reihe nach) τ ist eine Topologie auf $\mathbb{Z}$, $\mathscr{B} := \{N_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b > 0\}$ ist eine Basis von τ, jede nicht leere offene Menge ist unendlich, jede Menge $N_{a,b}$ ist abgeschlossen, $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}$ ($\mathbb{P}$ bezeichnet die Menge der Primzahlen) und folgere, dass $\mathbb{P}$ unendlich sein muss.

2.1.10 Äquivalente Definition der Topologie duch Abschlussoperator

Sei $c : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften: Für alle $A, B \subseteq X$ gilt:

1) $A \subseteq c(A)$
2) $c(\emptyset) = \emptyset$
3) $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$
4) $c(c(A)) = c(A)$,

dann gibt es genau eine Topologie τ auf X, mit der Eigenschaft: $\forall A \subseteq X$ gilt $c(A) = \overline{A}$ (gemeint ist der Abschluss bezüglich τ). Die Abbildung wird auch Hüllenoperator oder Abschlussoperator genannt (nach Kuratowski).

Beweis: Wir setzen $\tau := \{U \subseteq X \mid c(X \setminus U) = X \setminus U\}$. Aus der Eigenschaft 1) folgt $c(X) = X$, ferner gilt $c(\emptyset) = \emptyset$, also $\emptyset, X \in \tau$. Seien $U, V \in \tau$. Dann $c(X \setminus (U \cap V)) = c((X \setminus U) \cup (X \setminus V)) = c(X \setminus U) \cup c(X \setminus V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X \setminus (U \cap V)$, also $U \cap V \in \tau$. Zeigen wir als nächstes $A \subseteq B \Rightarrow c(A) \subseteq c(B)$. Dies folgt aus $c(B) = c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$. Nun können wir zeigen, dass mit $\sigma \subseteq \tau$ auch $\bigcup \sigma \in \tau$ gilt. Wir haben nämlich $X \setminus \bigcup \sigma \subseteq c(X \setminus \bigcup \sigma) = c(\bigcap_{V\in\sigma}(X \setminus V)) \subseteq \bigcap_{V\in\sigma}(X \setminus V) = X \setminus \sigma$, also $c(X \setminus \bigcup \sigma) = X \setminus \sigma$ und damit $\bigcup \sigma \in \tau$. Wir haben damit gezeigt, dass τ eine Topologie ist. Zu zeigen bleibt $\forall A \subseteq X$ gilt $c(A) = \overline{A}$. Es ist $X \setminus c(A) \in \tau$ (folgt aus 4)) und damit $c(A)$ abgeschlossen!, Also $\overline{A} \subseteq c(A)$. Andererseits ist $X \setminus \overline{A} \in \tau$, also $c(A) \subseteq c(\overline{A}) = \overline{A}$. Insgesamt somit $c(A) = \overline{A}$.

2.1.11 Das Abschluss-Komplement Problem

Bereits hier ergibt sich eine interessante Frage: Wie viel verschiedene Menge können wir - ausgehend von einer fest gewählten Menge A - nur mit Hilfe der Abschluss-Operation, offener

Kern-Operation und Komplementbildung bekommen. Eine solche ist z.B. $X \setminus \overline{(X \setminus \overline{A})^\circ}$. Diese Frage hat eine mysteriöse Antwort:

In einem beliebigen topologischen Raum (X, τ) kann man maximal 14 verschiedene Mengen auf diese Weise bekommen (ausgehend von einer fest gewählten Menge A)!

Da $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ und $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ und $X \setminus (X \setminus A) = A$ gilt, kann man sich darauf beschränken, die Operationen abwechselnd anzuwenden. Ferner gilt $A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}$. Wir können uns schlussendlich also auf abwechselnde Anwendung von Komplement und Abschluss beschränken. Zur besseren Übersicht führen wir folgende Schreibweise ein: $A^- := \overline{A}$ und $A^| := X \setminus A$. Die Frage ist also: Haben die Folgen

$$A, A^-, A^{-|}, A^{-|-}, \ldots \ (*) \quad \text{und} \quad A^|, A^{|-}, A^{|-|}, \ldots \ (**)$$

unendlich viele verschiedene Folgeglieder oder nicht. Und wenn nicht, wie viele haben sie dann? Schauen wir uns die erste Folge an:

$A, A^-, A^{-|}, A^{-|-} = \overline{X \setminus \overline{A}} = X \setminus (\overline{A})^\circ, A^{-|-|} = (\overline{A})^\circ, A^{-|-|-} = \overline{(\overline{A})^\circ}, A^{-|-|-|} = X \setminus \overline{(\overline{A})^\circ},$
$A^{-|-|-|-} = X \setminus (\overline{(\overline{A})^\circ})^\circ$

Behauptung: $(\overline{A})^\circ = (\overline{(\overline{A})^\circ})^\circ$. Zeigen wir dies: Offensichtlich gilt $(\overline{A})^\circ \subseteq \overline{(\overline{A})^\circ}$, also $(\overline{A})^\circ = ((\overline{A})^\circ)^\circ \subseteq (\overline{(\overline{A})^\circ})^\circ$. Andererseits gilt (auch offensichtlich) $(\overline{A})^\circ \subseteq \overline{A}$, also $\overline{(\overline{A})^\circ} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ und damit $(\overline{(\overline{A})^\circ})^\circ \subseteq (\overline{A})^\circ$.

Das achte Folgeglied der Folge $(*)$ ist also gleich dem vierten - wir haben eine Schleife! Die Folge $(*)$ hat also maximal 7 verschiedene Folgeglieder. Ersetzen wir in der Folge $(*)$ jedes A durch $X \setminus A$, so erhalten wir die Folge $(**)$. Diese hat also ebenfalls maximal 7 verschiedene Folgeglieder. Insgesamt bekommen wir somit maximal 14 verschiedene Mengen.

Als Beispiel einer Teilmenge A eines top. Raumes, bei der tatsächlich auch 14 verschiedene Mengen herauskommen, möge $A := \{0\} \cup (1,2) \cup (2,3) \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ dienen.

Zum Abschluß dieses ersten Abschnitts noch zwei wichtige Definitionen.

2.1.12 Definition: F_σ-Menge und G_δ-Menge

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A, O \subseteq X$. Man nennt O eine F_σ-Menge, wenn es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlosserner Mengen gibt mit $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Man nennt A eine G_δ-Menge, wenn es eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen gibt mit $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

2.1.13 Definition: Netzwerk

Sei (X, τ) ein top. Raum. Eine Menge $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt Netzwerk, wenn es zu jedem $U \in \tau$ ein $\alpha' \subseteq \alpha$ gibt mit $U = \bigcup \alpha'$. Wir sprechen von abgeschlossenen Netzwerken, wenn die Elemente $A \in \alpha$ abgeschlossenen sind (von offenen Netzwerken sprechen wir nicht, dass sind nämlich einfach die Basen von X).

2.1.14 Bemerkung

Möchte man "Topologie" mit wenigen Wörtern beschreiben, so fällt das nicht ganz leicht. Was macht man in der Topologie? Man hat einen sehr allgemeinen Raumbegriff und untersucht beispielsweise Eigenschaften, die unter stetigen Abbildungen erhalten bleiben. Ganz vorsichtig könnte man dies also als eine Art ”Stetigkeitsgeometrie” beschreiben. Gibt es zu zwei topologischen Räumen X und Y eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung $f : X \to Y$, so sagen wir X und Y sind homöomorph. Aus topologischer Sicht unterscheiden sie sich also nicht - sie werden ineinander deformiert. Ein kleinen Ausschnitt von dem, was Topologie nun sein kann, erfährt der Leser in den folgenden Kapiteln ;-)

2.2 Stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen

Wie kann man verschiedene topologische Räume miteinander vergleichen? Die Antwort ist: Mit Abbildungen zwischen diesen Räumen, die mit der topologischen Struktur in einem gewissen Sinn ”verträglich” sind. Realisiert wird dies im Konzept der stetigen Abbildung.

2.2.1 Definition: Stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei top. Räumen (X, τ) und (Y, σ) heißt stetig, wenn die Urbilder offener Mengen in Y wieder offen in X sind (statt $f : X \to Y$ schreiben wir oftmals auch $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$). Wir nennen die Abbildung offen, wenn die Bilder offener Mengen in X offen in Y sind. Und wir nennen sie abgeschlossen, wenn die Bilder abgeschlossener Mengen in X abgeschlossen in Y sind. In der Regel interessiert man sich nur für offene bzw. abgeschlossene Abbildungen, die bereits stetig sind. Es gibt aber keinen Grund dies bereits in der Definition einzuschränken (wir sprechen dann halt immer von stetigen und offenen bzw. stetigen und abgeschlossenen Abbildungen). Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ heißt ein Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind. Wir nennen eine Abbildung $f : X \to Y$ eine homöomorphe Einbettung (oder auch nur eine Einbettung), wenn $f : X \to f(Y)$ ein Homöomorphismus (bzgl. der Spurtopologie) ist.

2.2.2 Charakterisierungen der Stetigkeit

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) f ist stetig.
2) Die Urbilder einer Subbasis für Y sind offen in X.
3) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
4) $\forall M \subseteq X$ gilt $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.
5) Zu jedem $x \in X$ und zu jeder offenen Menge V mit $f(x) \in V$ gibt es eine offene Menge U mit $x \in U$ und $f(U) \subseteq V$.

Beweis: 1) $\to$ 2) ist klar und für 2 $\Rightarrow$ 1) genügt es zu bemerken, dass Urbilder von Abbildungen Schnitte und Vereinigungen respektieren (Lemma 1.2.1).

1) $\Leftrightarrow$ 3) folgt ebenfalls aus Lemma 1.2.1.

1) $\Rightarrow$ 4) Sei $y \in f(\overline{M})$ und $y \in V$, V ist offen. Dann gibt es ein $x \in \overline{M}$ mit $x \in f^{-1}(V)$, welche auch offen ist. Also $M \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Dann aber auch $f(M) \cap V \neq \emptyset$. Also $y \in \overline{f(M)}$.

4) $\Rightarrow$ 3) Sei A abgeschlossen in Y. Setze dann $M := f^{-1}(A)$. Es gilt $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$, also $f(\overline{f^{-1}(A)}) \subseteq \overline{A} = A$. Dann folgt aber $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(A)$ und somit $\overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(A)$. Letztere Menge ist also abgeschlossen.

1) $\Rightarrow$ 5) Sei $x \in X$ und V offen mit $f(x) \in V$. Dann ist $U := f^{-1}(V)$ auch offen, enthält x und es gilt $f(U) \subseteq V$.

5) $\Rightarrow$ 1) Sei V offen in Y und $x \in f^{-1}(V)$ (falls das Urbild lehr ist, dann ist es offen). Dann ist $f(x) \in V$ und es gibt somit ein in X offenes U_x mit $x \in U_x$ und $f(U_x) \subseteq V$, also $U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Dann ist aber auch $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$ offen!

2.2.3 Bemerkung

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen den topologischen Räumen (X, τ) und (Y, σ) und ist $x \in X$ mit der Eigenschaft: $\forall O \in \dot{f(x)} \cap \sigma \, \exists U \in \dot{x} \cap \tau$ mit $f(U) \subseteq O$, so sagen wir die Abbildung f ist an der Stelle x stetig. Das obige Lemma sagt also beispielsweise: Ist f an jeder Stelle $x \in X$ stetig, so ist sie als Abbildung zwischen X und Y stetig.

2.2.4 Klebelemma

Seien X und Y Mengen, $(X_a)_{a \in A}$ eine Familie von Mengen mit $X = \bigcup_{a \in A} X_a$ und sei $(f_a : X_a \to Y)_{a \in A}$ eine Familie zugehöriger Abbildungen mit der Eigenschaft: $\forall \alpha, \beta \in A$ gilt $f_\alpha | (X_\alpha \cap X_\beta) = f_\beta | (X_\alpha \cap X_\beta)$. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f | X_\alpha = f_\alpha$.

Wenn X und Y zusätzlich top. Räume sind und alle f_α stetig (bzgl. der Teilraumtopologie) sind, dann folgt aus jeder der beiden folgenden Bedingungen die Stetigkeit von f.

a) A ist endlich und alle X_α sind abgeschlossen in X,

b) alle X_α sind offen in X.

Beweis: Die Existenz der Abbildung ist klar, ebenso die Eindeutigkeit. Zu zeigen bleibt die Stetigkeit von f unter den gegebenen Bedingungen. Dies bleibt als Übung. Man beachte, dass eine Menge abgeschlossen in der Teiraumtopologie einer anderen abgeschlossenen Menge ist, g.d.w. sie abgeschlossen im Gesamtraum ist (analog für offene Mengen) und verwende die verschiedenen Charakterisierungen von Stetigkeit.

2.2.5 Lemma

a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ ist, für jede Teilmenge $A \subseteq X$. Mit Satz 2.2.2 ergibt sich dann: $f : X \to Y$ ist genau dann stetig und abgeschlossen, wenn $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ist für jedes $A \subseteq X$.

b) Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann offen, wenn $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$ ist, für jede Teilmenge $A \subseteq X$. Ferner ist f offen, wenn die Bilder einer beliebigen Basis offen sind.

Beweis: a) $f(\overline{A})$ ist abgeschlossen und $f(A) \subseteq f(\overline{A})$, also auch $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

b) Nun ist $f(A^\circ)$ offen und $f(A^\circ) \subseteq f(A)$ und somit auch $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$. Da das Bild einer Vereinigung gleich der Vereinigung der Bilder ist, folgt auch die zweite Aussage sofort.

2.2.6 Charakterisierung offener und abgeschlossener Abbildungen

a) Eine Abbildung $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ ist genau dann offen, wenn es zu jedem $B \subseteq Y$ und zu jedem abgeschlossenen $A \subseteq X$ mit $f^{-1}(B) \subseteq A$ eine abgeschlossene Menge $C \subseteq Y$ gibt, mit $B \subseteq C$ und $f^{-1}(C) \subseteq A$.

b) Eine Abbildung $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn es zu jedem $y \in Y$ und zu jedem $U \in \tau$ mit $f^{-1}(y) \subseteq U$ ein $V \in \dot{y} \cap \sigma$ gibt, mit $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Beweis: a) Ist f offen, $B \subseteq Y$ und A abgeschlossen mit $f^{-1}(B) \subseteq A$, so ist $C := Y \setminus f(X \setminus A)$ abgeschlossen und es gilt offensichtlich $B \subseteq C$ und $f^{-1}(C) \subseteq A$ (offensichtlich heißt hier, dass man es unmittelbar nachrechnen kann).

Zeigen wir nun, dass unter der angegebenen Bedingung die Abbildung f offen ist. Dazu sei $P \in \tau$. Wir zeigen, dass $f(P)$ offen ist. Dazu setzen wir $B := Y \setminus f(P)$. Setzen wir $A := X \setminus P$, so ist A abgeschlossen und es gilt $f^{-1}(B) \subseteq A$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein in Y abgeschlossenes C mit $B \subseteq C$ und $f^{-1}(C) \subseteq A$. Damit bekommen wir $Y \setminus f(P) \subseteq C$, also $Y \setminus C \subseteq f(P)$ $(*)$ und $f^{-1}(C) \subseteq X \setminus P$, also $P \subseteq X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$ $(**)$. Aus $(**)$ folgt $f(P) \subseteq Y \setminus C$ und zusammen mit $(*)$ folgt $f(P) = Y \setminus C$. Da C abgeschlossen ist, folgern wir, dass $f(P)$ offen ist.

b) Sei f zunächst abgeschlossen und $U \in \tau$ mit $f^{-1}(y) \subseteq U$, für $y \in Y$. Dann ist $V := Y \setminus f(X \setminus U) \in \dot{y} \cap \sigma$ und es gilt $f^{-1}(V) \subseteq U$ (beide Behauptungen kann man problemlos nachrechnen).

Zeigen wir nun, dass unter der angegebenen Bedingung die Abbildung f abgeschlossen ist. Sei dazu $A \subseteq X$ und $y \in \overline{f(A)}$. Angenommen $\forall x \in f^{-1}(y) \exists U_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $A \cap U_x = \emptyset$. Dann ist $U := \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x \in \tau$ mit $f^{-1}(y) \subseteq U$ und $U \cap A = \emptyset$. Es gibt dann ein $V \in \dot{y} \cap \sigma$ mit $f^{-1}(V) \subseteq U$. Dann gilt aber $V \cap f(A) \neq \emptyset$, es gibt also ein $x \in A$ mit $f(x) \in V$. Dann folgt $x \in A \cap f^{-1}(V) \subseteq A \cap U = \emptyset$. Offensichtlich ist dies ein Widerspruch und somit $\exists x \in f^{-1}(y) \forall U \in \dot{x} \cap \tau :\ A \cap U \neq \emptyset$. Das bedeutet aber gerade $x \in \overline{A}$ und somit $y = f(x) \in f(\overline{A})$. Damit ist f dann abgeschlossen.

2.3 Initialtopologie und Finaltopologie

Wie beschafft man sich auf einer Menge eine Topologie? Die zwei grundlegenden Konstruktionen - Initialtopologie und Finaltopologie - lernen wir nun kennen. Als wichtigste Anwendung der Initialtopologie werden wir dann die wichtige Produkttopologie (auf einem Produkt von Mengen) definieren und als wichtigste Anwendung der Finaltopologie werden wir auf einer Menge von Äquivalenzklassen die sogenannte Quotiententopologie definieren.

2.3.1 Satz und Definition: Initialtopologie

Sei X eine Menge und $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ eine Klasse von topologischen Räumen und zugehörigen Abbildungen $f_i : X \to X_i$.

a) Es gibt dann eine gröbste Topologie τ auf X, bezüglich derer alle f_i stetig sind. Diese Topologie heißt die Initialtopologie bezüglich der Daten $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ und $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$.

b) Die Initialtopologie τ ist durch folgende universelle Eigenschaft eindeutig bestimmt:

Für jeden topologischen Raum (Y,σ) und jede Abbildung $g : Y \to X$ gilt: g ist stetig, genau dann wenn $\forall\, i \in I\ \ f_i \circ g$ stetig ist.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i\circ g"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Beweis: a) Setze $\alpha := \bigcup_{i\in I}\{f_i^{-1}(O) \mid O \in \tau_i\}$ und $\tau := top\,(\alpha)$. Für den unwahrscheinlichen Fall, dass $I = \emptyset$ ist, setzen wir $\alpha := \{X\}$.

b) Sei τ die initiale Topologie auf X bezüglich der Daten $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ und $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$. Wir zeigen, dass (X, τ) die universelle Eigenschaft erfüllt. Sei dazu (Y,σ) ein beliebiger topologischer Raum mit einer Abbildung $g : Y \to X$. Falls g stetig ist, so sind auch alle Kompositionen $f_i \circ g$ stetig (die f_i sind schließlich stetig). Seien nun umgekehrt alle Kompositionen $f_i \circ g$ stetig. Wir müssen zeigen, dass dann auch g stetig ist. Nun ist α offensichtlich eine Subbasis für τ. Es reicht also sich die Urbilder unter g von Elementen aus α anzuschauen. $U \in \alpha$ impliziert $U = f_i^{-1}(O_i)$ für ein gewisses $i \in I$ (oder $U = X$). Dann folgt $g^{-1}(U) = g \circ f_i^{-1}(O_i)$. Letzteres ist aber offen, da $g \circ f_i$ stetig ist.
Nun sei τ' eine Topologie, welche ebenfalls die universelle Eigenschaft hat. Im ersten Schritt sieht man, wenn man $(Y,\sigma) = (X,\tau')$ und $g = id_X$ setzt und die universelle Eigenschaft für (X,τ) verwendet, dass alle $f_i : (X,\tau') \to (X_i,\tau_i)$ stetig sind (schließlich ist $f_i \circ id_X = f_i$). Also schon mal $\tau \subseteq \tau'$. Im zweiten Schritt setzt man $(Y,\sigma) = (X,\tau)$ und wieder $g = id_X$ (man male sich Diagramme). Nun wissen wir schon dass alle $f_i : (X,\tau') \to (X_i,\tau_i)$ stetig sind und da $f_i = f_i \circ id_X$ ist also auch $id_X : (X,\tau) \to (X,\tau')$ stetig und somit $\tau' \subseteq \tau$. Insgesamt also $\tau = \tau'$.

2.3.2 Definition: Produkttopologie

Sei $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Auf $X := \prod_{i\in I} X_i$ wird mittels den Daten $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ und der Projektionen $pr_i : X \to X_i$ die initiale Topologie konstruiert und von nun an Produkttopologie genannt. Die Produkttopologie bezeichnen wir mit $\times_{i\in I}\tau_i$.

Eine Typische offene Subbasismenge hat also die Gestalt: $\prod_{i\in I} O_i$ mit $O_i = X_i$ für $i \neq j$ und $O_i \in \tau_i$ für $i = j$ (j ist dabei beliebig). Eine typische Basismenge sieht dann so aus: $\prod_{i\in I} O_i$ mit $O_i = X_i$ für $i \in I \setminus J$ für ein endliches $J \subseteq I$ und $O_i \in \tau_i$ für $i \in J$. Wenn wir bei Produkträumen im Folgenden von offenen Basismengen oder offene Subbasismengen (oder vielleicht auch einfach nur Basismengen) reden, meinen wir Mengen dieser Bauart.

2.3.3 Lemma

Seien $(X_i)_{i\in I}$ und $(Y_i)_{i\in I}$ zwei Familien von topologischen Räumen, Z ein weiterer top. Raum und $(f_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ bzw. $(g_i : Z \to Y_i)_{i\in I}$ zwei Familien von Abbildungen. Bezeichne X (bzw. Y) den Produktraum der $(X_i)_{i\in I}$ (bzw, $(Y_i)_{i\in I}$) und setze $f : X \to Y$ definiert durch $f((x_i)_{i\in I}) := (f_i(x_i))_{i\in I}$, bzw. $g : Z \to Y$ definiert durch $g(z) := (g_i(z))_{i\in I}$. Dann gilt: f ist genau dann stetig, wenn alle f_i stetig sind und g ist genau dann stetig, wenn alle g_i stetig sind.

Beweis: Für $i \in I$ seien im Folgenden $p_i : X \to X_i$ und $q_i : Y \to Y_i$ die entsprechenden Projektionsabbildungen.

Seien zunächst alle f_i stetig. Offensichtlich gilt $q_i \circ f = f_i \circ p_i$. Damit ist $q_i \circ f$ für jedes $i \in I$ stetig. Nun trägt Y die Initialtopologie bzgl. der $(q_i)_{i\in I}$ und somit ist f stetig.

Sei nun f als stetig vorausgesetzt und $j \in I$ fest gewählt. Für jedes $i \neq j$ wählen wir uns ein festes $x_i \in X_i$ und definieren dann die stetige Hilfsabbildung $s : X_j \to X$ durch $s(x_j) := (x_i)_{i\in I}$, für jedes $x_j \in X_j$. Damit ist $f_j = q_j \circ f \circ s$ dann stetig.

Seien nun alle g_i stetig. Offensichtlich gilt $q_i \circ g = g_i$ und somit ist $q_i \circ g$ für jedes $i \in I$ stetig. Da Y die Initialtopologie bzgl. der q_i trägt, ist also auch g stetig.

Ist umgekehrt g stetig, so folgt aus $g_i = q_i \circ g$ unmittelbar die Stetigkeit der g_i.

2.3.4 Satz und Definition: Finaltopologie

Sei X eine Menge und $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ eine Klasse von topologischen Räumen und zugehörigen Abbildungen $f_i : X_i \to X$.

a) Es gibt dann eine feinste Topologie τ auf X, bezüglich derer alle f_i stetig sind. Diese Topologie heißt die Finaltopologie bezüglich der Daten $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ und $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$.

b) Die Finaltopologie τ ist durch folgende universelle Eigenschaft eindeutig bestimmt:

Für jeden topologischen Raum (Y, σ) und jede Abbildung $g : X \to Y$ gilt: g ist stetig genau dann, wenn $\forall i \in I$ $g \circ f_i$ stetig ist.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g\circ f_i"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Beweis: a) Setze $\tau := \{O \subseteq X \mid \forall i \in I \text{ gilt } f_i^{-1}(O) \in \tau_i\}$.
b) Übung (ähnlich wie bei der Initialtopologie).

2.3.5 Definition: Quotiententopologie, identifizierende Abbildungen

Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann bezeichne $X/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/\sim$ die standard Projektion. Die Finaltopologie auf $X/\sim$ bezüglich π nennt man Quotiententopologie. Der Raum $X/\sim$ mit der entsprechenden Topologie wird auch Quotientenraum genannt. Seien (X,τ) und (Y,σ) top. Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man nennt f identifizierend, falls f surjektiv ist und σ die Finaltopologie bzgl. X und f ist (also $O \in \sigma \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(O) \in \tau$).

2.3.6 Definition: Verkleben topologischer Räume

verkleben von top. Räumen Seien X und Y top. Räume, mit $X \cap Y = \emptyset$, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ eine stetige Abbildung. Wir versehen $X \cup Y$ mit der Finaltopologie bzgl. der standard Einbettungen $e_1 : X \to X \cup Y$ und $e_2 : Y \to X \cup Y$ und führen auf $X \cup Y$ folgendermaßen eine Äquivalenzrelation ein. $z_1 \sim z_2 \;:\Leftrightarrow\; (z_1 = z_2 \;\vee\; f(z_1) = f(z_2) \;\vee\; f(z_1) = z_2 \;\vee\; f(z_2) = z_1)$. Der Qutientenraum $(X \cup Y)/\sim$ wird als der von X und Y mittels f zusammengeklebte Raum bezeichnet und als $X \cup_f Y$ bezeichnet. Y ist übrigens (kanonisch) als Teilraum in $X \cup_f Y$ enthalten (Beweis als Übung).

2.3.7 Satz

Seien X,Y,Z top. Räume und $f : X \to Z$ bzw. $\varphi : X \to Y$ identifizierende Abbildungen mit der zusätzlichen Eigenschaft $\forall a,b \in X \,:\, \varphi(a) = \varphi(b) \;\Leftrightarrow\; f(a) = f(b)$. Dann gibt es genau ein Homöomorphismus $g : Y \to Z$ mit $g \circ \varphi = f$.

Beweis: $y \in Y \;\Rightarrow\; y = \varphi(x)$, setze $g(y) := f(x)$. Dann ist g wohldefiniert, bijektiv und erfüllt $g \circ \varphi = f$. Die Abbildung g ist auch stetig, denn für O offen in Z ist $g^{-1}(O)$ offen in Y (wegen $\varphi^{-1}(g^{-1}(O)) = f^{-1}(O)$ und dieses ist offen).

Sei nun O offen in Y. Zu zeigen ist dann, dass $g(O)$ offen in Z ist. Es gilt jedenfalls:

$$f^{-1}(g(O)) = f^{-1}(g(\varphi(\varphi^{-1}(O)))) = f^{-1}(f(\varphi^{-1}(O))) \supseteq \varphi^{-1}(O)$$

Annahme: $\exists x \in f^{-1}(f(\varphi^{-1}(O))) \setminus \varphi^{-1}(O)$, dann folgt $\varphi(x) \notin O$ aber $f(x) \in f(\varphi^{-1}(O))$. Also $f(x) = f(x')$ für $x' \in \varphi^{-1}(O)$ und somit $\varphi(x) = \varphi(x') \in O$ - Widerspruch! Also $f^{-1}(g(O)) = \varphi^{-1}(O)$ Die letzte Menge ist aber offen, also ist auch $g(O)$ offen.

2.4 Metrische Räume

2.4.1 Definition: Metrische Räume

Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung welche folgenden Bedingungen genügt:

1) $\forall x,y \in X \; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2) $\forall x,y \in X \; d(x,y) = d(y,x)$,
3) $\forall x,y,z \in X \; d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

dann nennen wir das Paar (X,d) einen metrischen Raum. Für $x,y \in X$ gilt $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$, also $0 \leq d(x,y)$. $K(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ nennen wir die offene Kugel um x mit Radius ε. Durch $\tau_d := top(\{K(x,\varepsilon) \mid x \in X \text{ und } \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ bekommen wir eine Topologie auf X - die durch d induzierte. $\mathscr{B} := \{K(x,1/n) \mid x \in X \text{ und } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist dann sogar eine Basis für τ_d (Beweis?). Sprechen wir von irgendwelchen topologischen Eigenschaften metrischer Räume, so beziehen wir uns auf die durch die Metrik induzierte Topologie. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Punkt x, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ $d(x_n,x) < \varepsilon$ gilt. Beispielsweise ist $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge aus A, die konvergent ist, auch bereits in A konvergiert (Beweis als Übung). Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen ist genau dann im Punkt x stetig (siehe dazu den nächsten Abschnitt über Stetigkeit), wenn für jede Folge, die gegen x konvergiert, die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert(im Punkt x stetig, bedeutet Satz 2.2.2 Nr.5). Für spätere Anwendungen definieren wir noch den Durchmesser einer Teilmenge A von X als $diam(A) := sup\{d(x,y) \mid x,y \in X\}$ und den Abstand eines Punktes X zu A als $d(x,A) := inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$, bzw den Abstand zweier Teilmengen A,B als $inf\{d(x,y) \mid (x,y) \in A \times B\}$. Sprechen wir in Zukunft von metrisierbaren Räumen, so meinen wir topologische Räume, deren Topologie durch eine Metrik im obigen Sinn induziert wird. In diesem Sinn kann man metrisierbare Räume also als metrische Räume auffassen.

Haben wir statt einer Metrik lediglich eine Pseudometrik d, also ein Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die den Bedingungen

1) $\forall x \in X$ gilt $d(x,x) = 0$,
2) $\forall x,y \in X$ $d(x,y) = d(y,x)$,
3) $\forall x,y,z \in X$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

genügt, so bekommen wir genau wie bei einer Metrik eine Topologie. Pseudometriken werden im Kapitel über parakompakte Räume eine Rolle spielen.

2.4.2 Euklidische Metrik

Auf dem $\mathbb{R}^n$ können wir zum einen die Topologie τ_{d_n} (erzeugt durch die euklidische Metrik $d_n(x,y) := \sqrt{\sum_{\nu=1}^n (x_\nu - y_\nu)^2}$) und zum anderen die Produkttopologie $\tau_{\mathbb{R}^n}$ (bezüglich der durch d_1 auf $\mathbb{R}$ erzeugten Topologie) betrachten. Es gilt dann $\tau_{\mathbb{R}^n} = \tau_{d_n}$. Der Beweis bleibt als Übung.

2.4.3 Lemma

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist jede offene Menge eine F_σ-Menge und jede abgeschlossene Menge eine G_δ-Menge.

Beweis: Zeigen wir, dass jede offene Menge eine F_σ-Menge ist. Sei dazu O offen in X. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden wir die Menge $A_n := \{y \in O \mid d(y, X \setminus O) \geq 1/n\}$. Man kann dann leicht nachrechnen, dass A_n eine abgeschlossene Menge ist und $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ gilt. Das dann auch jede abgeschlossene Menge eine G_δ-Menge ist, folgt leicht durch Übergang zu Komplementen.

2.4.4 Satz

Sei (X,d) ein metrischer Raum und α eine unendliche Kardinalzahl. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

1) Der Raum hat eine Basis $\mathscr{B}$ mit $|\mathscr{B}| \leq \alpha$.
2) Der Raum hat ein Netzwerk N mit $|N| \leq \alpha$.
3) Jede offene Überdeckung σ von X hat eine Teilüberdeckung σ' mit $|\sigma'| \leq \alpha$.
4) Für jeden diskreten Teilraum D von X gilt $|D| \leq \alpha$.
5) Für jeden abgeschlossenen diskreten Teilraum D von X gilt $|D| \leq \alpha$.
6) Für jede Familie σ paarweise disjunkter und offener Teilmengen von X gilt $|\sigma| \leq \alpha$.
7) Es gibt eine dichte Teilmenge D von X mit $|D| \leq \alpha$.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2 ist klar, da jede Basis auch ein Netzwerk ist.

2) $\Rightarrow$ 3) Sei σ eine offene Überdeckung von X. Für jedes $S \in \sigma$ wählen wir ein $N_S \subseteq N$ mit $\bigcup N_S = S$. Dann bilden wir $N' := \{N_S \mid S \in \sigma\}$. Zu jedem $n \in N'$ wählen wir dann ein $S_n \in \sigma$ mit $n \subseteq S_n$. Offensichtlich ist $\sigma' := \{S_n \mid n \in N'\}$ dann eine offene Teilüberdeckung von σ mit $|\sigma'| \leq |N'| \leq |N| \leq \alpha$.

3) $\Rightarrow$ 5) Sei D ein abgeschlossener diskreter Teilraum. Für jeden Punkt $x \in D$ gibt es dann eine offene Menge O_x mit $O_x \cap D = \{x\}$. Nun ist aber $\sigma := \{O_x \mid x \in D\} \cup \{X \setminus D\}$ eine offene Überdeckung von X, die eine Teilüberdeckung σ' mit $|\sigma'| \leq \alpha$ hat. Da die Zuordnung $x \mapsto O_x$ injektiv ist und aus $\{O_x \mid x \in D\}$ nichts weggelassen werden kann, muss $|D| \leq \alpha$ gelten.

4) $\Rightarrow$ 5) ist offensichtlich.

5) $\Rightarrow$ 4) Sei D ein diskreter Teilraum in X. Dann ist D offen in $\overline{D}$, und somit eine F_σ-Menge in $\overline{D}$. Es gibt also eine Folge in X abgeschlossener Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\overline{D} \cap A_n)$. Nun ist aber jedes $\overline{D} \cap A_n$ in X abgeschlossen und Teilmenge von D, also diskret. Nach Voraussetzung gilt dann $|\overline{D} \cap A_n| \leq \alpha$ und somit, da α unendlich ist, auch $|D| \leq \alpha$.

4) $\Rightarrow$ 6) ist auch klar, denn ist σ eine Familie paarweise disjunkter und offener Teilmengen von X, so wählen wir für jedes $O \in \sigma$ ein $x_O \in O$ und $D := \{x_O \mid O \in \sigma\}$ ist dann ein diskreter Teilraum mit $|\sigma| = |D| \leq \alpha$.

6) $\Rightarrow$ 7) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden wir $Z_n := \{A \subseteq X \mid \{K(x,1/n) \mid x \in A\}$ ist eine Familie paarweise disjunkter Teilmengen $\}$. Auf Z_n können wir mittels Inklusion eine partielle Ordnung einführen. Man kann nun leicht nachrechnen, dass die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt sind (ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Kette in Z_n, so ist $\bigcup_{i\in I} A_i$ eine in Z_n gelegene obere Schranke). Wir könnewn uns also ein bzgl. Inklusion maximales Element $A_n \in Z_n$ wählen. Nun gilt $|A_n| \leq \alpha$, für jedes $n \in \mathbb{N}$, also auch $|A| \leq \alpha$, wobei $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass A dicht in X liegt. Gäbe es ein $x \in X \setminus \overline{A}$, so gäbe es ein $n \in \ltimes$ mit $K(x,1/n) \subseteq X \setminus \overline{A}$. Dann wäre aber $x \in A_n \subseteq A$ - ein Widerspruch.

7) $\Rightarrow$ 1) Ist D eine dichte Teilmenge von X mit $|D| \leq \alpha$, so ist $\mathscr{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$, wobei $\mathscr{B}_n := \{K(x,1/n) \mid x \in D\}$, eine Basis von X mit $|\mathscr{B}| \leq \alpha$. Das $|\mathscr{B}| \leq \alpha$ gilt ist klar. Zeigen wir, das $\mathscr{B}$ eine Basis ist. Sei O offen und $x \in O$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K(x,2/n) \subseteq O$. Nun gibt es aber ein $y \in D$ mit $y \in K(x,1/n)$. Dann ist $x \in K(y,1/n) \subseteq K(x,2/n) \subseteq O$. Damit lässt sich O als Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{B}$ schreiben.

3 Trennungsaxiome und Konvergenztheorie

"Unsere Gesellschaft wird von Verrückten geführt, für verrückte Ziele. Ich glaube wir werden von Wahnsinnigen gelenkt, zu einem wahnsinnigen Ende, und ich glaube ich werde als Wahnsinniger eingesperrt, weil ich das sage. Das ist das wahnsinnige daran."
John Lennon

3.1 Trennungsaxiome

Denken wir bei topologischen Räumen an die metrischen Räume, so sind wir es gewohnt zwei verschiedene Punkte durch disjunkte Kugelumgebungen zu "trennen". Bei allgemeinen topologische Räumen muss dies nun keineswegs mehr möglich sein (unabhängig davon, das wir keinen Kugelbegriff zur Verfügung haben; wir haben halt einfach nur Umgebungen). Als ganz einfaches Beispiel dazu möge $X := \{0,1\}$ mit $\tau := \{\emptyset, \{0\}, X\}$ dienen. Es gibt hier einfach keine disjunkten Umgebungen von 0 und 1 (das es sich bei τ um eine Topologie auf X handelt, ist offensichtlich). Räume in denen sich Punkte doch von einander trennen lassen, bekommen hier nun eigene Namen.

3.1.1 Definition der Trennungsaxiome T_0 T_1, T_2 (Hausdorff-Eigenschaft), T_3,regulär, T_4, normal

Ein top. Raum heißt T_0-Raum, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten eine offene Menge gibt, die genau einen der beiden Punkte enthält.

Ein top. Raum heißt T_1-Raum, wenn alle Einpunktmengen abgeschlossen sind.

Ein toplogischer Raum (X,τ) heißt Hausdorff-Raum (oder T_2), wenn zu je zwei verschiedenen Elementen $x,y \in X$ zwei **disjunkte** offene Mengen O,U gibt (also $U \cap V = \emptyset$) mit $x \in O$ und $y \in U$. Jeder Teilraum eines Hausdorff-Raumes ist wieder ein Hausdorff-Raum (Beweis?)

Ein top. Raum heißt T_3-Raum, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge A mit $x \notin A$ disjunkte offenen Mengen U,V gibt mit $x \in U$ und $A \subseteq V$. Ein top. Raum ist T_3, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen hat (Beweis?). Räume die T_1 und T_3 sind, werden regulär genannt.

Ein top. Raum heißt T_4-Raum, wenn es zu zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen A,B zwei disjunkte offene Mengen U,V gibt mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Räume die T_1 und T_4 sind, werden normal genannt.

Im Zusammenhang mit Kompaktifizierungen bzw. parakompakten Räumen werden wir ein paar weitere Trennungsaxiome kennen lernen.

3.1.2 Triviale Folgerungen

Offensichtlich gilt $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Dies sind sogar die einzigen "einfachen" Implikationen die gelten. Allerdings gilt T_4+$T_1 \Rightarrow T_2$+T_3 (klar) und T_3+$T_0 \Rightarrow T_2$+T_3 (Beweis: Der Raum ist T_0, also gilt für $x \neq y: \ x \notin \overline{\{y\}}$ oder $y \notin \overline{\{x\}}$. Also beispielsweise $x \notin \overline{\{y\}}$. Dann folgt - mit T_3 - es gibt disjunkte offene Mengen U,V mit $x \in U$ und $y \in \overline{\{y\}} \subseteq V$. Man kann x und y

also durch disjunkte offene Mengen trennen. Der zweite Fall läuft natürlich analog. Insgesamt bekommen wir so T_2.).

Teilräume von T_i-Räumen sind für $i = 0, 1, 2, 3$ auch T_i-Räume. Für $i = 4$ muss das nicht mehr gelten (es gibt bereits auf vierelementigen Mengen Gegenbeispiele). Allerdings haben wir folgenden Satz.

3.1.3 Satz über die Vererbung von T_4

Sei (X, τ) ein T_4-Raum und

a) A abgeschlossen $\subseteq X$. Dann ist auch A als Teilraum T_4.

b) F eine F_σ-Menge in X (das heißt $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, mit in X abgeschlossenen Mengen A_n). Dann ist F als Teilraum ebenfalls T_4.

c) Sei $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ stetig, abgeschlossen und surjektiv, dann ist auch (Y, σ) ein T_4-Raum.

Beweis: a) Seien P' und Q' in der Teilraumtopologie von A abgeschlossen und disjunkt, also $P' = P \cap A$ und $Q' = Q \cap A$ mit in X abgeschlossenen P und Q. Dann sind P' und Q' offenbar auch abgeschlossen in X. Da sie disjunkt sind gibt es disjunkte offene Obermengen U, V. Dann sind aber $U' := U \cap A$ und $V' := V \cap A$ in der Teilraumtopologie von A offene und disjunkte Obermengen von P' bzw Q'.

b) Sei $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, mit in X abgeschlossenen Mengen A_n gegeben. Wir bilden dann $F_n := \bigcup_{k\leq n} A_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist jedes F_n abgeschlossen und es gilt $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ bzw. $F_n \subseteq F_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Seien nun A' und B' abgeschlossene und disjunkte Teilmengen in F (Teilraumtopologie). Dann gibt es in X abgeschlossene Mengen A, B mit $A' = A \cap F$ und $B' = B \cap F$.

Es gibt nun in X offene und disjunkte U_0' und V_0' mit $A \cap F_0 \subseteq U_0'$ und $B \cap F_0 \subseteq V_0'$. Dann gibt es aber auch (in X) offene Mengen U_0 und V_0 mit $A \cap F_0 \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_0' \setminus B$ und $B \cap F_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V_0' \setminus A$. Es gilt dann $[(A \cap F_1) \cup \overline{U_0}] \cap [(B \cap F_1) \cup \overline{V_0}] = \emptyset$. Diese Idee verfolgen wir nun weiter und konstruieren ausgehend bei U_0 und V_0 zwei Folgen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von in X offenen Mengen mit:

1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{U_n} \cap \overline{V_n} = \emptyset$, $\overline{U_n} \subseteq X \setminus B$ und $\overline{V_n} \subseteq X \setminus A$.

2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $[(A \cap F_{n+1}) \cup \overline{U_n}] \cap [(B \cap F_{n+1}) \cup \overline{V_n}] = \emptyset$.

3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(A \cap F_{n+1}) \cup \overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$ und $(B \cap F_{n+1}) \cup \overline{V_n} \subseteq V_{n+1}$.

Seien dementsprechend bereits $U_0, \dots, U_n$ und $V_0, \dots, V_n$ konstruiert. Nun gilt nach Voraussetzung $[(A \cap F_{n+1}) \cup \overline{U_n}] \cap [(B \cap F_{n+1}) \cup \overline{V_n}] = \emptyset$. Wir können also disjunkte, in X offene Mengen U_{n+1}' und V_{n+1}' wählen, mit $(A \cap F_{n+1}) \cup \overline{U_n} \subseteq U_{n+1}'$ und $(B \cap F_{n+1}) \cup \overline{V_n} \subseteq V_{n+1}'$. Dann gibt es aber auch offene Mengen U_{n+1} bzw. V_{n+1} mit

$(A \cap F_{n+1}) \cup \overline{U_n} \subseteq U_{n+1} \subseteq \overline{U_{n+1}} \subseteq U_{n+1}' \setminus B$ und $(B \cap F_{n+1}) \cup \overline{V_n} \subseteq V_{n+1} \subseteq \overline{V_{n+1}} \subseteq V_{n+1}' \setminus A$.

Nun können wir unbeschwert $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ bilden. Dies sind dann offene (klar) und disjunkte (Annahme $x \in U \cap V$, dann $x \in U_k \cap V_l$. O.B.d.A. gilt $k \leq l$, also $x \in U_l \cap V_l$ - im Widerspruch zur Disjunktheit.) Teilmengen von X mit $A \cap F \subseteq U$ und $B \cap F \subseteq V$ (das ist wieder offensichtlich).

c) Seien A,B in Y abgeschlossene und disjunkte Teilmengen. Dann sind auch $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ disjunkt und abgeschlossen. Nach Voraussetzung gibt es dann disjunkte offene Mengen U,V mit $f^{-1}(A) \subseteq U$ und $f^{-1}(B) \subseteq V$. Für jedes $a \in A$ ist also $f^{-1}(a) \subseteq U$ und es gibt somit (nach Lemma 2.2.6) ein $P_a \in \dot{a} \cap \sigma$ mit $f^{-1}(P_a) \subseteq U$. Dann ist $P := \bigcup_{a \in A} P_a \in \sigma$ mit $A \subseteq P$ und $f^{-1}(P) \subseteq U$. Ananlog gibt es ein $Q \in \sigma$ mit $B \subseteq Q$ und $f^{-1}(Q) \subseteq V$. Dann sind P und Q disjunkte offene Obermengen von A und B.

3.1.4 Lemma (Folgen paarweise disjunkter offener Mengen)

Sei (X,τ) ein unendlicher Hausdorff-Raum. Dann gibt es eine Folge $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus τ mit $O_n \cap O_m = \emptyset$ und $O_n \neq \emptyset$ für alle $m \neq n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt für τ demnach $|\tau| \geq |\mathbb{R}|$ (unendliche Hausdorff-Räume sind sehr reich an offenen Mengen).

Beweis: Wir nennen einen Punkt x isoliert, falls $\{x\}$ offen ist. Sei $E := \{x \in X \mid \{x\} \in \tau\}$. Falls E unendlich ist, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus E derart, dass $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter offener Mengen sind ... und wir sind fertig. Andernfalls sei E endlich. Setze $Z := X \setminus E$. Offenbar ist Z unendlich, offen in X und enthält keine isolierten Punkte (Teilraumtopologie). Wir können also o.B.d.A. $E = \emptyset$ annehmen. Dann ist aber jedes $O \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ unendlich. Seien $x,y \in X$ mit $x \neq y$. Seien $U,V \in \tau$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Setze $O_0 := U$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(O_k)_{k=0}^{n}$ eine Folge paarweise disjunkter offener Mengen derart, dass $\exists W \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ mit $W \subseteq X \setminus \bigcup_{k=0}^{n} O_k$. Wähle $x,y \in W$ mit $x \neq y$. Seien $U,V \in \tau$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Setze $O_{n+1} := U \cap W$. Offenbar ist $W' := W \cap V \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ mit $W' \subseteq X \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} O_k$. So geht das dann weiter ...

Zeigen wir nun noch $|\tau| \geq |\mathbb{R}|$. Sei dazu $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter nichtleerer Mengen. Für jedes $N \subseteq \mathbb{N}$ ist $O_N := \bigcup_{i \in N} O_i$ eine offene Menge mit $N \neq M \;\Rightarrow\; O_M \neq O_N$. Man erhält demnach $|\tau| \geq |\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

3.1.5 Definition: stark Hausdorff

Wir nennen einen Raum (X,τ) **stark Hausdorff**, falls er Hausdorff ist und zu jeder unendlichen Teilmenge $F \subseteq X$ eine Folge $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus τ mit $O_n \cap O_m = \emptyset$ und $O_n \cap F \neq \emptyset$ für alle $m \neq n \in \mathbb{N}$ existiert.

3.1.6 Lemma

Jeder T_2-T_3-Raum (X,τ) ist stark Hausdorff.

Beweis: Sei $F \subseteq X$ eine unendliche Teilmenge. Wähle $a,b \in F$ mit $a \neq b$. Seien $U,V \in \tau$ mit $a \in U$, $b \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Fall 1 $U \cap F$ und $V \cap F$ sind beide endlich. Seien $U',V' \in \tau$ derart, dass $a \in U' \subseteq \overline{U'} \subseteq U$ und $b \in V' \subseteq \overline{V'} \subseteq V$. Setze dann $x_0 := a$, $x_1 := b$, $O_0 := U'$ und $O_1 := V'$.

Fall 2 O.B.d.A. ist $U \cap F$ unendlich. Setze dann $x_0 := b$ und $O_0 := V$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(O_n)_{k \leq n}$ eine Folge aus τ, $(x_n)_{k \leq n}$ eine Folge aus F mit $x_k \in O_k \cap F$ (für alle $k \leq n$), $O_k \cap O_l = \emptyset$ (für alle $k \neq l$) und $\exists W \in \tau$ mit $W \cap F$ unendlich und $W \subseteq X \setminus \bigcup_{k=0}^{n} O_k$. Wähle dann $a, b \in F \cap W$ mit $a \neq b$. Seien $U, V \in \tau$ mit $a \in U$, $b \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Fall 1 $W \cap U \cap F$ und $W \cap V \cap F$ sind beide endlich. Seien $U', V' \in \tau$ derart, dass $a \in U' \subseteq \overline{U'} \subseteq W \cap U$ und $b \in V' \subseteq \overline{V'} \subseteq W \cap V$. Setze dann $x_{n+1} := a$, $x_{n+2} := b$, $O_{n+1} := W \cap U'$ und $O_{n+2} := W \cap V'$.

Fall 2 O.B.d.A. ist $W \cap U \cap F$ unendlich. Setze dann $x_{n+1} := b$ und $O_{n+1} := W \cap V$.

3.1.7 Satz

Sei $a \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ein Produkt $X = \prod_{i \in I} X_i$ nicht leerer topologischer Räume $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ ist genau dann ein T_a-Raum, wenn jeder Faktor ein T_a-Raum ist.

Beweis: Exemplarisch sei der Beweis für T_2 geführt. Seien alle (X_i, τ_i) Hausdorff-Räume und $x = (x_i)_{i \in I} \neq y = (y_i)_{i \in I}$ zwei Punkte aus X. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x_j \neq y_j$ und somit gibt es zwei disjunkte offene Mengen $U_j, V_j \in \tau_j$ mit $x_j \in U_j$ und $y_j \in V_j$. Dann sind aber $f_j^{-1}(U_j)$ und $f_j^{-1}(V_j)$ disjunkte offene Mengen in X mit $x \in f_j^{-1}(U_j)$ und $y \in f_j^{-1}(V_j)$. Also ist auch X ein Hausdorff-Raum.
Sei andererseits X ein Hausdorff-Raum. Also $X \neq \emptyset$. Wähle $a = (a_i)_{i \in I} \in X$ und $j \in I$ und setze $Y_j := \{(x_i)_{i \in I} \in X \mid x_i = a_i \text{ falls } i \neq j\}$. Man kann schnell nachrechnen, dass $pr_j|Y_j : Y_j \to X_j$ ein Homöomorphismus ist (bezüglich der Teilraumtopologie auf Y_j). Da Y_j als Teilraum von X nun aber hausdorff ist, ist es auch X_j.

Für den Nachweis von T_3 sei angeführt, dass das Produkt abgeschlossener Mengen im Produktraum wieder abgschlossen ist und ein top. Raum ein T_3-Raum ist, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen hat.

3.1.8 Bemerkung

Produkte von T_4-Räumen müssen nicht wieder T_4 sein, wie Beispiel 12.1.17 lehrt.

Wie kann man einigermaßen bequem zeigen, dass ein Raum nicht T_4 ist? Eine schöne Möglichkeit dies nachzuweisen, gibt folgendes Lemma.

3.1.9 Lemma

Sei (X, τ) ein T_4-Raum, $A \subseteq X$ eine abgeschlossene diskrete Teilmenge (d.h. die Teilraumtopologie ist die diskrete) und D eine dichte Teilmenge (von X). Dann ist $|\mathscr{P}(A)| \leq |\mathscr{P}(D)|$.

Falls also für ein top. Raum eine abgeschlossene und diskrete Teilmenge A und eine dichte Teilmenge D existiert, mit $|A| \geq |\mathscr{P}(D)|$, so kann der Raum nicht T_4 sein!

Beweis: Wenn $B \in \mathscr{P}(A)$, dann sind B und $A \setminus B$ in A abgeschlossen und demnach auch in X. Da sie disjunkt sind, existieren disjunkte $U_B, V_B \in \tau$ mit $B \subseteq U_B$ und $A \setminus B \subseteq V_B$. $B \mapsto U_B \cap D$ definiert ein $f : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(D)$. Zu zeigen bleibt dann noch, dass dieses f injektiv ist. Seien dazu $B \neq B'$ $(B, B' \subseteq A)$. O.B.d.A. $\exists b \in B \setminus B'$. Nun ist $B \subseteq U_B$, $B' \subseteq U_{B'}$ und $b \in V_{B'}$. Also $\exists d \in U_B \cap V_{B'} \cap D \subseteq f(B)$, aber $d \notin U_{B'} \cap D = f(B')$. Also $f(B) \neq f(B')$.

3.2 Filter, Ultrafilter und Filterkonvergenz

"Der Tod von Lincoln ist ein Unglück für das Christentum. Es gibt keinen Mann in den Vereinigten Staaten der in seine Schuhe paßt. Ich fürchte, daß ausländische Bankiers mit ihrer List und ihren verwundenen Tricks volle Kontrolle über den üppigen Reichtum von Amerika erlangen werden und ihn systematisch dazu verwenden werden, die moderne Zivilisation zu verderben. Sie werden nicht zögern, das gesamte Christentum in Kriege und Chaos zu stürzen um die Welt zu ihrem Erbe zu machen."

Otto von Bismarck

Um auch in allgemeinen topologischen Räumen eine vernünftige Konvergenztheorie entwickeln zu können, brauchen wir den Begriff des Filters. Filter auf einer Menge X sind - wie auch die Topologie - als gewisse Teilmengen der Potenzmenge von X erklärt. Auch außerhalb der Topologie finden Filter Anwendung; beispielsweise in der Logik/Modelltheorie (siehe dazu auch den Abschnitt über Nichtstandard Topologie) und auch ganz allgemein in der Mengentheorie. Wer mehr über Filter erfahren möchte, der greife zu Bourbaki *General Topology* oder Comfort/Negrepontis *The Theory of Ultrafilters* oder auch zu Chang/Keisler *Model Theory*.

3.2.1 Definition: Filter, Ultrafilter und endliche Schnitt Eigenschaft (eSE)

$\varphi \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt ein Filter auf X, falls φ folgenden Bedingungen genügt:

1) $\emptyset \notin \varphi$.

2) $\forall P, Q \in \varphi$ ist $P \cap Q \in \varphi$, der Schnitt zweier Mengen aus φ ist wieder in φ.

3) $\{Q \subseteq X \mid \exists P \in \varphi \text{ mit } P \subseteq Q\} \subseteq \varphi$, jede Obermenge einer Menge aus φ ist wieder in φ.

Ferner nennen wir den Filter φ auf einer Menge X einen **Ultrafilter**, falls es keinen Filter ψ auf X gibt mit $\varphi \subsetneq \psi$ (er ist bezüglich Inklusion also maximal).

Eine Teilmenge $\sigma \subseteq \mathscr{P}(X)$ hat die **endliche Schnitt Eigenschaft** (eSE) wenn der Schnitt je endlich vieler Elemente aus σ nicht leer ist.

Für eine nicht leere Teilmenge $\sigma \subseteq \mathscr{P}(X)$ definieren wir $[\sigma] := \{A \subseteq X \mid \exists P_1, ..., P_n \in \sigma \text{ mit } P_1 \cap ... \cap P_n \subseteq A\}$. Wenn σ die eSE hat, dann ist $[\sigma]$ ein Filter mit $\sigma \subseteq [\sigma]$ (Beweis als Übung).

Für eine einelementige Menge $A = \{x\}$ schreiben wir für $[\{A\}]$ einfach $\dot{x}$. Es ist dann $\dot{x} = \{P \subseteq X \mid x \in P\}$. Mit Hilfe dieser Notation schreibt sich die Menge aller offenen, den Punkt x enthaltenen Mengen aus dem topologischen Raum (X, τ) sehr einfach als $\dot{x} \cap \tau$. Diese Notation werden wir im Folgenden sehr häufig verwenden.

Filter der Form $\dot{x}$ nenne wir zuweilen auch trivial, oder Einpunkt-Filter. Dies sind die einzigen explizit angebbaren Ultrafilter.

Für einen Filter φ nennen wir $\mathscr{B} \subseteq \varphi$ eine **Basis**, wenn es zu jedem $P \in \varphi$ ein $B \in \mathscr{B}$ gibt mit $B \subseteq P$. Wir nennen $\mathscr{S}$ eine **Subbasis** von φ, wenn $\{\bigcap \mathscr{S}' \mid \mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ und $\mathscr{S}'$ ist endlich $\}$ eine Basis von φ ist.

3.2.2 Ultrafiltersatz (Ultrafilter Theorem $\Rightarrow$ UFT)

Wenn $\sigma \subseteq \mathscr{P}(X)$ die eSE hat, dann gibt es einen Ultrafilter Φ auf X mit $\sigma \subseteq \Phi$.

Beweis: Setze $Z := \{\varphi \subseteq \mathscr{P}(X) \mid \varphi$ ist ein Filter und $\sigma \subseteq \varphi\}$. Dann ist $Z \neq 0$, denn z.B. $[\sigma]$ ist in Z. Nun ist Z durch $\subseteq$ partiell geordnet, und eine Kette $(\varphi_k)_{k\in K}$ hat - wie man leicht nachrechnet - $\bigcup_{k\in K} \varphi_k$ als obere Schranke in Z. Das Zornsche Lemma verschafft uns also maximale Elemente in Z und just diese sind die gesuchten Oberultrafilter.

3.2.3 Lemma (verschiedene Charakterisierungen von Ultrafiltern)

Für einen Filter Φ auf X sind äquivalent:
1) Φ ist ein Ultrafilter.
2) $\forall A \subseteq X$ gilt $A \in \Phi$ oder $X \setminus A \in \Phi$.
3) $\forall n \geq 1, A_1, ..., A_n \subseteq X$ gilt: $A_1 \cup ... \cup A_n \in \Phi \Rightarrow \exists k \in \{1, ..., n\}$ mit $A_k \in \Phi$.
4) Für alle $n \geq 1$ und Filter $\varphi_1, ..., \varphi_n$ mit $\varphi_1 \cap ... \cap \varphi_n \subseteq \Phi$ existiert ein $i \in \{1, ..., n\}$ mit $\varphi_i \subseteq \Phi$

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) Das für $A \subseteq X$ höchstens eine der beiden Mengen A, $X \setminus A$ in dem Filter liegen kann ist klar. Nehmen wir an $A \notin \Phi$. Das bedeutet kein Element $P \in \Phi$ ist als Teilmenge in A enthalten, jedes $P \in \Phi$ hat also mit $X \setminus A$ einen nicht leeren Schnitt. Das System $\delta := \{P \cap (X \setminus A) \mid P \in \Phi\}$ hat also die eSE und ist somit in einem Ultrafilter Φ' enthalten. Für $P \in \Phi$ gilt $P \cap (X \setminus A) \in \delta \subseteq \Phi'$. Also ist P als Obermenge von $P \cap (X \setminus A)$ auch in Φ' und wir bekommen $\Phi \subseteq \Phi'$. Da auch Φ ein Ultrafilter ist, muss $\Phi = \Phi'$ gelten. Somit ist $X \setminus A = X \cap (X \setminus A) \in \Phi$.

2) $\Rightarrow$ 3) Wir zeigen die Aussage für $n = 2$. Der Rest geht dann durch vollständige Induktion. Sei also $A \cup B \in \Phi$. Währe sowohl $A \notin \Phi$, als auch $B \notin \Phi$, so währe $X \setminus A \in \Phi$ und $X \setminus B \in \Phi$. Dann aber auch $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \in \Phi$ - ein Widerspruch.

3) $\Rightarrow$ 2) Folgt sofort aus $A \cup (X \setminus A) = X \in \Phi$.

2) $\Rightarrow$ 1) Filter mit dieser Eigenschaft sind bereits maximal!

2) $\Rightarrow$ 4) Angenommen keiner der Filter φ_i ist in Φ enthalten. Für $i = 1, ..., n$ wählen wir je ein $P_i \in \varphi_i \setminus \Phi$. Es ist dann $X \setminus (P_1 \cup ... \cup P_n) = (X \setminus P_1) \cap ... \cap (X \setminus P_n) \in \Phi$. Aber auch $P_1 \cup ... \cup P_n \in \varphi_1 \cap ... \cap \varphi_n \subseteq \Phi$ - ein Widerspruch.

4) $\Rightarrow$ 2) Sei $A \subseteq X$. Betrachten wir $\varphi_1 := \{P \subseteq X \mid A \subseteq P\}$ und $\varphi_2 := \{P \subseteq X \mid X \setminus A \subseteq P\}$. Dann ist $\varphi_1 \cap \varphi_2 = \{X\} \subseteq \Phi$. Also z.B. $\varphi_1 \subseteq \Phi$ und damit $A \in \Phi$.

3.2.4 Satz und Definition: Bildfilter

Sei φ ein Filter auf X und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist $\{Q \subseteq Y \mid \exists P \in \varphi \text{ mit } f(P) \subseteq Q\}$ ein Filter, genannt der Bildfilter, auf Y. Bezeichnung: $f(\varphi)$. Falls φ ein Ultrafilter ist, so ist $f(\varphi)$ auch einer.

Beweis: Sei $Q \cup Q' \in f(\varphi)$. Dann gibt es ein $P \in \varphi$ mit $f(P) \subseteq Q \cup Q'$, also $P \subseteq f^{-1}(Q \cup Q') = f^{-1}(Q) \cup f^{-1}(Q')$. Da φ ein Ultrafilter ist, gilt also $P \subseteq f^{-1}(Q)$ oder $P \subseteq f^{-1}(Q')$, also $f(P) \subseteq Q$ oder $f(P) \subseteq Q'$ und somit $Q \in f(\varphi)$ oder $Q' \in f(\varphi)$.

3.2.5 Lemma

1. Seien $X, Y \neq \varnothing$, $f : X \to Y$ eine Abbildung, ϕ ein Filter auf X und ψ ein Ultrafilter auf Y mit $f(\phi) \subseteq \psi$. Dann $\exists$ ein Ultrafilter ϕ_0 auf X mit $\phi \subseteq \phi_0$ und $f(\phi_0) = \psi$.

2. Seien $X, Y \neq \varnothing$, ψ ein Filter auf X, ϕ ein Filter auf Y^X und ξ ein Ultrafilter auf Y mit $\phi(\psi) \subseteq \xi$. Dann existieren Ultrafilter ϕ_0, ψ_0 mit $\phi \subseteq \phi_0$, $\psi \subseteq \psi_0$ und $\phi_0(\psi_0) \subseteq \xi$.

Beweis: 1. Setze $\alpha := \phi \cup \{f^{-1}(Q) \mid Q \in \psi\}$. Seien $P_1, \ldots, P_n \in \phi$ und $Q_1, \ldots, Q_m \in \psi$. Wegen $f(\phi) \subseteq \psi$ gibt es ein $y \in f(P_1 \cap \ldots \cap P_n) \cap Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$. Sei $x \in P_1 \cap \ldots \cap P_n$ mit $y = f(x)$. Es folgt $x \in P_1 \cap \ldots \cap P_n \cap f^{-1}(Q_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(Q_n)$. Sei ϕ_0 eine Ultrafilter mit $\alpha \subseteq \phi_0$. Sei $P \in \phi_0$ und $Q \in \psi$. Wegen $f^{-1}(Q) \in \phi_0$ folgt $P \cap f^{-1}(Q) \neq \varnothing$, also $f(P) \cap Q \neq \varnothing$. Da ψ ein Ultrafilter ist, folgt $f(\phi_0) \subseteq \psi$. Da aber auch $f(\phi_0)$ ein Ultrafilter ist, gilt $f(\phi_0) = \psi$.

2. Sei $\Omega : Y^X \times X \to Y$ die Evaluationsabbildung $\Omega(f, x) := f(x)$. Offenbar gilt nun

$$\Omega(\phi \times \psi) = \phi(\psi) \subseteq \xi.$$

Aus 1. folgt die Existenz eines Ultrafilters η auf $Y^X \times X$ mit $\phi \times \psi \subseteq \eta$ und $\Omega(\eta) = \xi$. Seien $p_1 : Y^X \times X \to Y^X$, $p_2 : Y^X \times X \to X$ die entsprechenden Projektionen. Dann sind $p_1(\eta)$, $p_2(\eta)$ Ultrafilter auf Y^X bzw. X mit $\phi \subseteq p_1(\eta)$ und $\psi \subseteq p_2(\eta)$. Setze $\phi_0 := p_1(\eta)$ und $\psi_0 := p_2(\eta)$. Für $T_1, T_2 \in \eta$ folgt $\eta \ni T_1 \cap T_2 \subseteq p_1(T_1) \times p_2(T_2) \neq \varnothing$, also $\phi_0 \times \psi_0 \subseteq \eta$. Insgesamt bekommen wir damit $\phi_0(\psi_0) = \Omega(\phi_0 \times \psi_0) \subseteq \Omega(\eta) = \xi$.

3.2.6 Definition: Konvergenz einer Folge und Filterkonvergenz

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Wir sagen diese Folge konvergiert gegen ein $x \in X$, wenn $\forall O \in \dot{x} \cap \tau \, \exists n \in \mathbb{N} \forall k \geq n : \ x_k \in O$. So kennen wir das auch schon aus der Analysis. Bilden wir den Filter $\varphi := \{P \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N} \forall k \geq n : \ x_k \in P\}$ (das es tatsächlich ein Filter ist, kann man leicht nachrechnen), so könnten wir die Konvergenz der Folge auch kurz schreiben als $\dot{x} \cap \tau \subseteq \varphi$! Derart motiviert, definieren wir nun für einen beliebigen Filter φ auf X was es heißt zu konvergieren.

Wir sagen φ **konvergiert** gegen $x \in X$, falls $\dot{x} \cap \tau \subseteq \varphi$. Wir schreiben auch $\varphi \xrightarrow{\tau} x$ oder kürzer $\varphi \to x$. Die Folgenkonvergenz ist also ein Spezialfall der Filterkonvergenz.

3.2.7 Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Filterkonvergenz

Ist (X, τ) ein top. Raum und φ ein Filter auf X. Bezeichnen wir mit K_φ die Menge aller Punkte aus X, gegen die φ konvergiert, so gilt:

$A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $K_\varphi \subseteq A$, für jeden Filter φ auf X mit $A \in \varphi$ gilt.

Der Beweis bleibt als leichte Aufgabe.

Mit Hilfe der Filterkonvergenz lässt sich auch sehr leicht die Stetigkeit einer Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen Räumen beschreiben - ganz analog zur Beschreibung der Stetigkeit in metrischen Räumen mittels Folgenkonvergenz.

3.2.8 Charakterisierung der Stetigkeit durch Filterkonvergenz

Seien (X, τ) und (Y, σ) zwei topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f ist genau dann an der Stelle $x \in X$ stetig, wenn für jeden gegen x konvergenten Filter φ auch $f(\varphi)$ konvergent gegen $f(x)$ ist.

Beweis: Sei f an der Stelle x stetig und φ gegen x konvergent. Wir wählen ein beliebiges $O \in \dot{f(x)} \cap \sigma$. Dann ist $x \in f^{-1}(O) \in \tau$, also $P := f^{-1}(O) \in \dot{x} \cap \tau$. Es folgt $O \in f(\varphi)$, denn $f(P) \in f(\varphi)$ und $f(P) \subseteq O$. Insgesamt also $\dot{f(x)} \cap \sigma \subseteq f(\varphi)$.

Nehmen wir nun an, für jeden gegen x konvergenten Filter φ ist $f(\varphi)$ konvergent gegen $f(x)$. Sei dann $f(x) \in O \in \sigma$. Wir bilden nun den Filter $\varphi := \{P \subseteq X \mid \exists U \in \dot{x} \cap \tau \text{ mit } U \subseteq P\}$. Offensichtlich gilt $\varphi \to x$, also auch $f(\varphi) \to f(x)$. Damit folgt unmittelbar $O \in f(\varphi)$. Es gibt dann ein $P \in \varphi$ mit $f(P) \subseteq O$. Nach Konstruktion gibt es somit auch ein $U \in \dot{x} \cap \tau$ mit $U \subseteq P$, also $f(U) \subseteq O$. Damit ist alles gezeigt.

3.2.9 Satz: Charakterisierung der Trennungsaxiome in topologischen Räumen durch Filterkonvergenz

Für jeden topologischen Raum (X, τ) gilt:

T0 (X, τ) ist ein T_0-Raum, genau dann wenn $\forall x, y \in X$ gilt: $\dot{x} \xrightarrow{\tau} y$ und $\dot{y} \xrightarrow{\tau} x$ impliziert $x = y$.

T1 (X, τ) ist ein T_1-Raum, genau dann wenn $\forall x \in X$ gilt: $|\lim_{q_\tau} \dot{x}\,| \leq 1$.

T2 (X, τ) ist ein T_2-Raum, genau dann wenn $\forall \phi \in \mathscr{F}_0(X)$ gilt: $|\lim_{q_\tau} \phi| \leq 1$.

T3 (X, τ) ist ein T_3-Raum, genau dann wenn $\forall \phi \in \mathscr{F}(X)$ gilt: $\lim_{q_\tau} \phi = \lim_{q_\tau} \overline{\phi}$
Hier bezeichnet $\overline{\phi} := \{Q \subseteq X \mid \exists P \in \phi \text{ mit } \overline{P} \subseteq Q\}$.

Ferner ist für einen topologischen Raum (Y,σ) äquivalent:
(1) $\forall x,y \in Y$ gilt: $\overset{\bullet}{x}\xrightarrow{\sigma} y$ impliziert $\overset{\bullet}{y}\xrightarrow{\sigma} x$
(2) $\forall x,y \in Y$ gilt: $y \in \overline{\{x\}}$ impliziert $x \in \overline{\{y\}}$
(3) $\forall y \in Y\, \forall O \in \sigma$ gilt: $y \in O$ impliziert $\overline{\{y\}} \subseteq O$
Solch einen topologischen Raum nennen wir R_0-Raum.

Beweis: (T0): Ist klar.

(T1): Ist (X,τ) ein T_1-Raum und $x \in X$, so sei $\overset{\bullet}{x}\xrightarrow{\tau} y$. Also $\overset{\bullet}{y} \cap \tau \subseteq \overset{\bullet}{x}$. Wäre $y \neq x$, so sei $O \in \overset{\bullet}{y} \cap \tau$ mit $x \notin O$. Folglich $\emptyset = \{x\} \cap O \in \overset{\bullet}{x}$ - Widerspruch. Falls andererseits $\forall x \in X$ gilt: $|\lim_{q_\tau} \overset{\bullet}{x}\,| \leq 1$, so folgt für $y \in \overline{\{x\}}$ offenbar $y \in \lim_{q_\tau} \overset{\bullet}{y} \subseteq \lim_{q_\tau} \overset{\bullet}{x} \subseteq \{x\}$, also $x = y$.

(T2): Sei (X,τ) ein T_2-Raum. Annahme $\exists\, \phi \in \mathscr{F}_0(X)$ und $\exists x,y \in \lim_{q_\tau} \phi$ mit $x \neq y$. Seien $U,V \in \tau$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$, $y \in V$. Offenbar sind $U,V \in \phi$ - Widerspruch. Angenommen $\forall \phi \in \mathscr{F}_0(X)$ gilt: $|\lim_{q_\tau} \phi| \leq 1$. Sei $x \neq y$. Falls $(\overset{\bullet}{x} \cap \tau) \cup (\overset{\bullet}{y} \cap \tau)$ die eSE hat, dann sei ϕ ein Ultrafilter mit $(\overset{\bullet}{x} \cap \tau) \cup (\overset{\bullet}{y} \cap \tau) \subseteq \phi$. Offenbar gilt $\{x,y\} \subseteq \lim_{q_\tau} \phi$ - Widerspruch. Also gibt es ein $U \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ und ein $V \in \overset{\bullet}{y} \cap \tau$ mit $U \cap V = \emptyset$.

(T3): Sei (X,τ) ein T_3-Raum. Sei $\phi \in \mathscr{F}(X)$. In topologischen Räumen gilt natürlich $\lim_{q_\tau} \overline{\phi} \subseteq \lim_{q_\tau} \phi$. Sei $x \in \lim_{q_\tau} \phi$ und $O \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$. Sei $U \in \tau$ mit $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq O$. Sei $P \in \phi$ mit $P \subseteq U$. Offenbar ist $\overline{P} \subseteq O$, also $O \in \overline{\phi}$. Nehmen wir andererseits an $\forall \phi \in \mathscr{F}(X)$ gilt: $\lim_{q_\tau} \phi = \lim_{q_\tau} \overline{\phi}$. Sei $x \in O \in \tau$. Sei $\phi := \{P \subseteq X \mid \exists V \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau \text{ mit } V \subseteq P\}$. Offenbar ist $x \in \lim_{q_\tau} \phi = \lim_{q_\tau} \overline{\phi}$. Es gibt also ein $P \in \phi$ mit $\overline{P} \subseteq O$. Zu P existiert ein $V \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ mit $V \subseteq P$. Also $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq \overline{P} \subseteq O$.

Zeigen wir noch die Äquivalenz von (1), (2) und (3):

(1) $\Leftrightarrow$ (2) folgt aus der Äquivalenz von $y \in \overline{\{x\}}$ und $\overset{\bullet}{x}\xrightarrow{\sigma} y$. (2) $\Rightarrow$ (3): Angenommen es gibt $O \in \sigma$ und $y_0 \in O$ mit $\overline{\{y_0\}} \not\subseteq O$. Sei $y_1 \in \overline{\{y_0\}} \setminus O$. Dann wäre aber auch $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$, im Widerspruch zu $y_0 \in O$ und $y_1 \notin O$. (3) $\Rightarrow$ (2): Sei $y_1 \in \overline{\{y_0\}}$ und sei $O \in \overset{\bullet}{y_0} \cap \sigma$. Dann ist $\overline{\{y_0\}} \subseteq O$, also $y_1 \in O$ und folglich $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$.

3.2.10 Lemma

Sei (X,τ) ein Hausdorff-Raum und D eine in X dichte Menge. Dann ist $|X| \leq |\mathscr{F}_0(D)| \leq |\mathscr{P}(\mathscr{P}(D))|$.

Beweis: Für ein fest gewähltes $x \in X$ ist $\varphi_D^x := \{F \subseteq D \mid \exists O \in \dot{x} \cap \tau \text{ mit } O \cap D \subseteq F\}$ ein Filter auf D wie man durch Nachrechnen bestätigt. Also existiert ein Ultrafilter ψ_D^x auf D mit $\varphi_D^x \subseteq \psi_D^x$. Dieser Ultrafilter wird nun durch $\Phi_D^x := \{A \subseteq X \mid \exists F \in \psi_D^x \text{ mit } F \subseteq A\}$ zu einem Filter auf X erweitert. Für $O \in \dot{x} \cap \tau$ gilt nun $O \cap D \in \varphi_D^x \subseteq \Phi_D^x$. Daraus folgt dann aber

$\dot{x}\cap\tau\subseteq\Phi_D^x$, also $\Phi_D^x\to x$. Die Abbildung $\alpha:X\to\mathscr{F}_0(D)$ definiert durch $x\mapsto\psi_D^x$ ist nun aber injektiv, denn aus $\psi_D^{x_1}=\psi_D^{x_2}$ folgt $\Phi_D^{x_1}=\Phi_D^{x_2}$, also $\Phi_D^{x_1}\to x_1$ und $\Phi_D^{x_2}\to x_2$. Und damit gilt dann $x_1=x_2$, denn X ist als Hausdorff-Raum vorausgesetzt worden. Zusammen ergibt dies $|X|\leq|\mathscr{F}_0(D)|\leq|\mathscr{P}(\mathscr{P}(D))|$ (die zweite Ungleichung ist trivial).

3.2.11 Lemma (Filterkonvergenz bzgl Initialtopologien)

Bezeichne τ die initiale Topologie auf X bezüglich einer Familie $(Y_i,\sigma_i)_{i\in I}$ topologischer Räume mit zugehörigen Abbildungen $(f_i:X\to Y_i)_{i\in I}$. Ein Filter φ auf X konvergiert genau dann gegen ein Element $x\in X$, wenn $\forall i\in I\ f_i(\varphi)\to f_i(x)$.

Beweis: Wenn $\varphi\to x\in X$ und $O_i\in f_i(\dot{O})\cap\tau_i$, dann ist $f_i^{-1}(O_i)\in\dot{x}\cap\tau\subseteq\varphi$, also $O_i\subseteq f_i(f_i^{-1}(O_i))\in f(\varphi)$ und somit $f_i(\varphi)\to f_i(x)$.
Sei andererseits $\forall i\in I\ f_i(\varphi)\to f_i(x)$. Wir zeigen $\varphi\to x$. Sei dazu $x\in O\in\tau$. Nach Definition der Initialtopologie gibt es $i_1,...,i_n\in I$ mit $x\in\bigcap_{k=1}^n f^{-1}(O_{i_k})\subseteq O$. Da $f_{i_k}(x)\in O_{i_k}$ und $f_{i_k}(\varphi)\to f_{i_k}(x)$, gibt es $A_{i_k}\in\varphi$ mit $f_{i_k}(A_{i_k})\subseteq O_{i_k}$. Also $A_{i_k}\subseteq f_{i_k}^{-1}(O_{i_k})$ und somit $\varphi\ni\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}\subseteq\bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(O_{i_k})\subseteq O$. Folglich ist auch $O\in\varphi$.

3.3 Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen (1)

Wir stellen uns die Frage (und geben eine Antwort) unter welchen Bedingungen an einen Raum X sich eine auf einer abgeschlossenen Teilmenge A definierte stetige reellwertige Abbildung f auf den ganzen Raum X fortsetzen lässt. Es stellt sich dabei heraus, dass dies genau dann möglich ist, wenn der Raum X ein T_4-Raum ist.

Eine ähnliche Frage ist, unter welchen Bedingungen sich eine auf auf einer in X dichten Teilmenge A definierte stetige Abbildung (in einen Raum Y), auf ganz X fortsetzen lässt. Auch hier geben wir Antworten (die von Y abhängen).

Für zwei Abbildungen $f,g:X\to\mathbb{R}$ und Elemente $a,b\in\mathbb{R}$ sind $fg,af+bg:X\to\mathbb{R}$ durch $fg(x):=f(x)g(x)$ bzw. $(af+bg)(x):=af(x)+bg(x)$ sinnvoll definiert. Abbildungen von einer Menge X in $\mathbb{R}$ werden reelle Abbildungen genannt.

3.3.1 Satz (Tietze-Urysohn)

Für einen topologischen Raum (X,τ) sind äquivalent:

1. (X,τ) ist ein T_4-Raum.
2. Zu jeder abgeschlossenen Menge A und jeder offenen Menge O mit $A\subseteq O$ gibt es eine offenen Menge U mit $A\subseteq U\subseteq\overline{U}\subseteq O$.

3. Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen A,B gibt es eine stetige Abbildung $f: X \to [0,1]$, mit $f(A) \subseteq \{0\}$ und $f(B) \subseteq \{1\}$ (Lemma von Urysohn).

4. Jede auf einer abgeschlossenen Menge definierte und stetige reelle Abbildung lässt sich zu einer reellen stetigen Abbildung auf X fortsetzen (Fortsetzungssatz von Tietze).

Beweis: 1. $\Leftrightarrow$ 2. ist eine leichte Übung.

1. $\Rightarrow$ 3. Seien A,B disjunkte abgeschlossene Mengen in X. Es gibt dann eine disjunkte offene Menge U_0 von A mit $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1 := X \setminus B$. Für jede natürliche Zahl n setze $P_n := \{r \in \mathbb{Q}^{\geq 0} \mid \exists k \leq 2^n \text{ mit } r = k/2^n\}$ und $P := \bigcup_{n \geq 0} P_n$. Wir zeigen nun, dass es für jedes $r \in P$ eine offene Menge U_r gibt, mit $r < r' \Rightarrow \overline{U_r} \subseteq U_{r'}$. Da $n < n' \Rightarrow P_n \subseteq P_{n'}$ gilt und für P_0 offensichtlich U_0, U_1 das gewünschte tun, reicht es, wenn wir uns für die Elemente aus $P_{n+1} \setminus P_n$ entsprechende U_r besorgen, die zusammen mit denen, die wir (per Induktion) bereits für P_n haben, dann das gewünschte für P_{n+1} tun (man mache sich klar welche Elemente in $P_{n+1} \setminus P_n$ liegen und wie sie mit denen aus P_n in Beziehung stehen). Seien also entsprechende $(V_t)_{t \in P_n}$ gegeben und $r \in P_{n+1}$. Falls $r = 2k/2^{k+1}$, dann setze $U_r := V_{k/2^k}$ (diese werden also übernommen). Falls hingegen $r = (2k+1)/2^{k+1}$, so gilt ja $\overline{V}_{2k/2^{k+1}} \subseteq V_{(2k+2)/2^{k+1}}$, also existiert ein offenes U mit $\overline{V}_{2k/2^{k+1}} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V_{(2k+2)/2^{k+1}}$. Setze dann $U_r := U$.

Wir sind noch nicht ganz fertig...

Für $t \in [0,1)$ setze $V_t := \bigcup_{r \in P, r \leq t} U_r$ und $V_1 := X$. Für $t < t'$ gilt ebenfalls $\overline{V_t} \subseteq V_{t'}$ (Beweis als Übung). Nun können wir $f: X \to [0,1]$ durch $f(x) := inf\{t \in [0,1] \mid x \in U_t\}$ definieren. Dieses f ist stetig ($\mathscr{S} := \{[0,q) \mid q \in [0,1]\} \cup \{(q,1] \mid q \in [0,1]\}$ ist eine Subbasis für $\tau_{[0,1]}$ und es gilt $x \in f^{-1}([0,q)) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{t<q} U_t$, bzw. $x \in f^{-1}((q,1]) \Leftrightarrow \exists s$ mit $f(x) > s > q$ und $x \notin \overline{U_s}$) und aus der Konstruktion folgern wir $f(U_0) \subseteq \{0\}$ (man beachte $U_0 = V_0$). Dieses f hat dann die geforderten Eigenschaften ($f(A) \subseteq \{0\}$ ist klar, und für $f(B) \subseteq \{1\}$ beachte man $B = X \setminus U_1$).

Sei $c > 0$, und definiere $g: X \to [-c,c]$ durch $g(x) := 2c(f(x) - 1/2)$, dann ist g ebenfalls stetig mit $g(A) \subseteq \{-c\}$ und $g(B) \subseteq \{c\}$.

3. $\Rightarrow$ 4. Wir zeigen die Aussage erst für beschränkte Abbildungen. Sei also $f: A \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann gibt es ein $c > 0$ mit $f: A \to [-c,c]$. Doch zunächst noch eine kleine Vorbemerkung:

Sei $f: A \to [-z,z]$ stetig, dann gibt es ein $g: X \to [-z/3, z/3]$ mit $|f(x) - g(x)| \leq 2z/3$ für $x \in A$. Der Beweis ist einfach (Setze $A_1 := f^{-1}([-z, -z/3])$ und $A_2 := f^{-1}([z/3, z])$. A Aus dem Urysohn-Lemma schließen wir auf die Existenz eines $g: X \to [-z/3, z/3]$ mit $g(A_1) \subseteq \{-z/3\}$ und $g(A_2) \subseteq \{z/3\}$, insbesondere also $|f(x) - g(x)| \leq 2z/3$ für $x \in A$.).

Sei nun also $f: A \to [-c,c]$ stetig. Dann gibt es ein $g_0: X \to [-c/3, c/3]$ mit $|f(x) - g_0(x)| \leq 2c/3$ für $x \in A$. Nun ist $f - g_0: A \to [-2c/3, 2c/3]$ stetig, also gibt es ein $g_1: X \to [-2c/9, 2c/9]$ mit $|f(x) - g_0(x) - g_1(x)| \leq 4c/9$ für $x \in A$. Den Prozess fortgesetzt ergibt: $f - g_0 - \ldots - g_n: A \to [-(2/3)^{n+1}c, (2/3)^{n+1}c]$ also existiert ein stetiges $g_{n+1}: X \to [-(2/3)^{n+1}c/3, (2/3)^{n+1}c/3]$, mit $|f(x) - g_0(x) - \ldots - g_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+2}c$ für $x \in A$. Setze dann noch $f_n(x) := g_0(x) + ... + g_n(x)$ und $h(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Die f_n sind stetig und die Folge ist gleichmäßig konvergent, also ist auch h stetig und offensichtlich gilt $h_{|A} = f$.

Nun kommen wir zum allgemeinen Fall: Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Nun wird $\mathbb{R}$ durch $\phi : \mathbb{R} \to (-1,1)$, $\phi(x) := x/(1+|x|)$ homöomorph auf $(-1,1)$ abgebildet. Also gibt es ein stetiges $g : X \to [-1,1]$ mit $g_{|A} = \phi \circ f$. Nun ist $B := g^{-1}(\{-1,1\})$ abgeschlossen in X und $A \cap B = \emptyset$. Aus dem Urysohn-Lemma schließen wir auf die Existenz eines $k : X \to [0,1]$ mit $k(A) \subseteq \{1\}$ und $k(B) \subseteq \{0\}$. Also $gk : X \to (-1,1)$ (!!!). Schließlich ist $\phi^{-1} \circ (gk) : X \to \mathbb{R}$ die gesuchte Fortsetzung (von dem sich der Leser mit Freuden überzeugt).

4. $\Rightarrow$ 1. Seien A, B disjunkte (nichtleere) abgeschlossene Mengen. Dann ist auch $Y := A \cup B$ abgeschlossen und A, B sind in Y sowohl offen, als auch abgeschlossen!. Das heißt $f : Y \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$ für $a \in A$ und $b \in B$ ist stetig. Also gibt es ein stetiges $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g_{|Y} = f$. $U := g^{-1}((-1/3, 1/3))$ bzw. $V := g^{-1}((2/3, 5/3))$ sind dann disjunkte offene Obermengen.

3.3.2 Korollar

Wenn $f : A \to [a,b]$ stetig ist und A eine abgeschlossene Menge in dem T_4-Raum X ist, so lässt sich f zu einem stetigem $F : X \to [a,b]$ fortsetzen.

Beweis: f lässt sich zu einem stetigem $G : X \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Wir definieren dann $g : \mathbb{R} \to [a,b]$ durch $g(x) = a$ für $x \le a$, $g(x) = b$, für $b \le x$ und sonst $g(x) = x$. Und nun setzen wir einfach $F := g \circ G$.

Kommen wir nun zu dem Problem stetige, auf einer dichten Teilmenge D von X definierte Abbildungen auf ganz X fortzusetzen.

3.3.3 Lemma

Seien $f, g : (X, \tau) \to (y, \sigma)$ zwei stetige Abbildungen, welche auf einer in X dichten Teilmenge D übereinstimmen. Ferner Sei Y ein Hausdorff-Raum. Dann stimmen sie auf ganz X überein.

Beweis: Annahme es gibt ein $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Dann gibt es disjunkte offene Mengen U, V in Y, mit $f(x) \in U$ und $g(x) \in V$. Nun enthält aber $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ das Element x, ist also nicht leer und enthält somit sogar ein Element $d \in D$. Damit gilt dann $f(d) \in U$ und $g(d) \in V$. Da aber $f(d) = g(d)$, ist dies ein Widerspruch.

3.3.4 Lemma

Sei $f : X \to Y$ stetig und Y ein Hausdorff Raum. Dann ist $G_f := \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ (der Graph von f) abgeschlossen in $X \times Y$.

Beweisskizze: $\Delta_Y := \{(y,y) \mid y \in Y\}$ (die Diagonale) ist abgeschlossen in $Y \times Y$ (Y ist Hausdorff). $\phi : X \times Y \to Y \times Y$ definiert durch $\phi(x,y) := (f(x),y)$ ist stetig und es gilt $G_f = \phi^{-1}(\Delta_Y)$.

3.3.5 Lemma

Sei (X,τ) ein Hausdorff-Raum, (Y,σ) ein beliebiger top. Raum und $A \subseteq X$ mit $\overline{A} = X$. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, so dass $f|A : A \to f(A)$ ein Homöomorphismus ist, so gilt $f(A) \cap f(X \setminus A) = \emptyset$.

Beweis: Annahme es gilt $f(x) = f(a)$, für ein gewisses $x \in X \setminus A$ und $a \in A$. Sei $y := f(A)$ und seien dann U,V offen und disjunkt mit $a \in U$ und $x \in V$. Aus $U \cap V = \emptyset$ folgt auch $U \cap \overline{V} = \emptyset$ (Wenn $z \in U \cap \overline{V}$, dann $z \in U \in \dot{z} \cap \tau$ und $z \in \overline{V}$, also $U \cap V \neq \emptyset$.).

Außerdem ist $\overline{V} = \overline{V \cap A}$, denn $z \in \overline{V}$ und $O \in \dot{z} \cap \tau$ impliziert $\emptyset \neq O \cap V \in \tau$, also $\emptyset \neq (O \cap V) \cap A = O \cap (V \cap A)$, also $z \in \overline{V \cap A}$ (das $\overline{V \cap A} \subseteq \overline{V}$ gilt, ist klar).

Da $f|A : A \to f(A)$ ein Homöomorphismus ist, haben wir $f(A \cap U) = f(A) \cap U'$ und $f(A \cap V) = f(A) \cap V'$, für gewisse $U', V' \in \sigma$. Da f nun auch stetig ist, folgt $y \in f(\overline{V}) = f(\overline{V \cap A}) \subseteq \overline{f(V \cap A)} = \overline{f(A) \cap V'}$.

Aus $y \in U'$ und $y \in \overline{f(A) \cap V'}$ folgt $\emptyset \neq U' \cap (f(A) \cap V') = f(A \cap U) \cap f(A \cap V) = f(A \cap U \cap V) = f(\emptyset) = \emptyset$ - ein Widerspruch!

3.3.6 Satz

Sei (X,τ) ein topologischer Raum, A eine in X dichte Teilmenge und $f : A \to Y$ eine stetige Abbildung in einen T_3-Raum (Y,σ). Dann gibt es genau dann eine stetige Fortsetzung $g : X \to Y$, wenn es zu jedem $x \in X$ eine stetige Fortsetzung $f_x : A \cup \{x\} \to Y$ gibt.

Ist Y zusätzlich T_0, so ist die Abbildung g eindeutig bestimmt.

Beweis: Die eine Richtung ist trivial. Nehmen wir also an es gibt zu jedem $x \in X$ eine stetige Fortsetzung $f_x : A \cup \{x\} \to Y$. Wir definieren $g : X \to Y$ durch $g(x) := f_x(x)$. Auf A stimmt g also mit f überein; g ist also eine Fortsetzung auf ganz X. Zeigen wir die Stetigkeit. Sei V offen in Y und $g(x) \in V$. Es existiert dann ein offenes W mit $g(x) \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$. Wir unterscheiden nun - zur besseren Übersicht - zwei Fälle:

1.Fall $x \in A$. Da f stetig ist, gibt es ein $U \in \dot{x} \cap \tau$ mit $f(A \cap U) \subseteq W$. Angenommen $g(U) \nsubseteq V$. Dann gibt es ein $z \in U \cap (X \setminus A)$ mit $f_z(z) \in Y \setminus V \subseteq Y \setminus \overline{W}$. Die letzte Menge ist aber offen und f_z ist stetig, es gibt also ein $U' \in \dot{z} \cap \tau$ mit $f_z(U' \cap (A \cup \{z\})) \subseteq Y \setminus \overline{W}$. Nun enthält U' aber auch (mindestens) ein Element A aus A, also $f_z(a) = f(a) \in W$ - ein Widerspruch!

2.Fall $x \in X \setminus A$. Dann gibt es ein $U \in \dot{x} \cap \tau$ mit $f_x(U \cap (A \cup \{x\})) \subseteq W$. Wieder nehmen wir an: $g(U) \nsubseteq V$ und wieder folgt daraus die Existenz eines $y \in U \setminus (A \cup \{x\})$ mit $f_y(y) = g(y) \in Y \setminus \overline{W}$. Dann gibt es auch wieder ein $U' \in \dot{y} \cap \tau$ mit $f_y(U' \cap (A \cup \{y\})) \subseteq Y \setminus \overline{W}$. Setzen wir $U'' := U \cap U'$, so gilt $y \in U''$, also $\emptyset \neq U''$ und somit $\exists a \in A \cap U''$. Es gilt dann $f_x(a) = f_y(a)$ und $f_x(U'' \cap (A \cup \{x\})) \subseteq W$ bzw. $f_y(U'' \cap (A \cup \{y\})) \subseteq Y \setminus \overline{W}$ - wieder ein Widerspruch!

Die Abbildung g ist also stetig. Ist Y nun noch T_0, so auch T_2 und Lemma 3.3.3 garantiert die Eindeutigkeit.

3.3.7 Lemma

Seien (X, τ), (Y, σ) topologische Räume, D eine dichte Teilmenge von X (also $\overline{D} = X$), ferner (Y, σ) ein T_3-Raum und $f : D \to Y$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in X \, \exists y_x \in Y \ \text{ mit } \ f(\varphi_x | D) \xrightarrow{\sigma} y_x.$$

Dann lässt sich f stetig auf ganz X fortsetzen. Hier bezeichnet φ_x den von $\dot{x} \cap \tau$ erzeugten Filter. Ist Y zudem T_0, so ist die Fortsetzung eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir definieren für jedes $x \in X$ eine stetige Fortsetzung $f_x : D \cup \{x\} \to Y$. Satz 3.3.6 erledigt dann den Rest. Wir setzen dazu

$$f_x(z) := \begin{cases} f(d) & \text{falls } z = d \in D \\ y_x & \text{falls } z = x \notin D \end{cases}$$

Zeigen wir die Stetigkeit:

Sei $d \in D$ und $f(d) \in O \in \sigma$. 1.Fall $y_x \in O$, dann gibt es ein $U \in \dot{d} \cap \tau$ mit $f(U \cap D) \subseteq O$, also $f_x(U \cap (D \cup \{x\})) \subseteq O$.

2.Fall $y_x \notin O$. Dann ist $O \notin f(\varphi_x | D)$. Es gilt $f_x^{-1}(O) = f^{-1}(O) = V \cap D$, für ein $V \in \dot{d} \cap \tau$. Wäre $x \in V$, so wäre $V \cap D \in \varphi_x | D$, also $O \in f(\varphi_x | D)$ - ein Widerspruch. Also ist $x \notin V$ und somit $f^{-1}(O) = V \cap (D \cup \{x\})$.

Sei nun $O \in y_x \cap \sigma$. Dann ist $O \in f(\varphi_x | D)$, es gibt also ein $P \in \varphi_x$ mit $f(P \cap D) \subseteq O$. Zu P gibt es ein $U \in \dot{x} \cap \tau$ mit $U \subseteq P$. Damit gilt dann $f_x(U \cap (D \cup \{x\})) \subseteq O$.

Die Stetigkeit ist damit gezeigt und der Beweis beendet.

3.3.8 Notation und Bemerkung

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $D \subseteq X$ mit $\overline{D} = X$. Für Teilmengen $A \subseteq D$ von D setzen wir nun $E_X(A) := X \setminus \overline{D \setminus A}$. Ist U in der Teilraumtopologie von D offen, gilt beispielsweise $D \cap E_X(U) = U$ (Beweis: Sei $z \in D \cap E_X(U)$. Falls $z \notin U$, dann aber $z \in D \setminus U$, also $z \in \overline{D \setminus U}$ und somit $z \notin E_X(U)$ - Widerspruch. Sei andererseits $z \in U$. Es gibt ein $V \in \tau$ mit $U = V \cap D$. Falls $z \in \overline{D \setminus U}$, dann $V \cap (D \setminus U) \neq \emptyset$ - auch ein Widerspruch.).

Mit dieser Notation lässt sich ein anderes interessantes Fortsetzungskriterium beweisen.

3.3.9 Satz

Sei (X, τ) ein top. Raum und D eine dichte Teilmenge, auf der eine stetige Abbildung $f : D \to Y$ in einen T_3-Raum (Y, σ) gegeben ist. Sei ferner $\mathscr{B}$ eine Basis von σ. Genau dann ist f stetig auf X fortsetzbar, wenn $\bigcup_{B \in \mathscr{B}'} E_X(f^{-1}(B)) = X$ ist, für jedes $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ mit $\bigcup \mathscr{B}' = Y$. Ist Y zudem ein T_0-Raum, so ist die Fortsetzung eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir verwenden Lemma 3.3.7. Sei also $x \in X$ und ϕ_x ein Filter auf D, so dass der Filter $\{P \subseteq X \mid \exists P' \in \phi_x \text{ mit } P' \subseteq P\}$ gegen x konvergiert. Das bedeutet $\forall O \in \dot{x} \cap \tau \, \exists P \in \phi_x$ mit $P \subseteq O$. Nehmen wir an (um einen Widerspruch abzuleiten), dass $f(\phi_x)$ in Y nicht konvergiert.

Dann gibt es zu jedem $y \in Y$ ein $B_y \in \dot{y} \cap \mathscr{B}$ mit $B_y \notin f(\phi_x)$. Nach Voraussetzung gilt dann $X = \bigcup_{y \in Y} E_X(f^{-1}(B_y))$. Es gibt also ein $y \in Y$ mit $x \in E_X(f^{-1}(B_y))$. Dann gibt es aber auch ein $P \in \phi_x$ mit $P \subseteq E_X(f^{-1}(B_y))$. Da $P \subseteq D$ folgt $P \subseteq E_X(f^{-1}(B_y)) \cap D = f^{-1}(B_y)$, also $f(P) \subseteq B_y$ und somit $B_y \in f(\phi_x)$ - Widerspruch!

Die Rückrichtung folgt aus $U \subseteq E_X(U \cap D)$, für jedes $U \in \tau$. Denn dann gilt für die Fortsetzung $\tilde{f}^{-1}(B) \subseteq E_X(f^{-1}(B))$, für jedes $B \in \mathscr{B}$.

3.4 Minimale topologische Räume

Stark in Zusammenhang mit den ersten Trennungsaxiomen T_0 und T_1 stehen gewisse minimale unendliche topologische Räume (siehe Satz 3.4.4). Um den Hauptsatz (Satz 3.4.4) dises Abschnitts beweisen zu können, benötigen wir ein Resultat über Ketten bzw. Antiketten in partiell geordneten Mengen, welches seinerseits aus einen bekannten Satz von Ramsey folgt. Für beide Resultate geben wir am Ende dieses Abschnitts Beweise.

Zur Erinnerung: Ist $(X, \leq)$ eine partielle Ordnung, so ist eine Kette aus X eine durch $\leq$ total (oder auch linear) geordnete Teilmenge. Unter einer Antikette aus X verstehen wir eine Teilmenge A von X mit der Eigenschaft, dass keine zwei Elemente aus A bzgl. $\leq$ vergleichbar sind.

3.4.1 Lemma

Sei (X, τ) ein unendlicher topologischer Raum. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge $Y \subseteq X$, so dass die induzierte Topologie auf Y die indiskrete ist, oder Y ist als Teilraum ein T_0-Raum.

Beweis: 1.Fall τ ist endlich. Sei dann $V \in \tau$ inklusionsminimal in der Menge aller unendlichen offenen Mengen. Dementsprechend ist dann $Y := V \setminus \bigcup_{O \in \tau, O \neq V} O$ ebenfalls unendlich und als Teilraum ist Y indiskret.

2.Fall τ ist unendlich. Wir unterscheiden nun zwei weitere Fälle.

2.1 τ ist ohne auf/absteigende Folge, also ohne Folgen der Art $O_0 \subset O_1 \subset \dots$ bzw. $O_0 \supset O_1 \supset \dots$ mit paarweise verschiedenen Elementen aus τ. Dann ist $\tau' := \{O \in \tau \mid O \text{ ist endlich }\}$ endlich und $\tau_0 := \{O \in \tau \setminus \tau' \mid O \text{ ist inklusionsminimal }\} \neq \emptyset$. Für $O \in \tau_0$ ist $Y := O \setminus \bigcup\{O' \in \tau \mid O' \subseteq O \text{ und } O' \neq O\}$ somit unendlich und die entsprechende Teilraumtopologie auf Y ist wieder indiskret.

2.2 Gibt es hingegen in τ aufsteigende oder absteigende Folgen, also beispielsweise $O_0 \subset O_1 \subset \dots$, mit paarweise verschiedenen O_i, so wählen wir je ein $x_i \in O_i \setminus O_{i-1}$, für jedes $i = 1,2,\dots$ und $\{x_i \mid i = 1,2,\dots\}$ ist offensichtlich ein T_0-Teilraum.

3.4.2 Lemma

Sei (X,τ) ein unendlicher T_1-Raum. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge $Y \subseteq X$, so dass die induzierte Topologie auf Y die diskrete ist, oder Y hat als Teilraum die koendliche Topologie: $\{O \subseteq Y \mid Y \setminus O \text{ ist endlich }\}$.

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.Fall $\forall A \subseteq X$ (A: unendlich $\Rightarrow \exists O \in \tau$ mit $O \cap A \neq \emptyset$ und $A \setminus O$ ist unendlich)

Zu X gibt es dann ein $O_0 \in \tau$ mit $O_0 \neq \emptyset$ und $A_0 := X \setminus O_0$ ist unendlich. Sei $x_0 \in O_0$ beliebig gewählt und $A_{-1} := X$.

Sind nun $O_0,\dots,O_n$ aus τ gewählt mit $x_0,\dots,x_n$ und $A_0,\dots,A_n$, wobei $A_k = A_{k-1} \setminus O_k$, $x_k \in A_{k-1} \cap O_k$ und jedes A_k unendlich ist, so gibt es ein $O_{n+1} \in \tau$ mit $O_{n+1} \cap A_n \neq \emptyset$ und $A_{n+1} := A_n \setminus O_{n+1}$ unendlich. Wir wählen dann $x_{n+1} \in A_n \cap O_{n+1}$.

Die so konstruierten Folgen haben die Eigenschaften:

a) $x_n \in O_n$, für alle n.

b) $x_m \notin O_n$, für alle $m > n$.

c) $x_m \notin O'_n := O_n \setminus \{x_0,\dots,x_{n-1}\} \in \dot{x_n} \cap \tau$, für alle $m < n$.

Dementsprechend ist $\{x_0,\dots\}$ als Teilraum diskret.

2.Fall $\exists A$ unendlich $\subseteq X$, mit der Eigenschaft $\forall O \in \tau$ gilt: $O \cap A = \emptyset$ oder $A \setminus O$ ist endlich. Offensichtlich hat A als Teilraum dann die koendliche Topologie.

3.4.3 Lemma

Sei (X,τ) ein unendlicher T_0-Raum, der keinen unendlichen T_1-Teilraum besitzt. Dann gibt es eine (abzählbar) unendliche Teilmenge $Y \subseteq X$, so dass Y als Teilraum zu $(\mathbb{N},\sigma)$ homöomorph ist, wobei

$\sigma = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \dots\}$ oder $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{1,2,\dots\}, \{2,3,\dots\}, \{3,4,\dots\}, \dots\}$.

Beweis: Da (X,τ) ein T_0-Raum ist, bekommen wir durch $x \leq y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$ eine partielle Ordnung (die Relation ist transitiv und antisymmetrisch). Da X als Menge unendlich ist, gibt es somit eine unendliche Kette oder eine unendliche Antikette (Korollar 3.4.6). Gäbe es eine unendliche Antikette $A \subseteq X$, so gilt für je zwei verschiedene Elemente x, y aus A also $\neg(x \in \overline{\{y\}})$ und $\neq (y \in \overline{\{x\}})$, als Teilraum währe A also T_1. Da das nach Voraussetzung nicht geht, muss es also eine undliche Kette geben. Insbesondere gibt es dann auch abzählbare Ketten. Falls $x_0 < x_1 < x_2 < ...$, so ist $A := \{x_0, x_1, ...\}$ als Teilraum homöomorph zu $(\mathbb{N}, \sigma)$, mit $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{1,2,...\}, \{2,3,...\}, \{3,4,...\}, ...\}$. Falls hingegen $x_0 > x_1 > x_2 > ...$, so ist $A := \{x_0, x_1, ...\}$ als Teilraum homöomorph zu $(\mathbb{N}, \sigma)$, mit $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, ...\}$.

3.4.4 Satz über die Existenz minimaler Topologien

Jeder unendliche topologische Raum (X, τ) enthällt eine unendliche Teilmenge Y, die als Teilraum zu einem der folgenden fünf topologischen Räume homöomorph ist. Ferner sind keine zwei dieser fünf topologischen Räume homöomorph, allerdings ist jeder dieser Räume zu jedem unendlichen Teilraum von sich homöomorph. Es handelt sich bei diesen fünf topologischen Räumen also um minimale unendliche topologische Räume.

1. $(\mathbb{N}, \sigma_1)$, wobei $\sigma_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$
2. $(\mathbb{N}, \sigma_2)$, wobei $\sigma_2 = \mathscr{P}(\mathbb{N})$
3. $(\mathbb{N}, \sigma_3)$, wobei $\sigma_3 = \{O \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus O \text{ ist endlich}\}$
4. $(\mathbb{N}, \sigma_4)$, wobei $\sigma_4 = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, ...\}$
5. $(\mathbb{N}, \sigma_5)$, wobei $\sigma_5 = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{1,2,...\}, \{2,3,...\}, \{3,4,...\}, ...\}$

Beweis: Das nun jeder unendliche topologische Raum (mindestens) einen dieser fünf topologischen Räume als Teilraum enthält, folgt aus einer Kombination der drei vorigen Lemmas. Das jeder unendliche Teilraum Z von $(\mathbb{N}, \sigma_i)$ homöomorph zu $(\mathbb{N}, \sigma_i)$ ist, ist für $i = 1,2,3$ unmittelbar klar. Für $i = 4$ und $i = 5$ kann man durch Induktion einen Homöomorphismus konstruieren. Das keine zwei dieser fünf topologischen Räume homöomorph sind folgt aus:

1. $|\sigma_1| < |\sigma_3| = |\sigma_4| = |\sigma_5| < |\sigma_2|$.
2. σ_4 ethält mit einer Ausnahme nur endliche Mengen.
3. σ_5 enthält mit einer Ausnahme nur unendliche Mengen und ist kein T_1-Raum.
4. σ_3 enthält mit einer Ausnahme nur unendliche Mengen und ist ein T_1-Raum.

3.4.5 Satz (Ramsey)

Sei $k, r \in \mathbb{N}$. Für eine Menge X bezeichnen wir mit $[X]^k := \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von X und mit $\overline{r} := \{l \in \mathbb{N} \mid l \leq r\}$. Ist nun $f : [X]^k \to \overline{r}$ eine Abbildung, so gibt es eine unendliche Teilmenge $Y \subseteq X$, so dass f eingeschränkt auf $[Y]^k$ konstant ist.

Beweis: Wir führen Induktion über k. Für $k = 1$ und unendliches X' ist die Aussage klar (falls nicht, so bleibt dies als leichte übung)! Nehmen wir an es wurde bewiesen, dass die

Aussage wurde für k und jede unendliche Menge X' bewiesen wurde. Sei $f : [X]^{k+1} \to \overline{r}$ gegeben. Wir wählen ein beliebiges $x_0 \in X$ und definieren $g_0 : [X \setminus \{x_0\}]^k \to \overline{r}$ durch $g_0(A) := f(A \cup \{x_0\})$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $X_0 \subseteq X \setminus \{x_0\}$ und ein $r_o \in \overline{r}$, so dass $g(A) = r_0$ ist, für jedes $A \in [X_0]^k$.

Sind $x_0, \ldots, x_n$ und $g_0, \ldots, g_n$ und $X_0, \ldots, X_n$ bzw. $r_0, \ldots, r_n$ gewählt, so definieren wir ein $g_{n+1} : [X_n \setminus \{x_n\}]^k \to \overline{r}$ durch $g_{n+1}(A) := f(A \cup \{x_n\})$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert dann ein $X_{n+1} \subseteq X \setminus \{x_{n+1}\}$ und ein $r_{n+1} \in \overline{r}$, so dass $g(A) = r_{n+1}$ ist, für jedes $A \in [X_{n+1}]^k$. Ferner wählen wir ein beliebiges $x_{n+1} \in X_{n+1}$. Auf diese Weise bekommen wir vier Folgen:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nun ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (unendliche) Folge aus der Menge $\overline{r}$. Es muss also ein unendliches $J \subseteq \mathbb{N}$ und ein $l \in \overline{r}$ geben mit $r_j = l$, für alle $j \in J$. Wir zeigen nun noch, dass die Menge $Y := \{x_j \mid j \in J\}$ die geforderten Eigenschaften hat.

Sei also $A \in [Y]^{k+1}$ Dann ist $A = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k+1}}\}$ mit $j_1 < \ldots < j_{k+1}$ (die Elemente aus A sind Elemente der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wir ordnen sie einfach nach der Größe ihres Index). Für $i > 1$ ist $x_{j_1} \in X_{j_1} \supseteq X_{j_1} \setminus \{x_{j_1} \supseteq X_{j_1+1} \supseteq X_{j_i} \ni x_{j_i}$. Für $B = \{x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k+1}}\}$ gilt nun $l = r_{j_1} = g_{j_1}(B) = f(B \cup \{x_{j_1}\}) = f(A)$. Damit ist alles gezeigt.

3.4.6 Korollar

Sei $(X, \leq)$ eine unendliche partielle Ordnung. Dann gibt es in X eine unendliche Kette oder eine unendliche Antikette (in einer Antikette sind keine zwei Elemente bzgl. der Ordnung vergleichbar).

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener Elemente aus X. Durch $[\mathbb{N}]^2 = \{\{i, j\} \mid i < j \text{ und } x_i < x_j\} \cup \{\{i, j\} \mid i < j \text{ und } x_i > x_j\} \cup \{\{i, j\} \mid i \neq j \text{ und } \neg(x_i < x_j) \text{ und } \neg(x_i > x_j)\}$ bekommen wir eine Zerlegung von $[\mathbb{N}]^2$ und damit auch eine Abbildung $f : [\mathbb{N}]^2 \to \{0, 1, 2\}$ im Sinne von Satz 3.4.5 ($f(A) = 0, 1$ oder 2, je nachdem in welcher Zerlegungsmenge A steckt). Damit bekommen wir dann eine unendliche Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}$, wobei f auf $[J]^2$ konstant ist. Es treten nun drei Fälle ein:

1. $[J]^2 \subseteq \{\{i, j\} \mid i < j \text{ und } x_i < x_j\}$, dann gibt es eine aufsteigende Kette.
2. $[J]^2 \subseteq \{\{i, j\} \mid i < j \text{ und } x_i > x_j\}$, dann gibt es eine absteigende Kette.
3. $[J]^2 \subseteq \{\{i, j\} \mid i \neq j \text{ und } \neg(x_i < x_j) \text{ und } \neg(x_i > x_j)\}$, dann gibt es eine Antikette.

3.5 Eine Charakterisierung der A1-Räume

Welche Räume erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom (A1), welches besagt, dass jeder Punkt im Raum eine abzählbare Umgebungsbasis hat. Es wird sich herausstellen, dass genau die Bilder metrischer Räume unter stetigen und zugleich offenen Abbildungen das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen

3.5.1 Beispiel (Baire-Raum mit Basis X)

Sei X eine unendliche Menge und $\mathbb{N}' := \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir werden nun auf $B(X) := X^{\mathbb{N}'}$ (der Menge aller Folgen aus X) eine interessante Metrik definieren. Dazu definieren wir für zwei Folgen $z = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'})$ und $z' = (y_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ wie folgt eine Metrik. Falls $z = z'$, so setzen wir $d(z,z') = 0$. Andernfalls $d(z,z') := \frac{1}{k(z,z')}$, wobei $k(z,z') := \min\{n \in \mathbb{N}' \mid x_n \neq y_n\}$. Dann ist $d : B(X) \times B(X) \to B(X)$ eine Metrik:

1) Offensichtlich ist $d(z,z') = d(z',z)$, für alle $z,z' \in B(X)$.

2) Ebenso offensichtlich ist $d(z,z') = 0 \Leftrightarrow z = z'$, für alle $z,z' \in B(X)$.

3) Seien $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ und $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}'} \in B(X)$. Für den Nachweis der Dreiecksungleichung sei o.B.d.A. $x \neq y \neq z \neq x$. Dann ist $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ äquivalent zu $k(x,z)k(y,z) \leq k(x,y)(k(x,z) + k(y,z))$. Es reicht also die zweite Ungleichung zu zeigen. Wir setzen dazu $k := k(x,y)$ und unterscheiden zwei Fälle.

1.Fall $k(x,z) \leq k$. Damit folgt aber $k(x,z)k(y,z) \leq k(x,y)k(y,z) \leq k(x,y)(k(x,z) + k(y,z))$.

2.Fall $k < k(x,z)$. Dann ist $k(y,z) \leq k$ (Andernfalls wäre $k < k(y,z)$. Aber $x_k = z_k$ und $z_k = y_k$, also auch $x_k = y_k$. Dies ist dann aber ein Widerspruch.). Damit haben wir dann $k(y,z) \leq k(x,y) < k(x,z)$ und somit $k(x,z)k(y,z) \leq k(x,z)k(x,y) \leq k(x,y)(k(x,z) + k(y,z))$.

Damit ist gezeigt, dass d eine Metrik ist.

Sei $m \in \mathbb{N}'$ und $(x_1,...,x_m) \in X^m$. Wir setzen $B_{(x_1,...,x_m)} := \{y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}'} \in B(X) \mid y_1 = x_1,...,y_m = x_m\}$. Wie aus allgemeinen metrischen Räumen bereits bekannt, ist $K(y,\varepsilon) := \{x \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ die offene Kugel um y mit Radius ε. Sei nun $y \in B_{(x_1,...,x_m)}$. Dann ist $K(y,\frac{1}{m}) = B_{(x_1,...,x_m)}$. Der Beweis bleibt als leichte Übung für den Leser.

Setzen wir $X^{<\omega} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}'} X^n$, so gilt $|X^\omega| = |X|$. Damit ist dann gezeigt, dass $\mathscr{B} := \{B_{(x_1,...,x_m)} \mid (x_1,...,x_m) \in X^{<\omega}\}$ eine Basis für $(B(X),d)$ ist mit $|\mathscr{B}| = |X|$. Ferner sind alle Basiselemente zugleich offen und abgeschlossen und zwei Basiselemente sind entweder disjunkt, oder eins ist in dem anderen enthalten.

Für jedes $n \in \mathbb{N}'$ sei $(X_n,\tau_n) := (X,\mathscr{P}(X))$. Bilden wir dann den Produktraum $\prod_{n\in\mathbb{N}'} X_n$, so kann man leicht sehen, dass $\prod_{n\in\mathbb{N}'} X_n$ mit der Produkttopologie homöomorph zu $B(X)$ ist. Mit Hilfe von Lemma 2.1.6 kann man nun leicht beweisen, dass $\mathscr{B}$ sogar eine Basis minimaler Kardinalität für $B(X)$ ist. Die Namensgebung Baire-Raum mit Basis X ist hierdurch und die Tatsache, dass Baire diesen Raum als erster beschrieben hat, motiviert.

Zum Abschluss sei noch bemerkt, dass $B(X)$ ein vollständiger metrischer Raum ist (siehe dazu Definition 4.5.19; auch dieser leichte Beweis bleibt dem Leser überlassen).

3.5.2 Lemma

Sei (X,τ) ein T_0 und ein A1-Raum und sei $\mathscr{B}$ eine Basis für τ. Dann gibt es ein $Y \subseteq B(\mathscr{B})$ mit einer stetigen, offenen und surjektiven Abbildung $f : Y \to X$.

Beweis: $Y := \{(B_n)_{n\in\mathbb{N}'} \in B(\mathscr{B}) \mid (B_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ist eine Umgebungsbasis eines Punktes $x \in X\}$. Da es sich um einen A1-Raum handelt, macht das Sinn. Sei nun $(B_n)_{n\in\mathbb{N}'} \in Y$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $x \in X$, so dass $(B_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ eine Umgebungsbasis von x ist (denn (X,τ) ist ein T_0-Raum). Bezeichnen wir mit $f((B_n)_{n\in\mathbb{N}'})$ diesen eindeutig bestimmten Punkt, so haben wir damit eine Abbildung $f: Y \to X$ definiert. Offensichtlich ist f somit surjektiv (das ist gerade die A1 Eigenschaft).

Zeigen wir, dass f stetig ist. Dazu sei $x := f((B_n)_{n\in\mathbb{N}'}) \in U \in \tau$. Da $(B_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ eine Umgebungsbasis für x ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}'$ mit $x \in B_N \subseteq U$. Damit gilt $f(K((B_n)_{n\in\mathbb{N}'}, \frac{1}{N+1})) \subseteq U$, denn für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}'} \in K((B_n)_{n\in\mathbb{N}'}, \frac{1}{N+1})$ ist $A_n = B_n$, für $n \leq N$ und es folgt $f((A_n)_{n\in\mathbb{N}'}) \in A_N = B_N \subseteq U$. f ist somit stetig.

Zeigen wir nun, dass f offen ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass $f(K((B_n)_{n\in\mathbb{N}'}, \frac{1}{n+1}))$ für jedes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}'} \in Y$ eine in X offene Menge ist. Sei $x \in f(K((B_n)_{n\in\mathbb{N}'}, \frac{1}{n+1}))$. Dann ist $x = f((A_n)_{n\in\mathbb{N}'})$, für ein $(A_n)_{n\in\mathbb{N}'} \in K((B_n)_{n\in\mathbb{N}'}, \frac{1}{n+1})$. Insbesondere ist $A_k = B_k$, für $k \leq n$. Setzen wir $B := B_1 \cap \ldots \cap B_n$, so ist $x \in B \subseteq f(K((B_n)_{n\in\mathbb{N}'}, \frac{1}{n+1}))$. Aso ist $f(K((B_n)_{n\in\mathbb{N}'}, \frac{1}{n+1}))$ offen.

3.5.3 Lemma

Sei (X,τ) ein A1-Raum. Dann gibt es einen T_2 und A1-Raum (Y,σ) und eine stetige, offene und surjektive Abbildung $f: Y \to X$.

Beweis: Wir betrachten $B(X)$. Für ein $x \in X$ und ein $n \in \mathbb{N}'$ setzen wir $A_x^n := \{(y_k)_{k\in\mathbb{N}'} \mid \forall k \geq n \text{ ist } y_k = x\}$ und anschließend $A_x := \bigcup_{n\in\mathbb{N}'} A_x^n$. Dann ist $(A_x)_{x\in X}$ eine Familie paarweise disjunkter dichter Teilmengen in $B(X)$. Wir setzen nun $Y := \bigcup_{x\in X}\{x\} \times A_x \subseteq X \times B(X)$. Da X und $B(X)$ beides A1-Räume sind, ist auch das Produkt (mit der Produkttopologie) der beiden Räume ein A1-Raum und somit ist es auch Y (mit Teilraumtopologie σ). Aber Y ist sogar noch ein Hausdorffraum, denn $(x,(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}) \neq ((y,(y_k)_{k\in\mathbb{N}'}) \in Y$ impliziert $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'} \neq (y_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ und da $B(X)$ ein metrischer Raum ist, gibt es dort disjunkte Kugelumgebungen K_1 und K_2 Setzt man dann $V := X \times K_1$ bzw. $W := X \times K_2$, so hat man disjunkte offene Obermengen von $(x,(x_k)_{k\in\mathbb{N}'})$ bzw. $(y,(y_k)_{k\in\mathbb{N}'})$.

Definiert man nun $f: Y \to X$ durch $f(x,(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}) := x$, so ist f als Einschränkung der stetigen Projektion $q: X \times B(X) \to X$ auf die Menge Y also auch stetig. f ist aber auch offen, denn für $K := K((x_k)_{k\in\mathbb{N}'}, \frac{1}{n})$ und U offen in X ist $f(Y \cap (U \times K)) = U$, wie man leicht nachrechnen kann (hier bracht man, dass die A_x dicht in $B(X)$ sind). Für den Nachweis der Offenheit braucht man nur zeigen, dass Bilder einer Basis des Grundraums offen sind.

3.5.4 Bemerkung

Der Beweis zeigt sogar, dass jeder topologische Raum (X,τ) das Bild einer stetigen und offenen Abbildung eines Hausdorff-Raumes ist.

3.5.5 Satz(Charakterisierung der A1-Räume)

Ein Raum (X,τ) ist genau dann ein A1-Raum, wenn es einen metrischen Raum (Y,d) und eine stetige, offene und surjektive Abbildung $f: Y \to X$ gibt. A1-Räume sind also genau die Bilder metrischer Räume unter stetigen und offenen Abbildungen!

Beweis: Sei (X,τ) zunächst als A1-Raum vorausgesetzt. Dann gibt es nach Lemma 3.5.3 ein A1 und T_2-Raum (Y',σ') und eine stetige, offene und surjektive Abbildung $f' : Y' \to X$. Nach Lemma 3.5.2 gibt es ein metrischen Raum (Y,d) und eine stetige, offene und surjektive Abbildung $f'' : Y \to Y'$. Dann ist $f := f' \circ f'' : Y \to X$ ebenfalls stetig, offen und surjektiv!

Ist umgekehrt $f : (Y,d) \to (X,\tau)$ stetig, offen und surjektiv, so gibt es zu einem $x \in X$ ein $y \in Y$ mit $f(y) = x$. Dann ist $\{f(K(y,\frac{1}{n+1})) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis! Denn ist $x \in U \in \tau$, so ist $y \in f^{-1}(U)$ offen, es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in K(y,\frac{1}{n+1}) \subseteq f^{-1}(U)$ und somit $f(K(y,\frac{1}{n+1})) \subseteq U$. Da $f(K(y,\frac{1}{n+1}))$ offen ist und $x \in f(K(y,\frac{1}{n+1}))$, ist damit alles gezeigt!

3.6 Dichte Teilmengen in Produkträumen

Schauen wir uns die Definition der Produkttopologie nochmal an, so ist folgendes klar: Sind X und Y topologische Räume und A, B dichte Teilmengen in X bzw. Y, so ist $A \times B$ dicht in $X \times Y$. Sind also X und Y beispielsweise separabel, so auch $X \times Y$. Was ist aber wenn wir ein größeres Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ von separablen Räumen bilden? Wie "groß" darf I sein, damit das Produkt noch separabel ist? Solcherlei Fragen gehen wir in diesem Abschnitt nach.

3.6.1 Dichte

Für einen topologischen Raum (X,τ) bezeichne $d(X,\tau)$ die kleinste Kardinalzahl κ, für die es eine dichte Teilmenge D von X gibt mit $|D| = \kappa$ (besteht über den top. R. kein Zweifel, so schreiben wir auch einfach $d(X)$).

3.6.2 Satz von Hewitt-Marczewski-Pondiczery

Sei $(X_\alpha)_{\alpha\in B}$ eine Familie von topologischen Räumen mit $|B| \leq 2^A$ und $d(X_\alpha) \leq A$, für eine unendliche Kardinalzahl A. Dann gilt: $d(X) \leq A$, wobei $X := \prod_{\alpha\in B} X_\alpha$.

Beweis: O.b.d.A. sei $B = \mathscr{P}(A)$. Für $\alpha \in B$ wähle eine dichte Teilmenge $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ mit $|D_\alpha| \leq A$ und bilde $D := \prod_{\alpha\in B} D_\alpha$. Es genügt also zu zeigen, dass D eine dichte Teilmenge der gewünschten Kardinalität enthält.
Sei $f_\alpha : A \to D_\alpha$ surjektiv. Desweiteren versehen wir A mit der diskreten Topologie, also ist $f : A^B \to D$ definiert durch $f((a_\alpha)_{\alpha\in B}) := (f_\alpha(a_\alpha))_{\alpha\in B}$ stetig und surjektiv. Es reicht also zu zeigen, dass A^B eine dichte Teilmenge der gewünschten Kardinalität enthält.
Für $J \subseteq A$, J: endlich, sei eine Äquivalenzrelation $\sim_J$ auf B durch $L_1 \sim_J L_2 :\Leftrightarrow L_1 \cap J = L_2 \cap J$ erklärt. Setze $F_J := \{(a_L)_{L\in B} \mid a_{L_1} = a_{L_2} \text{ für } L_1 \sim_J L_2\}$ und $F := \bigcup\{F_J \mid J \subseteq A, J\text{: endlich }\}$. Es gilt $|F_J| \leq |A^{\mathscr{P}(J)}| = |A|$, also $|F| \leq |A|$.
Sei $O = \prod_{\alpha\in B} O_\alpha$ eine (offene, nicht leere) typische Basismenge der Produkttopologie, also

$O_\alpha = A$ für $\alpha \in B \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Wähle $z_{ij} \in \alpha_i \setminus \alpha_j$, wann immer das geht und setze $J = \{z_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Dann gilt $F_J \cap O \neq \emptyset$ (wie man sich leicht überlegt) und somit auch $F \cap O \neq \emptyset$. Also ist F tatsächlich dicht in A^B und deshalb ist $f(F)$ dicht in D. Natürlich gilt auch $|f(F)| \leq A$.

3.6.3 Korollar

Sei $(X_\alpha)_{\alpha \in B}$ eine Familie von topologischen Räumen mit $d(X_\alpha) \leq m$, für eine unendliche Kardinalzahl m. Dann ist jede Familie von paarweise disjunkten, nicht leeren offenen Mengen in $X := \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ von Kardinalität $\leq m$.

Beweis: Annahme es gibt eine Familie von paarweise disjunkten offenen Mengen $(O_i)_{i \in I}$ mit $|I| > m$; o.B.d.A. sind dies standard Basismengen, also von der Form $O_i = \prod_{\alpha \in B} O^i_\alpha$. Wähle $J \subseteq I$, mit $m < J \leq 2^m$. Offensichtlich sind dann auch $(O_i)_{i \in J}$ paarweise disjunkt. Für $i \in J$ setze $\sigma_i := \{\alpha \in B \mid O^i_\alpha \neq X_\alpha\}$. Jedes σ_i ist offensichtlich endlich und deshalb gilt für $\sigma := \bigcup_{i \in J} \sigma_i$ auch $|\sigma| \leq |J| \leq 2^m$. Zweifellos ist $U_i = \prod_{\alpha \in \sigma} O^i_\alpha$ offen in $\prod_{\alpha \in \sigma} X_\alpha$ und die $(U_i)_{i \in J}$ sind paarweise disjunkt. Aus dem Hewitt-Pondiczery-Marczewski theorem folgern wir aber $d(\prod_{\alpha \in \sigma} X_\alpha) \leq m$ im **Widerspruch** zu $m < J$.

3.6.4 Definition: Souslin-Zahl

Für einen topologischen Raum (X, τ) definieren wir wie folgt die Souslin-Zahl: $C(X, \tau) := sup\{|\gamma| \mid \gamma \subseteq \tau \text{ und } U \neq V \in \gamma \rightarrow U \cap V = \emptyset\}$. Also das Supremum der Mächtigkeiten aller Familien von paarweise disjunkten offenen Mengen.

3.6.5 Korollar

Ein beliebiges Produkt separabler Räume hat also eine abzählbare Souslin-Zahl.

4 Kompaktheit und verwandte Konzepte

"Die Freiheit der Presse im Westen, wobei die viel besser ist als anderswo, ist letztlich die Freiheit von 200 reichen Leuten ihre Meinung zu veröffentlichen."
Peter Scholl-Latour

4.1 Kompaktheit

"In mathematics you don't understand things. You just get used to them."
John von Neumann

Kompaktheit ist wohl einer der am häufigsten verwendeten Begriffe in und außerhalb der Topologie. Das liegt daran, dass kompakte topologische Räume sich noch sehr angenehm verhalten, ja manchmal geradezu wie endliche Räume. Die meisten werden diesen Begriff bereits aus der Analysis kennen. Kompakt wurden dort Mengen genannt, die abgeschlossen und beschränkt sind. Gewöhnlich zeigt man dann in der Analysis, dass die Eigenschaft beschränkt + abgeschlossen äquivalent zur Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft ist (im $\mathbb{R}^n$). Diese besagt, dass jede offene Überdeckung der kompakten Menge mit offenen Intervallen (oder allgemeiner offenen Mengen) eine endliche Teilüberdeckung hat (die Beweise zu diesen Dingen "fallen" bei uns unterwegs einfach ab). Nun haben wir in allgemeinen topologischen Räumen - im Gegensatz zum $\mathbb{R}^n$ - keinen Abstandsbegriff zur Verfügung und definieren den Begriff "kompakt" somit einfach durch die Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft und geben im Anschluss weitere äquivalente Formulierungen.

4.1.1 Definition

kompakt Ein topologischer Raum (X,τ) wird kompakt genannt, wenn jede Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung hat (eine Überdeckung ist eine Menge $\sigma \subseteq \tau$ mit $X = \bigcup_{O\in\sigma} O$). Offenbar äquivalent ist die Formulierung: Für jede Familie abgeschlossener Mengen $(A_i)_{i\in I}$ mit leerem Schnitt gilt, dass bereits endlich viele einen leeren Schnitt haben.

4.1.2 Lemma

Für einen topologischer Raum (X,τ) ist äquivalent:
a) (X,τ) ist kompakt.
b) Für jede transfinite Folge (d.h. durch Ordinalzahlen wohlgeordnet) $(A_\beta)_{\beta<\kappa}$ abgeschlossener nicht leerer Mengen mit $A_\beta \subseteq A_{\beta'}$, für $\beta' < \beta$ ist $\bigcap_{\beta<\kappa} A_\beta \neq \emptyset$.
c) Für jede transfinite Folge $(U_\beta)_{\beta<\kappa}$ offener Mengen mit $U\beta \neq X$ und $U_\beta \subseteq U_{\beta'}$, für $\beta < \beta'$ ist $\bigcup_{\beta<\kappa} A_\beta \neq X$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) ist klar. Zeigen wir nicht a) $\Rightarrow$ nicht b). Ist der Raum nicht kompakt, dann gibt es eine Familie α aus abgeschlossenen Mengen mit der endlichen Schnitt Eigenschaft (eSE) mit $\bigcap \alpha = \emptyset$. Setze $\mathscr{A} := \{\alpha' \subseteq \alpha \mid \bigcap \alpha' = \emptyset\}$ und $\mathscr{A}' := \{|\alpha'| \mid \alpha' \in \mathscr{A}\}$. Sei dann $\alpha^* \in \mathscr{A}$ mit $|\alpha^*| = min\,\mathscr{A}'$. Wir bezeichnen $|\alpha^*|$ mit κ und wählen uns eine Bijektion $f : \kappa \to \alpha^*$. Für alle $\beta < \kappa$ definieren wir dann $A_\beta := \bigcap_{\delta \leq \beta} f(\delta)$. Es ist gilt dann:

1) $A_\beta \neq \emptyset$ ist abgeschlossen, für alle $\beta < \kappa$.
2) $A_\beta \subseteq A_{\beta'}$, für alle $\beta' < \beta < \kappa$.
3) $\bigcap_{\beta<\kappa} A_\beta = \bigcap \alpha = \emptyset$.

b) $\Leftrightarrow$ c) bekommt man durch Übergang zu Komplementen.

4.1.3 Lemma

Sei (X, τ) ein kompakter Raum, (Y, σ) ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung, dann ist auch (Y, σ) kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist offenbar $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, welche eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(V_{i_k}))_{k=1}^n$ von X hat. Dann ist $(V_{i_k})_{k=1}^n$ eine endliche Teilüberdeckung von Y. Also ist auch Y kompakt.

4.1.4 Lemma

a) Sei (X, τ) ein T_2-Raum und $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen.
b) Ein kompakter T_2-Raum ist bereits normal (d.h. T_1 und T_4).

Beweis: a) Sei $x \in X \setminus A$. Wir wählen zu jedem $a \in A$ offene und disjunkte Mengen U_a, V_a mit $a \in U_a$ und $x \in V_a$. Nun ist A kompakt. Es gibt also endlich viele $a_1, ..., a_n$, mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{a_k}$. Setzen wir noch $V := V_{a_1} \cap ... \cap V_{a_n}$, so gilt $x \in V \subseteq X \setminus A$. Demnach ist $X \setminus A$ offen und A abgeschlossene.

b) Zu zeigen ist nur noch T_4. Seien dazu A, B disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Sei $a \in A$. Zu jedem $b \in B$ gibt es dann disjunkte $U_b \in \dot{a} \cap \tau$ und $V_b \in \dot{b} \cap \tau$. Die $\{V_b \mid b \in B\}$ überdecken B und da dieser kompakt ist, tun dies bereits endlich viele $\{V_{b_1}, ..., V_{b_n}\}$. Wir bilden dann die offenen und disjunkten Mengen $P_a := U_{b_1} \cap ... \cap U_{b_n}$ und $Q_a := V_{b_1} \cup ... \cup V_{b_n}$. Es ist $a \in P_a$ und $B \subseteq Q_a$. Dies könne wir für jedes $a \in A$ tun und erhalten - mit dem selben Argument wie eben - eine endliche Teilüberdeckung $\{P_{a_1}, ..., P_{a_m}\}$ von A. Bilden wir dann $U := P_{a_1} \cup ... \cup P_{a_n}$ und $V := Q_{a_1} \cap ... \cap Q_{a_n}$, so erhalten wir zwei disjunkte offene Mengen mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Der Raum ist also T_4.

4.1.5 Lemma

a) In einem topologischen Raum (X, τ) ist $A \subseteq X$ genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X, der A enthält, gegen ein Element aus A konvergiert (man beachte, dass man für den Beweis nur die Existenz gewisser Ultrafilter braucht (Satz 3.2.2), nicht aber das volle Auswahlaxiom). Insbesondere ist X kompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X auch in X konvergiert.

b) Konvergiert jeder Ultrafilter ϕ auf X mit $A \in \phi$ in X (also nicht unbedingt in A) und ist $\overline{A}$ als Teilraum von (X,τ) ein T_3-Raum, so ist immerhin noch $\overline{A}$ kompakt.

Beweis: a) Sei A kompakt und ϕ ein Ultrafilter auf X mit $A \in \phi$. Annahme: Es gibt kein $x \in A$ mit $\phi \to x$. Dann betrachten wir zu jedem $a \in A$ die Menge $\xi_a := (\dot{x} \cap \tau) \setminus \phi$. Für jedes $a \in A$ gilt nun $a \in \bigcup \xi_a$. Die Menge $\xi := \bigcup_{a \in A} \xi_a$ ist also eine offene Überdeckung von A, zu der es somit eine endliche Teilüberdeckung ξ' gibt. Also $A \subseteq \bigcup \xi'$ und somit $\bigcup \xi' \in \phi$. Über Ultrafilter wissen wir bereits, dass dann aber (mindestens) eines der $P \in \xi'$ auch in ϕ liegt. Offensichtlich ist dies dann ein Widerspruch!

Nehmen wir nun an jeder Ultrafilter auf X, der A enthält konvergiert gegen ein Element aus A und es gibt aber eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A welche keine endliche Teilüberdeckung hat. Dann ist $\varphi := \{P \subseteq X \mid \exists i_1, ... i_n \in I \text{ mit } A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \subseteq P\}$ ein Filter(warum?), der in einem Ultrafilter ϕ enthalten ist. Dieser konvergiert aber gegen ein Element $x \in A$, welches in einem der U_i enthalten ist. Also ist $U_i \in \phi$. Nun ist aber auch $X \setminus U_i \in \varphi \subseteq \phi$ - dies ist ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch und A somit kompakt.

b) Zum Beweis verwenden wir a). Sei ϕ ein Ultrafilter auf X mit $\overline{A} \in \phi$. Zeigen wir, dass $(\phi \cap \tau) \cup \{A\}$ die endliche Schnitt Eigenschaft (eSE) hat. Da der Schnitt endlich vieler Elemente aus $\phi \cap \tau$ wieder in $\phi \cap \tau$ liegt, genügt es ein $U \in \phi \cap \tau$ zu wählen. In jedem Fall ist $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Sei $x \in U \cap \overline{A}$. Per Definition ist dann aber auch $U \cap A \neq \emptyset$. Das genügt für die eSE. Sei dann η ein Ultrafilter auf X mit $(\phi \cap \tau) \cup \{A\} \subseteq \eta$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $x \in X$ mit $\eta \to x$, also $\dot{x} \cap \tau \subseteq \eta$ (dieses x liegt bereits in $\overline{A}$ - Warum?). Zeigen wir nun, dass auch ϕ gegen x konvergiert. Wir wählen dazu ein $X \neq V \in \dot{x} \cap \tau$. Da $\overline{A}$ als Teilraum T_3 ist, gibt es ein $W \in \tau$ und ein in X abgeschlossenes B mit $x \in \overline{A} \cap W \subseteq \overline{A} \cap B \subseteq \overline{A} \cap V$. Wäre $V \notin \phi$, so auch $B \notin \phi$. Nun ist dann aber $W' := X \setminus B \in \phi \cap \tau$, also $W' \in \eta$. Da $\eta \to x$, ist auch $W \in \eta$. Aber $W \cap W' = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch. Also doch $V \in \phi$ und somit insgesamt $\dot{x} \cap \tau \subseteq \phi$. Der Ultrafilter ϕ konvergiert also in $\overline{A}$ und mittels a) schließen wir, dass $\overline{A}$ kompakt ist.

4.1.6 Lemma (Tubenlemma)

(Tubenlemma) (X,τ) und (Y,σ) seien topologische Räume. Sei weiter X kompakt, $y_0 \in Y$ und $X \times \{y_0\} \subseteq U$, wobei U offen in $X \times Y$ ist. Dann gibt es eine offene Umgebung V von y_0 mit $X \times V \subseteq U$.

Beweis: Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Menge $O_x \in \dot{x} \cap \tau$ und eine offene Menge $V_x \in \dot{y_0} \cap \sigma$, mit $O_x \times V_x \subseteq U$. Nun ist X kompakt und somit gibt es endlich viele $x_1, ..., x_n$, mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} O_{x_k}$. Setze nun noch $V := \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k} \Rightarrow$ fertig.

4.1.7 Satz

Für einen topologischen Raum (X,τ) ist äquivalent:
1) (X,τ) ist kompakt.
2) Für jeden Hausdorff-Raum (Y,σ) ist die Projektion $q : X \times Y \to Y$ abgeschlossen (d.h. Bilder abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen).

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) Sei A in $X \times Y$ abgeschlossen und $y \in Y \setminus q(A)$. Das heißt $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus A$. Aus Lemma 4.1.6 folgt die Existenz einer in Y offenen Menge V mit $y \in V$ und $X \times V \subseteq (X \times Y) \setminus A$. Dies bedeutet aber $V \subseteq Y \setminus q(A)$ und $q(A)$ ist somit abgeschlossen.

2) $\Rightarrow$ 1) Sei ϕ ein Ultrafilter auf X mit $\bigcap \phi = \emptyset$ (Ultrafilter der Form $\dot{x}$ sind natürlich konvergent) und sei y ein Element, welches nicht in X liegt (z.B. X selber). Wir setzen dann $X' := X \cup \{y\}$ und bilden $\tau' := \mathscr{P}(X) \cup \phi'$, wobei $\phi' := \{P \cup \{y\} \mid P \in \phi\}$. τ' ist dann, wie man leicht nachrechnet, eine Topologie auf X' und (X',τ') ist ein Hausdorff-Raum (lässt sich leicht nachweisen). Wir betrachten dann $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X'$, wobei das Produkt natürlich mit der Produkttopologie versehen ist. Die Projektion $q : X \times X' \to X'$ ist abgeschlossen und demzufolge $q(\overline{\Delta}) = \overline{q(\Delta)} = \overline{X} = X'$. Es gibt also ein $x_0 \in X$, mit $(x_0,y) \in \overline{\Delta}$. Sei $U \in \dot{x_0} \cap \tau$ beliebig und $P \in \phi$. Dann $(x_0,y) \in U \times (P \cup \{y\})$. Letztere Menge ist aber offen, also $\Delta \cap [U \times (P \cup \{y\})] \neq \emptyset$. Das bedeutet $U \cap P \neq \emptyset$. Da $U \in x_0 \dot{\cap} \tau$ und $P \in \phi$ beliebig gewählt worden folgt, dass $\phi \cup (\dot{x_0} \cap \tau)$ die endliche Schnitt Eigenschaft hat. Dann gilt aber auch $\dot{x_0} \cap \tau \subseteq \phi$ (ϕ ist ein Ultrafilter). Der Ultrafilter ϕ konvergiert also und X ist demnach kompakt.

4.1.8 Alexanderscher Subbasissatz

Sei β eine Subbasis des top. Raums (X,τ). Dieser ist genau dann kompakt, wenn jede Überdeckung mit Elementen aus der Subbasis β eine endliche Teilüberdeckung hat.

Beweis: Sei X nicht kompakt. Dann existiert ein nicht konvergenter Ultrafilter ψ. Das heißt $\forall x \in X$ gibt es ein $O_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $O_x \notin \psi$. Zu O_x gibt es aber ein endliches $\beta_x \subseteq \beta$, mit $x \in \bigcap \beta_x \subseteq O_x$. Also auch $\bigcap \beta_x \notin \psi$. Das heißt dann aber, dass es für $x \in X$ auch ein $S_x \in \beta_x$ geben muss, mit $x \in S_x \notin \psi$. $\{S_x \mid x \in X\}$ kann dann aber keine endliche Teilüberdeckung haben, Denn da $X \in \psi$, wäre sonst auch bereits eines der $S_x \in \psi$ (sie den Abschnitt über Ultrafilter, Lemma 3.2.3). Wir haben also eine Überdeckung mit Elementen aus β gefunden, welche keine endliche Teilüberdeckung hat.

Die andere Richtung ist trivial, denn ist X kompakt, dann hat klarerweise auch jede Überdeckung mit Subbasiselementen eine endliche Teilüberdeckung.

4.1.9 Beispiel

Für eine nicht leere linear geordnete Menge $(X,<)$ definieren wir die Intervalle: $(x,y) := \{z \in X \mid x < z < y\}$, $[x,y) := \{z \in X \mid x \leq z < y\}$, $(x,y] := \{z \in X \mid x < z \leq y\}$ und $[x,y] := \{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$. Setzen wir

$$\mathscr{S} := \{\{x \in X \mid x < y\} \mid y \in X\} \cup \{\{x \in X \mid y < x\} \mid y \in X\} \cup \{X\},$$

so ist $\mathscr{S}$ die Subbasis einer Topologie $\tau_<$ auf X - der **Ordnungstopologie** (bezüglich $<$). Intervalle der Form (x,y) nennen wir offene Intervalle. Wir haben folgenden Satz:

4.1.10 Satz

Sei $(X,<)$ eine linear geordnete Menge. Dann ist äquivalent:
a) $(X,\tau_<)$ ist kompakt.
b) Zu jeder nicht leeren Menge $A \subseteq X$ existiert $inf(A)$ und $sup(A)$ (in X).
c) Zu jeder nicht leeren abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ existiert $min(A)$ und $max(A)$.
Insbesondere folgern wir aus der Implikation b) $\Rightarrow$ a), dass in den reellen Zahlen (die euklidische Topologie ist gleich der Ordnungstopologie) jedes Intervall der Form $[x,y]$ kompakt ist.

Beweis: b) $\Rightarrow$ c) Es existiert $i := inf(A)$. Für alle x,y mit $i \in (x,y)$ gibt es somit ein $a \in A$ mit $x < i \leq a < y$, das heißt $(x,y) \cap A \neq \emptyset$. Wir haben also $i \in \overline{A} = A$ und somit $i = min(A)$. Analog mit $max(A)$.

c) $\Rightarrow$ b) Sei $m = min(\overline{A})$. Offensichtlich gilt dann $m = inf(A)$.

b) $\Rightarrow$ a) Es gilt $inf(X) = min(X) =: m$ und $sup(A) = max(A) =: M$. Dann ist $\mathscr{S} := \{(x,M] \mid x \in X\} \cup \{[m,x) \mid x \in X\}$ eine Subbasis von $\tau_<$. Sei $X = (\bigcup_{x \in A}(x,M]) \cup (\bigcup_{x \in B}[m,x))$. Nach dem Alexanderschen Subbasissatz reicht es aus zu zeigen, dass wir aus dieser Überdeckung mit Subbasielementen eine endliche Teilüberdeckung auswählen können. Wir bilden dazu einfach $x := inf(A)$ und $y := sup(B)$. Es muss $x < y$ gelten, denn sonst wäre $y \notin (\bigcup_{z \in A}(z,M]) \cup (\bigcup_{z \in B}[m,z)) = X$, was eindeutig ein Widerspruch ist.

Wir können dann ein $a \in A$ wählen mit $a < y$. Dann gibt es aber auch ein $b \in B$ mit $a < b$. Offensichtlich gilt dann $X = (a,M] \cup [m,b)$. Damit haben wir eine endliche Teilüberdeckung gefunden.

a) $\Rightarrow$ c) Da jede abgeschlossen Menge A auch kompakt ist, reicht es also zu zeigen, dass X ein kleinstes und ein größtes Element hat.

Hat X kein kleinstes Element, so ist $(\bigcup_{b \in X}(a,b))_{a \in X}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung - ein Widerspruch.

Hat X kein größtes Element, so ist $(\bigcup_{a \in X}(a,b))_{b \in X}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung - wieder ein Widerspruch.

4.1.11 Satz

Sei $\mathscr{S}$ eine Subbasis des top. Raums (X,τ). Dieser ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder unendlichen Teilmenge $M \subseteq X$ ein Punkt $x \in X$ gibt, mit der Eigenschaft: $\forall O \in \dot{x} \cap \mathscr{S}$ gilt $|O \cap M| = |M|$. Insbesondere gilt die Aussage für $\mathscr{S} = \tau$. Derartige Punkte heißen vollständige Häufungspunkte (von der Teilmenge M).

Beweis: Sei (X,τ) kompakt und M eine unendliche Teilmenge von X. Gäbe es zu jedem $x \in X$ ein $O_x \in \dot{x} \cap \mathscr{S}$ mit $|O_x \cap M| < |M|$, so wählen wir aus der offenen Überdeckung $(O_x)_{x \in X}$ eine endliche Teilüberdeckung $\{O_{x_1}, ..., O_{x_n}\}$ aus und es würde $|M| = |\bigcup_{k=1}^{n} O_{x_k} \cap M| = max\{|O_{x_k} \cap M| \mid k = 1, ..., n\} < |M|$ folgen - ein Widerspruch.

Die andere Richtung ist schwieriger: Sei (X,τ) nicht kompakt. Wir konstruieren nun eine unendliche Menge, die einen solchen Punkt nicht besitzt. Sei dazu $\sigma \subseteq \mathscr{S}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung (die existiert nach Satz 4.1.8). $Z := \{|\xi| \mid \xi \subseteq \sigma$ und $\bigcup \xi = X\}$ ist dann eine Menge von Kardinalzahlen und besitzt somit ein Minimum β. Sei dann $\xi \subseteq \sigma$ mit $|\xi| = \beta$ (also eine Teilüberdeckung minimaler Kardinalität). Wir können ξ also schreiben als $\xi = \{U_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ (es gibt ein bijektives $f : \beta \to \xi$ und für $f(\alpha)$ schreiben wir einfach U_α) und definieren nun für jedes $\alpha < \beta$ die Menge $A_\alpha := X \setminus \bigcup_{\delta < \alpha} U_\delta$. Für jedes α gilt dann $|A_\alpha| = \beta$.

Beweis: Andernfalls gäbe es ein $\alpha < \beta$ mit $|A_\alpha| < \beta$. Wir wählen dann für jedes $a \in A_\alpha$ ein $\gamma_a \geq \alpha$ mit $a \in U_{\gamma_a}$. Es folgt $X = (\bigcup_{\delta<\alpha} U_\delta) \cup (\bigcup_{a \in A_\alpha} U_{\gamma_a})$. Aber $\alpha < \beta$ und $|A_\alpha| < \beta$ und demzufolge $|\{U_\delta \mid \delta < \alpha\} \cup \{U_{\gamma_a} \mid a \in A_\alpha\}| < \beta$ - ein Widerspruch zur minimalen Wahl von ξ (man beachte auch $|\alpha| < \beta$, schließlich ist β eine Kardinalzahl!!!).

Wir werden nun mittels transfiniter Rekursion aus jedem A_α ein x_α auswählen, so dass $x_\alpha \neq x_{\alpha'}$ für $\alpha \neq \alpha'$ gilt. Wir starten mit einem beliebigen $x_0 \in A_0$. Sei $\alpha < \beta$ und für jedes $\alpha' < \alpha$ sei bereits ein $x_{\alpha'} \in A_{\alpha'}$ gewählt, die alle paarweise verschieden sind. Es ist $|\{x_{\alpha'} \mid \alpha' < \alpha\}| = |\alpha| < \beta = |A_\alpha|$. Wir können also ein $x_\alpha \in A_\alpha \setminus \{x_{\alpha'} \mid \alpha' < \alpha\}$ wählen. Mit der so konstruierten transfiniten Folge $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$ bilden wir die Menge $M := \{x_\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Es gilt jetzt nämlich $|M| = \beta$. Sei nun $x \in X$ beliebig. Dann gibt es ein $\alpha < \beta$ mit $x \in U_\alpha$. Dann ist aber $U_\alpha \cap M \subseteq \{x_{\alpha'} \mid \alpha' \leq \alpha\}$ (dies folgt aus der Definition der A_α) und letztere Menge ist von kleinerer Kardinalität als β. Somit folgt $|U_\alpha \cap M| < \beta = |M|$. Damit sind wir fertig.

4.1.12 Korollar

Sei (X,τ) ein unendlicher kompakter Hausdorf-Raum und $x \in X$ ein nicht isolierter Punkt (d.h. $\{x\}$ ist nicht offen). Dann gibt es eine unendliche Teilmenge A von X, die x als einzigen vollständigen Häufungspunkt hat.

Beweis: $Y := X \setminus \{x\}$ ist nicht abgeschlossen und somit, da es sich bei X um einen kompakten T_2-Raum handelt, nicht kompakt. Y als nicht kompakter Teilraum besitzt also eine unendliche Teilmenge A', die (in Y) keinen vollständigen Häufungspunkt hat. Da X aber kompakt ist, hat sie einen vollständigen Häufungspunkt in X! Dies kann nur noch x sein.

4.1.13 Satz

Sei X ein kompakter und Z ein Hausdorff Raum. Ferner sei $f : X \to Z$ eine stetige surjektive Abbildung. Durch $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ bekommen wir eine Äquivalenzrelation auf X. Wenn Y den entstehenden Quotienten-Raum bezeichnet, dann gilt: Y und Z sind homöomorph.

Insbesondere ist f bereits ein Homöomorphismus, falls f bijektiv ist.

Beweis: Sei $\varphi : X \to Y$ die standard Projektion ($\varphi(x) := [x]_\sim$). Definiere $g : Y \to Z$ durch $g([x]) := f(x)$. Dann ist g wohldefiniert und bijektiv ($g \circ \varphi = f$). Sei O offen in Z. Dann ist $g^{-1}(O)$ offen in Y, denn $\varphi^{-1}(g^{-1}(O)) = f^{-1}(O)$ ist offen (f ist stetig). Folglich ist g stetig. Zu zeigen bleibt, dass g auch offen ist. Da g surjektiv ist, reicht es zu zeigen, dass g abgeschlossen ist. Na gut. Sei A abgeschlossen in Y. Da Y als Bild eines kompakten Raumes unter einer stetigen Abbildung selber auch kompakt ist, folgern wir, dass A auch kompakt ist. Das heißt aber $g(A)$ ist kompakt in Z. Da Z ein Hausdorff Raum ist, ist $g(A)$ dort auch abgeschlossen.

4.2 Basen in kompakten Hausdorff-Räumen

4.2.1 Lemma

a) Sei (X, τ) ein kompakter T_1-Raum (T_1 ist kein Druckfehler), α eine unendliche Kardinalzahl und $\mathscr{B}$ eine Basis mit $|\dot{x} \cap \mathscr{B}| \leq \alpha$ für jedes $x \in X$. Dann gilt $|\mathscr{B}| \leq \alpha$.

b) Sei (X, τ) ein kompakter T_2-Raum, α eine unendliche Kardinalzahl und $\gamma \subseteq \tau$, mit $\bigcap(\dot{x} \cap \gamma) = \{x\}$ und $|\dot{x} \cap \gamma| \leq \alpha$ für alle $x \in X$. Dann gilt $|\gamma| \leq \alpha$.

Beweis: a) Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu $|\mathscr{B}| > \alpha$ an. Eine offene Überdeckung $\sigma \subseteq \tau$ nennen wir minimal, wenn $\bigcup \sigma' \neq X$ für alle $\sigma' \subset \sigma$ mit $\sigma' \neq \sigma$ gilt. Wir setzen nun $\Gamma := \{\sigma \subseteq \mathscr{B} \mid \bigcup \sigma = X \text{ und } \sigma \text{ ist minimal}\}$. Da (X, τ) ein kompakter Raum ist, ist jedes $\sigma \in \Gamma$ endlich. Da (X, τ) ein kompakter T_1-Raum ist, kann man leicht nachrechnen, dass $\bigcup \Gamma = \mathscr{B}$ gilt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir nun $\Gamma_n := \{\sigma \in \Gamma \mid |\sigma| = n\}$. Offensichtlich gilt dann $\mathscr{B} = \bigcup \Gamma = \bigcup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\bigcup \Gamma_n)$. Es muss also ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $|\bigcup \Gamma_n| > \alpha$. Da $\bigcup \Gamma_n = \bigcup_{\sigma\in\Gamma_n} \sigma$, folgt $|\Gamma_n| > \alpha$.

Für jedes $\gamma \subseteq \mathscr{B}$ setzen wir $\Gamma_n^\gamma := \{\sigma \in \Gamma_n \mid \gamma \subseteq \sigma\}$. Für $\gamma_0 = \emptyset$ gilt also $|\Gamma_n^{\gamma_0}| > \alpha$ und $|\gamma_0| = 0$. Sei $k < n$ und $\gamma_k \subseteq \mathscr{B}$ mit $|\gamma_k| = k$ und $|\Gamma_n^{\gamma_k}| > \alpha$. Dann gilt $\bigcup \gamma_k \neq X$, denn $k < n$ und die Elemente aus Γ_n sind minimale Überdeckungen. Sei $x \in X \setminus \bigcup \gamma_k$. Dann ist $\Gamma_n^{\gamma_k} = \bigcup_{V\in\dot{x}\cap\mathscr{B}} \Gamma_n^{\gamma_k\cup\{V\}}$. Da $|\dot{x} \cap \mathscr{B}| \leq \alpha$, muss es ein $V \in \dot{x} \cap \mathscr{B}$ geben, mit $|\Gamma_n^{\gamma_k\cup\{V\}}| > \alpha$. Setzen wir $\gamma_{k+1} := \gamma_k \cup \{V\}$, so gilt also $|\gamma_{k+1}| = k+1$ und $|\Gamma_n^{\gamma_{k+1}}| > \alpha$. Setzt man dies induktiv fort, so erhällt man schließlich ein $\gamma_n \subseteq \mathscr{B}$ mit $|\gamma_n| = n$ und $|\Gamma_n^{\gamma_n}| > \alpha$. ABER $|\Gamma_n^{\gamma_n}| \leq 1$ - ein Widerspruch!

b) Wir setzen $\sigma := \{\bigcap \gamma' \mid \gamma' \subseteq \gamma \text{ und } \gamma' \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset, X\}$. Dann ist σ die Basis einer Topologie τ' auf X, so dass (X,τ') ein kompakter T_1-Raum ist und $|\gamma| \leq |\sigma|$ gilt. Ferner haben wir $|\dot{x} \cap \sigma| \leq \alpha$, für jedes $x \in X$. Also folgt aus a) sofort $|\sigma| \leq \alpha$ und damit dann $|\gamma| \leq \alpha$.

4.2.2 Lemma

Sei (X,τ) ein unendlicher T_2-Raum und $\mathscr{N}$ ein Netzwerk (siehe Definition 2.1.13). Dann gibt es eine Topologie $\tau' \subseteq \tau$, so dass (X,τ') ein T_2-Raum ist, der eine Basis $\mathscr{B}$ besitzt mit $|\mathscr{B}| \leq |\mathscr{N}|$.

Beweis: Sei $P := \{(x,y) \in X \times X \mid x \neq y\}$, dann gilt $|P| = |X|$. Zu jedem $p = (x,y) \in P$ gibt es $(U_p, V_p) \in \tau \times \tau$ mit $x \in U_p$, $y \in V_p$ und $U_p \cap V_p = \emptyset$. Es gibt dann $(N_p, M_p) \in \mathscr{N} \times \mathscr{N}$ mit $x \in N_p$, $y \in M_p$ und $N_p \subseteq U_p$ bzw. $M_p \subseteq V_p$. Wir setzen dann $Z := \{(N,M) \in \mathscr{N} \times \mathscr{N} \mid \exists p \in P$ mit $N_p = N$ und $M_p = M\}$. Damit gilt dann $|Z| \leq |\mathscr{N}|$. Für jedes $z = (N,M) \in Z$ können wir nun seinerseits ein $(U_z, V_z) \in \tau \times \tau$ wählen, mit $N \subseteq U_z$ bzw. $M \subseteq V_z$ und $U_z \cap V_z = \emptyset$. Nun bilden wir $\sigma^* := \{(U_z, V_z) \;\; z \in Z\}$ und $\sigma := \{U \in \tau \mid \exists W \in \tau \text{ mit } (U,W) \in \sigma^* \text{ oder } (W,U) \in \sigma^*\}$. Offensichtlich ist $\mathscr{B} := \{\bigcap \sigma' \mid \sigma' \subseteq \sigma \text{ und } \sigma' \text{ ist endlich}\}$ eine Basis einer Hausdorff-Topologie τ' auf X mit $|\mathscr{B}| = |\sigma| \leq |\sigma^*| \leq |Z| \leq |\mathscr{N}|$.

4.2.3 Lemma

Sei (X,τ) ein kompakter T_2-Raum und $\mathscr{N}$ ein Netzwerk. Dann gibt es eine Basis $\mathscr{B}$ mit $|\mathscr{B}| \leq |\mathscr{N}|$.

Beweis: Wir können uns auf den Fall unendlicher kompakter Hausdorff-Räume beschränken, denn endliche kompakte T_2-Räume sind diskret. Laut Lemma 4.2.2 gibt es eine Topologie $\tau' \subseteq \tau$, so dass (X,τ') ein T_2-Raum ist, der eine Basis $\mathscr{B}$ besitzt mit $|\mathscr{B}| \leq |\mathscr{N}|$. Offensichtlich ist die Abbildung $id_X : (X,\tau) \to (X,\tau')$ stetig und bijektiv, also nach Satz 4.1.13 ein Homöomorphismus. Es gilt also $\tau = \tau'$.

4.2.4 Lemma

Ist (X,τ) beliebig, (Y,σ) kompakt und Hausdorff, $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und ist $\mathscr{B}$ eine Basis für X, dann gibt es eine Basis $\mathscr{C}$ von Y mit $|\mathscr{C}| \leq |\mathscr{B}|$.

Beweis: Offenbar ist $\mathscr{N} := \{f(B) \mid B \in \mathbb{N}\}$ ein Netzwerk mit $|\mathscr{N}| \leq |\mathscr{B}|$.

4.2.5 Definition

Sei (X,τ) ein topologischer Raum. $\mathscr{B}$ ist eine **Pseudobasis**, wenn $\mathscr{B} \subseteq \tau$ und $\{x\} = \bigcap(\dot{x} \cap \mathscr{B})$ für jedes $x \in X$ gilt.

4.2.6 Lemma

Sei (X,τ) ein kompakter T_2-Raum und $\mathscr{B}$ eine Pseudobasis (siehe Def. 4.2.5).
a) Dann gibt es eine Basis $\mathscr{B}'$ mit $|\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{B}|$.
b) Gibt es eine unendliche Kardinalzahl α, so dass $|\dot{x} \cap \mathscr{B}| \leq \alpha$ gilt, für jedes $x \in X$, dann gibt es eine Basis $\mathscr{B}'$ mit $|\mathscr{B}'| \leq \alpha$.

Beweis: a) Sei $x \in U \in \tau$. Für jedes $y \in X \setminus U$ gibt es ein $B_y \in \dot{y} \cap \mathscr{B}$ mit $x \notin B_y$. Da $X \setminus U$ abgeschlossen und demnach kompakt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_n \in X \setminus U$ mit $X \setminus U \subseteq B_{y_1} \cup \ldots \cup B_{y_n} =: B$. Es folgt $x \in X \setminus B \subseteq U$.

Dies beweist, dass $\mathscr{N} := \{X \setminus \bigcup \mathscr{B}' \mid \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ und $\mathscr{B}'$ ist endlich$\}$ ein Netzwerk ist mit $|\mathscr{N}| \leq |\mathscr{B}|$. Aus Lemma 4.2.3 folgt, dass es eine Basis $\mathscr{B}'$ gibt mit $|\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{N}| \leq |\mathscr{B}|$.

b) Aus a) folgt die Existenz einer Basis $\mathscr{B}'$ mit $|\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{B}|$. Aus Lemma 4.2.1 b) folgt für die Pseudobasis $\mathscr{B}$ sofort $|\mathscr{B}| \leq \alpha$. Insgesammt bekommen wir dann $|\mathscr{B}'| \leq \alpha$.

4.3 Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen (2)

Im Abschnitt *Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen (1)* hatten wir uns unter anderem mit der Fortsetzbarkeit von stetigen Abbildungen $f : D \to Y$, wobei $D \subseteq X$ und $\overline{D} = X$ gilt, beschäftigt. Ist Y nun ein kompakter Hausdorff-Raum, so haben wir folgende interessante Ergänzungen.

4.3.1 Satz

a) Sei (X,τ) ein beliebiger und (Y,σ) ein kompakter T_3-Raum und sei $f : D \to Y$ stetig, wobei $D \subseteq X$ und $\overline{D} = X$. Gilt nun immer $\overline{f^{-1}(B_1)} \cap \overline{f^{-1}(B_2)} = \emptyset$ für abgeschlossene und disjunkte $B_1, B_2 \subseteq Y$ (hier ist der Abschluss in X gemeint, obwohl $f^{-1}(B_i) \subseteq D$ gilt), dann gibt es ein stetiges $\tilde{f} : X \to Y$ mit $\tilde{f}|D = f$. Ist (Y,σ) zusätzlich T_0, so ist $\tilde{f}$ eindeutig bestimmt.

Die Umkehrung gilt natürlich auch (unter viel schwächeren Voraussetzungen).

b) Seien (X,τ) und (Y,σ) beliebige topologische Räume und $\tilde{f} : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $D \subseteq X$ mit $\overline{D} = X$ und sei $f := \tilde{f}|D$. Sind B_1, $B_2 \subseteq Y$ abgeschlossen und disjunkt, dann ist $\overline{f^{-1}(B_1)} \cap \overline{f^{-1}(B_2)} = \emptyset$ (gemeint ist natürlich wieder der Abschluss in X).

Beweis: a) Wir verwenden Lemma 3.3.7. Sei also $x \in X$ und sei ϕ_x ein Filter auf D, so dass der Filter $\{P \subseteq X \mid \exists P' \in \phi_x$ mit $P' \subseteq P\}$ gegen x konvergiert. Das bedeutet $\forall O \in \dot{x} \cap \tau \, \exists P \in \phi_x$

mit $P \subseteq O$. Sei ψ_x ein Ultrafilter auf D mit $\phi_x \subseteq \psi_x$. Dann ist $f(\phi_x)$ ein Filter auf Y und $f(\psi_x)$ sogar ein Ultrafilter auf Y, mit $f(\phi_x) \subseteq f(\psi_x)$. Es gibt also ein $y_x \in Y$, gegen das $f(\psi_x)$ konvergiert (Kompaktheit). Zu zeigen ist noch, dass $f(\phi_x)$ immer gegen y_x konvergiert.

Angenommen $\exists x \in X$ und $f(\phi_x)$ konvergiert nicht gegen y_x. Dann $\exists W \in \dot{y_x} \cap \sigma$ mit $W \notin f(\phi_x)$. Das bedeutet $\forall P \in \phi_x$ ist $P \cap f^{-1}(Y \setminus W) \neq \emptyset$. Nun ist (Y,σ) ein T_3-Raum, es gibt also ein $V \in \sigma$ mit $y_x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W$. Die Voraussetzung auf $B_1 := \overline{V}$ und $B_2 := Y \setminus W$ angewendet ergibt $\overline{f^{-1}(\overline{V})} \cap \overline{f^{-1}(Y \setminus W)} = \emptyset$. Es gilt $x \in \overline{f^{-1}(\overline{V})}$, denn sonst $\exists O \in \dot{x} \cap \tau$ mit $O \cap \overline{f^{-1}(\overline{V})} = \emptyset$, es gibt dann also auch ein $P \in \phi_x$ mit $P \cap \overline{f^{-1}(\overline{V})} = \emptyset$. Nun ist aber $V \in f(\psi_x)$, es gibt also ein $P' \in \psi_x$ mit $P' \subseteq f^{-1}(V)$, also $P \cap P' = \emptyset$ im Widerspruch zu $P \in \psi_x$. Es ist aber auch $x \in \overline{f^{-1}(Y \setminus W)}$, denn sonst gäbe es wieder ein $P \in \phi_x$ mit $P \cap \overline{f^{-1}(Y \setminus W)} = \emptyset$ im Widerspruch zu $\forall P \in \phi_x$ ist $P \cap f^{-1}(Y \setminus W) \neq \emptyset$. Also $x \in \overline{f^{-1}(\overline{V})} \cap \overline{f^{-1}(Y \setminus W)} = \emptyset$ - Widerspruch!

b) Nun ist $f^{-1}(B) \subseteq \tilde{f}^{-1}(B)$, für jedes $B \subseteq Y$. Da $\tilde{f}$ stetig ist und Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetige Abbildungen wieder abgeschlossen sind, folgt natürlich für disjunkte und abgeschlossene $B_1, B_2 \subseteq Y$ sofort $\tilde{f}^{-1}(B_1) \cap \tilde{f}^{-1}(B_2) = \emptyset$ und damit dann $\overline{f^{-1}(B_1)} \cap \overline{f^{-1}(B_2)} = \emptyset$.

4.3.2 Satz

Sei (X,τ) ein beliebiger top. Raum und (Y,σ) ein kompakter T_3-Raum. Außerdem sei $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge (also $\overline{D} = X$). Für eine stetige Abbildung $f : D \to Y$ gibt es genau dann eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to Y$, wenn es zu jeder endlichen offenen Überdeckung $(W_j)_{j=1}^n$ von Y eine endliche offene Überdeckung $(V_i)_{i=1}^m$ von X gibt, so dass $\{V_i \cap D \mid i = 1,...,m\}$ eine Verfeinierung von $\{f^{-1}(W_j) \mid j = 1,...,n\}$ ist. Ist (Y,σ) usätzlich T_0, so ist die Abbildung eindeutig bestimmt. Die Umkehrung ist trivial (da braucht man keine Kompaktheit und T_3-Eigenschaft).

Verfeinerung bedeutet Folgendes: Sind $\alpha, \beta \subseteq \mathscr{P}(X)$, so nennen wir α eine Verfeinerung von β, wenn es zu jedem $a \in \alpha$ ein $b \in \beta$ gibt mit $a \subseteq b$.

Beweis: Wieder verwenden wir Lemma 3.3.7. Sei $x \in X$ und ϕ_x ein Filter auf D, so dass $\{P \subseteq X \mid \exists P' \in \phi_x \text{ mit } P' \subseteq P\}$ gegen x konvergiert. Das bedeutet $\forall O \in \dot{x} \cap \tau \exists P \in \phi_x$ mit $P \subseteq O$. Nehmen wir an (um einen Widerspruch abzuleiten), dass $f(\phi_x)$ in Y nicht konvergiert.

Dann gibt es zu jedem $y \in Y$ ein $W_y \in \dot{y} \cap \sigma$ mit $W_y \notin f(\phi_x)$. Da (Y,σ) kompakt ist, gibt es endlich viele $y_1,...,y_n$ mit $Y = W_{y_1} \cup ... \cup W_{y_n}$. Zu dieser endlichen Überdeckung gibt es nach Voraussetzung endlich viele $V_1,...,V_m \in \tau$ mit $X = \bigcup_{i=1}^m V_i$ und $\{V_i \cap D \mid i = 1,..,.m\}$ ist eine Verfeinerung von $\{f^{-1}(W_{y_j}) \mid j = 1,...,n\}$.

Sei nun $x \in V_k$, für ein $k \in \{1,...,m\}$. Dann gibt es ein $P \in \phi_x$ mit $P \subseteq V_k$. Aufgrund der Verfeinerungsbedingung gibt s aber auch ein $l \in \{1,...,n\}$ mit $V_k \cap D \subseteq f^{-1}(W_{y_l})$.

Es folgt $f(P) \subseteq f(V_k \cap D) \subseteq V_{y_l}$, also $W_{y_l} \in f(\phi_x)$ - Widerspruch!

4.4 Der Satz von Tychonoff

"I care not what puppet is placed upon the throne of England to rule the Empire on which the sun never sets. The man who controls Britain's money supply controls the British Empire, and I control the British money supply."
Nathan Mayer Rothschild

Jedes Produkt kompakter Räume (mit der Produkttopologie) ist wieder kompakt. Dieser Satz ist der wohl wichtigste Satz der Mengentheoretischen Topologie und gehört definitiv zu den wichtigsten Sätzen in der gesamten Mathematik. Der einfache Beweis mittels Ultrafilter sollte den Leser nicht über die Tatsache hinwegtäuschen, dass es sich bei diesem Satz um einen schwierigen Satz handelt (eher ist es ein Zeichen dafür, wie stark die Charakterisierung der Kompaktheit durch Ultrafilter ist).

Wir beweisen den Satz von Tychonoff allerdings erst für endliche Produkte und tun dies einfach aus dem Grund, da man in diesem Fall kein Wissen über Ultrafilter oder das Zornsche Lemma benötigt.

Im Anschluss an die Beweise geben wir eine Reihe von Beispielen in denen dem Satz von Tychonoff eine zentrale Stellung zukommt.

Zur Wiederholung werfe man nochmal einen Blick auf das Tubenlemma (Lemma 4.1.6).

4.4.1 Satz (Kleiner Satz von Tychonoff)

Seien (X,τ) und (Y,σ) kompakte Räume. Dann ist auch $X\times Y$ kompakt. Per vollständiger Induktion bekommen wir somit, dass das Produkt endlich vieler kompakter Räume kompakt ist.

Beweis: Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X\times Y$. Zu jedem $y\in Y$ gibt es dann ein endliches $I_y\subseteq I$, mit $X\times\{y\}\subseteq\bigcup_{i\in I_y}U_i$. Aus dem Tubenlemma (Lemma 4.1.6) folgt für jedes $y\in Y$ die Existenz eines $V_y\in\dot{y}\cap\sigma$ mit $X\times V_y\subseteq\bigcup_{i\in I_y}U_i$. Nun überdecken die V_y mit $y\in Y$ aber ganz Y, es gibt also bereits endlich viele $y_1,\dots,y_n$ mit $Y=V_{y_1}\cup\dots\cup V_{y_n}$. Dann ist $J:=\bigcup_{k=1}^n I_{y_k}$ endlich und es gilt $X\times Y=\bigcup_{k=1}^n X\times V_{y_k}\subseteq\bigcup_{i\in J}U_i$. Wir haben somit eine endliche Teilüberdeckung gefunden.

4.4.2 Eine kleine Anwendung

Wie wir bereits gesehen haben lässt sich mit dem Alexanderschen Subbasis Satz recht einfach zeigen, dass abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ kompakt sind (dies wird normalerweise auch in dem ersten Semester Analysis ganz elementar gezeigt, bzw. lässt sich auch leicht aus Satz 4.5.20 ableiten, denn Intervalle sind ntürlich metrische Räume). Hieraus und aus dem kleinen Satz von Tychonoff ergibt sich dann die viel genutzte Charakterisierung kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$: Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Der Beweis ist leicht. Wenn $A\subseteq\mathbb{R}^n$ kompakt ist, so ist A abgeschlossen ($\mathbb{R}^n$ ist ein Hausdorff-Raum) und klarerweise beschränkt. Umgekehrt bette man A in einem genügend großen Würfel ($[a,b] \times ... \times [c,d]$) ein, der dann kompakt ist. Als abgeschlossene Teilmenge ist nun auch A kompakt.

Ferner bekommen wir eine allgemeine Version des Satzes vom Maximum und Minimum. Sei $f: X \to \mathbb{R}$ stetig und X kompakt. Dann ist $f(X)$ abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}$, also wird das Minimum und Maximum angenommen!

Kommen wir nun zur vollen Version des Satzes von Tychonoff. Der kleine Satz von Tychonoff, wird für diesen Beweis nicht benötigt.

4.4.3 Satz von Tychonoff

Auf Basis der Axiome von Zermelo-Fraenkel (ohne Auswahlaxiom) ist äquivalent:

1. Ein Produkt $X = \prod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ ist genau dann kompakt, wenn jeder Faktor kompakt ist.

2. Das Auswahlaxiom.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie disjunkter, nichtleerer Mengen. $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ wird mit der gröbsten Topologie versehen, so dass alle A_i in A abgeschlossen sind, d.h. $\tau := \{\bigcup_{i \in J} A_i \mid J \subseteq I \text{ und } I \setminus J \text{ endlich }\}$. Es folgt sehr leicht, dass (A, τ) kompakt ist. Also ist auch $A^I = \prod_{i \in I} A$ kompakt. Für $i_0 \in I$ ist $C_{i_0} := \{f \in A^I \mid f(i) \in A_i\}$ abgeschlossen in A^I, denn $A^I \setminus C_{i_0} = \{f \in A^I \mid f(i) \notin A_i\} = \prod_{j \in I} U_j$, wobei $U_j = A$ für $j \neq i_0$ und $U_j = \bigcup_{l \in I \setminus \{i_0\}} A_l$. Für $i_1, ..., i_n \in I$ gilt außerdem, dass $C_{i_1} \cap ... \cap C_{i_n} \neq \emptyset$ ist (Prinzip der endlichen Auswahl). Aus der Kompaktheit folgt $\exists f \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Offensichtlich ist f für $(A_i)_{i \in I}$ eine Auswahlfunktion. Damit folgt dann sehr leicht das jede Familie eine Auswahlfunktion hat.

2. $\Rightarrow$ 1. Falls nun (X, τ) kompakt ist, dann folgt aus der Surjektivität und Stetigkeit der Projektionsabbildungen $pr_i : X \to X_i$ die Kompaktheit der X_i.

Sind nun umgekehrt alle (X_i, τ_i) kompakt, dann nehme man sich einen beliebigen Ultrafilter φ auf X. Zu zeigen bleibt dann: $\exists x \in X$ mit $\varphi \to x$, also $\dot{x} \cap \tau \subseteq \varphi$. Betrachte nun für jedes $i \in I$ den Ultrafilter $pr_i(\varphi)$ auf X_i. Aus der Kompaktheit der (X_i, τ_i) folgt $\forall i \in I \exists x_i \in X_i$ mit $pr_i(\varphi) \to x_i$. Setzt man $x = (x_i)_{i \in I}$ (hier braucht man das Auswahlaxiom), so gilt also $\forall i \in I \; pr_i(\varphi) \to pr_i(x)$. Aus Lemma 3.2.11 folgt $\varphi \to x$. Also konvergiert jeder Ultrafilter auf X und damit ist (X, τ) kompakt.

4.4.4 Bemerkung

Einen weiteren Beweis des Satzes von Tychonoff bekommen wir im Abschnitt: Elementare Nichtstandard Konzepte in der Topologie (Satz 14.6.13). Der Beweis ist ebenfalls ausgesprochen kurz, vielleicht sogar ein bischen kürzer, die zugrunde liegende Theorie ist aber deutlich komplizierter.

Es folgt eine starke Verallgemeinerung des Tubenlemmas (auch als Wallace-Theorem bekannt):

4.4.5 Korollar (Verallgemeinertes Tubenlemma)

Seien $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ topologische Räume und $A_i \subseteq X_i$, für jedes $i \in I$ eine kompakte Teilmenge. Ist W eine in $\prod_{i\in I} X_i$ (mit der Produkttopologie) offene Menge, mit $A := \prod_{i\in I} A_i \subseteq W$, so gibt es eine standard Basismenge U mit $A \subseteq U \subseteq W$.

Zur Erinnerung: Standard Basismenge bedeutet: $U = \prod_{i\in I} U_i$, mit $U_i = X_i$ für $i \notin J$ und $U_i \in \tau_i$ für $i \in J$, wobei $J \subseteq I$ und J : endlich.

Beweis: W ist als offene Menge von der Form $W = \bigcup_{l\in L} \prod_{i\in I} U_i^{(l)}$, für eine geeignete Indexmenge L und standard Basismengen $\prod_{i\in I} U_i^{(l)}$. Da A kompakt ist, gibt es also eine endliche Teilmenge $L' \subseteq L$ mit $A \subseteq \bigcup_{l\in L'} \prod_{i\in I} U_i^{(l)}$. Für jedes $i \in I$ und $a_i \in A_i$ setze $U_{a_i} := \bigcap\{U_i^{(l)} \mid l \in L'$ und $a_i \in U_i^{(l)}\}$ und $U_i := \bigcup_{a_i\in A_i} U_{a_i}$. Wir zeigen nun $U := \prod_{i\in I} U_i$ ist standard offene Basismenge in X mit $A \subseteq U \subseteq W$.

1) Das $U_i = X_i$ gilt - bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen - ist klar. ebenso ist klar, dass jedes U_i offen in X_i ist. U ist also eine offene standard Basismenge.

2) $A \subseteq U$ ist auch klar!

3) Zeigen wir noch $U \subseteq W$. Sei $(x_i)_{i\in I} \in U$. Für jedes $i \in I$ gibt es dann ein $a_i \in A_i$ mit $x_i \in U_{a_i}$. Nun gibt es ein $l \in L'$ mit $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i^{(l)}$. Für alle $i \in I$ folgt somit $U_{a_i} \subseteq U_i^{(l)}$, und damit $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i^{(l)} \subseteq W$.

4.4.6 Korollar

Sei $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von endlichen, nicht leeren Mengen. Für jedes $i > 0$ sei $f_i : S_i \to S_{i-1}$ eine Abbildung. Dann gibt es eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \in S_i$ und $f_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

1. Beweis (mit Tychonoff): Wir versehen jedes S_i wieder mit der diskreten Topologie und $Z := \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$ mit der Produkttopologie. Z ist demnach ein kompakter Raum. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden wir $A_n := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in Z \mid \forall 1 \leq i \leq n \text{ gilt } f_i(x_i) = x_{i-1}\}$. Es ist klar, dass $A_{n+1} \subseteq A_n$ gilt und die A_n zudem alle nicht leer sind. Wenn $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in Z \setminus A_n$, gibt es also ein $1 \leq j \leq n$ mit $f_j(x_j) \neq x_{j-1}$. Wir bilden dann $O := \prod_{i\in\mathbb{N}} O_i$ mit $O_j := \{x_j\}$, $O_{j-1} := \{x_{j-1}\}$ und $O_i := S_i$ für $i \neq j, j-1$. Dann ist O offen und $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in O \subseteq Z \setminus A_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist A_n also abgeschlossen. Aus der Kompaktheit von Z folgt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Jedes Element aus diesem Schnitt erfüllt dann aber gerade die Behauptung.

2. Beweis (ohne Tychonoff): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \geq 1$ definieren wir $G_n^k := f_{n+1} \circ \ldots \circ f_{n+k}(S_{n+k}) \subseteq S_n$ und $F_n := \bigcap_{k\geq 1} G_n^k \subseteq S_n$. Offenbar gilt $G_n^k \neq \emptyset$ und $k \leq l \Rightarrow G_n^l \subseteq G_n^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k, l \geq 1$.

Zwischenbehauptung 1: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $F_n \neq \emptyset$.

Beweis: Angenommen es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F_n = \emptyset$. Für jedes $x \in S_n$ gibt es dann ein $k_x \in \mathbb{N}$ mit $x \notin G_n^k$. Sei $k := \max\{k_x \mid x \in S_n\}$. Dann ist $G_n^k \subseteq G_n^{k_x}$ für jedes $x \in S_n$, also auch $x \notin G_n^k$. Das bedeutet $G_n^k = \emptyset$. Wie wir bereits bemerkt haben gilt aber immer $G_n^k \neq \emptyset$ - ein Widerspruch!

Zwischenbehauptung 2: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in F_n$ ist $f_{n+1}^{-1}(x) \cap F_{n+1} \neq \emptyset$.

Beweis: Angenommen es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und $x \in F_n$ mit $f_{n+1}^{-1}(x) \cap F_{n+1} = \emptyset$. Für jedes $y \in f_{n+1}^{-1}(x)$ gibt es dann ein $k_y \geq 1$ mit $y \notin G_{n+1}^{k_y}$. Für $k := \max\{k_y \mid y \in f_{n+1}^{-1}(x)\}$ folgt dann $f_{n+1}^{-1}(x) \cap G_{n+1}^k = \emptyset$, also $x \notin f_{n+1}(G_{n+1}^k) = G_n^{k+1} \supseteq F_n \ni x$ - ein Widerspruch!

Wir wählen $x_0 \in F_0$ und $x_{n+1} \in f_{n+1}^{-1}(x_n) \cap F_{n+1}$, falls x_n bereits gewählt wurde. Aufgrund der beiden bewiesenen Zwischenbehauptungen können wir das machen und die so konstruierte Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ erfüllt $f_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

4.4.7 Eine Anwendung von Tychonoff's Satz in der Graphentheorie

Ein Graph G is ein geordnetes Paar $G = (V,E)$ mit einer Menge V von Ecken (vertices) und einer Menge E von Kanten (edges) (die jeweils zwischen zwei Ecken liegen), wobei wir E als Teilmenge von $[V]^2 := \{P \subseteq V \mid |P| = 2\}$ auffassen und jede Kante somit durch ihre zwei Endpunkte repräsentieren (rein technisch wird noch $V \cap E = \emptyset$ gefordert). Unter einem Teilgraphen eines gegeben Graphen $G = (V,E)$ verstehen wir ein Graphen $G' = (V',E')$, mit $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ und zusätzlich $\forall P \in E' : P \subseteq V'$ (nur Kanten, deren Eckpunkte zu V' gehören, dürfen zu G' gehören). Wenn $V' \subseteq V$ für einen Graphen $G = (V,E)$ gilt, so nennen wir $G' = (V', V'(E))$ mit $V'(E) := \{P \in E \mid P \subseteq V'\}$ den von V' in G induzierten Teilgraphen (die Forderung $V' \subseteq V$ kann man auch weglassen).

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir sagen ein Graph $G = (V,E)$ ist k-färbbar, wenn es eine Abbildung $f : V \to \{1,...,k\}$ gibt, so dass $f(x) \neq f(y)$ für alle $\{x,y\} \in E$ gilt (durch eine Kante verbundene Ecken haben verschiedene Farben). Die Abbildung f wird in diesem Fall eine k-Färbung genannt.

Wir können nun leicht folgenden Satz beweisen:

Ein Graph $G = (V,E)$ ist genau dann k-färbbar ist, wenn jeder durch eine endliche Teilmenge V' von V induzierte Teilgraph k-färbbar ist.

Beweis: Wenn G k-färbbar ist, so offensichtlich auch jeder Teilgraph. Für die Umkehrung können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass V unendlich ist. Auf der Menge $\{1,...,k\}$ führen wir die diskrete Topologie ein und auf $Z := \{1,...,k\}^V$ (der Menge aller Abbildungen von $\{1,...,k\} \to V$) entsprechend die Produkttopologie. Nach dem Satz von Tychonoff ist Z damit ein kompakter topologischer Raum. Für jedes endliche $A \subseteq V$ setzen wir nun $G_A := \{f \in Z \mid f|A$ ist eine k-Färbung von $G_A = (A, A(E))\}$. Die Mengen G_A sind in Z nun abgeschlossen (man kann leicht zeigen, dass das Komplement offen ist) und je endlich viele $G_{A_1}, ..., G_{A_n}$ haben einen nicht leeren gemeinsamen Schnitt (das ist gerade die Voraussetzung, dass jeder durch eine endliche Teilmenge A von V induzierte Teilgraph k-färbbar ist). Da Z kompakt ist, ist der Schnitt von allen diesen G_A, also $\bigcap\{G_A \mid A$ endlich und $\subseteq V\}$ nicht leer. Ein Element f aus diesem Schnitt ist dann aber gerade eine gesucht k-Färbung von G!

4.4.8 Eine Anwendung auf unendliche Folgen

In diesem Beispiel betrachten wir in beide Seiten unendlich fortlaufende aber vom Wert beschränkte Folgen aus $\mathbb{R}$. Wir definieren zu diesem Zweck $B := \{a = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid \exists N \in \mathbb{N} \forall i \in \mathbb{N} \text{ gilt } |a_i| \leq N\}$. Zwei solche Elemente aus B können wir addieren indem wir sie Komponentenweise addieren $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} + (b_i)_{i\in\mathbb{Z}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Das Ergebnis ist dann wieder eine beschränkte Folge. Wir können die Elemente aus B auch mit reellen Zahlen multiplizieren $r \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} := (r \cdot a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Die Menge B zusammen mit diesen beiden Operationen ist demnach ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Zur Abkürzung führen wir für $a = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in B$ folgende Notation ein:
$\inf(a) := \inf_{i\in\mathbb{Z}}(a_i)$ und $\sup(a) := \sup_{i\in\mathbb{Z}}(a_i)$

Uns interessiert nun die folgende Frage: Ist es möglich auf sinnvolle Weise jeder solchen Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ einen Mittelwert zuzuordnen? Um auf diese Frage antworten zu können, sollten wir uns zuerst überlegen, was wir unter einem Mittelwert verstehen.

Ein **Mittelwert** ist eine lineare Abbildung $\mu : B \to \mathbb{R}$, mit

$$\forall a \in B \text{ gilt } \inf(a) \leq \mu(a) \leq \sup(a)$$

Derartige Abbildungen gibt es viele. Zum Beispiel $\mu((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \frac{1}{|E|}\sum_{n\in E} a_n$, für jede endliche Teilmenge $E \subseteq \mathbb{Z}$. Wir gehen daher einen Schritt weiter und fragen, ob es einen Mittelwert μ gibt, der auch die folgende Bedingung erfüllt:

$$\mu \circ S = \mu, \text{ wobei } S : B \to B \text{ durch } S((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) := (a_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}} \text{ definiert ist (Shift-Operator).}$$

Die Antwort ist ja. Die obigen Beispiele für Mittelwerte sind allerdings nicht von dieser Form. Der nun folgende Existenzbeweis ist nicht konstruktiv.

Die Menge $M := \{\mu \in \mathbb{R}^B \mid \mu \text{ ist ein Mittelwert}\}$ als Teilraum von $\mathbb{R}^B$ ist kompakt ($\mathbb{R}^B$ bekommt die Produkttopologie).

Beweis: Es gilt $M \subseteq X := \prod_{a\in B}[\inf(a), \sup(a)]$ und da X als Produkt kompakter Intervalle kompakt ist, reicht es zu zeigen, dass M in X abgeschlossen ist.

Da $\mathbb{R}^B$ die Produkttopologie besitzt, ist für jedes $a \in B$ die Abbildung $e_a := \mathbb{R}^B \to \mathbb{R}$ definiert durch $e_a(f) := f(a)$ stetig. Für $a, b \in B$ und $r \in \mathbb{R}$ sind somit auch $(e_{a+b} - e_a - e_b)$ und $(e_{ra} - re_a)$ als zusammengesetzte Abbildungen stetig. Die Menge M lässt sich nun als geeigneter Schnitt von Urbildern schreiben:
$M = X \cap [\bigcap_{a,b\in B}(e_{a+b} - e_a - e_b)^{-1}(0)] \cap [\bigcap_{a\in B, r\in\mathbb{R}}(e_{ra} - re_a)^{-1}(0)]$

Da alle diese Urbilder (als Urbild der 0) abgeschlossen sind, ist es M als Schnitt auch!

Es gibt einen Mittelwert $\mu : B \to \mathbb{R}$ mit $\mu \circ S = \mu$. Solch einen Mittelwert nennen wir Shift invariant.

Beweis: Wir betrachten die Folge von Mittelwerten $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$\mu_n(a) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{für} \quad a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B.$$

Nun ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M und da diese Menge kompakt ist, hat die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $\mu \in M$, in dem Sinn, dass jede Umgebung von μ unendlich viele der Folgeglieder μ_n enthält.

Andernfalls gäbe es zu jedem $\mu \in M$ eine Umgebung welche nur endlich viele μ_n enthält. Da M kompakt ist, Würde endlich viele dieser Umgebungen bereits ganz M überdecken und es gäbe insgesamt nur endlich viele μ_n, was natürlich ein Widerspruch ist.

Zeigen wir, dass unser Häufungspunkt μ bereits der gesuchte Shift invariante Mittelwert ist. Dazu sei $a \in B$ fest gewählt. Sei auch $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Wir setzen $U := \{\nu \in M \mid |\nu(a) - \mu(a)| < \varepsilon \text{ und } |\nu \circ S(a) - \mu \circ S(a)| < \varepsilon\}$. Dann ist U eine offene Umgebung (in der Spurtopologie auf M) von μ. Nun gilt: $|\mu_n(a) - \mu_n \circ S(a)| = \frac{1}{n}|a_1 - a_n| \le \frac{2\sup_{i\in\mathbb{Z}}(|a_i|)}{n} \to 0$, für $n \to \infty$.

Wir wählen daher n so groß, dass $\mu_n \in U$ und gleichzeitig $|\mu_n(a) - \mu_n \circ S(a)| < \varepsilon$ gilt. Insgesamt bekommen wir damit dann:

$|\mu(a) - \mu \circ S(a)| \le |\mu(a) - \mu_n(a)| + |\mu_n(a) - \mu_n \circ S(a)| + |\mu_n \circ S(a) - \mu \circ S(a)| < 3\varepsilon.$

Da ε beliebig war, gilt somit $\mu(a) = \mu \circ S(a)$. Da auch $a \in B$ beliebig war, folgt $\mu = \mu \circ S$.

4.5 Andere Kompaktheitsbegriffe

Den Begriff der Kompaktheit kann man natürlich in verschiedene Richtungen abschwächen. Wichtige Verallgemeinerungen von Kompaktheit sind z.B. Hausdorff-Abgeschlossenheit, lokale Kompaktheit, k-Räume, abzählbare Kompaktheit und die Folgenkompaktheit. In diesem Abschnitt geben wir einen kleinen Überblick über diese Begriffe und wie diese mit dem Begriff der Kompaktheit zusammenhängen. Erstaunlicherweise erweisen sich die letzten beiden Varianten (abzählbare Kompaktheit und Folgenkompaktheit) in einer gewissen Weise - trotz der Beschränkung auf abzählbare Strukturen (oder vielleicht auch gerade deshalb) - als deutlich komplizierter als die gewöhnliche Kompaktheit.

4.5.1 Definition

Hausdorff-Abgeschlossen In Anlehnung an Lemma 4.1.4 nennen wir ein top. Raum (X,τ) Hausdorff-Abgeschlossen, wenn er ein Hausdorff-Raum ist und für jede Einbettung $f: X \to Y$ in einen Hausdorff-Raum Y gilt, dass $f(X)$ abgeschlossen in Y ist. Kurz: X ist T_2 und wann immer sich X als Teilraum eines T_2-Raumes realisieren lässt, ist X in diesem abgeschlossen. Wie wir bereits gesehen haben, sind kompakte T_2-Räume also beispielsweise Hausdorff-Abgeschlossen.

Für die Formulierung des nächsten Satzes brauchen wir Begriff des offenen Ultrafilters. Sei (X,τ) ein top. Raum. Wir nennen $\phi \subseteq \tau$ einen offenen Filter, wenn 1) $X \in \phi$ und $\emptyset \notin \phi$ 2) $U,V \in \phi \;\Rightarrow\; U \cap V \in \phi$ 3) $U \in \phi$ und $U \subseteq V \in \tau \;\Rightarrow\; V \in \phi$ erfüllt sind. Genau wie beim Ultrafiltersatz (Satz 3.2.2) zeigt man, dass jeder offener Filter in einem maximalen offenen Filter enthalten ist. Diese nennt man dann halt offene Ultrafilter. Genau wie schon bei den

Filtern definieren wir, was es heißt, dass ein offener Filter konvergiert. ϕ konvergiert gegen $x \in X$ (wir verwenden die gleiche Symbolik: $\phi \to x$), genau dann wenn $\dot{x} \cap \tau \subseteq \phi$.

4.5.2 Satz

Für einen topologischen Raum (X, τ) ist äquivalent:
a) (X, τ) ist Hausdorff-Abgeschlossen.
b) (X, τ) ist T_2 und jeder offene Ultrafilter konvergiert (in X).
c) (X, τ) ist T_2 und zu jeder offenen Überdeckung $\xi \subseteq \tau$ von X gibt es eine endliche Teilmenge $\xi' \subseteq \xi$, mit $X = \bigcup_{U \in \xi'} \overline{U}$

Beweis: Statt **a)** $\Rightarrow$ **b)** zeigen wir dazu äquivalent: nicht b) $\Rightarrow$ nicht a). Bezeichnen wir mit Y die Menge aller nicht konvergierenden offenen Ultrafiltern in X. Die Menge $Z := X \cup Y$ versehen wir nun mit der Topologie $\tau_Z := top(\mathscr{B})$, wobei $\mathscr{B} := \tau \cup \{U \cup \{\phi\} \mid U \in \phi \in Y\}$ eine Basis von τ_Z ist. Es gilt $Y \neq \emptyset$ und $X \cap Y = \emptyset$. Die Abbildung $f : X \to Z$, definiert durch $f(x) := x$ ist offensichtlich eine Einbettung. Ebenso sieht man, dass X in Z dicht liegt (jede nicht leere offene Teilmenge aus Z hat einen nicht leeren Schnitt mit X). Da $X \neq Z$, kann X somit nicht abgeschlossen sein. Zeigen wir noch, dass (Z, τ_Z) ein Hausdorff-Raum ist (dann haben wir nämlich gezeigt, dass (X, τ) nicht Hausdorff-Abgeschlossen ist). Dazu seien $z, z' \in Z$ mit $z \neq z'$. Wir unterscheiden drei Fälle:

1.Fall $z, z' \in X$. Da X nach Voraussetzung T_2 ist, gibt es disjunkte $U, V \in \tau$ mit $z \in U$ und $z' \in V$. Nach Konstruktion von τ_Z gilt offensichtlich auch $U, V \in \tau_Z$.

2.Fall $z \in X$ und $z' \in Y$. Dann ist z' ein nicht konvergierender offener Ultrafilter (er konvergiert somit erst recht nicht gegen z; die Konvergenz in X ist gemeint). Also gibt es ein $U \in (\dot{x} \cap \tau) \setminus z'$. Da z' ein maximaler offener Filter ist, muss es also ein $V \in z'$ geben, mit $U \cap V = \emptyset$ (sonst hätte $z' \cup \{U\}$ die eSE und könnte zu einem offenen Ultrafilter z'' erweitert werden, der aufgrund der Maximalität von z' gleich z' wäre, also $V \in z'$ - ein Widerspruch). Dann sind aber U und $V \cup \{z'\}$ offenen und disjunkte Umgebungen von z und z' in Z.

3.Fall $z, z' \in Y$. Dann sind z und z' nicht konvergierende Ultrafilter in X mit $z \neq z'$. Es gibt also ein $U \in z \setminus z'$. Wie im 2.Fall schließt man auf die Existenz eines $V \in z'$ mit $U \cap V = \emptyset$. Dann sind $U \cup \{z\}$ und $V \cup \{z'\}$ die gesuchten disjunkten und offenen Umgebungen von z und z' in Z.

b) $\Rightarrow$ **c)** Angenommen es gibt eine offene Überdeckung $\sigma \subseteq \tau$ von X, welche keine endliche Teilmenge $\sigma' \subseteq \sigma$ besitzt mit $X = \bigcup_{U \in \sigma'} \overline{U}$. Dann bilden wir $\phi' := \{X \setminus \bigcup_{U \in \sigma'} \overline{U} \mid \sigma' \subseteq \sigma$ und σ' ist endlich $\}$. Nun ist $\phi' \subseteq \tau$ und hat die eSE, es gibt somit einen offenen Ultrafilter ϕ mit $\phi' \subseteq \phi$. Dieser konvergiert nach Voraussetzung aber gegen ein $x \in X$. Nun gibt es aber auch ein $U \in \sigma$ mit $x \in U$ und da ϕ gegen x konvergiert gilt $U \in \phi$. Nach Konstruktion gilt aber auch $X \setminus \overline{U} \in \phi$ und damit auch $\emptyset = U \cap (X \setminus \overline{U}) \in \phi$ - ein Widerspruch.

c) $\Rightarrow$ **a)** Sei (Y, τ') ein Hausdorff-Raum, der (X, τ) als Teilraum enthält (also $X \subseteq Y$ und die Teilraumtopologie von X bezgl. τ' ist gleich τ). Wir müssen zeigen, dass X in Y als Teilmenge abgeschlossen ist. Sei also $y \in Y \setminus X$. Zu jedem $x \in X$ gibt es dann ein $U_x \in \dot{x} \cap \tau'$ und ein $V_x \in \dot{y} \cap \tau'$ mit $U_x \cap V_x = \emptyset$. Dann aber auch $\overline{U_x} \cap V_x = \emptyset$. Nun gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U_{x_k}}$.

Bilden wir $V := V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n} \in \dot{y} \cap \tau'$, so gilt offensichtlich $X \cap V = \emptyset$. Als Teilraum ist X in Y also abgeschlossen.

4.5.3 Korollar

In der Klasse der regulären Räume (das ist T_1 zusammen mit T_3) fallen die Begriffe Hausdorff-Abgeschlossen und kompakt zusammen.

Beweis: Das kompakte reguläre Räume Hausdorff-Abgeschlossen sind, ist klar! Zeigen wir, dass reguläre Hausdorff-Abgeschlossenen Räume kompakt sind. Sei dazu ξ eine beliebige offene Überdeckung (von von dem Raum (X,τ)). Zu jedem $x \in X$ gibt es dann ein $U_x \in \xi$ und ein $V_x \in \tau$ mit $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. Zu der offenen Überdeckung $\gamma := \{V_x \mid x \in X\}$ gibt es eine endliche Teilmenge $\gamma' \subseteq \gamma$ mit $X = \bigcup_{V \in \gamma'} \overline{V}$. Zu jedem $V \in \gamma'$ wählen wir dann ein $U_V \in \xi$ mit $\overline{V} \subseteq U_V$. Es ist klar, dass dann $\xi' := \{U_V \mid V \in \gamma'\}$ eine endliche Teilüberdeckung von ξ ist.

4.5.4 Bemerkung

Die Eigenschaft Hausdorff-Abgeschlossen überträgt sich nicht notwendig auf abgeschlossene Unterräume. Sie überträgt sich allerdings noch auf so genannte regulär abgeschlossene Unterräume. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq X$ des topologischen Raums (X,τ) **regulär abgeschlossen**, wenn $A = \overline{A^\circ}$. Es gilt nun die Aussage: Ist (X,τ) Hausdorff-Abgeschlossen und $A \subseteq X$ regulär abgeschlossen, so ist auch A Hausdorff-Abgeschlossen.

Beweis: Das A ein Hausdorff-Raum ist, ist klar. Sei ξ eine offene Überdeckung von A. Dann ist $\xi \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von X. Es gibt dann eine endliche Teilmenge ξ' von ξ, so dass $X = (\bigcup_{U \in \xi'} \overline{U}) \cup \overline{X \setminus A} = (\bigcup_{U \in \xi'} \overline{U}) \cup (X \setminus A^\circ)$. Also $A^\circ \subseteq \bigcup_{U \in \xi'} \overline{U}$ und damit $A = \overline{A^\circ} \subseteq \overline{\bigcup_{U \in \xi'} \overline{U}} = \bigcup_{U \in \xi'} \overline{U}$.

4.5.5 Definition

Lindelöf, lokal kompakt Wenn offene Überdeckungen lediglich abzählbare Teilüberdeckung haben, dann nennen wir X einen Lindelöf-Raum
Ein topologischer Raum (X,τ) wird lokal kompakt genannt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

Wir nennen (X,τ) stark lokal kompakt, wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $O \in \dot{x} \cap \tau$ eine kompakte Umgebung K von x gibt mit $x \in K \subseteq O$.

4.5.6 Satz

Sei (X,τ) ein lokal kompakter topologischer Raum.
1) Ist (X,τ) ein T_3 Raum, so ist er stark lokal kompakt.
2) Ist (X,τ) ein T_2 Raum, so ist er auch ein T_3 Raum.

Beweis: 1) Sei $x \in U \in \tau$. Es gibt eine kompakte Umgebung V von x (also $x \in V^\circ$). Dann gibt es ein $W \in \dot{x} \cap \tau$ mit $\overline{W} \subseteq U \cap V$. Offenbar ist $\overline{W}$ nun eine kompakte Umgebung von x mit $\overline{W} \subseteq U$.

2) Sei $x \in O \in \tau$. Es existiert eine kompakte Umgebung K von x. Setze $V := O \cap K^\circ$. Für $y \in K \setminus V$ existieren disjunkte $V_y, U_y \in \tau$ mit $x \in V_y$ und $y \in U_y$. Da K kompakt ist gibt es $y_1, \ldots, y_n \in K \setminus V$ mit $K \subseteq V \cup U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}$. Setze $V' := V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}$ und $U' := U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}$. Dann gilt $x \in V' \subseteq K \setminus U' \subseteq V$. Da $K \setminus U'$ abgeschlossen ist folgt $\overline{V'} \subseteq V \subseteq O$, also ist X ein T_3-Raum.

4.5.7 Lemma

Für einen topologischen Raum (X, τ) ist äquivalent:

(1) Es gibt einen lokal kompakten Raum (Z, σ) und eine surjektive Abbildung $f : Z \to X$ mit $\forall O \subseteq X$ gilt $O \in \tau \Leftrightarrow f^{-1}(O) \in \sigma$ (man sagt auch f ist eine identifizierende Abbildung).

(2) $\forall O \subseteq X$ gilt: $O \in \tau \Leftrightarrow \forall K \in \kappa(X)$ gilt $O \cap K$ ist offen in K (bzgl. der Teilraumtopologie), wobei $\kappa(X) := \{K \subseteq X \mid K \text{ ist kompakt}\}$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) Sei $O \subseteq X$ und $\forall K \in \kappa(X)$ sei $O \cap K$ offen in K. Es genügt also zu zeigen, dass $f^{-1}(O)$ offen in Z ist. Sei $z \in f^{-1}(O)$. Dann gibt es ein kompaktes V mit $z \in V^\circ$. Es folgt $f(f^{-1}(O) \cap V) = O \cap f(V)$. Da $f(V)$ kompakt ist, ist $f(f^{-1}(O) \cap V)$ also offen in $f(V)$. Sei $g := f|V : V \to f(V)$. Dann ist g stetig und surjektiv, also $f^{-1}(O) \cap V = g^{-1}(f(f^{-1}(O) \cap V))$ offen in V. Es gibt somit ein offenes U in Z mit $f^{-1}(O) \cap V = U \cap V$. Da $z \in U \cap V^\circ \subseteq U \cap V \subseteq f^{-1}(O)$ und $U \cap V^\circ$ offen in Z ist, ist $f^{-1}(O)$ offen in Z und O somit offen in X.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $Z := \bigcup_{K \in \kappa(X)} K \times \{K\}$. Für jedes $K \in \kappa(X)$ sei $f_K : K \to Z$ definiert durch $f_K(x) := (x, K)$. Sei $\sigma := \{O \subseteq Z \mid \forall K \in \kappa(X) \text{ ist } f_K^{-1}(O) \text{ offen in } K\}$ (die Finaltopologie auf Z bzgl. diesen Daten). Damit ist Z offenbar ein lokal kompakter Raum. Sei nun $f : Z \to X$ definiert durch $f(x, K) := x$. Ist O offen in X, so ist $f^{-1}(O)$ offen in Z, denn ist $K \in \kappa(X)$, so folgt $f_K^{-1}(f^{-1}(O)) = O \cap K$. Letzteres ist aber offen in K. Da K beliebig war, folgt $f^{-1}(O)$ ist offen in Z. Die Abbildung f ist also stetig. Ist $f^{-1}(O)$ offen in Z, so folgt aus $f_K^{-1}(f^{-1}(O)) = O \cap K$, dass $O \cap K$ offen in K ist, für jedes $K \in \kappa(X)$. Nach Voraussetzung an X ist O also offen in X. Die Abbildung f ist daher identifizierend.

4.5.8 Definition

Besitzt ein topologischer Raum (X, τ) die Eigenschaft aus Lemma 4.5.7, so nennen wir ihn einen **k-Raum** (oder auch **kompakt-erzeugt**).

4.5.9 Korollar

Sei (X,τ) ein k-Raum und (Y,σ) beliebig. $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn die Einschränkung $f|K : K \to Y$ für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ stetig ist.

4.5.10 Definition

Wir nennen einen topologischen Raum (X,τ) **sequential**, wenn $\forall A \subseteq X$ gilt:

$$A \text{ ist abgeschlossen } \Leftrightarrow \text{ für alle Folgen } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ aus } A \text{ ist } \lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A.$$

Hierbei ist $\lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \{x \in X \mid \forall U \in \dot{x} \cap \tau \, \exists k \in \mathbb{N} \forall m \geq k \;\, x_m \in U\}$.

4.5.11 Lemma

Für einen beliebigen topologischen Raum (X,τ) gelten folgende Implikationen:

Metrisierbar $\Rightarrow$ A_1 $\Rightarrow$ sequential $\Rightarrow$ k-Raum (Zur Erinnerung: A_1 bedeutet, dass jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.) und kompakt $\Rightarrow$ lokal kompakt $\Rightarrow$ k-Raum.

Beweis: Wir zeigen: A_1 $\Rightarrow$ sequential $\Rightarrow$ k-Raum (der Rest ist offensichtlich).

A_1 $\Rightarrow$ sequential: Sei $A \subseteq X$ mit der Eigenschaft $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A ist $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \subseteq A$ und sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis. Falls $\exists x \in \overline{A} \setminus A$, so sei $x_n \in U_n \cap A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist dann $x \in \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ im Widerspruch zu $x \in \overline{A} \setminus A$.

sequential $\Rightarrow$ k-Raum: Sei also $A \subseteq X$ und $A \cap K$ abgeschlossen in K, für jedes kompakte $K \subseteq X$. Wir müssen zeigen, dass A abgeschlossen ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus A und $x \in \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Offenbar ist $K := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt, also gibt es ein in X abgeschlossenes B mit $A \cap K = B \cap K$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Folge aus B ist und B abgeschlossen ist, ist $x \in B$, also $x \in B \cap K = A \cap K$, also $x \in A$. Da (X,τ) nach Voraussetzung sequential ist, ist A abgeschlossen.

4.5.12 Satz von Tychonoff für lokal kompakte Räume

Ein Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ lokal kompakter Räume ist genau dann lokal kompakt, wenn alle X_i lokal kompakt sind und bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen die X_i sogar kompakt sind

Beweis: Ist $X := \prod_{i\in I} X_i$ lokal kompakt und $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ (beliebig fest gewählt), so gibt es eine kompakt Umgebung U von x. Aus der Definition der Produkttopologie folgt, dass bis auf endlich viele Ausnahmen $pr_i(U) = X_i$ gilt. Da die Projektionen $pr_i : X \to X_i$ stetig

und surjektiv sind, sind also bis auf höchstens endlich viele $i \in I$ die X_i kompakt. Und wenn $y_j \in X_j$, dann sei K eine kompakte Umgebung von von einem Punkt $y \in X$ mit $pr_j(y) = y_j$. Na ja, dann ist halt $pr_j(K)$ eine kompakte Umgebung von y_j (kompakt ist klar; Umgebung bleibt als Aufgabe).
Umgekehrt seien bis auf $J := \{i_1,...,i_n\}$ alle X_i kompakt und $x \in X$. Für $i \in J$ sei immerhin noch K_i eine kompakte Umgebung von x_i. Dann ist $\prod_{i\in I} K_i$, wobei $K_i = X_i$ für $i \in I \setminus J$, eine kompakte Umgebung von x.

4.5.13 Satz

Satz von Whitehead Sei $f : X \to Y$ identifizierend und A stark lokal kompakt. Dann ist auch $h = f \times id_A : X \times A \to Y \times A$ identifizierend ($f \times id_A(x,a) := (f(x),a)$).

Beweis: Das h surjektiv ist, ist klar. Zu zeigen bleibt also: W ist offen in $Y \times A \Leftrightarrow h^{-1}(W)$ ist offen in $X \times A$. Die eine Richtung ist klar, da h stetig ist.

Sei nun $h^{-1}(W)$ offen in $X \times A$ und $(y_0,a_0) \in W$, mit $f(x) = y_0$ für ein gewisses $x \in X$. Also $h(x,a_0) = (y_0,a_0) \in W$, also $(x,a_0) \in h^{-1}(W)$. Setze $A_0 := \{a \in A \mid (x,a) \in h^{-1}(W)\}$. also schon mal $a_0 \in A$. Außerdem ist A_0 offen (wie man so sieht: Sei $a \in A_0 \Rightarrow (x,a) \in h^{-1}(W)$. Aber $h^{-1}(W)$ ist offen, $\Rightarrow \exists U,V$ offen in X bzw. A, mit $(x,a) \in U \times V \subseteq h^{-1}(W)$. Also $a' \in V \Rightarrow (x,a') \in h^{-1}(W) \Rightarrow a' \in A_0$ und somit ist $a \in V \subseteq A_0$).

Da A stark lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung C von a_0, mit $C \subseteq A_0$. Nun ist $x \in U := \{y \in X \mid \{x\} \times C \subseteq h^{-1}\}$ offen, wie wir nun zeigen.

$y \in U \Rightarrow \{y\} \times C \subseteq h^{-}(W)$. Da $h^{-1}(W)$ offen ist, existiert ein V offen in X mit $\{y\} \times C \subseteq V \times C \subseteq h^{-1}(W)$ (ein Spezialfall des so genannten Wallace Theorem).

Beweis dazu: $\mathscr{B} := \{O \times O' \mid O,O'$ offen in X bzw. $A\}$ ist eine Basis von $X \times A$. Also $h^{-1}(W) = \bigcup_{i\in I} O_i \times O'_i$, für eine gewisse Familie von Mengen aus $\mathscr{B}$. Somit auch $\{y\} \times C \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i \times O'_i$. Da C kompakt und $\{y\}$ einelementig ist, gibt es $i_1,...,i_n$ mit $\{y\} \times C \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k} \times O'_{i_k}$ und $y \in O_{i_k}$, für $k = 1,...,n$. Setze nun $V := \bigcap_{k=1}^{n} O_{i_k} \Rightarrow \{y\} \times C \subseteq V \times C \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k} \times O'_{i_k} \subseteq h^{-1}(W)$. Da y beliebig, V offen und $y \in V \subseteq U$ ist, folgt U ist offen.

Nun gilt immer $U \subseteq f^{-1}(f(U))$. Andererseits haben wir $f^{-1}(f(U)) = h^{-1}(h(U \times C)) \subseteq h^{-1}(h(h^{-1}(W))) = h^{-1}(W)$, da $U \times C \subseteq h^{-1}(W)$, bzw. h surjektiv ist. Aus der Definition von U folgt $f^{-1}(f(U)) \subseteq U$. Insgesamt also $U = f^{-1}(f(U))$. Da f identifizierend ist, ist $f(U)$ offen! Also $(y_0,a_0) \in f(U) \times C = h(U \times C) \subseteq h(h^{-1}(W)) = W$. Da $f(U) \times C$ eine Umgebung von (y_0,a_0) ist, ist W offen.

4.5.14 Korollar

Ist (X,τ) ein k-Raum und (Y,σ) stark lokal kompakt, so ist $X \times Y$ ein k-Raum.

Beweis: Sei $f : Z \to X$ identifizierend, wobei Z lokal kompakt ist. Dann ist auch $h := f \times id_Y : Z \times Y \to X \times Y$ identifizierend. Da auch $Z \times Y$ lokal kompakt ist, sind wir fertig.

4.5.15 Satz von Baire (oder auch Bairscher Kategoriensatz)

Falls X

a) ein vollständiger metrischer Raum (Definition 4.5.19), oder

b) ein lokal kompakter Hausdorff Raum ist,

dann gilt für jede Folge $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ dichter offener Teilmengen: $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ ist dicht in X.

Beweis: Sei U eine beliebige offene Menge in X. Setze $B_0 := U$. Falls B_{n-1} schon definiert, dann gibt es eine offene Menge B_n mit $\overline{B_n} \subseteq B_{n-1} \cap D_n$, wobei $\overline{B_n}$ im Fall b) sogar kompakt ist. im Fall a) nehme man entsprechende Kugelumgebungen und im Fall b) verwende man Satz 4.5.6 ($\emptyset \neq B_{n-1} \cap D_n$ ist offen). Es gilt dann $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B_n} \subseteq U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ und $\emptyset \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B_n}$. Die Teilmengenbeziehung ist klar und für die Ungleichung benutze man im Fall a) die Vollständigkeit und im Fall b) die Charakterisierung kompakter Mengen durch Familien abgeschlossener Mengen (wenn $\emptyset = \bigcap_{i \in I} K_i$, für kompakte K_i, dann gibt es ein endliches $J \subseteq I$ mit $\emptyset = \bigcap_{i \in J} K_i$).

4.5.16 Definition

abzählbar kompakt, folgenkompakt, Häufungspunkt einer Folge (HP) Ein Raum (X, τ) heißt abzählbar kompakt, wenn jede abzählbare offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat. Er heißt folgenkompakt, wenn jede Folge aus X eine konvergente Teilfolge hat. Eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Gestalt $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen ist. Ein Punkt $x \in X$ heißt HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jede offene Umgebung O von x die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in O\}$ unendlich ist.

4.5.17 Lemma

Sei (X, τ) ein topolgischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1) (X, τ) ist abzählbar kompakt.

2) Jeder Filter ϕ auf X mit einer abzählbaren Basis hat einen konvergenten Oberfilter.

3) Jede Folge aus X hat einen Häufungspunkt (HP).

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) Sei ϕ ein Filter mit einer abzälbaren Filterbasis ϕ_0. Angenommen es gibt keinen Oberfilter von ϕ, der gegen ein $x \in X$ konvergiert. Dann ist $\bigcap_{A\in\phi_0} \overline{A} = \emptyset$ und somit $\{X \setminus \overline{A} \mid A \in \phi_0\}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X. Somit gibt es $A_1, \ldots, A_n \in \phi_0$ mit $X = (X \setminus \overline{A}_1) \cup \ldots \cup (X \setminus \overline{A}_n)$. Also $\emptyset = \overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n \in \phi$. Das ist ein Widerspruch.

2) $\Rightarrow$ 3) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X. Dann hat der von $\phi_0 := \{\{x_k \mid k > n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte Filter ϕ eine abzählbare Filterbasis (nämlich ϕ_0), besitzt also einen konvergenten Oberfilter ψ. Sei $\psi \to x$. Dann ist $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k \mid k > n\}}$. Offensichtlich ist x ein HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Nehmen wir mal an, dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X ist, welche keine endliche Teilüberdeckung hat. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir dann $x_n \in X \setminus \bigcup_{k\leq n} P_k$.

Sei x ein HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in P_n$. Da x ein HP ist, muss $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in P_n\}$ aber unendlich sein. Nach Konstruktion der Folge ist $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in P_n\}$ abe endlich - ein Widerspruch.

4.5.18 Lemma

Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Dann gilt:
(a) Ist (X,τ) folgenkompakt, so ist er abzählbar kompakt.
(b) Ist er abzählbar kompakt und genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, so ist er folgenkompakt.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X. Diese hat dann eine konvergente Teilfolge. Ein Grenzwert dieser Teilfolge ist dann offenbar auch ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Raum ist somit abzählbar kompakt.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X. Diese hat dann einen Häufungspunkt x. Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x. O.B.d.A. kann $U_{n+1} \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ angenommen werden. Sei $x_{n_0} \in U_0$. Ist x_{n_k} gewählt, so sei $x_{n_{k+1}} \in U_{k+1} \setminus \{x_{n_l} \mid 0 \leq l \leq k\}$. Die so konstruierte Teilfolge konvergiert nun gegen x.

4.5.19 Definition

Cauchy-Folgen und totale Beschränktheit Sei (X,d) ein metrischer Raum. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sa dass $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ für alle $m,n \geq N$ gilt. Wir nennen (X,d) vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert. Der Raum (X,d) heißt total beschränkr, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $A \subseteq X$ gibt, mit $X = \bigcup_{a\in A} K(a,\varepsilon)$.

Erstaunlicherweise fallen für metrische Räume sehr viele Kompaktheitsbegriffe zusammen (tatsächlich fallen für sehr viel größere Klassen topologischer Räume einige dieser Begriffe zusammen; man vergleiche dazu die Kapitel über parakompakte Räume und uniforme Räume):

4.5.20 Äquivalente Beschreibung der Kompaktheit für metrische Räume

Sei X ein metrischer Raum mit Metrik d. Dann ist äquivalent:
(a) (X,d) ist kompakt,
(b) (X,d) ist abzählbar kompakt,
(c) (X,d) ist folgenkompakt,
(d) (X,d) ist vollständig und total beschränkt.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) ist klar!

(c) $\Rightarrow$ (d) Offensichtlich ist X dann auch vollständig. Wenn X nicht total beschränkt ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass keine endlich vielen Kugeln mit Radius ε bereits X überdecken. Wähle $x_0 \in X$ ... $x_n \in X \setminus K(x_0, \varepsilon) \cup \ldots \cup K(x_{n-1}, \varepsilon)$ und so weiter. Diese Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat ne konvergente Teilfolge, was dann sofort den Widerspruch ergibt (zu dem festen ε).

(d) $\Rightarrow$ (a) Sei ϕ ein Ultrafilter der nicht konvergiert. Dann $\exists n \in \mathbb{N}$ mit

$$\{K(x, 1/n) \mid x \in X\} \cap \phi = \emptyset.$$

(Andernfalls wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $K(x_n, 1/n) \in \phi$. Offenbar ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine Cauchyfolge. Gegen deren Grenzwert würde nun auch ϕ konvergieren.)

Nun gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} K(x_k, 1/n)$. Folglich $\exists k$ mit $K(x_k, 1/n) \in \phi$ (wir haben einen Ultrafilter!) - Widerspruch.

4.5.21 Beispiel

Je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^*$ auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) sind äquivalent (d.h. $\exists c, C > 0 \forall x \in V: \ c\|x\| \leq \|x\|^* \leq C\|x\|$).

Anleitung: Man zeigt die Aussage erst für zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_2$ auf dem $\mathbb{R}^n$. O.B.d.A. ist $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm (Warum?). Im ersten Schritt sei dazu $e_1, \ldots, e_n$ die standard Basis und $\mathbb{R}^n \ni x = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu$. Dann ist $\|x\| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \, \|e_\nu\| \leq C\|x\|_2$, wobei $C := \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|e_\nu\|^2}$ (Cauchy-Schwartz-Ungleichung).

Für die zweite Ungleichung betrachte man $c := inf\{\|x\| \mid \|x\|_2 = 1\}$. Dann gilt $c > 0$ (Kompaktheit der $\|\cdot\|_2$-Kugel) und man folgere $\|x\|_2 \leq c^{-1}\|x\|$.

Für den allgemeinen Fall eines endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V benutze einen $\mathbb{R}$ Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \to V$ (V dabei als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst), um die Äquivalenz der zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^*$ zu zeigen.

hier noch ein Lemma, über offene Überdeckungen in kompakten metrischen Räumen.

4.5.22 Überdeckungslemma von Lebesgue

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es ein positive Zahl δ derart, dass jede Teilmenge A von X mit einem Durchmesser kleiner als δ bereits in einem der U_i liegt.

Beweis: Jeder Punkt $x \in X$ liegt in wenigstens einem der U_i. Wähle für jedes $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, derart, dass die offene Kugel $K(x, 2\delta_x)$ um x mit Radius 2δ bereits in einem der U_i liegt (das geht, da die U_i offen sind). Also ist $(K(x, \delta_x))_{x\in X}$ auch eine offene Überdeckung von X. Nun ist X kompakt, also gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} K(x_k, \delta_{x_k})$ Setze $\delta := min(d_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$ Mit Hilfe der Dreiecksungleichung macht man sich schnell klar, dass δ die geforderte Eigenschaft hat.

4.5.23 Bemerkung

Wir geben nun eine stark verallgemeinerten Fassung von Korollar 4.4.6. Starke Verallgemeinerung deshalb, da die Mengen S_i als topologische Räume mit der diskreten Topologie und die Abbildungen $f_{i+1} : S_{i+1} \to S_i$ alle Voraussetzungen des nachfolgenden Lemmas erfüllen.

4.5.24 Lemma

Sei $\leq$ eine Relation auf der Menge M mit folgenden Eigenschaften:
A) $\forall a \in M$ gilt $a \leq a$.
B) $\forall a,b,c \in M$ gilt $(a \leq b$ und $b \leq c)$ impliziert $a \leq c$.
C) $\forall a,b \in M\ \exists c \in M$ mit $a \leq c$ und $b \leq c$.
D) $\exists P \subseteq M^{\mathbb{N}},\ P \neq \emptyset$ mit:
1) $g \in P$ und $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ impliziert $g(m) \leq g(n)$.
2) $g,h \in P$ und $g \neq h$ impliziert $\forall m,n \in \mathbb{N}$ gilt $\neg(g(m) \leq h(n))$..
3) $\forall a \in M\ \exists b \in N := \{g(n) \mid g \in P \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ mit $a \leq b$ (N ist kofinal in M).

Sei ferner für jedes $a \in M$ ein abzählbar kompakter topologischer Raum (X_a, τ_a) und für jedes Paar $a,b \in M$ mit $a \leq b$ eine Abbildung $f_a^b : X_b \to X_a$ gegeben, welche $f_a^c = f_a^b \circ f_b^c$ erfüllt, für $a,b,c \in M$ mit $a \leq b \leq c$.

Sind außerdem alle Abbildungen abgeschlossen (nicht unbedingt stetig) und ist das Urbild $(f_a^b)^{-1}(x)$ für jedes $x \in X_a$ abzählbar kompakt, dann gibt es eine Familie $(x_a)_{a\in M}$ mit $x_a \in X_a$ und $f_a^b(x_b) = x_a$, für $a,b \in M$ mit $a \leq b$.

Beweis: Sei $g \in P$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun $F_n^g := \bigcap_{k\leq 1} f_{g(n+1)}^{g(n+k)}(X_{g(n+k)})$. Dann ist F_n^g eine in $X_{g(n)}$ nicht leere abgeschlossene Menge, denn $(f_{g(n+1)}^{g(n+k)}(X_{g(n+k)}))_{k=1}^{\infty}$ ist eine fallende Folge nicht leerer in $X_{g(n)}$ abgeschlossener Mengen und $X_{g(n)}$ ist abzählbar kompakt!

Zwischenbehauptung: $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in F_n^g$ ist $F_{n+1}^g \cap (f_{g(n)}^{g(n+1)})^{-1}(x) \neq \emptyset$.

Beweis: Nun ist $F_{n+1}^g \cap (f_{g(n)}^{g(n+1)})^{-1}(x) = \bigcap_{k\leq 1}[f_{g(n+1)}^{g(n+k)}(X_{g(n+k)}) \cap (f_{g(n)}^{g(n+1)})^{-1}(x)]$. Für $k \geq 1$ ist $f_{g(n+1)}^{g(n+k)}(X_{g(n+k)}) \cap (f_{g(n)}^{g(n+1)})^{-1}(x) \neq \emptyset$, andernfalls $x \notin f_{g(n)}^{g(n+1)} \circ f_{g(n+1)}^{g(n+k)}(X_{g(n+k)}) \supseteq F_n^g \ni x$, was ein Widerspruch ist.

Da auch hier wieder eine absteigende Folge $(f_{g(n+1)}^{g(n+k)}(X_{g(n+k)}) \cap (f_{g(n)}^{g(n+1)})^{-1}(x))_{k=1}^{\infty}$ von in $(f_{g(n)}^{g(n+1)})^{-1}(x)$ abgeschlossenen Mengen vorliegt und $(f_{g(n)}^{g(n+1)})^{-1}(x)$ abzählbar kompakt ist, ist somit auch der Schnitt nicht leer!

Mit dem Beweis dieser Zwischenbehauptung können wir uns nun leicht induktiv eine Folge $(x_n^g)_{n\in\mathbb{N}}$ basteln, mit 1) $x_n^g \in F_n^g$ und 2) $m \leq n$ impliziert $f_{g(m)}^{g(n)}(x_n^g) = x_m^g$.

Wir starten dazu einfach mit einem $x_0^g \in F_0^g$. Sind $x_0^g \in F_0^g, \ldots, x_n^g \in F_n^g$ gewählt, so wählen wir ein $x_{n+1}^g \in F_{n+1}^g \cap (f_{g(n)}^{g(n+1)})^{-1}(x_n^g)$ ... und so weiter.

Diese Konstruktion funktioniert für jedes $g \in P$. Nun ist $N := \{g(n) \mid g \in P \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ kofinal in M. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ und genau (!) ein $g_a \in P$ mit $a \leq g_a(n)$.

(Falls auch $h \in P$ mit $h \neq g_a$ und $a \leq h(m)$, für ein $m \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein $f \in P$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $g_a(n) \leq f(k)$ und $h(m) \leq f(k)$. Aus der Voraussetzung an P folgt, dass dies nicht sein kann.) Wir setzen nun $x_a := f_a^{g_a(n)}(x_n^{g_a})$ und behaupten, dass $(x_a)_{a\in M}$ die geforderte Eigenschaft hat. Für den Nachweis sei $a \leq b$ gewählt. Sei dann $x_a := f_a^{g_a(n)}(x_n^{g_a})$ und $x_b := f_b^{g_b(m)}(x_m^{g_b})$, für gewisse $m,n \in \mathbb{N}$. Dann muss aber $g_a = g_b := g$ gelten (andernfalls $\exists h \in P$, $k \in \mathbb{N}$ mit $g_a(n) \leq h(k)$ und $g_b(m) \leq h(k)$, was aber zu einem Widerspruch führt). Setze $l := \max(m,n)$ und es folgt $x_n^g = f_{g(n)}^{g(l)}(x_l^g)$ und $x_m^g = f_{g(m)}^{g(l)}(x_l^g)$. Damit bekommen wir dann

$$f_a^b(x_b) = f_a^b(f_b^{g(m)}(f_{g(m)}^{g(l)}(x_l^g))) = f_a^{g(n)}(f_{g(n)}^{g(l)}(x_l^g)) = f_a^{g(n)}(x_n^g) = x_a.$$

4.5.25 Lemma

Sei $(X_i,\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht leerer topologischer Räume und M die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Falls für alle $a,b \in M$ mit $a \subseteq b$ die natürlichen Projektionen $q : \prod_{i\in b} X_i \to \prod_{i\in a} X_i$ abgeschlossen sind und außerdem $q^{-1}(z)$ abzählbar kompakt ist ($\forall z \in \prod_{i\in a} X_i$), dann ist auch $X := \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ (mit der Produkttopologie) abzählbar kompakt.

Beweis: Zunächst einmal bemerken wir, dass $\prod_{i\in a} X_i$ für jedes $a \in M$ abzählbar kompakt ist (für $j \in \mathbb{N}\setminus a$ ist $q^{-1}(z) = (\prod_{i\in a} X_i) \times \{z\}$ abzählbar kompakt, wenn $z \in X_j$). Sei nun $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X, wobei die $P_n = \prod_{i\in\mathbb{N}} P_i^n$ offene standard Basismengen sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es also ein endliches $J_n \subseteq \mathbb{N}$ mit $P_i^n \in \tau_i$, für $i \in J_n$ und $P_i^n = X_i$, für $i \in \mathbb{N}\setminus J_n$. Nehmen wir an (und einen Widerspruch zu bekommen), dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine endliche Teilüberdeckung hat. Dann können wir für jedes $a \in M$ ein $f_a \in X \setminus \bigcup_{n\in a} P_n$ auswählen. Für jedes $a \in M$ setzen wir nun $m(a) := \bigcup_{n\in a} J_n$. Dann ist auch $m(a) \in M$ und $a \subseteq b$ impliziert $m(a) \subseteq m(b)$. Die Einschränkung $f_a|m(a)$ von f_a auf $m(a)$ ist nun kein Element von $\bigcup_{n\in a} \prod_{i\in m(a)} P_i^n$, also $f_a|m(a) \in Y_a := (\prod_{i\in m(a)} X_i) \setminus (\bigcup_{n\in a} \prod_{i\in m(a)} P_i^n)$. Damit ist dann jedes Y_a abzählbar kompakt, nicht leer und abgeschlossen in $\prod_{i\in m(a)} X_i$.

Sind nun $a,b \in M$ mit $a \subseteq b$ und ist $f \in Y_b$, so ist $f|m(A) \in Y_a$ (die Einschränkung auf $m(a)$).

Beweis dazu: Ist $f \in (\prod_{i\in m(b)} X_i) \setminus (\bigcup_{n\in b} \prod_{i\in m(b)} P_i^n)$, so insbesondere $f \notin \bigcup_{n\in a} \prod_{i\in m(b)} P_i^n$. Für jedes $n \in a$ gibt es somit ein $i_n \in m(b)$ mit $f(i) \notin P_{i_n}^n$. Für $i \in m(b) \setminus m(a)$ ist nun aber $P_i^n = X_i$. Also ist $i_n \in m(a)$. Damit ist $f|m(a) \notin \prod_{i\in m(a)} P_i^n$, für jedes $n \in a$.

Mit dem Beweis dieser Zwischenbehauptung können wir nun für $a,b \in M$ mit $a \subseteq b$ eine Abbildung $g_a^b : Y_b \to Y_a$ durch $g_a^b(f) := f|m(a)$ definieren. g_a^b ist einfach die Einschränkung der Projektion $q_a^b : \prod_{i\in m(b)} X_i \to \prod_{i\in m(a)} X_i$ auf Y_b.

Da die Projektionen nach Voraussetzung abgeschlossen sind und abzählbar kompakte Urbilder von Punkten besitzen, gilt dies auch für die entsprechenden g_a^b (die Details kann man sehr leicht nachrechnen). Die Menge M wird mit der Inklusion als Relation und die Abbildungen g_a^b erfüllen zudem alle Voraussetzungen von Lemma 4.5.24. Es gibt somit ein $F \in \prod_{a\in M} Y_a$ mit $g_a^b(F(b)) = F(a)$, für alle $a,b \in M$ mit $a \subseteq b$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir nun $\overline{n} := \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ und anschließend $f := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(\overline{n})$. Das macht Sinn, denn für $n \in \mathbb{N}$ ist $F(\overline{n}) \in \prod_{i\in m(\overline{n})} X_i$ außerdem $F(\overline{n+1})|m(\overline{n}) = F(\overline{n})$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} m(\overline{n}) = \mathbb{N}$, also $f \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

Nun kann es kein $n \in \mathbb{N}$ geben, mit $f \in P_n$ (denn sonst $f \in \bigcup_{k\in a} P_k$, mit $a := \overline{n}$ und somit $f|m(a) \in \bigcup_{k\in a} \prod_{i\in m(a)} P_i^k$, aber $f|m(a) = F(a) \in Y_a$ - offensichtlich ist dies ein Widerspruch). Da $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X ist, ist das dann aber unser angestrebter Widerspruch zur Voraussetzung.

4.5.26 Bemerkung

Weitere (sehr wichtige) Abschwächungen des Begriffs Kompaktheit (Parakompaktheit, Metakompaktheit, ...) werden wir im Kapitel "Lokal-endliche Systeme und Metrisierbarkeit" kennen lernen.

4.6 Kompaktifizierungen

Wie bereits angemerkt verhalten sich kompakte Räume sehr angenehm. Pech ist nur, dass nicht alle Räume kompakt sind. Was tun wir also: Wir machen sie kompakt ... Ganz so einfach geht das natürlich nicht und genau genommen machen wir sie auch nicht kompakt, sondern betten sie nur in kompakte Räume ein.

4.6.1 Satz (Alexandroff-Kompaktifizierung)

Sei (X,τ) ein nicht kompakter Raum und $\omega \notin X$. Setze $X_\infty := X \cup \{\omega\}$ und $\tau_\infty := \tau \cup \{O \subseteq X_\infty \mid \omega \in O$ und $X \setminus O$ ist kompakt+abgeschlossen in $(X,\tau)\}$. Dann gilt:

a) (X_∞, τ_∞) ist ein kompakter top. Raum und $id : X \hookrightarrow X_\infty$ ist eine homöomorphe Einbettung.

b) (X_∞, τ_∞) ist $T_2 \;\Leftrightarrow\; (X,\tau)$ ist lokal kompakt und T_2.

c) Ist auch $(X \cup \{\delta\}, \sigma)$ ein kompakter T_2-Raum ($\delta \notin X$) derart, dass X mit Spurtopologie homöomorph zu (X,τ) ist, so sind $(X \cup \{\delta\}, \sigma)$ und (X_∞, τ_∞) bereits homöomorph.

Beweis: Alle Beweise liegen auf der Hand!

4.6.2 Bemerkung

Auf jeder Menge X gibt es eine kompakte T_2-Topologie. Für endliches X ist dies klar. Um dies auch für unendliches X einzusehen, betrachte man auf X die diskrete Topologie $\tau_{dis} := \mathscr{P}(X)$. Damit ist (X, τ_{dis}) ein lokal kompakter T_2-Raum. Sei (X', τ') die Alexandroff-Kompaktifzierung. Dann ist (X', τ') ein kompakter T_2-Raum. Offenbar ist $|X| = |X'|$. Mit einer bijektiven Abbildung $f : X' \to X$ bekommt man durch $\tau := \{f(O) \mid O \in \tau'\}$ eine kompakte T_2-Topologie auf X.

Interessant ist folgende Verallgemeinerung von Satz 4.6.1, die die Frage nach T_2 Mehrpunktkompaktifizierungen vollständig klärt. Der Beweis ist zwar länglich, aber nicht kompliziert.

4.6.3 Satz über die Existenz von T_2 Mehrpunktkompaktifizierungen

(a) Für einen topologischen Raum (X,τ) und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ist äquivalent:

1. Es gibt einen kompakten T_2-Raum (Y,σ) mit $X \subseteq Y$, $|Y \setminus X| = n$, $\overline{X} = Y$ und $\sigma_{|X} := \{O \cap X \mid O \in \sigma\} = \tau$. Wir nennen (Y,σ) eine n-Punkt T_2-Kompaktifizierung.

2. (X,τ) ist ein lokal kompakter T_2-Raum und es gibt $V_1,...,V_n \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ mit $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$ derart, dass $L := X \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i$ kompakt ist, aber für alle $k \in \{1,...,n\}$ die Menge $Z_k := (X \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i) \cup V_k$ nicht kompakt ist.

(b) Hat Ein Raum (X,τ) eine n-Punkt T_2-Kompaktifizierung und ist $1 \leq j \leq n$, so hat (X,τ) auch eine j-Punkt T_2-Kompaktifizierung.

Beweis: (a) Zeigen wir 1. $\Rightarrow$ 2. Sei $Y \setminus X = \{y_1,...,y_n\}$ und seien $O_1,...,O_n \in \sigma$ paarweise disjunkt mit $y_i \in O_i$ für alle $i \in \{1,...,n\}$. Für jedes i setze nun $V_i := O_i \cap X$. Nach Voraussetzung ist $V_i \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Es ist $X \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i = Y \setminus \bigcup_{i=1}^n O_i$ abgeschlossen in Y, also auch kompakt in Y. Damit ist $X \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i$ aber kompakt in X. Sei $j \in \{1,...,n\}$. Wäre $Z_j = X \setminus \bigcup_{i=1,i\neq j}^n V_i$ kompakt (man beachte, dass $Z \subseteq X$ genau dann kompakt in X ist, wenn Z kompakt in Y ist), so wäre Z_j abgeschlossen in Y, also $Y \setminus Z_j$ offen in Y. Es ist aber $Y \setminus Z_j = (\bigcup_{i=1,i\neq j}^n V_i) \cup \{y_1,...,y_n\} = (\bigcup_{i=1,i\neq j}^n O_i) \cup \{y_j\}$, also wäre $\{y_j\} = O_j \cap (Y \setminus Z_j) \in y_j \cap \sigma$ - ein Widerspruch zu $\overline{X} = Y$.

Zeigen wir 2. $\Rightarrow$ 1. Seien $y_1,...,y_n$ paarweise verschieden Mengen[3] mit $y_i \notin X$ für alle $i \in \{1,...,n\}$. Wir definieren $Y := X \cup \{y_1,...,y_n\}$ und setzen

$$\mathscr{B} := \tau \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{(Z_i \setminus K) \cup \{y_i\} \mid K \subseteq Z_i,\ K \text{ ist kompakt in } X\}$$

Wir definieren σ dann als die von $\mathscr{B}$ erzeugte Topologie auf Y. Offenbar ist $\mathscr{B}$ durchschnittsstabil, also eine Basis für σ.

Zeigen wir, dass (Y,σ) ein Hausdorff-Raum ist. Sei $i \neq j$. Es folgt $[(Z_i \setminus L) \cup \{y_i\}] \cap [(Z_j \setminus L) \cup \{y_j\}] = (Z_i \setminus L) \cap (Z_j \setminus L) = (Z_i \cap Z_j) \setminus L = L \setminus L = \emptyset$. Verschiedene Punkte aus $\{y_1,...,y_n\}$ können wir also durch disjunkte Umgebungen trennen. Verschiedene Punkte aus X können wir auch trennen, da (X,τ) ein Hausdorff-Raum ist und $\tau \subseteq \sigma$ gilt. Sei $x \in X$ und $y_j \in \{y_1,...,y_n\}$. Falls $x \in \bigcup_{i=1,i\neq j} V_i$, so sind $\bigcup_{i=1,i\neq j} V_i$ und Z_j entsprechend disjunkte Umgebungen. Falls $x \in X \setminus \bigcup_{i=1,i\neq j} V_i = Z_j$, so sei K kompakt in X mit $x \in K^\circ$. In diesem Fall sind K° und $[Z_j \setminus (K \cap Z_j)] \cup \{y_j\}$ disjunkte (offene) Umgebungen. (Y,σ) ist also ein T_2-Raum.

Zeigen wir, dass (Y,σ) kompakt ist. Sei $\sigma' \subseteq \mathscr{B}$ eine offene Überdeckung von Y. Für jedes $i \in \{1,...,n\}$ sei $K_i \subseteq Z_i$ und K_i kompakt in X mit $O_i := (Z_i \setminus K_i) \cup \{y_i\} \in \sigma'$. Setze $O := \bigcup_{i=1}^n O_i$. Es folgt $\{y_1,...,y_n\} \cup \bigcup_{i=1}^n (V_i \setminus K_i) \subseteq O$, also $Y \setminus O \subseteq X \setminus \bigcup_{i=1}^n (V_i \setminus K_i) \subseteq$

[3] Was genau die y_i sind, spielt für uns keine Rolle; wir brauchen nur irgendwelche zusätzlichen Elemente, die nicht aus X stammen.

$(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} K_i)$. Letztere Menge ist in X aber kompakt (also auch in Y). Demnach ist $Y \setminus O$ kompakt in Y. Es gibt also $W_1, ..., W_m \in \sigma'$ mit $Y \setminus O \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} W_k$. Eine endliche Teilüberdeckung von σ' ist daher $\{O_1, ..., O_n, W_1, ..., W_m\}$ und (Y, σ) ist somit kompakt.

Zeigen wir $\overline{X} = Y$. Sei $\emptyset \neq O \in \mathscr{B}$. Falls $O \in \tau$, so offenbar $O \cap X \neq \emptyset$. Falls $O = (Z_i \setminus K) \cup \{y_i\}$ für K kompakt in X und $K \subseteq Z_i$, so ist $K \neq Z_i$, denn Z_i ist nach Voraussetzung nicht kompakt. Es gibt also ein $x \in X$ mit $x \in (Z_i \setminus K) \cup \{y_i\}$ und somit $O \cap X \neq \emptyset$.

Zeigen wir $\sigma_{|X} := \{O \cap X \mid O \in \sigma\} = \tau$. Da $[(Z_i \setminus K) \cup \{y_i\}] \cap X = Z_i \setminus K$, ist $\sigma_{|X} \subseteq \tau$. Die Richtung $\tau \subseteq \sigma_{|X}$ ist trivial. Damit ist (a) vollständig bewiesen.

(b) Sei ein kompakter T_2-Raum (Y, σ) mit $X \subseteq Y$, $|Y \setminus X| = n$, $\overline{X} = Y$ und $\sigma_{|X} := \{O \cap X \mid O \in \sigma\} = \tau$ gegeben. Sei $Y \setminus X = \{y_1, ..., y_n\}$ und $1 \leq j \leq n$. Wir setzen $Z := X \cup \{y_1, ... y_j\}$ und definieren $f : Y \to Z$ durch

$$f(y) = \begin{cases} y & \text{falls } y \notin \{y_j, ..., y_n\} \\ y_j & \text{falls } y \in \{y_j, ..., y_n\} \end{cases}$$

Sei ξ die Finaltopologie auf Z bzgl. der Abbildung f,d.h. $O \in \xi \Leftrightarrow f^{-1}(O) \in \sigma$. Dann ist (Z, ξ) als Bild von Y unter der stetigen Abbildung f kompakt. Für $O \in \xi$ ist $f^{-1}(O) \in \sigma$, also $X \cap O = X \cap f^{-1}(O) \in \tau$. Ist andererseits $O \in \tau$, so ist $O \in \sigma$. Aus $O = f^{-1}(O)$ folgt dann $O \in \xi$. Daher gilt $\xi_{|X} := \{O \cap X \mid O \in \xi\} = \tau$. Zeigen wir, dass (Z, ξ) ein T_2-Raum ist. Zwei verschiedene Punkte aus X können wir durch disjunkte offene Mengen trennen, da $\tau \subset \xi$. Für $x \in X$ und $y_i \in \{y_1, ..., y_j\}$ sei $O \in \dot{x} \cap \tau$ und $V \in \sigma$ mit $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq V$ und $O \cap V = \emptyset$. Offenbar sind O und $f(V)$ disjunkte, in Z offene Mengen (denn $V = f^{-1}(f(V))$) mit $x \in O$ und $y_i \in f(V)$. Sei $y_i \in \{y_1, ..., y_j\}$ mit $y_i \neq y_j$. Dann gibt es disjunkte $V, W \in \sigma$ mit $y_i \in V$ und $\{y_j, ..., y_n\} \subseteq W$. Offenbar sind $f(V), f(W) \in \xi$ disjunkt mit $y_i \in f(V)$ und $y_j \in f(W)$. Der Nachweis der Hausdorff-Eigenschaft ist damit abgeschlossen. $\overline{X} = Z$ ist offensichtlich.

4.6.4 Satz (Stone-Cech)

Für jeden topologischen Raum (X, τ) existiert ein kompakter Hausdorff-Raum $(\beta X, \sigma)$ und eine stetige Abbildung $h : X \to \beta X$, so dass für jeden kompakten Hausdorff-Raum (K, ρ) und jede stetige Abbildung $f : X \to K$ eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\overline{f} : \beta X \to X$ existiert, mit $\overline{f} \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\exists ! \tilde{f}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Falls auch γX mit einem h' dieselben Eigenschaften hat, so sind γX und βX bereits homöomorph.

Beweis: Betrachte $\mathscr{M} := \{(K, \rho, f) \mid K \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)), (K, \rho)$ kompakter Hausdorff-Raum und $f : X \to K$ ist stetig $\}$. Definiere weiter

$$h : X \to \prod_{(K,\rho,f)\in\mathscr{M}} K \quad \text{durch} \quad h(x) := (f(x))_{(K,\rho,f)\in\mathscr{M}}$$

wobei $\prod_{(K,\rho,f)\in\mathscr{M}} K$ mit der gewöhnlichen Produkttopologie versehen wird. βX wird nun folgendermaßen definiert: $\beta X := \overline{h(X)}$. Aus dem Vorangehenden schließen wir, dass βX kompakt und Hausdorff ist (aus dem Abschnitt *Topologische Formulierungen des Ultrafiltersatzes* entnimmt man, dass der Ultrafiltersatz (UFT) für diesen Schluss ausreicht). Wir zeigen nun die Gültigkeit der universellen Eigenschaft. Sei (K,ρ) ein kompakter Hausdorff-Raum und $f : X \to K$ stetig. Nun gilt $|f(X)| \leq |X|$, also nach Lemma 3.2.10 $|\overline{f(X)}| \leq |\mathscr{P}(\mathscr{P}(X)|$. Man mache sich klar, dass es dann auch ein topologischen Raum (K_0,ρ_0) und einen Homöomorphismus $g : K_0 \to \overline{f(X)}$ gibt, wobei $K_0 \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$. Setzt man nun noch $f_0 := g^{-1} \circ f$, so liegt das Tripel (K_0,τ_0,f_0) also in $\mathscr{M}$. Das $\overline{f}$ ist jetzt schnell gefunden:

$$\overline{f} := g \circ pr_{(K_0,\tau_0,f_0)|\beta X} : \beta X \to K,$$

wobei $pr_{(K_0,\tau_0,f_0)}$ die standard Projektion bezeichnet. Es gilt dann also: $\overline{f} \circ h = g \circ pr_{(K_0,\tau_0,f_0)} \circ h = g \circ f_0 = f$.

Die Eindeutigkeit des $\overline{f}$ folgt daraus, dass zwei solche Abbildungen, auf der in βX dicht liegenden Teilmenge $f(X)$, bereits übereinstimmen müssen.

Falls auch γX mit einem h' dieselben Eigenschaften hat, so gibt es genau ein $\phi : \beta X \to \gamma X$ mit $\phi \circ h = h'$ und genau ein $\psi : \gamma X \to \beta X$ mit $\psi \circ h' = h$, also $\psi \circ \phi \circ h = h$. Nun gibt es aber auch genau ein $\delta : \beta X \to \beta X$ mit $\delta \circ h = h$, nämlich $\delta = id_{\beta X}$. also $\psi \circ \phi = id_{\beta X}$ und analog $\phi \circ \psi = id_{\gamma X}$ Also ist ϕ ein Homöomorphismus.

4.6.5 Definition

Kompaktifizierung Unter einer Kompaktifizierung eines topologischen Raumes (X,τ) verstehen wir ein Paar $((Y,\sigma),f)$ eines kompakten topologischen Raum (Y,σ), mit einer homöomorphen Einbettung $f : X \to Y$ mit $\overline{f(X)} = Y$.

4.6.6 Bemerkung

Die Alexandroff-Kompaktifizierung ist also eine Kompaktifizierung im Sinne der obigen Definition. Hingegen können wir das von der Konstruktion aus Satz 4.6.4 nicht unbedingt behaupten. Wenn wir aber Bedingungen angeben könnten, unter dehnen die Stone-Čech-Abbildung $h : X \to \beta X$ eine homöomorphe Einbettung ist, so hätten wir unsere Kompaktifizierung. Um diese Bedingungen soll es uns im Folgenden gehen.

4.6.7 Definition

Wir sagen von einem top. R. (X,τ) er ist ein $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge A und Punkt $x \in X \setminus A$ ein stetiges $f : X \to [0,1]$ gibt, mit $f(A) \subseteq \{1\}$ und $f(x) = 0$. Äquivalent ist natürlich die Existenz eines $f : X \to [0,1]$ mit $f(A) \subseteq \{0\}$ und $f(x) = 1$. Ein Raum, der T_1 und $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ ist, nennen wir vollständig regulär oder Tychonoff-Raum.

4.6.8 Lemma

Teilräume vollständig regulärer Raume und beliebige Produkte vollständig regulärer Räume sind wieder vollständig regulär.

Beweis: Dass Teilräume vollständig regulärer Räume wieder vollständig regulär sind ist trivial. Seien also $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ vollständig reguläre Räume. Es genügt zu zeigen, dass $X := \prod_{i\in I} X_i$ wieder $T_{3\frac{1}{2}}$ ist. Sei dazu A eine abgeschlossene Teilmenge von X und $x \in X\setminus A$. Es gibt dann eine (offene) Basismenge $O = \prod_{i\in I} O_i$ der Produktopologie mit $x \in O \subseteq X\setminus A$. Zu O gibt es ein endliches $J \subseteq I$ mit $O_i \in \tau_i$ für $i \in I$ und $O_i = X_i$ für $i \in I\setminus J$. Für $i \in J$ existiert ein $f_i : X_i \to [0,1]$ mit $f_i(x_i) = 1$ und $f_i(X_i \setminus O_i) \subseteq \{0\}$. Wir setzen dann $f : X \to [0,1]$ durch $f(z) := \prod_{i\in J} f_i(z_i)$ (als Multiplikation in $\mathbb{R}$ zu verstehen). Diese f ist stetig und es gilt $f(x) = 1$ und $f(A) \subseteq \{0\}$.

4.6.9 Lemma

Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Dann ist äquivalent:
(a) (X,τ) ist vollständig regulär.
(b) X lässt sich in $[0,1]^I$ einbetten (für geeignetes I).
(c)$\exists f : X \to K$ mit f: homöomorphe Einbettung, (K,σ): kompakter T_2-Raum.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ b) Wir setzen $I := C(X,[0,1])$ (zur Erinnerung: $C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f$ ist stetig $\}$). Nun definieren wir $f : X \to [0,1]^I$ durch $x \mapsto (i \mapsto i(x))$. Dieses f ist dann injektiv, denn wenn $x \neq y$, dann existiert ein $i \in I$ mit $i(x) = 0$ und $i(y) = 1$ (man beachte, dass X ein T_1-Raum ist). Also $f(x) \neq f(y)$. Die Stetigkeit reicht es auf der Subbasis nachzuprüfen. Sei also $O = \prod_{i\in I} O_i$ offen in $[0,1]^I$, mit $O_i = [0,1]$ für $i \neq i_0$ und O_{i_0} offen in $[0,1]$. Dann ist $f^{-1}(\prod_{i\in I} O_i) = i_0^{-1}(O_{i_0})$. Letztere Menge ist aber offen! Als letztes zeigen wir, dass f auch eine offene Einbettung ist. Sei dazu O offen in X und $f(x) \in f(O)$, für $x \in O$. Dann gibt es ein $i_x \in I$ mit $i_x(x) = 0$ und $i_x(X \setminus O) \subseteq \{1\}$. Daraus folgt $i_x^{-1}([0,1)) \subseteq O$. Wir setzen nun $U := \prod_{i\in I} O_i$ mit $O_i = [0,1)$ für $i = i_x$ und sonst $O_i = [0,1]$. Dann ist $f(x) \in U$ und $U \cap f(X) \subseteq f(O)$ ($f(y) \in U \cap f(X)$ impliziert $f(y)(i_x) = i_x(y) \neq 1$, also $y \in i_x^{-1}([0,1)) \subseteq O$). Das bedeutet aber, dass $f(O)$ offen ist.

(b) $\Rightarrow$ c) ist trivial.

(c) $\Rightarrow$ a) Als kompakter T_2-Raum ist K offensichtlich vollständig regulär und demzufolge auch jeder Teilraum. Also ist (X,τ) volständig regulär.

4.6.10 Satz

Ein topologischer Raum ist genau dann ein Tychonoff-Raum, wenn die Stone-Čech-Abbildung $h : X \to \beta X$ eine Einbettung ist.

Beweis: Nun ja, wenn die Abbildung h eine homöomorphe Einbettung ist, so folgt aus dem vorigem Lemma sofort, dass X ein Tychonoff-Raum ist. Sei also umgekehrt X ein Tychonoff-Raum. Dann gibt es ein kompakten T_2-Raum K mit einer homöomorphen Einbettung $f : X \to K$. Wenden wir Satz 4.6.4 an, so erhalten wir $f = \overline{f} \circ h$. Also muss h schon mal injektiv sein. Stetig ist es sowieso, also müssen wir noch zeigen, dass O offen in X, $h(O)$ offen in $h(X)$ impliziert. Nun ist $h(O) = \overline{f}^{-1}(f(O)) \cap h(X)$ und $f(O) = U \cap f(X)$ für U offen in K, also $h(O) = \overline{f}^{-1}(U) \cap \overline{f}^{-1}(\overline{f}(h(X))) \cap h(X) = \overline{f}^{-1}(U) \cap h(X)$ und letztere Menge ist offen in $h(X)$.

4.6.11 Definition

Jeder Raum hat also eine Kompaktifizierung (Um das einzusehen, braucht man aus einem top. Raum (X, τ) nur durch $Y := X \cup \{X\}$ und $\sigma := \tau \cup \{Y\}$ einen neuen top. Raum (Y, σ) zu machen. (Y, σ) ist dann eine Kompaktifizierung von (X, τ).), aber ein Raum hat eine Hausdorff-Kompaktifizierung dann und nur dann, wenn er ein Tychonoff-Raum ist. In diesem Fall sprechen wir bei der Konstruktion aus Satz 4.6.4, dann von der **Stone-Čech-Kompaktifizierung**.

Sei (X, τ) ein fest gewählter top. Raum. $\mathscr{K}(X, \tau)$ bezeichne die Klasse aller Kompaktifizierungen von X. Auf $\mathscr{K}(X, \tau)$ können wir wie folgt eine Relation festlegen.

Für zwei Kompaktifizierungen (c_1X, c_1) und (c_2X, c_2) (hierbei sind c_iX als die zugrunde liegenden kompakten Räume zu verstehen und $c_i : X \to c_iX$ die entsprechenden Einbettungen) definieren wir $(c_1X, c_1) \leq (c_2X, c_2) \;:\Leftrightarrow\; \exists$ ein stetiges $f : c_1X \to c_2X$ mit $c_2 = f \circ c_1$.

Ist (X, τ) ein Tychonoff-Raum, so ist $\leq$ fast eine partielle Ordnung auf der Klasse aller Hausdorff-Kompaktifizierungen. Gilt nämlich $c_1X \leq c_2X$ und $c_2X \leq c_1X$, so ist nicht unbedingt $c_1X = c_2X$, aber c_1X und c_2X sind immerhin noch homöomorph (Beweis bleibt als leichte Fingerübung. Hinweis: Lemma 3.3.3). In diesem Fall nennen wir die Kompaktifizierungen äquivalent. Diese Begriffsbildung ist kein Zufall, denn legt man durch $c_1X \sim c_2X \;:\Leftrightarrow\; c_1X \leq c_2X$ und $c_2X \leq c_1X$ eine weitere Relation auf der Klasse aller Hausdorff-Kompaktifizierungen fest, so stellt sich unmittelbar heraus, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Auf der Klasse aller Äquivalenzklassen ist $\leq$ dann auch tatsächlich eine partielle Ordnung.

4.6.12 Lemma

Sei (X, τ) ein Tychonoff-Raum. Zwei Hausdorff-Kompaktifizierungen c_1X und c_2X von X sind genau dann äquivalent, wenn $\overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} = \emptyset \;\Leftrightarrow\; \overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = \emptyset$ für alle abgeschlossenen $A, B \subseteq X$ gilt.

Beweis: Wir zeigen $c_1X \leq c_2X$. Aus Symmetriegründen folgt dann $c_2X \leq c_1X$, also $c_1X \sim c_2X$. Wir verwenden dazu Satz 4.3.1 um zu zeigen, dass es ein stetiges f gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c_1"] \arrow[dr, "c_2"'] & c_1X \arrow[d, "\exists f"] \\ & c_2X \end{tikzcd}$$

Nun ist $c_1(X)$ dicht in c_1X und $g : c_1(X) \to c_2X$ durch $g(c_1(x)) := c_2(x)$ definiert, stetig. Zeigen wir also, dass es sich stetig auf c_1X fortsetzen lässt.

Seien dazu $P, Q \subseteq c_2X$ abgeschlossen mit $P \cap Q = \emptyset$. Dann setzen wir $A := c_1^{-1}(g^{-1}(P))$ und $B := c_1^{-1}(g^{-1}(Q))$. Nun sind A und B abgeschlossen und es gilt $c_2(A) \subseteq P$ und $c_2(B) \subseteq Q$, also $\overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = \emptyset$ und somit (nach Voraussetzung) auch $\overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} = \emptyset$. Wir schließen $\overline{g^{-1}(P)} \cap \overline{g^{-1}(Q)} = \emptyset$. Somit lässt sich g (eindeutig) zu einem $f : c_1X \to c_2X$ fortsetzen. Dieses f erfüllt dann offenbar $f \circ c_1 = c_2$, also $c_1X \leq c_2X$.

Sind andererseits die beiden Hausdorff-Kompaktifizierungen c_1X und c_2X äquivalent, so ist die eindeutig existierende Abbildung $f : c_1X \to c_2X$ mit $f \circ c_1 = c_2$ ein Homöomorphismus und $\overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = \emptyset$ für alle abgeschlossenen $A, B \subseteq X$ gilt klarerweise.

4.6.13 Lemma

Seien c_1X und c_2X zwei Hausdorff-Kompaktifizierungen von (X, τ) und sei $f : c_1X \to c_2X$ eine stetige Abbildung mit $f \circ c_1 = c_2$, dann gilt:

1) f ist surjektiv.
2) $f(c_1(X)) = c_2(X)$ und $f(c_1X \setminus c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X)$.

Beweis: 1) Zeigen wir zuerst, dass f abgeschlossen ist. Ist $A \subseteq c_1X$ abgeschlossen, so ist A kompakt und somit auch $c_1(A)$. Da c_2X ein Hausdorff-Raum ist, ist $c_1(A)$ dann abgeschlossen.

Nun ist $c_2(X)$ dicht in c_2X, also $\overline{c_2(X)} = c_2X$ und es gilt $c_2(X) = f(c_1(X)) \subseteq f(c_1X) = \overline{f(c_1X)}$ (da f abgeschlossen ist). Damit ist dann $c_2X = \overline{c_2(X)} \subseteq f(c_1X)$.

2) $f(c_1(X)) = c_2(X)$ ist klar. Nun gilt $\overline{c_1(X)} = c_1X$ und $f|c_1(X) : c_1(X) \to f(c_1(X)) = c_2(X)$ ist stetig und bijektiv. Sie ist aber auch offen, denn ist O offen in $c_1(X)$, so ist $c_1^{-1}(O)$ offen in X und somit $f(O) = f \circ c_1(c_1^{-1}(O)) = c_2(c_1^{-1}(O))$ offen in $c_2(X)$. Aus Lemma 3.3.5 folgt somit $f(c_1(X)) \cap f(c_1X \setminus c_1(X)) = \emptyset$, also $f(c_1X \setminus c_1(X)) \subseteq c_2X \setminus c_2(X)$. Da f surjektiv ist, gilt somit $f(c_1X \setminus c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X)$.

4.7 $\beta\mathbb{N}$ und Dynamische Systeme

”It is well enough that people of the nation do not understand our banking and monetary system, for if they did, I believe there would be a revolution before tomorrow morning.”
Henry Ford

Wir schauen uns in diesem Abschnitt die Stone-Čech-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen - versehen mit der diskreten Topologie - genauer an und beweisen, als Anwendung, einen wunderschönen Satz aus der Theorie der Dynamischen Systeme. Uns geht es um das so genannte Auslander-Ellis Theorem.

Im Folgenden fassen wir die Menge $\mathbb{N}$ also als topologischen Raum, mit der Topologie $\tau := \mathscr{P}(\mathbb{N})$ auf.

Als diskreter Raum ist $(\mathbb{N}, \tau)$ natürlich normal und somit auch vollständig regulär. Es macht also Sinn von der Stone-Čech-Kompaktifizierung des topologischen Raums $(\mathbb{N}, \tau)$ zu sprechen.

Wir können die Stone-Čech-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen aber auch anders beschreiben als in Satz 4.6.4: Dazu definieren wir $\beta\mathbb{N}$ als die Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Für $A \subseteq \mathbb{N}$ setzen wir $A^* := \{\varphi \in \beta\mathbb{N} \mid A \in \varphi\}$. Offensichtlich gilt $A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$ und $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N}$. Demzufolge ist $\mathscr{B} := \{A^* \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ die Basis einer Topologie τ auf $\beta\mathbb{N}$.

Zeigen wir, dass $(\beta\mathbb{N}, \tau)$ ein kompakter Hausdorff-Raum ist.

Für $\phi, \psi \in \beta\mathbb{N}$ mit $\phi \neq \psi$, gibt es ein $P \in \phi \setminus \psi$. Dann gibt es aber auch ein $Q \in \psi$ mit $P \cap Q = \emptyset$. Offensichtlich sind P^* und Q^* dann disjunkte offene Umgebungen von ϕ bzw. ψ.

Zeigen wir noch die Kompaktheit.

Sei $(A_i^*)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\beta\mathbb{N}$ mit Basiselementen (also Elemente der Form A^*, für $A \subseteq \mathbb{N}$). Gäbe es keine endliche Teilüberdeckung, so währe $(A_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{N}$ ohne endliche Teilüberdeckung (siehe Lemma 3.2.3). Das heißt es gibt einen Ultrafilter ϕ mit $\{\mathbb{N} \setminus_{i \in J} A_i \mid J \subseteq I \text{ und } J : \text{endlich } \} \subseteq \phi$. Dieser würde dann aber in einem A_i^* stecken, im Widerspruch zu $\mathbb{N} \setminus A_i \in \phi$.

Die Abbildung $\beta : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ definiert durch $\beta(n) := \dot{n}$ ist stetig, da $\mathbb{N}$ die diskrete Topologie trägt. Außerdem ist $\{\dot{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\beta\mathbb{N}$, denn für $n \in A \subseteq \mathbb{N}$ ist $\dot{n} \in A^*$.

Zeigen wir, dass der Raum $(\beta\mathbb{N}, \tau)$ zusammen mit der Abbildung β die universelle Eigenschaft aus Satz 4.6.4 hat und somit homöomorph zur Stone-Čech-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen ist.

Sei $f : \mathbb{N} \to X$ eine stetige Abbildung in einen kompakten Hausdorff-Raum X. Ist $\phi \in \beta\mathbb{N}$, so ist der Bildfilter $f(\phi)$ unter f ein in X konvergenter Ultrafilter, konvergiert also gegen ein eindeutig bestimmtes $x_\phi \in X$. Wir definieren also $\tilde{f} : \beta\mathbb{N} \to X$ durch $\tilde{f}(\phi) := x_\phi$. Dieses $\tilde{f}$ ist stetig, denn ist V offen und $x := \tilde{f}(\phi) \in V$, so gibt es ein offenes U mit $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$. Nun ist $U \in f(\phi)$, es gibt also ein $P \in \phi$ mit $f(P) \subseteq U$. Es folgt $P^* \subseteq \tilde{f}^{-1}(V)$, denn ist $\psi \in P^*$, also $P \in \psi$, so $U \in f(\psi)$, also auch $\overline{U} \in f(\psi)$ und somit $\tilde{f}(\psi) \in \overline{U} \subseteq V$. Nach Satz 2.2.2 ist $\tilde{f}$ also stetig. Offensichtlich ist $\tilde{f} \circ \beta = f$ und somit ist $\tilde{f}$ sogar eindeutig bestimmt, da die Werte auf der dichten Teilmenge $\{\dot{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ durch f vorgegeben sind. Die universelle Eigenschaft aus Satz 4.6.4 ist somit erfüllt.

4.7.1 Bemerkung

Überlegen wir uns einmal wie groß denn $\beta\mathbb{N}$ eigentlich ist. Dazu bieten sich zwei Möglichkeiten an. Die erste Variante folgt aus der Beschreibung von $\beta\mathbb{N}$ mittels Ultrafiltern und Satz 9.6.2. Wir bekommen nämlich sofort $|\beta\mathbb{N}| = |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))|$.

Für die zweite Variante schauen wir uns die Konstruktion aus Satz 4.6.4 genauer an. wir sehen dann sofort $|\beta\mathbb{N}| \leq |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Andererseits enthält beispielsweise $[0,1]^{[0,1]}$ nach Satz 3.6.2 eine abzählbare dichte Teilmenge D. Ein surjektives $f : \mathbb{N} \to D$ als Abbildung nach $[0,1]^{[0,1]}$ aufgefasst ist dann aber auch stetig (denn $\mathbb{N}$ ist mit der diskreten Topologie versehen). Für die zugehörige Abbildung $\overline{f}$ folgt dann: $\overline{f}(\beta\mathbb{N}) \supseteq f(\mathbb{N}) = D$, aber $\overline{f}(\beta\mathbb{N})$ ist abgeschlossen. Demzufolge $\overline{f}(\beta\mathbb{N}) = [0,1]^{[0,1]}$, also auch $|\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))| = |[0,1]^{[0,1]}| \leq |\beta\mathbb{N}|$. Insgesamt somit (wieder) $|\beta\mathbb{N}| = |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))|$.

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen ist also um sehr vieles größer als die Ausgangsmenge $\mathbb{N}$.

4.7.2 Satz

Jede unendliche abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq \beta\mathbb{N}$ besitzt ihrerseits einen Teilraum $A \subseteq B$, der homöomorph zu $\beta\mathbb{N}$ ist.

Beweis: Gemäß Lemma 3.1.6 wählen wir uns eine Folge paarweise disjunkter offener Mengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\beta\mathbb{N}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \cap B \neq \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\phi_n \in U_n \cap B$. Wir setzen $A_0 := \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei nun K ein beliebiger kompakter Hausdorff-Raum und $g : A_0 \to K$ eine stetige Abbildung. Wir definieren dann $f : \mathbb{N} \to K$ durch $f(n) := \begin{cases} g(\phi_m) & \text{falls } \dot{n} \in U_m \\ z & \text{falls } n \notin U_m \end{cases}$, wobei $z \in K$ fest gewählt ist. Es gibt dann ein stetiges $F : \beta\mathbb{N} \to K$ mit $F \circ \beta = f$. Nun gilt $U_m \subseteq \overline{U_m \cap \{\dot{n} \mid n \in \mathbb{N}\}}$ und f ist auf $U_m \cap \{\dot{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ konstant. Folglich ist F auch auf U_m konstant (Lemma 3.3.3). Das ergibt $\forall m \in \mathbb{N} : F(\phi_m) = g(\phi_m)$, bzw. $F|A_0 = g$. Sei $A := \overline{A_0} \subseteq B$. Die Abbildung g lässt sich somit (auf genau eine Weise) zu einer Abbildung $G : A \to K$ fortsetzen (nämlich $G = F|A$) und A ist somit die Stone-Cech Kompaktifizierung von A_0. Da A_0 aber homöomorph zu $\mathbb{N}$ ist, ist A somit homöomorph zu $\beta\mathbb{N}$.

4.7.3 Korollar

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\beta\mathbb{N}$ konvergente Folge, so $\exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x_m$ für alle $m,n \geq N$.

Beweis: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen x, so ist $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt, also abgeschlossen. Da $\beta\mathbb{N}$ überabzählbar ist, muss A somit endlich sein.

4.7.4 Lemma

Es gibt eine Menge ξ von Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:
(1) $|\xi| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$, (2) $\forall A \in \xi$ gilt $|A| = |\mathbb{N}|$ und (3) $\forall A,B \in \xi\ (A \neq B \Rightarrow |A \cap B| < |\mathbb{N}|)$.

Beweis: Zu jeder irrationalen Zahl $x \in \mathbb{R}$ wählen wir eine Folge rationaler Zahlen $(q_n^{(x)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x = \lim_{n\to\infty} q_n$ und setzen dann $A_x := \{q_n^{(x)} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für verschiedene irrationale Zahlen x,y gilt $|A_x \cap A_y| < |\mathbb{N}|$. Außerdem ist jedes A_x eine unendliche Teilmenge der Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und da es gerade $|\mathscr{P}(\mathbb{N})|$-viele irrationale Zahlen gibt, folgt $|\{A_x \mid x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$. Für eine Bijektion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ findet sich unser ξ als $\xi := \{f(A_x) \mid x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$.

4.7.5 Korollar

In $\beta\mathbb{N}\setminus\beta(\mathbb{N})$ gibt es eine Menge σ von paarweise disjunkten nicht leeren offenen Mengen mit $|\sigma| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis: Sei ξ wie in Lemma 4.7.4. Dann ist $\sigma = \{A^*\setminus\beta(\mathbb{N}) \mid A \in \xi\}$.

4.7.6 Korollar

$\inf\{|\mathscr{B}| \mid \mathscr{B}: \text{Basis von } \beta\mathbb{N}\} = \inf\{|\mathscr{B}| \mid \mathscr{B}: \text{Basis von } \beta\mathbb{N}\setminus\beta(\mathbb{N})\} = |\mathscr{P}(N)|$.

4.7.7 Lemma

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ mit $\forall n \in \mathbb{N}: \emptyset \neq B^*_{n+1}\setminus\beta(\mathbb{N}) \subseteq B^*_n\setminus\beta(\mathbb{N})$. Dann gibt es ein unendliches $B \subseteq \mathbb{N}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}: B^*\setminus\beta(\mathbb{N}) \subseteq B^*_n\setminus\beta(\mathbb{N})$.

Beweis: 1.Fall $\exists N \in \mathbb{N}\,\forall m,n \geq N: B^*_n\setminus\beta(\mathbb{N}) = B^*_m\setminus\beta(\mathbb{N})$. Dann setze $B := B_N$ - fertig.

2.Fall es gibt kein solches N. Sei dann o.B.d.A. $B^*_n\setminus\beta(\mathbb{N}) \subsetneq B^*_m\setminus\beta(\mathbb{N})$ für alle $m < n$. Offenbar gilt: $B^*_n\setminus\beta(\mathbb{N}) \subsetneq B^*_m\setminus\beta(\mathbb{N}) \Leftrightarrow B_n\setminus B_m$ ist endlich und $B_m\setminus B_n$ ist unendlich.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n \in B_n\setminus B_{n+1}$. Setze dann $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Offenbar ist B unendlich und $B\setminus B_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich, insbesondere also $B^*\setminus\beta(\mathbb{N}) \subseteq B^*_n\setminus\beta(\mathbb{N})$, denn $\psi \in B^*\setminus\beta(\mathbb{N})$ impliziert $B \in \psi$ und $\mathbb{N}\setminus(B\setminus B_n) \in \psi$, also auch $B_n \supseteq B\setminus(B\setminus B_n) \in \psi$ und somit $\psi \in B^*_n$.

4.7.8 Satz

Unter der Voraussetzung $\inf\{|\alpha| \mid |\mathbb{N}| < \alpha\} = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ gibt es ein $x \in \beta\mathbb{N}\setminus\beta(\mathbb{N})$ mit der Eigenschaft, dass jeder Schnitt abzählbar vieler Umgebungen von x wieder eine Umgebung von x ist.

Beweis: Sei Ω die kleinste überabzählbare Kardinalzahl und sei $\mathscr{B} := \{B^*\setminus\beta(\mathbb{N}) \mid B \subseteq \mathbb{N}\}$. Aus Korollar 4.7.6 folgt, dass $\mathscr{B}$ eine Basis minimaler Kardinalität von $\beta\mathbb{N}\setminus\beta(\mathbb{N})$ ist. Aus der Voraussetzung folgt dann, dass es eine Bijektion $f: \Omega \to \mathscr{B}$ gibt. Setze $P_0 := f(0)$. Sei $\alpha \in \Omega$ und für alle $\beta \in \alpha$ sei $P_\beta \in \mathscr{B}$ bereits konstruiert mit $\beta' < \beta \Rightarrow P_\beta \subseteq P_{\beta'}$. Da α abzählbar ist, gibt es laut Lemma 4.7.7 ein $\emptyset \neq B\mathscr{B}$ mit $B \subseteq \bigcap_{\beta<\alpha} P_\beta$. Falls $B \cap f(\alpha) = \emptyset$, so setze $P_\alpha := B$. Falls $B \cap f(\alpha) \neq \emptyset$, so gibt es ein $\emptyset \neq B' \in \mathscr{B}$ mit $B' \subseteq B \cap f(\alpha)$.

Damit haben wir eine Folge $(P_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ aus $\mathscr{B}$ konstruiert mit $P_{\alpha'} \subseteq P_\alpha$ und $(P_\alpha \cap f(\alpha) = \emptyset$ oder $P_\alpha \subseteq f(\alpha))$, für alle $\alpha \leq \alpha' \in \Omega$. Jedes P_α ist von der Form $P_\alpha = B_\alpha\setminus\beta(\mathbb{N})$, für ein unendliches $B_\alpha \subseteq \mathbb{N}$. Aus der für unendliche $A, B \subseteq \mathbb{N}$ allgemein gültigen Beziehung $A^* \setminus \beta(\mathbb{N}) \subseteq B^* \setminus \beta(\mathbb{N}) \;\Leftrightarrow\; A \setminus B$: ist endlich, folgt, dass $\{B_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ die endliche Schnitt Eigenschaft (eSE) hat. Nun hat aber offensichtlich auch $\{B_\alpha \mid \alpha \in \Omega\} \cup \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A$ ist endliche $\}$ die eSE. Es gibt also einen Ultrafilter $x \in \beta\mathbb{N} \setminus \beta(\mathbb{N})$ mit $\{B_\alpha \mid \alpha \in \Omega\} \subseteq x$, also $x \in \bigcap_{\alpha \in \Omega} P_\alpha$. Ist nun $P \in \mathscr{B}$ mit $x \in P$, so gibt es ein $\alpha \in \Omega$ mit $f(\alpha) = P$, also $f(\alpha) \cap P_\alpha \neq \emptyset$ und somit $P_\alpha \subseteq f(\alpha) = P$. $(P_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ ist also eine Umgebungsbasis von x. Sind R_n, $n \in \mathbb{N}$ abzählbar viele Umgebungen von x, so sei $P_{\alpha_n} \subseteq R_n$ und $\alpha := \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist auch $\alpha \in \Omega$ und somit $x \in P_\alpha \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_{\alpha_n} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$.

4.7.9 Bemerkung

Derartige Punkte aus Satz 4.7.8 nennt man P-Punkte. Wie wir gesehen haben ist $x \in \beta\mathbb{N} \setminus \beta(\mathbb{N})$ ein P-Punkt, wenn es zu jeder Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus x ein $B \in x$ gibt mit $|B \setminus B_n| < |\mathbb{N}|$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Was wir gezeigt haben ist also: Die Kontinuumshypothese impliziert die Existenz von P-Punkten. Die Annahme, dass keine P-Punkte existieren ist zusammen mit ZFC konsistent (ein tiefligendes Resultat von S.Shelah).

Uns geht es jetzt aber um etwas anderes. Wir werden die Addition von $\mathbb{N}$ auf $\beta\mathbb{N}$ fortsetzen. Dazu definieren wir eine Operation $+ : \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$.

4.7.10 Definition

Für $P \subseteq \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $P - n := \{m \in \mathbb{N} \mid m + n \in P\}$. Seien ϕ und ψ Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, also $\phi, \psi \in \beta\mathbb{N}$. Wir setzen dann $\phi + \psi := \{P \subseteq \mathbb{N} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid P - n \in \phi\} \in \psi\}$.

Zeigen wir, dass $\phi + \psi \in \beta\mathbb{N}$ ist, $\phi + \psi$ tatsächlich also ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ ist.

1. $\emptyset \notin \phi + \psi$, denn sonst wäre $\emptyset = \{n \in \mathbb{N} \mid \emptyset - n \in \phi\} \in \psi$. Ebenso leicht sieht man $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - n \in \phi\} = \mathbb{N} \in \psi$, also $\mathbb{N} \in \phi + \psi$.

2. Seien $P, P' \in \phi + \psi$. Zu zeigen ist $\{n \in \mathbb{N} \mid P \cap P' - n \in \phi\} \in \psi$. Nun gilt $(P - n) \cap (P' - n) = P \cap P' - n$, also $\{n \in \mathbb{N} \mid P - n \in \phi\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid P' - n \in \phi\} = \{n \in \mathbb{N} \mid P \cap P' - n \in \phi\}$, und damit $\{n \in \mathbb{N} \mid P \cap P' - n \in \phi\} \in \psi$.

3. Sei $P \in \phi + \psi$ und $P \subseteq P'$. Dann ist $\{n \in \mathbb{N} \mid P - n \in \phi\} \in \psi$, also auch $\{n \in \mathbb{N} \mid p' - n \in \phi\} \in \phi$ (denn $P - n \subseteq P' - n$), und somit $P' \in \phi + \psi$.

4. Sei $P \subseteq \mathbb{N}$ und $P \notin \phi + \psi$. Dann ist $\{n \in \mathbb{N} \mid P - n \in \phi\} \notin \psi$, also $\{n \in \mathbb{N} \mid P - n \notin \phi\} \in \psi$. Nun ist $\{n \in \mathbb{N} \mid P - n \notin \phi\} = \{n \in \mathbb{N} \mid (\mathbb{N} \setminus P) - n \in \phi\}$ (das liegt daran, dass $\mathbb{N} \setminus (P - n) = (\mathbb{N} \setminus P) - n$ ist). Demnach ist $\mathbb{N} \setminus P \in \phi + \psi$.

Insgesamt sehen wir, dass $\phi + \psi$ tatsächlich ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ ist.

4.7.11 Lemma

$\forall\, \varphi, \phi, \psi \in \beta\mathbb{N}$ gilt $\varphi + (\phi + \psi) = (\varphi + \phi) + \psi$.

Beweis: Da sowohl $\varphi + (\phi + \psi)$, als auch $(\varphi + \phi) + \psi$ Ultrafilter sind, reicht es zu zeigen, dass $\varphi + (\phi + \psi) \subseteq (\varphi + \phi) + \psi$ ist. Sei also $P \in \varphi + (\phi + \psi)$.

Demzufolge ist $A := \{n \in \mathbb{N} \mid P - n \in \varphi\} \in \phi + \psi$, also $\{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in \phi\} \in \psi$. Zu zeigen bleibt $\{n \in \mathbb{N} \mid P - n \in \varphi + \phi\} \in \psi$.

Zwischenbehauptung: $A - n \in \phi \;\Rightarrow\; P - n \in \varphi + \phi$.

Beweis der Zwischenbehauptung: Sei $A - n \in \phi$. Wir setzen $B := \{m \in \mathbb{N} \mid (P - n) - m \in \varphi\}$. Es gilt nun $A - n \subseteq B$. Denn ist $m \in A - n$, so folgt $m + n \in A$, also $P - (m + n) \in \varphi$. Nun ist aber $P - (m + n) = (P - n) - m$, und somit $m \in B$. Da $A - n \in \phi$, folgt auch $\{m \in \mathbb{N} \mid (P - n) - m \in \varphi\} = B \in \phi$ und somit $P - n \in \varphi + \phi$.

Da $\{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in \phi\} \in \psi$ und $\{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in \phi\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid P - n \in \varphi + \phi\}$, folgt unmittelbar $\{n \in \mathbb{N} \mid P - n \in \varphi + \phi\} \in \psi$, also $P \in (\varphi + \phi) + \psi$.

4.7.12 Lemma

Sei $\phi \in \beta\mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung $f_\phi : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, definiert durch $f_\phi(\psi) := \phi + \psi$, stetig

Beweis: Es reicht die Stetigkeit auf der Basis $\mathscr{B} := \{A^* \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ nachzurechnen. Für $A \subseteq \mathbb{N}$ betrachten wir dazu $f_\phi^{-1}(A^*) = \{\psi \in \beta\mathbb{N} \mid A \in \phi + \psi\}$ und zeigen, dass sich diese Menge als Vereinigung von Basiselementen schreiben lässt und somit offen ist. Für $\psi \in f_\phi^{-1}(A^*)$ folgt somit $B_\psi := \{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in \phi\} \in \psi$. Zeigen wir $\psi \in B_\psi^* \subseteq f_\phi^{-1}(A^*)$.

Sei $\xi \in B_\psi^*$, also $B_\psi \in \xi$. Es folgt $A \in \phi + \xi$, also $f_\phi(\xi) \in A^*$ und somit $\xi \in f_\phi^{-1}(A^*)$.

Wir erhalten schlussendlich $f_\phi^{-1}(A^*) = \bigcup_{\psi \in f_\phi^{-1}(A^*)} B_\psi^*$.

4.7.13 Lemma

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi \in \beta\mathbb{N}$. Dann ist $\phi + \dot{n} = \dot{n} + \phi$.
b) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\dot{m} + \dot{n} = m \dot{+} n$.

Beweis: **a)** $\phi + \dot{n} = \{P \subseteq \mathbb{N} \mid \{k \in \mathbb{N} \mid P - k \in \phi\} \in \dot{n}\} = \{P \subseteq \mathbb{N} \mid n \in \{k \in \mathbb{N} \mid P - k \in \phi\}\} = \{P \subseteq \mathbb{N} \mid P - n \in \phi\} = \{P \subseteq \mathbb{N} \mid \{k \in \mathbb{N} \mid n + k \in P\} \in \phi\} = \{P \subseteq \mathbb{N} \mid \{k \in \mathbb{N} \mid n \in P - k\} \in \phi\} = \{P \subseteq \mathbb{N} \mid \{k \in \mathbb{N} \mid P - k \in \dot{n}\} \in \phi\} = \dot{n} + \phi$

b) Es reicht wieder $\dot{m} + \dot{n} \subseteq m \dot{+} n$ zu zeigen (da es sich auf beiden Seiten um Ultrafilter handelt). Also, sei $P \in \dot{m} + \dot{n}$. Dann ist $\{k \in \mathbb{N} \mid P - k \in \dot{m}\} \in \dot{n}$, also $n \in \{k \in \mathbb{N} \mid P - k \in \dot{m}\}$ und somit $P - n \in \dot{m}$. Das bedeutet aber $m \in P - n$ und somit $m + n \in P$, also $P \in m \dot{+} n$.

4.7.14 Definition (dynamisches System)

Sei (X, τ) ein kompakter Hausdorff-Raum und $T : X \to X$ eine stetige Abbildung. Wir nennen dann das Tripel (X, τ, T) ein Dynamisches System. Der Einfachheit halber schreiben wir oftmals einfach (X, T).

In der topologischen Dynamik interessiert man sich für das Verhalten von iterierten Anwendungen der Abbildung T, also $T \circ \ldots \circ T$. Mit T^n ist die n-fache Nacheinander Ausführung der Abbildung T gemeint.

Zu diesem Zweck definiert man sich die Abbildung $S : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ durch $S(\phi) := \phi + \dot{1}$ - die stetige Fortsetzung des Shift-Operators $S_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $S_{\mathbb{N}}(n) := n + 1$.

Sei $x \in X$ ein fest gewähltes Element. Wir bekommen eine stetige Abbildung $f_x : \mathbb{N} \to X$ (da $\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie versehen ist), definiert durch $f_x(n) := T^n(x)$. Es gibt dann ein stetiges $\tilde{f}_x : \beta\mathbb{N} \to X$ mit $\tilde{f}_x \circ \beta = f$.

4.7.15 Lemma

$\tilde{f}_x$ erfüllt die Gleichung $\tilde{f}_x \circ S = T \circ \tilde{f}_x$. Folgendes Diagramm kommutiert also.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "f_x"'] & \beta\mathbb{N} \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\tilde{f}_x"] & \beta\mathbb{N} \arrow[d, "\tilde{f}_x"] \\
& X \arrow[r, "T"'] & X
\end{tikzcd}$$

Beweis: Die Menge $N := \{\dot{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in $\beta\mathbb{N}$. Da $\beta\mathbb{N}$ ein Hausdorff-Raum ist und sowohl $\tilde{f}_x \circ S$, als auch $T \circ \tilde{f}_x$ stetig sind, reicht es also die Gleichheit auf N zu überprüfen. Es folgt: $\tilde{f}_x \circ S(\dot{n}) = \tilde{f}_x(\dot{n} + \dot{1}) = \tilde{f}_x(\dot{(n+1)}) = \tilde{f}_x \circ \beta(n+1) = f_x(n+1) = T^{n+1}(x) = T \circ T^n(x) = T \circ f_x(n) = T \circ \tilde{f}_x(\dot{n})$.

4.7.16 Wichtiges Beispiel

Für $(X,T) = (\beta\mathbb{N}, S)$ und $\phi \in \beta\mathbb{N}$ folgt:

$\tilde{f}_\phi : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, mit $\tilde{f}_\phi \circ S = S \circ \tilde{f}_\phi$. Induktiv schließen wir damit $\tilde{f}_\phi(\dot{n}) = S^n(\phi) = \phi + \dot{n}$.

Nun können wir folgern: $\tilde{f}_\phi(\psi) = \phi + \psi$.

Beweis: Die Abbildung $g : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ definiert durch $g(\psi) = \phi + \psi$ ist stetig (siehe oben). Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\tilde{f}_\phi(\dot{n}) = \phi + \dot{n} = g(\dot{n})$. Auf der dichten Teilmenge $N := \{\dot{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ stimmen die stetigen Abbildungen f_ϕ und g also überein und damit stimmen sie auch auf ganz $\beta\mathbb{N}$ überein (Hausdorff-Raum!).

Es folgt also $\tilde{f}_\phi(\psi) = \phi + \psi$, für jedes $\psi \in \beta\mathbb{N}$. Hieraus folgt sofort $\tilde{f}_\phi \circ \tilde{f}_\psi = \tilde{f}_{\phi+\psi}$.

Es gilt übrigens allgemein für ein dynamisches System:

$$\tilde{f}_x \circ \tilde{f}_\varphi = \tilde{f}_{\tilde{f}_x(\varphi)}$$

denn beide Abbildungen sind stetig und stimmen (wie man leicht nachrechnet) auf $N := \{\dot{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ überein.

Dem dynamischen System $(\beta\mathbb{N}, S)$ wird im Folgenden eine herausragende Rolle bei der Untersuchung allgemeiner dynamischer Systeme (X,T) zukommen. Die Gleichung $\tilde{f}_x \circ S =$

$T \circ \tilde{f}_x$ ist es, die es ermöglicht Eigenschaften des dynamischen Systems $(\beta\mathbb{N}, S)$ auf andere dynamische Systeme zu übertragen. Um einige dieser Eigenschaften zu formulieren benötigen wir ein paar neue Begriffe.

4.7.17 Definition (rekurrent, uniform rekurrent, proximal)

Sei (X, τ, T) ein dynamisches System.

Ein Punkt $x \in X$ heißt rekurrent, wenn für jedes $U \in \dot{x} \cap \tau$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in U\}$ unendlich ist.

Der Punkt $x \in X$ heißt uniform rekurrent, wenn es zu jedem $U \in \dot{x} \cap \tau$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \leq m$ mit $T^{n+k}(x) \in U$.

Zwei Punkte $x, y \in X$ nennen wir proximal, wenn für jede Umgebung U der Diagonale $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\}$ von $X \times X$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid (T^n(x), T^n(y)) \in U\}$ unendlich ist.

Letztere Definition ist sinnvoll, denn die Abbildung $f : X \times X \to X \times X$ definiert durch $f(x,y) := (y,x)$ ist ein Homöomorphismus. Und für eine Umgebung U von Δ ist $V := U \cap f(U)$ ebenfalls eine Umgebung von Δ mit $U \subseteq V$ und $(x,y) \in V \;\Leftrightarrow\; (y,x) \in V$. Wenn x, y proximal sind, so also auch y, x.

Kommen wir zu einem wichtigen Satz, der die dynamischen Konzepte von eben mit Ultrafiltern auf $\mathbb{N}$ beschreibt.

4.7.18 Satz

Sei (X, τ, T) ein dynamisches System.

a) $x \in X$ ist genau dann rekurrent, wenn es ein $\psi \neq \dot{0}$ gibt mit $\tilde{f}_x(\psi) = x$ und das ist genau dann, wenn es ein $\phi \in \beta\mathbb{N}$ gibt mit $\bigcap \phi = \emptyset$ und $\tilde{f}_x(\phi) = x$.

b) $x \in X$ ist genau dann uniform rekurrent, wenn es zu jedem $\phi \in \beta\mathbb{N}$ ein $\psi \in \beta\mathbb{N}$ gibt, mit $\tilde{f}_x(\phi + \psi) = x$.

c) Zwei Punkte $x, y \in X$ sind genau dann proximal, wenn es einen Ultrafilter ϕ gibt mit $\tilde{f}_x(\phi) = \tilde{f}_y(\phi)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es einen nicht-trivialen Ultrafilter ϕ gibt (also $\bigcap \phi = \emptyset$), mit $\tilde{f}_x(\phi) = \tilde{f}_y(\phi)$.

Beweis: a) Sei x zunächst als rekurrent angenommen. Für jedes $U \in \dot{x} \cap \tau$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in U\}$ also unendlich. Beachten wir $T^n(x) = f_x(n)$, so setzen wir $A_U := \{n \in \mathbb{N}^{\neq 0} \mid f_x(n) \in U\}$. Es gilt dann $A_U \cap A_V = A_{U \cap V}$ und jedes der A_U ist unendlich. Sei ψ ein Ultrafilter mit $\{A_U \mid U \in \dot{x} \cap \tau\} \subseteq \psi$. Wir zeigen $\tilde{f}_x(\psi) = x$, indem wir zeigen, dass $\tilde{f}_x(\psi) \in U$ ist, für jedes $U \in \dot{x} \cap \tau$.

Also sei $U \in \dot{x} \cap \tau$ gegeben. Es gibt dann ein $V \in \tau$ mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Zunächst einmal ist $A_V \in \psi$. Für $\psi \in P^*$, also $P \in \psi$ wählen wir ein $n \in A_V \cap P$. Es ist dann $\dot{n} \in \tilde{f}_x^{-1}(V)$, also $\emptyset \neq P^* \cap \tilde{f}_x^{-1}(V)$. Da $P \subseteq \psi$ beliebig war, folgt $\psi \in \overline{\tilde{f}_x^{-1}(V)} \subseteq \tilde{f}_x^{-1}(\overline{V})$ und somit $\tilde{f}_x(\psi) \in \overline{V} \subseteq U$. Offensichtlich ist $\psi \neq \dot{0}$.

Nehmen wir mal an, dass gilt $\psi = \dot{n}$, für $n \neq 0$. Dann haben wir $T^n(x) = x$, also auch $T^{kn}(x) = x$, für jedes $k \in \mathbb{N}$. Sei dann $\phi \in \beta\mathbb{N}$ mit $\bigcap \phi = \emptyset$ und $\{kn \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \phi$. Dann gilt ebenfalls $\tilde{f}_x(\phi) = x$. Ist nämlich $U \in \dot{x} \cap \tau$, so wählen wir $V \in \tau$ mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Für $P \in \phi$ sei $l \in P \cap \{kn \mid n \in \mathbb{N}\}$, also $\tilde{f}_x(\dot{k}) = x$ und somit $P^* \cap \tilde{f}_x^{-1}(V) \neq \emptyset$. Da P beliebig war bekommen wir $\phi \in \overline{\tilde{f}_x^{-1}(V)} \subseteq \tilde{f}_x^{-1}(\overline{V}) \subseteq \tilde{f}_x^{-1}(U)$, also $\tilde{f}_x(\phi) \in U$. Da auch U beliebig war, bekommen wir $\tilde{f}_x(\phi) \in \bigcap_{U \in \dot{x} \cap \tau} U = \{x\}$, also $\tilde{f}_x(\phi) = x$.

Zeigen wir nun, dass aus $\tilde{f}_x(\phi) = x$, für $\bigcap \phi = \emptyset$ folgt, dass x rekurrent ist. Sei dazu $U \in \dot{x} \cap \tau$, also $\phi \in \tilde{f}_x^{-1}(U)$. Dann gibt es aber ein $P \in \phi$ mit $\phi \in P^* \subseteq \tilde{f}_x^{-1}(U)$. Da P unendlich ist und $P \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{f}_x(\dot{n}) \in U\}$, folgt $\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in U\}$ ist auch unendlich (man beachte $\tilde{f}_x(\dot{n}) = T^n(x)$). Und somit ist x rekurrent.

b) Sei x uniform rekurrent und $\phi \beta\mathbb{N}$ gegeben. Zu jeder Umgebung U von x gibt es eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Zu diesem V gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \leq m$ mit $T^{n+k}(x) \in V$. Schreibt man das so $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \leq m \text{ mit } T^{n+k}(x) \in V\} = \mathbb{N}$, so sieht man, dass es ein $k \leq m$ geben muss mit $\{n \in \mathbb{N} \mid T^{n+k}(x) \in V\} \in \phi$, oder äquivalent dazu $P := \{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{f}_x(\dot{n}) \in (T^k)^{-1}(V)\} \in \phi$.

Jetzt folgern wir, dass dann auch $\tilde{f}_x(\phi) \in (T^k)^{-1}(V)$ ist. Denn sonst $\phi \in \tilde{f}_x^{-1}(X \setminus (T^k)^{-1}(V))$. Da $(T^k)^{-1}(V)$ abgeschlossen ist, gibt es somit ein $P' \in \phi$ mit $\phi \in P'^* \subseteq \tilde{f}_x^{-1}(X \setminus (T^k)^{-1}(V))$. Für $n \in P \cap P'$ folgt dann aber $\dot{n} \in P'^* \subseteq \tilde{f}_x^{-1}(X \setminus (T^k)^{-1}(V))$ im Widerspruch zu $n \in P$.

Es gilt also $T^k \circ \tilde{f}_x(\phi) \in U$ für unser k. Allgemeiner formuliert, bedeutet dies, dass die Menge $Y_U := \{k \in \mathbb{N} \mid T^k \circ \tilde{f}_x(\phi) \in U\} \neq \emptyset$ ist. Offensichtlich gilt $Y_U \cap Y_{U'} = Y_{U \cap U'}$. Es gibt somit einen Ultrafilter ψ mit $\{Y_U \mid U \in \dot{x} \cap \tau\} \subseteq \psi$.

Zeigen wir, dass $\tilde{f}_x(\phi + \psi) \in U$ für jedes $U \dot{x} \cap \tau$ gilt. Andernfalls $\tilde{f}_x \circ \tilde{f}_\phi(\psi) \notin U$. Es gibt $V \in \dot{x} \cap \tau$ mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Also $\psi \in \tilde{f}_\phi^{-1} \circ \tilde{f}_x^{-1}(X \setminus \overline{V})$. Damit gibt es ein $P \in \psi$ mit $\psi \in P^* \subseteq \tilde{f}_\phi^{-1} \circ \tilde{f}_x^{-1}(X \setminus \overline{V})$ und ein $n \in P \cap Y_V$ - was aber (fast) offensichtlich nicht sein kann. Aus $\tilde{f}_x(\phi + \psi) \in U$ für jedes $U \dot{x} \cap \tau$ folgt dann $\tilde{f}_x(\phi + \psi) = x$.

Nehmen wir nun an x ist nicht uniform rekurrent. Dann gibt es ein $U \in \dot{x} \cap \tau \forall m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} \forall k \leq m$ ist $T^{n+k}(x) \notin U$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist demnach $A_m := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \leq m \text{ ist } T^{n+k}(x) \notin U\} \neq \emptyset$. Da außerdem $A_{m+1} \subseteq A_m$ gilt, gibt es somit einen Ultrafilter ϕ mit $\{A_m \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq \phi$. Aus $A_m \in \phi$ folgt $P := \{n \in \mathbb{N} \mid T^{n+m}(x) \notin U\} \in \phi$ (da $A_m \subseteq P$). Es gilt $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{f}_x(\dot{n}) \notin (T^m)^{-1}(U)\}$. Hieraus folgt nun $\tilde{f}_x(\phi) \notin (T^m)^{-1}(U)$, denn sonst $\tilde{f}_x(\phi) \in (T^m)^{-1}(U)$, es gäbe also ein $P' \in \phi$ mit $\phi \in P'^* \subseteq \tilde{f}_x^{-1}((T^m)^{-1}(U))$. Dann gibt es aber auch ein $n \in p \cap P'$ (denn $\emptyset \neq P \cap P' \in \phi$) und es würde folgen: $\dot{n} \in P'^*$, also $\tilde{f}_x(\dot{n}) \in (T^m)^{-1}(U)$ im Widerspruch zu $n \in P$.

Wir haben somit $T^m \circ \tilde{f}_x(\phi) \notin U$, für alle $m \in \mathbb{N}$. Anders aufgeschrieben bedeutet dies gerade: $\forall m \in \mathbb{N}$ ist $\dot{m} \notin \tilde{f}_\phi^{-1} \circ \tilde{f}_x^{-1}(U) =: V$. Da $\tilde{f}_\phi : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ und $\tilde{f}_x : \beta\mathbb{N} \to X$ stetig sind ist V aber offen. Da $\{\dot{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\beta\mathbb{N}$ ist, muss also $V = \emptyset$ gelten. Für jedes $\psi \in \beta\mathbb{N}$ gilt somit $\tilde{f}_x \circ \tilde{f}_\phi(\psi) \notin U$ und damit $\forall \psi \in \beta\mathbb{N}$ ist $\tilde{f}_x(\phi + \psi) \neq x$.

c) Sei $\tilde{f}_x(\phi) = \tilde{f}_y(\phi)$, für $\phi = \dot{n}$. Dann gilt somit $T^n(x) = T^n(y)$, also für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $T^{kn}(x) = T^{kn}(y)$ und damit ist für jede Umgebung U der Diagonalen $\{m \in \mathbb{N} \mid (T^m(x), T^m(y)) \in U\}$ unendlich, x, y sind also proximal.

Sei $\tilde{f}_x(\phi) = \tilde{f}_y(\phi)$, für $\bigcap \phi = \emptyset$. Sei weiter U eine offene Umgebung von Δ. Dann ist $U = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ für gewisse in X offene U_i bzw. V_i. Da Δ kompakt ist, gibt es ein endliches $J \subseteq I$ mit $\Delta \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i \times V_i$. Dann gilt aber $X \subseteq \bigcup_{i \in J} [U_i \cap V_i]$ und es gibt demnach ein $j \in J$ mit $\tilde{f}_x(\phi) = \tilde{f}_y(\phi) \in U_j \cap V_j$. Dann ist aber $Q := \tilde{f}_x^{-1}(U_j \cap V_j) \cap \tilde{f}_y^{-1}(U_j \cap V_j)$ offen und es gilt $\phi \in Q$. Es gibt also ein $P \in \phi$ mit $\phi \in P^* \subseteq Q$. Die Menge P ist unendlich (da ϕ nicht trivial ist) und für jedes $n \in P$ gilt $(\tilde{f}_x(\dot{n}), \tilde{f}_y(\dot{n})) \in [U_j \cap V_j] \times [U_j \cap V_j] \subseteq U$, also auch $(T^n(x), T^n(y)) \in U$. Also sind auch hier x, y proximal.

Seien nun x, y als proximal vorausgesetzt. Für jede Umgebung U der Diagonalen ist $Y_U := \{n \in \mathbb{N} \mid (T^n(x), T^n(y)) \in U\}$ unendlich und es gilt $Y_U \cap Y_V = Y_{U \cap V}$. Es gibt also einen nicht-trivialen Ultrafilter ϕ (also $\bigcap \phi = \emptyset$) mit $\{Y_U \mid U \text{ ist Umgebung von } \Delta\} \subseteq \phi$.

Für jede abgeschlossene Umgebung U von Δ gilt nun $(\tilde{f}_x(\phi), \tilde{f}_y(\phi)) \in U$. Andernfalls definieren wir die stetige Abbildung $f := \tilde{f}_x \times \tilde{f}_y : \beta\mathbb{N} \to X \times X$ und wir bekommen $phi \in f^{-1}(X \times X \setminus U) =: Q$. Da Q offen ist, gibt es somit ein $P \in \phi$ mit $\phi \in P^* \subseteq Q$. Dann gilt aber $P \cap Y_U = \emptyset$ - Widerspruch!

Da der Schnitt aller abgeschlossenen Umgebungen U von Δ aber gerade Δ ist (es handelt sich um einen kompakten Hausdorff-Raum und folglich ist dieser normal), folgern wir $\tilde{f}_x(\phi) = \tilde{f}_y(\phi)$.

4.7.19 Lemma

Wir befinden uns wieder im dynamischen System $(\beta\mathbb{N}, S)$.

a) Sei ϕ uniform rekurrent und proximal zu $\dot{0}$. Dann gilt $\phi + \phi = \phi$.

b) Ist $\phi + \phi = \phi$, so ist ϕ rekurrent und proximal zu $\dot{0}$.

Beweis: a) Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\xi \in \beta\mathbb{N}$ ein $\psi \in \beta\mathbb{N}$, mit $\tilde{f}_\phi(\xi + \psi) = \phi$ und es gibt ein η mit $\tilde{f}_\phi(\eta) = \tilde{f}_{\dot{0}}(\eta)$.

Zu η gibt es also ein ψ mit $\tilde{f}_\phi(\eta + \psi) = \phi$, also $\phi + \eta + \psi = \phi$. Nun bedeutet $\tilde{f}_\phi(\eta) = \tilde{f}_{\dot{0}}(\eta)$ aber $\phi + \eta = \dot{0} + \eta = \eta$. Es folgt also $\eta + \psi = \phi$.

$\phi + \eta + \psi = \phi$ und $\eta + \psi = \phi$ ergeben dann $\phi + \phi = \phi$

b) Ist offensichtlich.

4.7.20 Definition

links-topologische Semigruppe, Linksideal, Rechtsideal, Ideal Sei X eine Menge zusammen mit einer Operation $+ : X \times X \to X$, die assoziativ ist (das heißt $x + (y + z) = (x + y) + z$). Wir nennen $(X, +)$ dann eine Semigruppe.

Ist τ eine Topologie auf X, so dass für jedes $x \in X$ die Abbildung $f_x : X \to X$ definiert durch $f_x(y) := x + y$ stetig ist, so sprechen wir von einer links-topologischen Semigruppe und bezeichnen diese mit $(X, \tau, +)$ (bzw. wenn klar ist welche Topologie gemeint ist auch einfach nur mit $(X, +)$).

Eine Teilmenge nicht leere Teilmenge $I \subseteq X$ einer Semigruppe heißt Linksideal (bzw. Rechtsideal), wenn $X + I \subseteq I$ (bzw. $I + X \subseteq I$). Sie heißt Ideal, wenn sie sowohl Linksideal, als auch Rechtsideal ist.

$(\beta\mathbb{N}, +)$ ist also eine links-topologische Semigruppe.

4.7.21 Lemma

Sei $(X, \tau, +)$ eine kompakte Hausdorff links-topologische Semigruppe. Jedes Rechtsideal enthält dann ein minimales Rechtsideal (bzgl. Inklusion). Ferner sind minimale Rechtsideale kompakt und abgeschlossen.

Beweis: Für ein minimales Rechtsideal I mit $a \in I$ gilt $I = a + X$, denn per Definition gilt $a + X \subseteq I$ und andererseits ist $a + X$ ebenfalls ein Rechtsideal. Aufgrund der Minimalität also $a + X = I$. Da $f_a : X \to X$ definiert durch $f_a(x) := a + x$ stetig ist, ist $I = f_a(X)$ kompakt (als Bild der kompakten Menge X) und damit, da X ein Hausdorff-Raum ist, auch abgeschlossen.

Sei nun $\emptyset \neq I \subseteq X$ ein beliebiges Rechtsideal. Sei

$$Z := \{J \subseteq I \mid J \quad \text{ist ein kompaktes Rechstsideal} \quad \}.$$

Für eine Kette $\mathscr{K} \subseteq Z$ (bzgl.Inklusion) ist $J := \bigcap \mathscr{K} \neq \emptyset$ also offensichtlich ebenfalls ein kompaktes Rechtsideal und somit eine untere Schranke für $\mathscr{K}$. Mit dem Zornschen Lemma folgern wir, dass es ein minimales Element J' in Z geben muss.

Ist $J'' \subseteq J'$ ein Rechtsideal, so wählen wir ein $a \in J''$. Dann ist $J''' := a + X$ ein kompaktes Rechtsideal mit $J''' \subseteq J'' \subseteq J'$, also $J''' = J'$, aufgrund der Minimalität. Damit ist J' ein minimales Rechtsideal unterhalb von I.

4.7.22 Lemma

Es gibt ein $\dot{0} \neq \varphi \in \beta\mathbb{N}$, welcher uniform rekurrent und proximal zu $\dot{0}$ ist (im dynamischen System $(\beta\mathbb{N}, S)$).

Beweis: Sei I ein minimales Rechtsideal in $(\beta\mathbb{N}, +)$ mit $\dot{0} \notin I$ (das man solch eines wählen kann, bleibt als leichte Aufgabe) und sei $\phi \in I$. Dann gilt somit $I = \phi + \beta\mathbb{N}$. Sei $\xi \in \beta\mathbb{N}$. Dann ist auch $J := \phi + \xi + \beta\mathbb{N} \subseteq I$ ein Rechtsideal, also $J = I$. Da $\phi \in I$, gibt es also ein $\psi \in \beta\mathbb{N}$ mit $\phi = \phi + \xi + \psi = \tilde{f}_\phi(\xi + \psi)$.

Nach Satz 4.7.18 ist ϕ uniform rekurrent.

Nun ist I aber auch eine abgeschlossene Untersemigruppe von $\beta\mathbb{N}$, denn für $\phi + \eta \in I$ und $\phi + \xi \in I$ ist $(\phi + \eta) + (\phi + \xi) = \phi + (\eta + \phi + \xi) \in \phi + \beta\mathbb{N} = I$. Außerdem ist jedes Element aus I ebenfalls uniform rekurrent (Das ist wichtig!).

Mit dem Zornschen Lemma folgert man, dass es eine minimale abgeschlossene Untersemigruppe $K \subseteq I$ gibt (diese ist damit dann auch kompakt).

Zeigen wir, dass für jedes Element k aus K gilt $k + k = k$. Sei dazu $k \in K$.

Wir setzen $\mathscr{Z} := \{Z \subseteq K \mid k \in Z \text{ und } Z \text{ ist abgeschlossen und } Z + Z \subseteq Z\}$. Es ist $\mathscr{Z} \neq \emptyset$, denn $K \in \mathscr{Z}$. Sei $\mathscr{C}$ eine Kette bzgl. der Inklusion (also total geordnete Teilmenge von $\mathscr{Z}$). Es gilt $k \in Y := \bigcap \mathscr{C}$ und Y ist abgeschlossen. Für jedes $Z \in \mathscr{C}$ gilt außerdem $Y + Y \subseteq Z + Z \subseteq Z$ und damit $Y + Y \subseteq Y$. Die Menge Y ist also eine untere Schranke für $\mathscr{C}$ in $\mathscr{Z}$. Das Zornsche Lemma liefert also minimale Element in $\mathscr{Z}$.

Sei Y ein solches minimales Element. Wir zeigen nun $k+k=k$. Die Menge $k+Y=\tilde{f}_k(Y)$ ist als Bild der kompakten Menge Y unter der stetigen Abbildung $\tilde{f}_k$ selber kompakt und damit abgeschlossen in K. Außerdem gilt $(k+Y)+(k+Y)\subseteq k+(Y+Y+Y)\subseteq k+Y$. Also $k+Y\in\mathscr{X}$. Da auch $k+Y\subseteq Y+Y\subseteq Y$ gilt, folgt aus der Minimalität von Y bereits $k+Y=Y$. Die Menge $Z:=\{y\in Y\mid k+y=k\}=\tilde{f}_k^{-1}(k)\cap Y$ ist somit nicht leer und abgeschlossen (als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{k\}$). Außerdem gilt $Z+Z\subseteq Z$ ($y,z\in Z$ impliziert $k+(y+z)=k+z=k$). Somit ist $Z\in\mathscr{X}$ und damit $Z=Y$. Wir bekommen dann $k\in Z$, also $k+k=k$.

Wir wählen nun ein beliebiges $\varphi\in K$. Dieser Ultrafilter erfüllt dann $\varphi+\varphi=\varphi$, nach Lemma 4.7.19 ist er also proximal zu $\dot{0}$. Da $K\subseteq I$ ist φ aber auch uniform rekurrent! Damit ist der Beweis beendet.

4.7.23 bemerkung

Eine leichte Abwandlung des Beweises von Lemma 4.7.22 ergibt sofort einen Beweis zu folgender Aussage:

Sei $(X,\tau,+)$ eine kompakte Hausdorff links-topologische Semigruppe. Dann gibt es ein $x\in X$ mit $x+x=x$.

Insbesondere ist dies dann ein einfacher Beweis dafür, dass es einen Ultrafilter $\dot{0}\neq\phi\in\beta\mathbb{N}$ gibt mit $\phi+\phi=\phi$.

Bevor wir nun zum angekündigten Satz von Auslander-Ellis kommen, beweisen wir eine andere interessante Folgerung, bekannt unter Hindmans Theorem.

4.7.24 Hindman's Theorem

a) Sei $\phi\neq\dot{0}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ mit $\phi+\phi=\phi$. Zu jedem $A\in\phi$ gibt es ein unendliches $B\subseteq A$ derart, dass $\sum_{n\in E}n\in A$, für jedes endliche $E\subseteq B$.

b) Wenn $\mathbb{N}=\bigcup_{i=1}^n A_i$, dann existiert $k\in\{1,\dots,n\}$ und es existiert ein unendliches $B\subseteq A_k$, so dass $\sum_{n\in E}n\in A_k$, für jedes endliche $E\subseteq B$.

Beweis: a) Sei also $\phi\neq\dot{0}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ mit $\phi+\phi=\phi$ und sei weiter $A\in\phi$. Wir setzen $A_0:=A$. Seien $A_0\supseteq A_1\supseteq\dots\supseteq A_k$ und $n_0<n_1<\dots<n_k$ aus $\mathbb{N}$ gewählt mit:

1) $A_i\in\phi$, für $i=0,\dots,k$

2) $n_i\in A_i$ und $A_i-n_i\in\phi$ für $i=0,\dots,k$.

Wir setzen dann $A_{k+1}:=A_k\cap(A_k-n_k)$. Nun ist $A_{k+1}\in\phi$ und somit auch $A'_{k+1}:=\{n\in\mathbb{N}\mid A_{k+1}-n\in\phi\}\in\phi$ (denn $\phi=\phi+\phi$). Wir können also ein $n_{k+1}\in A_{k+1}\cap A'_{k+1}\cap\{n\in\mathbb{N}\mid n>n_k\}$ wählen.

Wir zeigen im Folgenden, dass $B:=\{n_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ die geforderte Eigenschaft hat. $B\subseteq A$ ist jedenfalls schon mal klar.

Sei $n_{k_0}<n_{k_1}<\dots<n_{k_l}$ mit $0<l$. Es gilt $n_{k_l}\in A_{k_l}$. Sei $0\leq i<l$ und $\sum_{j=i+1}^{l}n_{k_j}\in A_{k_{i+1}}$.

Nun ist $A_{k_{i+1}}\subseteq A_{k_i+1}\subseteq A_{k_i}-n_{k_i}$, also $\sum_{j=i+1}^{l}n_{k_j}\in A_{k_i}-n_{k_i}$ und somit $\sum_{j=i}^{l}n_{k_j}\in A_{k_i}$

Insgesamt bekommen wir also $\sum_{j=0}^{l} n_{k_j} \in A_{k_0} \subseteq A$.

b) Ist $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, dann wählen wir einen Ultrafilter $\phi \neq \dot{0}$, mit $\phi + \phi = \phi$. Eines der A_k muss dann in ϕ liegen (Ultrafilter!). Teil a) angewendet erledigt dann den Rest.

4.7.25 Bemerkung

Wir können sogar noch ein bischen mehr bekommen:

Sei $(N,+)$ eine Semigruppe. Versehen wir die Menge N mit der diskreten Topologie $\tau := \mathscr{P}(N)$, so können wir genauso wie bei den natürlichen Zahlen mit der diskreten Topologie von der Stone-Čech-Kompaktifizierung βN sprechen. βN sind hier eben die Ultrafilter auf N. Auch können wir, vollkommen analog zu den natürlichen Zahlen, die Operation $+ : N \times N \to N$ auf $+ : \beta N \times \beta N \to \beta N$ fortsetzen. Die einfachen Details (formal jedes $\mathbb{N}$ durch ein N ersetzen) bleiben dem Leser überlassen.

4.7.26 Definition

$A \subseteq \mathbb{N}$ nennen wir eine **IP-Menge**, wenn es ein unendliches $B \subseteq A$ gibt, mit

$$B_\Sigma := \{ \sum_{n \in E} n \mid E \subseteq B \quad \text{und} \quad E \quad \text{endlich} \quad \} \subseteq A.$$

Die Menge B_Σ mit der gewöhnlichen Addition ist somit eine Semigruppe.

Wir erhalten nun noch folgende Verallgemeinerung von Hindmans Theorem (Satz 4.7.24).

4.7.27 Satz

Sei N eine IP-Menge mit zugehörigem $B \subseteq N$.

a) Sei $\phi \neq \dot{0}$ ein Ultrafilter auf B_Σ mit $\phi + \phi = \phi$. Zu jedem $A \in \phi$ gibt es ein unendliches $B' \subseteq A$ derart, dass $\sum_{n \in E} n \in A$, für jedes endliche $E \subseteq B'$.

b) Wenn $N = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, dann existiert $k \in \{1,...,n\}$ und es existiert ein unendliches $B' \subseteq A_k$, so dass $\sum_{n \in E} n \in A_k$, für jedes endliche $E \subseteq B'$.

Beweis: Teil **a)** geht genauso wie im Beweis zu Korollar 4.7.24.

b) Wir wählen einen Ultrafilter $\phi \neq \dot{0}$ auf B_Σ mit $\phi + \phi = \phi$. Wir bekommen dann $B_\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_\Sigma)$. Es gibt somit ein $k \in \{1,...,n\}$ mit $A_k \cap B_\Sigma \in \phi$. Teil a) erledigt dann den Rest.

4.7.28 Bemerkung

Statt mit "+" lässt sich natürlich auch alles mit "·" beweisen. Was wir benötigt haben, war schließlich nur die Assoziativität der Operation "+".

Kommen wir nun zum angekündigten

4.7.29 Satz von Auslander-Ellis

Sei (X,τ,T) ein dynamisches System. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein uniform rekurrentes $y \in X$, welches proximal zu x ist.

Beweis: Sei φ uniform rekurrent und proximal zu $\dot{0}$ (in $(\beta\mathbb{N},S)$). Dann ist $y := \tilde{f}_x(\varphi)$ uniform rekurrent und proximal zu x.

Beweis dazu: Es gilt $\tilde{f}_x \circ \tilde{f}_\varphi = \tilde{f}_{\tilde{f}_x(\varphi)}$, denn beide Abbildungen sind stetig und stimmen (wie man leicht nachrechnet) auf $N := \{\dot{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ überein.

Zu beliebigen $\phi \in \beta\mathbb{N}$ gibt es, da φ uniform rekurrent ist, ein ψ mit $\tilde{f}_\varphi(\phi+\psi) = \varphi$, also $\tilde{f}_x \circ \tilde{f}_\varphi(\phi+\psi) = \tilde{f}_x(\varphi) = y$. Da $\tilde{f}_x \circ \tilde{f}_\varphi = \tilde{f}_{\tilde{f}_x(\varphi)}$ folgt $\tilde{f}_y(\phi+\psi) = \tilde{f}_{\tilde{f}_x(\varphi)}(\phi+\psi) = y$. Damit haben wir gezeigt, dass y uniform rekurrent ist.

Zeigen wir noch, dass x,y proximal sind. Da jedenfalls φ proximal zu $\dot{0}$ ist, gibt es ein ϕ mit $\tilde{f}_\varphi(\phi) = \tilde{f}_{\dot{0}}(\phi) = \dot{0}+\phi = \phi$.

Wir bekommen damit $\tilde{f}_x \circ \tilde{f}_\varphi(\phi) = \tilde{f}_x(\phi)$. mit $\tilde{f}_x \circ \tilde{f}_\varphi = \tilde{f}_{\tilde{f}_x(\varphi)}$ und $y := \tilde{f}_x(\varphi)$ folgt dann $\tilde{f}_y(\phi) = \tilde{f}_x(\phi)$ und x,y sind demnach proximal.

4.8 Cantormenge und dyadische Räume

"Die glücklichsten Sklaven sind die erbittersten Feinde der Freiheit."
Marie von Ebner-Eschenbach

In diesem Abschnitt schauen wir uns ein wichtiges Beispiel eines topologischen Raums genauer an: Die Cantormenge. Anwendungen hat diese z.B. in der Maßtheorie. Im Anschluss an die Beweise der wichtigsten Aussagen über dieses interessante Gebilde, führen wir eine wichtige Klasse topologischer Räume ein, die sogenannten dyadischen Räume und zeigen, dass alle kompakten metrischen Räume dyadisch sind.

Seien $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{1}{3}x$ und $g(x) := \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Sei $C_0 := [0,1]$ und $C_{n+1} := f(C_n) \cup g(C_n)$. Die **Cantormenge** (auch Cantorsches Diskontinuum) ist nun definiert als $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Jedes C_n ist kompakt (klar für C_0; der Rest folgt per Induktion, denn f und g sind stetig), also auch abgeschlossen ($\mathbb{R}$ ist ein T_2-Raum). Demnach ist auch C als Schnitt von abgeschlossenen Mengen selber abgeschlossen und somit auch kompakt (da $C \subseteq [0,1]$).

4.8.1 Lemma

Sei $\alpha : \{0,1,...,n-1\} \to \{f,g\}$, $n \geq 1$ eine beliebige Abbildung. Dann ist

$$\alpha(n-1) \circ ... \circ \alpha(1) \circ \alpha(0)(x) = \frac{1}{3^n}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}\,, \quad \text{wobei} \quad a_k = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \alpha(n-k) = f \\ 2 & \text{falls} \quad \alpha(n-k) = g \end{cases}$$

Beweis: Wir beweisen dies durch vollständige Induktion nach n. Für $n = 1$ ist alles klar. $n \to n+1$: Sei also $\alpha : \{0,1,...,n\} \to \{f,g\}$ gegeben. Es ist

$$\alpha(n) \circ ... \circ \alpha(0)(x) = \alpha(n)(\frac{1}{3^n}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}) =: A$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. 1.Fall $\alpha(n) = f$. Dann ist

$$A = f(\frac{1}{3^n}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}) = \frac{1}{3^{n+1}}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3^{n+1}}x + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a'_k}{3^k},$$

$$\text{wobei } a'_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 1 \\ a_{k-1} & \text{falls } k \neq 1 \end{cases}$$

Für $k \neq 1$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$a_{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha(n-(k-1)) = f \\ 2 & \text{falls } \alpha(n-(k-1)) = g \end{cases} \text{ also } a'_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha(n+1-k) = f \\ 2 & \text{falls } \alpha(n+1-k) = g \end{cases}.$$

Der Beweis von Fall 2 ist vollkommen analog und bleibt dem Leser überlassen.

4.8.2 Bemerkung

Für $\alpha : \{0,1,...,n-1\} \to \{f,g\}$ mit $n \geq 1$, also $\alpha \in \{f,g\}^n$, setzen wir

$$A_\alpha^{(n)} := \alpha(n-1) \circ ... \circ \alpha(0)([0,1]) = [\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}, \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}],$$

wobei die a_k entsprechend Lemma 4.8.1 definiert sind. Offenbar ist $C_n = \bigcup_{\alpha \in \{f,g\}^n} A_\alpha^{(n)}$. Diese Einsicht motiviert folgende Definition.

4.8.3 Definition

Für $n \geq 1$ und $\alpha : \{0,...,n-1\} \to \{0,2\}$, also $\alpha \in \{0,2\}^n$, setzen wir

$$B_\alpha^{(n)} := [\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(k-1)}{3^k}, \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(k-1)}{3^k}].$$

Für $n = 0$ und (das eindeutig bestimmte) $\alpha : \emptyset \to \{0,2\}$ sei $B_\alpha^{(0)} := [0,1]$.

Offenbar gilt nun auch $C_n = \bigcup_{\alpha \in \{0,2\}^n} B_\alpha^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup_{\alpha \in \{0,2\}^n} B_\alpha^{(n)}) = \bigcup_{f \in P} (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{f(n)}^{(n)}), \text{ wobei } P := \prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,2\}^n.$$

4.8.4 Lemma

Sei $f \in P$ und $f(n+1)$ keine Fortsetzung von $f(n)$. Dann ist

$$B^{(n+1)}_{f(n+1)} \cap B^{(n)}_{f(n)} = \emptyset.$$

Analog ist für verschiedene $\alpha, \alpha' : \{0,...,n-1\} \to \{0,2\}$ immer $B^{(n)}_{\alpha} \cap B^{(n)}_{\alpha'} = \emptyset$.

Beweis: Sei $f(n+1) = \alpha$ und $f(n) = \alpha'$. Da α keine Fortsetzung von α' ist, gibt es ein minimales $l < n$ mit $\alpha(l) \neq \alpha'(l)$. Es ist

$$B^{(n+1)}_{\alpha} := [\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha(k-1)}{3^k}, \frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha(k-1)}{3^k}] \quad \text{und} \quad B^{(n)}_{\alpha'} := [\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha'(k-1)}{3^k}, \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha'(k-1)}{3^k}]$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.

1.Fall $\alpha(l) = 0$ und $\alpha'(l) = 2$. Es folgt $\frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha(k-1)}{3^k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha'(k-1)}{3^k}$, denn

$$\frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{k=l+1}^{n+1} \frac{\alpha(k-1)}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{k=l+2}^{n+1} \frac{\alpha(k-1)}{3^k} \leq \frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{k=l+2}^{n+1} \frac{2}{3^k} < \frac{2}{3^{l+1}} \leq \sum_{k=l+1}^{n} \frac{\alpha'(k-1)}{3^k}.$$

2.Fall $\alpha(l) = 2$ und $\alpha'(l) = 0$. Es folgt $\frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha'(k-1)}{3^k} < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha(k-1)}{3^k}$, denn

$$\frac{1}{3^n} + \sum_{k=l+1}^{n} \frac{\alpha'(k-1)}{3^k} = \frac{1}{3^n} + \sum_{k=l+2}^{n} \frac{\alpha'(k-1)}{3^k} \leq \frac{1}{3^n} + \sum_{k=l+2}^{n} \frac{2}{3^k} < \frac{2}{3^{l+1}} \leq \sum_{k=l+1}^{n+1} \frac{\alpha(k-1)}{3^k}.$$

$B^{(n)}_{\alpha} \cap B^{(n)}_{\alpha'} = \emptyset$ für festes n und verschiedene α, α', beweist man analog dem ersten Teil.

4.8.5 Bemerkung

Für $f \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$, also $f : \mathbb{N} \to \{0,2\}$ und $n \in \mathbb{N}$ verstehen wir unter $f|n$ die Einschränkung von f auf $\{0,...,n-1\}$. Mit dieser Bezeichnung, dem Lemma von eben und der Gleichung $C = \bigcup_{f \in P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B^{(n)}_{f(n)})$, wobei $P := \prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,2\}^n$ ergibt sich der folgende Satz.

4.8.6 Hauptsatz über die Cantormenge

(a) $C = \bigcup_{f\in\{0,2\}^{\mathbb{N}}} (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B^{(n)}_{f|n}) = \{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k-1)}{3^k} \mid f \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}\}$, denn $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B^{(n)}_{f|n} = \{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k-1)}{3^k}\}$

(b) Jedes C_n ist die disjunkte Vereinigung der $B^{(n)}_\alpha$, $\alpha \in \{0,2\}^n$. Außerdem erhalten wir $\{B^{(n+1)}_\alpha \mid \alpha \in \{0,2\}^{n+1}\}$ aus $\{B^{(n)}_\alpha \mid \alpha \in \{0,2\}^n\}$, indem wir aus jedem $B^{(n)}_\alpha$ das mittlere (offene) Drittel entfernen. Der verbleibende Rest besteht aus zwei (disjunkten) $B^{(n+1)}_{\alpha'}$, $B^{(n+1)}_{\alpha''}$ (für gewisse $\alpha', \alpha'' \in \{0,2\}^{n+1}$). Insbesondere bedeutet dies $C_{n+1} \subseteq C_n$.

(c) Jedes $B^{(n)}_\alpha$ hat eine Länge von $\frac{1}{3^n}$. Die Länge von C_n ist also $2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Insbesondere hat C das Lebesgue-Maß $\lambda(C) = 0$.

(d) Fassen wir $\{0,2\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,2\}$ als topologischen Raum auf, wobei wir $\{0,2\}$ mit der diskreten Topologie versehen. Dann ist die Abbildung $\phi : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to C$ definiert durch $\phi(f) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k-1)}{3^k}$ ein Homöomorphismus (wobei C mit der entsprechenden Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ versehen ist). Für C gilt demnach insbesondere $|C| = |\{0,2\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Man beachte auch Satz 10.6.6 im Kapitel über Verbände.

Beweis: (a), (b) und (c) folgen unmittelbar aus dem bisher bewiesenen.

Zeigen wir (d). Offenbar ist ϕ surjektiv. Zeigen wir, dass ϕ injektiv ist. Seien $f, g \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ mit $f \neq g$. Sei n minimal mit $f(n) \neq g(n)$. O.B.d.A. sei $f(n) = 2$ und $g(n) = 0$. Es folgt

$$\phi(g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(k-1)}{3^k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k-1)}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k-1)}{3^k} + \frac{1}{3^n} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{3^k} = \phi(f).$$

ϕ ist stetig: Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} < \varepsilon$. Setze

$$O := \prod_{n\in\mathbb{N}} O_n \text{ mit } O_n = \begin{cases} \{f(n)\} & \text{falls } n \le N \\ \{0,2\} & \text{falls } N < n \end{cases}.$$

Dann folgt $\phi(O) \subseteq]\phi(f) - \varepsilon, \phi(f) + \varepsilon[$ mit $f \in O$. Da f und ε beliebig, beweist dies die Stetigkeit. Da $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ kompakt und C ein T_2-Raum ist, ist ϕ ein Homöomorphismus.

Abbildung 1: Die 7 Iterationsstufen C_0 bis C_6 vermitteln einen Eindruck der Cantormenge.

4.8.7 Lemma (Selbstähnlichkeit der Cantormenge)

Es gilt $C = f(C) \cup g(C)$, mit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{3}x$ und $g(x) := \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Beweis: Für den Beweis greifen wir auf Resultate aus dem Abschnitt über die Hausdorff-Metrik vor. Diese werden dort selbstverständlich unabhängig von denen hier bewiesen. Für $A \subseteq [0,1]$ sei $F(A) := f(A) \cup g(A)$. Offenbar gilt dann $F^n([0,1]) = C_n$. Aus Satz 7.1.7 folgt, dass es eine eindeutig bestimmte nicht leere kompakte Teilmenge C^* von $[0,1]$ gibt mit $F(C^*) = C^*$. Induktiv schließt man, dass $C^* \subseteq C_n$ ist für jedes $N \in \mathbb{N}$, also $C^* \subseteq C$. Andererseits konvergiert $F^n([0,1])$ gegen C^* (bzgl. der Hausdorff-Metrik), wie man dem Fixpunktsatz von Banach entnimmt. Für den Grenzwert C^* von $(F^n([0,1]))_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$C^* = \lim_{n\to\infty} F^n([0,1]) = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} C_k}$$

wie wir dem Beweis von Satz 7.1.2 entnehmen (die Grenzwerte sind bzgl. der Hausdorff-Metrik zu verstehen). Da $C_n \subseteq \overline{\bigcup_{k\geq n} C_k}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $C \subseteq C^*$ und schließlich $C = C^*$.

4.8.8 Lemma

Sei A abgeschlossen in $C := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (mit der Produkttopologie). Dann ist A ein Retrakt von C (d.h. $\exists f : C \to A$ stetig, mit $f|A = id_A$).

Beweis: Wir definieren die Metrik $d(x,y) := \sum_{i\in\mathbb{N}} 4^{-i}|x_i - y_i|$ auf C. Offenbar induziert diese Metrik die Produkttopologie auf C und erfüllt die (leicht nachzurechnende) Eigenschaft

$$d(x,y) = d(x,z) \;\Rightarrow\; y = z \quad \text{für alle } x,y,z \in C. \qquad (*)$$

Für $x \in C$ gibt es ein $y_x \in A$ mit $d(x,A) = d(x,y_x)$ (denn $A \ni a \mapsto d(x,a) \in \mathbb{R}$ ist stetig auf der kompakten Menge A). Wegen $(*)$ ist dieses y_x eindeutig bestimmt. Wir definieren nun $f : C \to A$ durch $f(x) := y_x$. Offenbar gilt $f|A = id_A$. Zu zeigen bleibt somit noch die Stetigkeit. Sei dazu $O := \prod_{i\in\mathbb{N}} O_i$ mit $O_i = \begin{cases} \{t\} & \text{falls } i = j \\ \{0,1\} & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ eine typische Subbasismenge (mit $t \in \{0,1\}$ und $j \in \mathbb{N}$) und sei $f(x) \in O$. Wir setzen nun $V := \prod_{i\in\mathbb{N}} V_i$ mit $V_i = \begin{cases} \{x_i\} & \text{falls } i \leq j \\ \{0,1\} & \text{falls } i > j \end{cases}$ und zeigen, dass $f(V) \subseteq O$ gilt. Angenommen dem ist nicht so. Dann gilt $(f(x))_j \neq (f(y))_j$ für ein $y \in V$. Nun ist wegen $(*)$ und der Dreiecksungleichung $d(y, f(y)) < d(y, f(x)) \leq d(x,y) + d(x, f(x))$, also

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} 4^{-i}|y_i - (f(y))_i| < \sum_{i\in\mathbb{N}} 4^{-i}(|x_i - y_i| + |x_i - (f(x))_i|)$$

Sei dann $l \in \mathbb{N}$ minimal mit $|y_l - (f(y))_l| \neq |x_l - y_l| + |x_l - (f(x))_l|$. Da $|y_j - (f(y))_j| \neq \underbrace{|x_j - y_j|}_{=0} + |x_j - (f(x))_j|$ folgt $l \leq j$ und $|y_l - (f(y))_l| \neq |x_l - (f(x))_l|$ (wegen $x_l = y_l$). Isbesondere folgt auch, dass l minimal ist mit $(f(x))_l \neq (f(y))_l$. Es folgt nun $|y_l - (f(y))_l| = 0$ und $|x_l - (f(x))_l| = 1$, also $y_l = (f(y))_l$ und $x_l \neq (f(x))_l$.

(Beweis: Andernfalls wäre $|y_l - (f(y))_l| = 1$ und $|x_l - (f(x))_l| = 0$, also $\sum_{i \in \mathbb{N}} 4^{-i}(|x_i - y_i| + |x_i - (f(x))_i|) = \sum_{i<l} 4^{-i}|y_i - (f(y))_i| + \sum_{i>l} 4^{-i}(|x_i - y_i| + |x_i - (f(x))_i|) \leq \sum_{i<l} 4^{-i}|y_i - (f(y))_i| + \sum_{i>l} 4^{-i} = \sum_{i<l} 4^{-i}|y_i - (f(y))_i| + 4^{-l}/3 < \sum_{i \in \mathbb{N}} 4^{-i}|y_i - (f(y))_i|$ - ein Widerspruch.)

Nun bekommen wir den gesuchten Widerspruch, denn $d(x, f(y)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 4^{-i}|x_i - (f(y))_i| = \sum_{i<l} 4^{-i}|x_i - (f(y))_i| + \sum_{l<i} 4^{-i}|x_i - (f(y))_i| \leq \sum_{i<l} 4^{-i}|x_i - (f(y))_i| + \sum_{l<i} 4^{-i} = \sum_{i<l} 4^{-i}|x_i - (f(y))_i| + 4^{-l}/3 < \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i - (f(x))_i| = d(x, f(x))$.

4.8.9 Lemma

Sei (X, τ) ein kompakter Hausdorff-Raum mit einer Basis $\mathscr{B}$. Dann $\exists A$ abgeschlossen $\subseteq \{0,1\}^{\mathscr{B}}$ (mit Produkttopologie) und $\exists$ ein stetiges und surjektives $f : A \to X$.

Beweis: Für jedes $x \in X$ sei $f_x \in \{0,1\}^{\mathscr{B}}$ definiert durch $f_x(B) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin B \\ 1 & \text{falls } x \in B \end{cases}$

Sei $A' := \{f_x \mid x \in X\}$ und $A := \overline{A'}$. Offenbar ist die Abbildung $x \mapsto f_x$ injektiv (X ist ein T_0-Raum), also ist $g : A' \to X$, $f_x \mapsto x$ bijektiv. g ist aber auch stetig, denn für $B \in \mathscr{B}$ folgt

$$g^{-1}(B) = \Big(\prod_{B' \in \mathscr{B}} O_{B'}\Big) \cap A' \quad , \quad \text{wobei} \quad O_{B'} = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } B' = B \\ \{0,1\} & \text{falls } B' \neq B \end{cases}$$

Wir verwenden nun Satz 4.3.1, um zu zeigen, dass ein stetiges $f : A \to X$ existiert, mit $f|A' = g$. Seien C_1, C_2 disjunkte abgeschlossene Mengen in X. Angenommen $\exists h \in \overline{g^{-1}(C_1)} \cap \overline{g^{-1}(C_2)}$. Nun gibt es endliche Teilmengen $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_\in \subseteq \mathscr{B}$ mit $C_1 \subseteq \bigcup \mathscr{B}_1$, $C_2 \subseteq \bigcup \mathscr{B}_2$ und $(\bigcup \mathscr{B}_1) \cap (\bigcup \mathscr{B}_2 = \emptyset)$, denn (X, τ) ist kompakt und T_2. Setze $\mathscr{B}' := \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ und

$$W := \prod_{B \in \mathscr{B}} V_B \quad , \quad \text{wobei} \quad V_B := \begin{cases} \{h(B)\} & \text{falls } B \in \mathscr{B}' \\ \{0,1\} & \text{falls } B \notin \mathscr{B}' \end{cases}$$

Seien $x, y \in X$ mit $f_x \in W \cap g^{-1}(C_1)$ und $f_y \in W \cap g^{-1}(C_2)$, also insbesondere $x \in C_1$ und $y \in C_2$. Es gibt dann $B_1, B_2 \in \mathscr{B}'$ mit $x \in B_1$ und $y \in B_2$. Folglich ist $y \notin B_1$, also $f_x(B_1) = 1$ und $f_y(B_1) = 0$. Dies steht im Widerspruch zu $f_x(B_1) = h(B_1) = f_y(B_1)$ - wir sind fertig.

4.8.10 Definition

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **dyadischer Raum** bzw. **dyadisch**, falls es eine Menge Y und eine stetige und surjektive Abbildung $f : \{0,1\}^Y \to X$ gibt ($\{0,1\}^Y$ natürlich mit Produkttopologie). Da $\{0,1\}^Y$ kompakt ist, sind dyadische Räume kompakt.

Als interessantes Resultat haben wir nun:

4.8.11 Satz

Jeder kompakte metrische (bzw. metrisierbare) Raum ist ein stetiges Bild der Cantormenge und damit insbesondere dyadisch.

Beweis: Nun hat ein kompakter metrischer Raum X eine abzählbare Basis (Satz 2.4.4). Es gibt also eine abgeschlossene Teilmenge A von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und eine stetige und surjektive Abbildung $g : A \to X$ (das ist Lemma 4.8.9). Andererseits gibt es eine stetige Abbildung $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to A$ mit $f|A = id_A$. Die ist dann insbesondere auch surjektiv (das ist Lemma 4.8.8). Dann ist aber $g \circ f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to X$ ebenfalls stetig und surjektiv.

4.8.12 Bemerkung

Gezeigt haben wir eigentlich, dass jeder kompakte Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis dyadisch ist (und kompakte Metrische Räume haben eine abzählbare Basis). Da aber jeder kompakte Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis auch metrisierbar ist (Satz 12.8.3), scheint diese Formulierung nur auf den ersten Blick stärker.

4.9 Perfekte Abbildungen

In diesem Abschnitt führen wir eine weitere wichtige Klasse von Abbildungen ein.

4.9.1 Definition

Perfekte Abbildung Wir nennen eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen (X,τ) und (Y,σ) **fast perfekt**, wenn f abgeschlossen ist und $f^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ kompakt ist. Eine stetige und fast perfekte Abbildung nennen wir schließlich **perfekt**.

Wozu dieser Unterschied? Nun einige der folgenden Lemmas gelten eben bereits für in unserem Sinne fast perfekte Abbildungen. Man braucht eben nicht überall die Stetigkeit. Um dies deutlich zu machen benutzen wir von vornherein diese Abschwächung des Begriffs der perfekten Abbildung. Das bedeutet keineswegs das an allen anderen Stellen die Stetigkeit eine notwendige Voraussetzung ist, sondern eben nur, dass es mir an den Stellen nicht möglich war es ohne Stetigkeit sinnvoll zu formulieren oder zu beweisen.

4.9.2 Lemma

Für eine Abbildung $f : (X,\tau) \to (Z,\xi)$ sind folgende Aussagen äquivalent.
a) f ist fast perfekt.

b) Für jeden T_2-Raum (Y,σ) ist $f \times id_Y : X \times Y \to Z \times Y$ fast perfekt.
c) Für jeden T_2-Raum (Y,σ) ist $f \times id_Y : X \times Y \to Z \times Y$ abgeschlossen.
d) Für alle Ultrafilter ϕ auf X gilt $(f(\phi) \to z$ impliziert $\exists x \in f^{-1}(z)$ mit $\phi \to x)$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) ist klar (da id_Y perfekt ist und fast perfekte Abbildungen auch abgeschlossen sind).

c) $\Rightarrow$ a). Offensichtlich ist $f : X \to Z$ abgeschlossen (man betrachte die Einschränkung von $f \times id_Y$ auf $X \times \{y\}$, für ein $y \in Y$). Zeigen wir, dass für ein beliebig gewähltes $z \in Z$ die Menge $f^{-1}(z)$ kompakt ist. Wir verwenden dazu Satz 4.1.7. Sei also $z \in Z$ und (Y,σ) ein T_2-Raum und $q : f^{-1}(z) \times Y \to Y$ die entsprechende Projektion. Um die Abgeschlossenheit von q zu zeigen, verwenden wir Lemma 2.2.6. Sei also $y \in Y$ und U offen in $X \times Y$ mit $q^{-1}(y) \subseteq U$. Da $(f \times id_Y)^{-1}(z,y) = q^{-1}(y)$, ist $(f \times id_Y)^{-1}(y) \subseteq U$ und es gibt somit ein W offen in $Z \times Y$ mit $(z,y) \in W$ und $(f \times id_Y)^{-1}(W) \subseteq U$. Dann ist aber $W(z) := \{y' \in Y \mid (z,y') \in W\}$ ebenfalls offen mit $y \in W(z)$ und $q^{-1}(W(z)) \subseteq (f \times id_Y)^{-1}(W) \subseteq U$. Damit ist q als abgeschlossen erkannt und $f^{-1}(z)$ somit kompakt.

a) $\Rightarrow$ d) Sei ϕ ein Ultrafilter auf X mit $f(\phi) \to z$, für ein $z \in Z$. Somit gilt $z \in \bigcap_{P \in \phi} \overline{f(P)} \subseteq \bigcap_{P \in \phi} f(\overline{P})$, denn f ist abgeschlossen ($\Rightarrow$ insbesondere ist $f^{-1}(z) \neq \emptyset$). Angenommen ϕ konvergiert gegen kein $x \in f^{-1}(z)$. Dann gibt es zu jedem $x \in f^{-1}(z)$ ein $O_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $O_x \notin \phi$. Da $f^{-1}(z)$ kompakt ist, gibt es dann endlich viele $x_1, .., x_n \in f^{-1}(z)$ mit $f^{-1}(z) \subseteq O_{x_1} \cup ... \cup O_{x_n} =: U \in \tau$ Aus unserem Wissen über Ultrafilter folgern wir dann $X \setminus U \in \phi$. Da $\overline{X \setminus U} = X \setminus U$ schließen wir weiter $z \in f(X \setminus U)$, also $f^{-1}(z) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ - ein Widerspruch! Es gibt somit doch ein $x \in f^{-1}(z)$ mit $\phi \to x$.

d) $\Rightarrow$ a) Zeigen wir, dass $f^{-1}(z)$ kompakt ist. Sei dazu ϕ ein Ultrafilter auf X mit $f^{-1}(z) \in \phi$. Dann ist $f(\phi) = \dot{z}$ und dieser konvergiert offensichtlich gegen z. Nach Voraussetzung gibt es somit ein $x \in f^{-1}(z)$ mit $\phi \to x$. Da ϕ beliebig gewählt wurde bedeutet dies aber gerade die Kompaktheit von $f^{-1}(z)$.

Zeigen wir, dass f abgeschlossen ist. Wir verwenden dazu Lemma 2.2.6. Sei $z \in Z$ und $f^{-1}(z) \subseteq U \in \tau$. Angenommen $\forall V \in \dot{z} \cap \xi$ ist $f^{-1}(V)$ keine Teilmenge von U. Dann hat $\varphi := \{f^{-1}(V) \mid V \in \dot{z} \cap \xi\} \cup \{X \setminus U\}$ die endliche Schnitt Eigenschaft und es gibt somit einen Ultrafilter ϕ mit $\varphi \subseteq \phi$. Dann konvergiert $f(\phi)$ aber gegen z und es gibt nach Voraussetzung somit ein $x \in f^{-1}(z)$ mit $\phi \to x$. Da $X \setminus U \in \phi$, ist $x \in \overline{X \setminus U} = X \setminus U$; aber wir haben $x \in f^{-1}(z) \subseteq U$ - ein Widerspruch! Somit gibt es ein $V \in \dot{z} \cap \xi$ mit $f^{-1}(V) \subseteq U$ und f ist daher abgeschlossen.

4.9.3 Lemma

a) Sei $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fas perfekt und $Z \subseteq Y$ kompakt. Dann ist auch $f^{-1}(Z)$ kompakt.

b) Die Nacheinanderausführung fast perfekter (bzw. perfekter) Abbildungen ist fast perfekt (bzw. perfekt).

Beweis: a) Sei $f : X \to Y$ fast perfekt und K in Y kompakt. Sei dann ϕ ein Ultrafilter in

X mit $f^{-1}(K) \in \phi$. Dann ist $K \in f(\phi)$, also gibt es ein $y \in Y$ mit $f(\phi) \to y$. Aus Lemma 4.9.2 folgt die Existenz eines $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(K)$ mit $\phi \to x$. Die Menge $f^{-1}(K)$ ist somit kompakt.

b) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ perfekt, dann ist $(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$ kompakt, denn $g^{-1}(z)$ ist kompakt und aus a) folgt, dass dann auch $f^{-1}(g^{-1}(z))$ kompakt ist. Das die Nacheinanderausführung abgeschlossener Abbildungen wieder abgeschlossen ist, ist trivial.

4.9.4 Lemma

Sei (X, τ) ein Hausdorff-Raum, $A \subseteq X$ mit $A \neq X$, $\overline{A} = X$ und $f : A \to Y$ eine perfekte Abbildung. Dann gibt es keine stetige Abbildung $g : X \to Y$ mit $g|A = f$.

Beweis: Nehmen wir an, es gibt doch solch ein g. Sei dann $x \in X \setminus A$. Da g stetig ist, ist $f(A) = g(A)$ dicht in $g(X)$. Da $f(A)$ abgeschlossen in Y ist, gilt somit $f(A) = \overline{f(A)} = \overline{g(A)} = g(X)$. Also ist $K := f^{-1}(g(x)) \neq \emptyset$ und zudem kompakt. Da $x \notin K$ und (X, τ) ein T_2-Raum ist, gibt es disjunkte offene Mengen U, V mit $K \subseteq U$ und $x \in V$. Nun ist aber $Y \setminus f(A \setminus U)$ offen und $g(x) \in Y \setminus f(A \setminus U)$. Es gibt also ein $W \in \dot{x} \cap \tau$ mit $g(W) \subseteq Y \setminus f(A \setminus U)$. Nach Voraussetzung gibt es dann aber auch ein $a \in V \cap W \cap A$. Somit folgt $f(a) = g(a) \notin f(A \setminus U)$, also $a \in U$ - im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$.

4.9.5 Lemma

Sind $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ und $g : (Y, \sigma) \to (Z, \xi)$ stetig, ist $g \circ f$ perfekt und (Y, σ) Hausdorff, so sind $f : X \to Y$ und $g|f(X) : f(X) \to Z$ perfekt.

Beweis: Ohne Einschränkung können wir voraussetzen, dass f surjektiv ist. Ist nun A in Y abgeschlossen, so ist $f^{-1}(A)$ in X abgeschlossen und somit ist $g(A) = g(f(f^{-1}(A)))$ in Z abgeschlossen. Für $z \in Z$ ist $f^{-1}(g^{-1}(z))$ in X kompakt und somit ist auch $g^{-1}(z) = f(f^{-1}(g^{-1}(z)))$ kompakt. Die Abbildung g ist also perfekt.

Zeigen wir, dass auch f perfekt ist. Für $y \in Y$ ist $f^{-1}(y)$ jedenfalls abgeschlossen und Teilmenge von $(g \circ f)^{-1}(y)$. Letztere Menge ist aber kompakt. Also ist auch $f^{-1}(y)$ kompakt. Sei nun $A \subseteq X$ abgeschlossen. Nehmen wir mal an, wir hätten $f(A) \neq \overline{f(A)}$. Jedenfalls ist $(g \circ f)|A : A \to Z$ perfekt und aus dem eben bewiesenen folgern wir, dass auch $g|f(A) : f(A) \to Z$ perfekt ist. Nun ist aber $g|\overline{f(A)} : \overline{f(A)} \to Y$ eine stetige Fortsetzung, die es nach Lemma 4.9.4 nicht geben kann - Widerspruch. Also ist $f(A) = \overline{f(A)}$ und f ist somit abgeschlossen.

4.9.6 Satz

Das Produkt $\prod_{i\in I} f_i$ einer Familie fast perfekter (bzw. perfekter) Abbildungen $(f_i : (X_i,\tau_i) \to (Y_i,\sigma_i))_{i\in I}$ ist genau dann fast perfekt (bzw. perfekt), wenn jedes f_i fast perfekt (bzw. perfekt) ist. Dabei ist $f := \prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ durch $\prod_{i\in I} f_i((x_i)_{i\in I}) := (f_i(x_i))_{i\in I}$ definiert.

1.Beweis: Seien zunächst alle f_i fast perfekt. Wir verwenden Lemma 4.9.2. Sei ϕ auf $X := \prod_{i\in I} X_i$ ein Ultrafilter und $y = (y_i)_{i\in I} \in Y := \prod_{i\in I} Y_i$ mit $f(\phi) \to y$. Sei nun $j \in I$ beliebig. Aus der Stetigkeit der Projektionsabbildung p_j folgt $p_j(f(\phi)) \to y_j$. Nun ist $p_j(f(\phi)) = f_j(p_j(\phi))$ und es gibt somit ein $x_j \in f_j^{-1}(y_j)$ mit $p_j(\phi) \to x_j$. Für jedes $j = i \in I$ gilt das eben gezeigte und aus Lemma 3.2.11 folgt somit $\phi \to x := (x_i)_{i\in I} \in f^{-1}(y)$. Die Abbildung f ist also fast perfekt. Falls alle f_i auch noch stetig sind, so folgt aus Lemma 2.3.3, dass f perfekt ist.

Sei umgekehrt f fast perfekt. Sei $j \in I$. Für jedes $i \neq j$ sei $x_i \in X_i$. Wir definieren dann die stetigen Abbildungen $g_j : X_j \to X$ und $h_j : Y_j \to Y$ durch $g_j(x') := (x_i)_{i\in I}$, wobei $x_j := x'$ und $h_j(y') := (z_i)_{i\in I}$, mit $z_i = f_i(x_i)$ für $i \neq j$ und $z_j = y'$. Sei nun ϕ_j ein Ultrafilter auf X_j mit $f_j(\phi_j) \to y_j$, für ein $y_j \in Y_j$. Dann ist $g_j(\phi_j)$ ein Ultrafilter auf X mit $f(g_j(\phi_j)) = h_j(f_j(\phi_j)) \to h_j(y_j) =: y$. Es gibt somit ein $r = (r_i)_{i\in I} \in f^{-1}(y)$ mit $g_j(\phi_j) \to r$. Aus der Stetigkeit der Projektionsabbildung $p_j : X \to X_j$ folgt dann aber $\phi_j = p_j(g_j(\phi_j)) \to p_j(r) = r_j \in f_j^{-1}(y_j)$. Die Abbildung f_j ist also fast perfekt. Falls f sogar perfekt ist, folgt aus Lemma 2.3.3, dass f_j auch perfekt ist.

Dieser Satz ist ein sehr starker Satz und seine Bedeutung für die Theorie perfekter Abbildungen ist so groß wie die des Tychonoff Satzes für die kompakten Räume. Beispielsweise erhalten wir den Satz von Tychonoff und auch das verallgemeinerte Tubenlemma (Korollar 4.4.5) unmittelbar als Korollar. Zuvor geben wir aber noch einen zweiten Beweis.

2.Beweis: Seien zunächst alle f_i fast perfekt. Zeigen wir das für $y \in Y := \prod_{i\in I} Y_i$ die Menge $f^{-1}(y)$ kompakt ist. Dies folgt aber unmittelbar aus dem Satz von Tychonoff, denn für $y = (y_i)_{i\in I}$ ist $f^{-1}(y) = \prod_{i\in I} f_i^{-1}(y_i)$ und die $f_i^{-1}(y_i)$ sind nach Voraussetzung kompakt. Zu zeigen bleibt somit noch, dass die Abbildung abgeschlossen ist. Wir verwenden dazu Lemma 2.2.6. Sei also $y = (y_i)_{i\in I} \in Y$ und U offen in X mit $f^{-1}(y) \subseteq U$. Aus Korollar 4.4.5 folgt, dass es eine Basismenge $W := \prod_{i\in I} W_i$ gibt mit $f^{-1}(y) \subseteq W \subseteq U$. Damit haben wir $f_i^{-1}(y_i) \subseteq W_i$, für jedes $i \in I$. Dann gibt es ein $V_i \in \dot{y}_i \cap \sigma_i$ mit $f^{-1}(V_i) \subseteq W_i$ (wieder für jedes $i \in I$), denn die Abbildungen f_i sind schließlich abgeschlossen. Nun ist W eine Basismenge, es gibt also höchstens endlich viele $i \in I$ mit $W_i \neq X_i$. An den Stellen, an denen also $W_i = X_i$ gilt, kann man ebenfalls $V_i = X_i$ wählen. Somit ist $V := \prod_{i\in I} V_i$ ebenfalls eine in Y offene Menge und es gilt $y \in V$. Damit folgt dann $f^{-1}(V) = \prod_{i\in I} f_i^{-1}(V_i) \subseteq \prod_{i\in I} W_i = W \subseteq U$ und wir haben gezeigt, dass f abgeschlossen ist.

Sei nun $f = \prod_{i\in I} f_i$ fast perfekt und $j \in I$. Sei $y_j \in Y_j$. Für jedes $i \in I \setminus \{j\}$ sei y_i ein beliebiges, aber fest gewähltes Element. Für $y := (y_i)_{i\in I}$ ist nach Voraussetzung $f^{-1}(y) = \prod_{i\in I} f_i^{-1}(y_i)$ kompakt. Somit ist auch jeder einzelne Faktor kompakt, isbesondere also $f_j^{-1}(y_j)$. Sei A_j eine in X_j abgeschlossene Menge. Für jedes $i \neq j$ setzen wir $A_i := X_i$. Dann ist $A :=$

$\prod_{i\in I} A_i$ in $X = \prod_{i\in I} X_i$ abgeschlossen (kann man ganz leicht nachrechnen), also ist auch $f(A) = \prod_{i\in I} f_i(A_i)$ in $Y = \prod_{i\in I} Y_i$ abgeschlossen. Aus $\prod_{i\in I} f_i(A_i) = \overline{\prod_{i\in I} f_i(A_i)} = \prod_{i\in I} \overline{f_i(A_i)}$ folgt dann $f_j(A_j) = \overline{f_j(A_j)}$ und $f_j(A_j)$ ist demnach abgeschlossen. f_j ist also eine abgeschlossene Abbildung.

4.9.7 Korollar

1. Ein Produkt kompakter top. Räume $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ ist wieder kompakt.
2. (Verallgemeinertes Tubenlemma) Seien $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ topologische Räume und $A_i \subseteq X_i$, für jedes $i \in I$ eine kompakte Teilmenge. Ist W eine in $X := \prod_{i\in I} X_i$ (mit der Produkttopologie) offene Menge, mit $A := \prod_{i\in I} A_i \subseteq W$, so gibt es eine standard Basismenge U mit $A \subseteq U \subseteq W$.

Beweis: 1. Setzen wir $Y := \{0\}$ mit $\sigma := \{\emptyset, Y\}$, so ist für jedes $i \in I$ die eindeutige bestimmte Abbildung $f_i : X_i \to Y$ perfekt. Somit ist auch das Produkt $f := \prod_{i\in I} X_i =: X \to Y$ perfekt und $\prod_{i\in I} X_i = f^{-1}(0)$ demnach kompakt.

2. Für jedes $i \in I$ sei $z_i \notin X_i$. Wir setzen dann $Y_i := (X_i \setminus A_i) \cup \{z_i\}$ und definieren $f_i : X_i \to Y_i$ durch $f_i(x) = x$, falls $x \in X_i \setminus A_i$ und $f_i(x) = z_i$, falls $x \in A_i$. Auf Y_i führen wir nun die gröbste Topologie σ_i ein, so dass f_i eine abgeschlossene Abbildung ist (nicht unbedingt stetig), also $\sigma_i := top(\{Y_i \setminus f_i(B) \mid X_i \setminus B \in \tau_i\})$ (siehe Satz 2.1.2). Damit ist $\mathscr{B}_i := \{Y_i \setminus f_i(B) \mid X_i \setminus B \in \tau_i\}$ sogar eine Basis (!) für σ_i. Für jedes $y \in Y_i$ ist $f_i^{-1}(y)$ offensichtlich kompakt. Die Abbildung f_i ist also fast perfekt. Damit ist auch das Produkt $f := \prod_{i\in I} f_i : X \to Y := \prod_{i\in I} Y_i$ fast perfekt! Setzen wir $z := (z_i)_{i\in I}$, so ist $f^{-1}(z) = A \subseteq W$. Aus Lemma 2.2.6 folgt, dass es eine in Y offene standard Basismenge $V = \prod_{i\in I} V_i$ gibt, mit $V_i \in \mathscr{B}_i$ und $z \in V$ und $A = f^{-1}(z) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq W$. Offensichtlich ist $f^{-1}(V) = \prod_{i\in I} f_i^{-1}(V_i)$ dann eine offene standard Basismenge in X (und das, obwohl die f_i nicht unbedingt stetig sind).

4.9.8 Lemma

Sei $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fast perfekt, surjektiv und
a) (X, τ) ein T_2-Raum. Dann ist auch (Y, σ) ein T_2-Raum.
b) f zusätzlich stetig und (X, τ) ein T_3-Raum dann ist auch (Y, σ) ein T_3-Raum.
c) f zusätzlich stetig und (X, τ) ein T_4-Raum dann ist auch (Y, σ) ein T_4-Raum.

Beweis: a) Sei $y_1 \neq y_2$. Dann sind $f^{-1}(y_1)$ und $f^{-1}(y_2)$ kompakte und disjunkte Teilmengen von (X, τ). Es gibt dann disjunkte offene Obermengen U, V (der Beweis dazu läuft analog zu dem Beweis von Lemma 4.1.4). Also $f^{-1}(y_1) \subseteq U$ und $f^{-1}(y_2) \subseteq V$. Lemma 2.2.6 folgend bekommen wir ein $U' \in \dot{y_1} \cap \sigma$ und ein $V' \in \dot{y_2} \cap \sigma$ mit $f^{-1}(U') \subseteq U$ und $f^{-1}(V') \subseteq V$. Damit sind dann U' bzw. V' die gesuchten disjunkten offenen Umgebungen von y_1 und y_2.

b) Sei B in Y abgeschlossen und $y \in Y \setminus B$. Dann ist $f^{-1}(y)$ kompakt und $f^{-1}(B)$ abgeschlossen. Zu jedem $x \in f^{-1}(y)$ gibt es dann ein $O_x \in \dot{x} \cap$ und ein $U_x \in \tau$ mit $f^{-1}(B) \subseteq U_x$ und $O_x \cap U_x = \emptyset$. Nun ist $f^{-1}(y)$ kompakt, es gibt also endlich viele $x_1, ..., x_n \in f^{-1}(y)$ mit $f^{-1}(y) \subseteq O_{x_1} \cup ... \cup O_{x_n} =: O$ und $f^{-1}(B) \subseteq U_{x_1} \cap ... \cap U_{x_n} =: U$. Es gilt natürlich $O \cap U = \emptyset$. Dann gibt es jedenfalls ein $O' \in \dot{y} \cap \sigma$ mit $f^{-1}(O') \subseteq O$. Zu jedem $b \in B$ gibt es dann ein $V_b \in \dot{b} \cap \sigma$ mit $f^{-1}(V_b) \subseteq U$. Für $V := \bigcup_{b \in B} V_b$ gilt dann $B \subseteq V \in \sigma$ und $f^{-1}(V) \subseteq U$. Es folgt $O' \cap V = \emptyset$ und (Y, σ) ist damit T_3.

c) Folgt aus Satz 3.1.3.

4.9.9 Lemma

Sei (X, τ) ein T_2-Raum, (Y, σ) ein T_3-Raum und $f : X \to Y$ eine perfekte Abbildung. Dann ist auch (X, τ) ein T_3-Raum.

Beweis: Sei $x \in U \in \tau$. Für jedes $z \in f^{-1}(f(x)) \setminus \{x\}$ gibt es ein $U_z \in \dot{x} \cap \tau$ und ein $V_z \in \dot{z} \cap \tau$ mit $U_z \cap V_z = \emptyset$. Nun ist $\{V_z \mid z \in f^{-1}(f(x)) \setminus \{x\}\} \cup \{U\}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $f^{-1}(f(x))$, es gilt also $f^{-1}(f(x)) \subseteq V_{z_1} \cup ... \cup V_{z_n} \cup U$, für gewisse z_i. Zur Abkürzung setzen wir $V := V_{z_1} \cup ... \cup V_{z_n}$ und $U' := U_{z_1} \cap ... \cap U_{z_n}$. Da f abgeschlossen ist, gibt es nach Lemma 2.2.6 ein $W \in \sigma$ mit $f(x) \in W$ und $f^{-1}(W) \subseteq V \cup U$. Da (Y, σ) ein T_3-Raum ist, gibt es ein $P \in \sigma$ mit $f(x) \in P \subseteq \overline{P} \subseteq W$, also $f^{-1}(\overline{P}) \subseteq V \cup U$. Wir setzen nun $Q := U' \cap f^{-1}(P)$ und es folgt $x \in Q \subseteq \overline{Q} \subseteq \overline{f^{-1}(P)} \subseteq f^{-1}(\overline{P}) \subseteq V \cup U$.

Angenommen es ist $\overline{Q} \cap V \neq \emptyset$, dann ist auch $Q \cap V \neq \emptyset$, aber es gilt $Q \subseteq U'$ und $U' \cap V = \emptyset$ - ein Widerspruch! Also haben wir $\overline{Q} \subseteq U$ und (X, τ) ist somit auch T_3.

4.9.10 Lemma

Sei (X, τ) lokal kompakt und $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ perfekt und surjektiv. Dann ist auch (Y, σ) lokal kompakt. Hat jeder Punkt $x \in X$ sogar eine Basis aus kompakten Umgebungen, so hat auch jeder Punkt $y \in Y$ eine Basis aus kompakten Umgebungen.

Beweis: Zeigen wir die erste Aussage. Sei $y \in V \in \sigma$. Dann ist $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V) \in \tau$. Zu jedem $x \in f^{-1}(y)$ gibt es somit ein $U_x \in \dot{x} \cap \tau$ und eine Kompakte Teilmenge K_x mit $x \in U_x \subseteq K_x$. Da $f^{-1}(y)$ kompakt ist, gibt es endliche viele $x_1, ..., x_n \in f^{-1}(y)$ mit $f^{-1}(y) \subseteq U := U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n} \subseteq K_{x_1} \cup ... \cup K_{x_n} =: K$. Somit ist U offen und K kompakt mit $f^{-1}(y) \subseteq U \subseteq K$. Aus Lemma 2.2.6 folgt, dass es ein $W \in \dot{y} \cap \sigma$ gibt mit $f^{-1}(W) \subseteq U$. Wir bekommen dann $W = f(f^{-1}(W)) \subseteq f(U) \subseteq f(K)$ und $f(K)$ ist kompakt.

Zeigen wir die zweite Aussage. Im obigen Beweis können wir jedes K_x und U_x so wählen, dass $K_x \subseteq f^{-1}(V)$ gilt. Dann folgt aber $K \subseteq f^{-1}(V)$ und somit $W \subseteq f(K) \subseteq V$.

4.9.11 Lemma

Sei $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ perfekt und surjektiv. Ist $\mathscr{B}$ eine Basis von (X,τ), so gibt es eine Basis $\mathscr{B}'$ von (Y,τ) mit $|\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{B}|$.

Beweis: Sei $y \in V \in \sigma$. Dann ist $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V) \in \tau$ und somit gibt es zu jedem $x \in f^{-1}(y)$ ein $B_x \in \mathscr{B}$ mit $x \in B_x \subseteq f^{-1}(V)$. Da $f^{-1}(y)$ kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1,\ldots,x_n \in f^{-1}(y)$ mit $f^{-1}(y) \subseteq B_{x_1} \cup \ldots \cup B_{x_n} \subseteq f^{-1}(V)$. Dann ist aber $W := Y \setminus f(X \setminus (B_{x_1} \cup \ldots \cup B_{x_n}))$ offen und $y \in W \subseteq V$. Das beweist, dass $\mathscr{B}' := \{Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{B\in\mathscr{A}} B) \mid \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ und $\mathscr{A}$ endlich $\}$ eine Basis von (Y,σ) ist, mit $|\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{B}|$.

4.10 Eine Ungleichung von Arkhangelskii

"Papiergeld ist eine Hypothek auf den Wohlstand, der gar nicht existiert, gedeckt durch Pistolen, welche auf die gerichtet sind, die den Wohlstand erarbeiten müssen. Da wir nur mit echtem Geld zu tun haben wollen, beteiligen wir uns nicht an irgendwelchen Betrugssystemen der Zentralbanken."

Selbstdarstellung der freien Bank der Lakota-Indianer, 2008

Wenn kompakte Räume sich manchmal fast wie endliche verhalten, wie groß können sie dann werden? Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen jedenfalls nicht allzu groß. Wie genau, das beschreibt ein tiefliegender Satz von Arkhangelskii, dem wir uns in diesem Abschnitt zuwenden.

4.10.1 Definition

Charakter Sei (X,τ) ein topologischer Raum. $\chi(x,(X,\tau)) := inf\,\{|\mathscr{B}| \mid \mathscr{B}$ ist Umgebungsbasis von $x\}$ ist der Charakter des Punktes x. Der Charakter des gesamten Raumes ist dann erklärt als: $\chi(X,\tau) := sup\,\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in X\}$. Falls klar ist welche Topologie gemeint ist, so schreibt man auch einfach kurz $\chi(x,X)$, bzw. $\chi(X)$.

4.10.2 Lemma

Sei (X,τ) ein Hausdorff-Raum, dann gilt $|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$.

Beweis: Für jedes $x \in X$ sei eine Umgebungsbasis $\mathscr{B}(x) \subseteq \tau$ gewählt, mit $|\mathscr{B}(x)| \leq \chi(X)$ (und $\mathscr{B}(x) \geq \aleph_0$). Setze $\mathscr{A}_0 := \{Y \subseteq A \mid |Y| \leq \chi(X)\}$ (A ist irgendeine dichte Teilmenge mit $|A| = d(X)$). Also haben wir $|\mathscr{A}_0| \leq d(X)^{\chi(X)}$.
(Allgemein gilt: Falls X unendlich und Y beliebig, dann ist $|\{Z \subseteq X \mid |Z \leq |Y|\}| \leq |X^Y|$, denn $\varphi : X^Y \to \{Z \subseteq X \mid |Z \leq |Y|\}$ mit $\varphi(f) := f(Y)$ ist surjektiv.)

Für $U \in \mathscr{B}(x)$ wähle $a(x,U) \in U \cap A$ und setze $A(x) := \{a(x,U) \mid U \in \mathscr{B}(x)\}$. Also $A(x) \in \mathscr{A}_0$ (klar). Setze nun noch $\mathscr{A}_0(x) := \{U \cap A(x) \mid U \in \mathscr{B}(x)\} \subseteq \mathscr{A}_0$. Dann bekommen wir $|\mathscr{A}_0(x)| \leq \chi(X)$ und $x \in \overline{U \cap A(x)} \subseteq \overline{U}$ $(\forall U \in \mathscr{B}(x))$. Also $\bigcap_{A \in \mathscr{A}_0(x)} A = \{x\} \;\Rightarrow\; (x \neq y \Rightarrow \mathscr{A}_0(x) \neq \mathscr{A}_0(y))$. Wir erhalten damit dann:
$|X| = |\{\mathscr{A}_0(x) \mid x \in X\}| \leq |\{Z \subseteq \mathscr{A}_0 \mid |Z \leq \chi(X)\}| \leq |\mathscr{A}_0|^{\chi(X)} \leq (d(X)^{\chi(X)})^{\chi(X)} = d(X)^{\chi(X)}$.

4.10.3 Bemerkung

Für unendliche T_1-Räume ist $\chi(X)$ unendlich, oder sie sind diskret. Im nächsten Satz können wir daher o.B.d.A $\chi(X)$ als unendlich annehmen.

4.10.4 Satz von Arkhangelskii

Für einen unendlichen Hausdorff-Raum X mit der Eigenschaft, dass jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ eine Teilüberdeckung $(O_i)_{i \in J}$ hat, mit $|J| \leq \chi(X)$, gilt: $|X| \leq 2^{\chi(X)}$. Insbesonder gilt die Aussage also für kompakte und Lindelöfsche Räume. Als besonders schönen Spezielfall erhalten wir, dass für kompakte Hausdorff-Räume X, welche dem ersten Abzählbarkeitsaxiom (A1) genügen, gilt: $|X| \leq |\mathbb{R}|$.

Beweis: Sei X unendlich, kompakt und T_2 und $\chi(X) =: \mathbf{m}$ ($\Rightarrow \aleph_0 \leq \mathbf{m}$, klar). Für $x \in X$ wähle eine Umgebungsbasis $\mathscr{B}(x) \subseteq \dot{x} \cap \tau$ mit $|\mathscr{B}(x)| \leq \mathbf{m}$. Sei $\tau := \mathbf{m}^+$ die Nachfolgerkardinalzahl. Wähle nun ein beliebiges $a \in X$ und setze $F_0 := \{a\}$. Im Folgenden definieren wir eine transfinite Folge $F_0, ..., F_\alpha, ...,\ \alpha < \tau$ von abgeschlossenen Mengen $\subseteq X$, mit folgenden Eigenschaften: $\forall \alpha < \tau$ gilt
1) $|F_\alpha| \leq \mathbf{m}$, $F_\beta \subseteq F_\alpha$ für $\beta \leq \alpha$ und
2) Für jedes $\mathscr{U} \subseteq \bigcup\{\mathscr{B}(x) \mid x \in \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta\}$ mit $|\mathscr{U}| \leq \mathbf{m}$ und $X \setminus \bigcup \mathscr{U} \neq \emptyset$, gilt $F_\alpha \setminus \bigcup \mathscr{U} \neq \emptyset$.
Sei für alle $\alpha < \alpha_0$ das F_α gegeben. Setze $\mathscr{B} := \bigcup\{\mathscr{B}(x) \mid x \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} F_\alpha\}$ und $\underline{\mathscr{B}} := \{\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B} \mid |\mathscr{U}| \leq \mathbf{m} \text{ und } X \setminus \mathscr{U} \neq \emptyset\}$. Dann gilt: $|\mathscr{B}| \leq 2^{\mathbf{m}}$ und $|\underline{\mathscr{B}}| \leq |\mathscr{B}^{\mathbf{m}}| \leq 2^{\mathbf{m}}$.
Für $\mathscr{U} \in \underline{\mathscr{B}}$ wähle nun ein $x_{\mathscr{U}} \in X \setminus \bigcup \mathscr{U}$. Setze dann $B := \{x_{\mathscr{U}} \mid \mathscr{U} \in \underline{\mathscr{B}}\} \Rightarrow |B| \leq 2^{\mathbf{m}}$ und $F_{\alpha_0} := \overline{B \cup \bigcup_{\alpha<\alpha_0} F_\alpha}$ ($\Rightarrow |F_{\alpha_0}| \leq |B \cup \bigcup_{\alpha<\alpha_0} F_\alpha|^{\chi(X)} \leq (2^{\mathbf{m}})^{\mathbf{m}} = 2^{\mathbf{m}}$)
(F_1 mit F_0 auf diese Weise konstruiert, hat die Eigenschaften 1) und 2).)
Dann hat auch F_{α_0} die Eigenschaften 1) und 2).
1) ist klar!
2) folgt ebenfalls aus der Konstruktion (Sei $\mathscr{U} \subseteq \bigcup\{\mathscr{B}(x) \mid x \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} F_\alpha\}$ mit $|\mathscr{U}| \leq \mathbf{m}$ und $X \setminus \bigcup \mathscr{U} \neq \emptyset$, dann $\mathscr{U} \in \underline{\mathscr{B}}$. Also existiert ein $x_{\mathscr{U}} \in X \setminus \bigcup \mathscr{U}$, mit $x_{\mathscr{U}} \in B$ und somit $x_{\mathscr{U}} \in F_{\alpha_0} \setminus \bigcup \mathscr{U}$).
Eine Folge mit den Eigenschaften 1) und 2) existiert also!
Wir zeigen nun im Folgenden: $\bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha = X$.
Im ersten Schritt überlegen wir uns, dass $\bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$ abgeschlossen ist. Sei dazu $A \subseteq \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$ mit $|A| \leq \mathbf{m}$. Für ein $a \in A$ gibt es ein $\alpha_a < \tau$ minimal, mit $a \in F_{\alpha_a}$. Also $|\bigcup_{a \in A} \alpha_a| \leq \mathbf{m}$ (man beachte $\alpha_a < \tau \Rightarrow \alpha_a \leq \mathbf{m}$). Insbesondere also $\bigcup_{a \in A} \alpha_a \neq \tau$ also $\alpha* := \bigcup_{a \in A} \alpha_a < \tau$ und deshalb $A \subseteq \bigcup_{a \in A} F_{\alpha_a} \subseteq F_{\alpha*}$, wobei eben $\alpha* < \tau$ gilt. Hieraus bekommen wir aber

$\overline{A} \subseteq \overline{F_{\alpha*}} = F_{\alpha*} \subseteq \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$. Dies heißt aber $\bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$ ist abgeschlossen (Andernfalls $\exists x \in \overline{\bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha} \setminus \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$. Wähle dann für $U \in \mathscr{B}(x)$ je ein $y_U \in U \cap \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$ und setze $Y := \{y_U \mid U \in \mathscr{B}(x)\} \subseteq \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$. Dann gilt $|Y| \leq \mathbf{m}$, also $\overline{Y} \subseteq \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$, aber $x \in \overline{Y} \Rightarrow$ Widerspruch!)!
Mit X hat also auch $\bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$ die Eigenschaft, dass jede offene Überdeckung eine Teilüberdeckung von Kardinalität $\leq \mathbf{m}$ hat. Annahme $\exists y \in X \setminus \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$. Dann wähle für $x \in \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$ je ein $U_x \in \mathscr{B}(x)$, mit $y \notin U_x$. Es gibt also ein $Y \subseteq \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$, mit $|Y| \leq \mathbf{m}$ und $\bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha \subseteq \bigcup_{x\in Y} U_x$. Nun gibt es aber auch ein $\alpha < \tau$ mit $Y \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$, also $\mathscr{U} := \{U_x \mid x \in Y\} \subseteq \{\mathscr{B}(x) \mid x \in \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta\}$, $|\mathscr{U}| \leq \mathbf{m}$ und $X \setminus \bigcup \mathscr{U} \neq \emptyset$; ABER $F_\alpha \setminus \bigcup \mathscr{U} = \emptyset \Rightarrow$ Widerspruch!
Also gilt $X = \bigcup_{\alpha<\tau} F_\alpha$ und somit $|X| \leq 2^{\mathbf{m}} = 2^{\chi(X)}$ (denn $\tau = \mathbf{m}^+ \leq 2^{\mathbf{m}}$ und $\forall \alpha < \tau$: $|F_\alpha| \leq 2^{\mathbf{m}}$).

5 Zusammenhang und Homotopie

"TV ist nicht die Wahrheit. TV ist ein Freizeitpark. Wir sind im Langeweiletötungsgeschäft. Ihr werdet nie die Wahrheit von uns hören. Wir erzählen euch jeden Scheiss den ihr wollt. Wir lügen wie gedruckt. Wir handeln mit Illusionen, nichts davon ist wahr. Ihr glaubt tatsächlich TV ist Realität? Das ist Irrsinn. Schaut euch an, ihr macht was TV sagt, ihr sprecht wie TV, ihr kleidet wie TV, ihr esst wie TV, ja ihr erzieht eure Kinder wie TV und denkt wie TV. Das ganze ist eine Massenverrücktheit! Deshalb, schaltet diesen Kasten sofort aus. Jetzt...sofort!!!"

5.1 Zusammenhang und Wegzusammenhang

Denkt man an offene oder abgeschlossene Intervalle, so hat man intuitiv das Gefühl, dass diese "zusammenhängen". Diese Gefühl drücken wir nun in einer präzisen Definition aus und beweisen sodann einige wichtige Eigenschaften dieser "zusammenhängenden" Räume.

5.1.1 Definition

Sei (X, τ) ein top. Raum. $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow \neg\exists U, V \in \tau$ mit $A \subseteq U \cup V$, $A \cap U \cap V = \emptyset$, $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$. Anders formuliert: Außer $\emptyset$ und A gibt es keine weiteren sowohl offenen, als auch abgeschlossenen Mengen in A (Teilraumtopologie). Oder noch anders formuliert: Jede stetige Abbildung $f : A \to Y$ in einen zweielementigen Raum Y mit diskreter Topologie ist konstant (Beweis?).

A heißt hingegen wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow \forall a, b \in A \, \exists f : [0,1] \to X$ stetig, mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$. Derartige f werden als Wege bezeichnet.

5.1.2 Lemma

(X, τ) ist genau dann zusammenhängend, wenn für jede offene Überdeckung $\sigma \subseteq \tau$ gilt:
$\forall x, y \in X \, \exists U_1, \ldots, U_n \in \sigma$ mit $x \in U_1, y \in U_n$ und $U_k \cap U_l \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \ |k - l| \leq 1$.

Beweis: Gilt für jede offene Überdeckung obige Eigenschaft, so kann es keine offenen, disjunkten, nichtleeren Mengen U, V geben mit $U \cup V = X$, denn $\{U, V\}$ wäre nun eine offene Überdeckung, die diese Eigenschaft gerade nicht hätte.

Sei andererseits (X, τ) als zusammenhängend vorausgesetzt und sei $\sigma \subseteq \tau$ eine offene Überdeckung. Für $x \in X$ setze $D_x := \{y \in X \mid \exists U_1, \ldots, U_n \in \sigma \text{ mit } x \in U_1, y \in U_n \text{ und } U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset\}$. Offenbar ist D_x offen und $D_x \cap D_y \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \ D_x = D_y$ für alle $x, y \in X$. Da X zusammenhängend ist und $\mathscr{D} := \{D_x \mid x \in X\}$ eine Zerlegung von X in paarweise offene Mengen darstellt, gilt $\mathscr{D} = \{X\}$. Seien nun $x, y \in X$ gegeben und $U_1, \ldots, U_n$ eine Folge minimaler Länge aus σ mit $x \in U_1$, $y \in U_n$ und $U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$. Offenbar gilt dann sogar $U_k \cap U_l \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \ |k - l| \leq 1$.

5.1.3 Satz und Definition

Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten Sei (X,τ) ein top. Raum. Dann weden sowohl durch

1) $x \sim y \Leftrightarrow$ es gibt ein zusammenhängendes $A \subseteq X$ mit $x,y \in A$, als auch

2) $x \approx y \Leftrightarrow x,y \in X$ sind durch einen Weg verbunden,

Äquivalenzrelationen auf X definiert. Die Äquivalenzklassen heißen entsprechend Zusammenhangskomponenten bzw Wegzusammenhangskomponenten.

Beweis: 1) Zu zeigen ist nur die Transitivität. Sei also $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gibt es zusammenhängende A,B mit $x,y \in A$ und $y,z \in B$. Wir zeigen $A \cup B$ ist zusammenhängend. Sei dazu $A \cup B \subseteq U \cup V$, für offene U,V mit $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset \neq V \cap (A \cup B)$. Dann ist auch $A \subseteq U \cup V$ und $B \subseteq U \cup V$. Nehmen wir mal an $U \cap V = \emptyset$. Dann muss A und B bereits komplett in U oder V liegen. $A \cup B \subseteq U$ oder $A \cup B \subseteq V$ ist aber nicht möglich. Es liegt also einer von beiden in U und der andere in V. Dann aber $y \in U \cap V$ - Widerspruch.

2) bleibt als Übung.

5.1.4 Lemma

Eine Teilmenge A des $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie von einer der folgenden Formen ist: $[a,b],(a,b),(a,b],[a,b),[a,\infty),(a,\infty),(\infty,b],(\infty,b),\mathbb{R}$. Insbesondere sind wegzusammenhängende Teilmengen A eines topologischen Raums X auch zusammenhängend.

Beweis: Der erste Teil bleibt als Übung. Für den zweiten Teil nehmen wir uns eine nicht konstante, aber stetige Abbildung $f: A \to Y$ (wobei $A \subseteq X$; X ist ein beliebiger top. Raum), wobei $Y = \{y_1, y_2$ zweielementig ist und mit der diskreten Topologie versehen ist. Also $f(a_1) = y_1$ und $f(a_2) = y_2$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $g: [0,1] \to A$ mit $g(0) = a_1$ und $g(1) = a_2$. Dann ist aber auch $f \circ g: [0,1] \to Y$ stetig und nicht konstant - im Widerspruch zum Zusammenhang von $[0,1]$.

5.1.5 Beispiel

Sei A eine abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $n > 1$. Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ wegzusammenhängend (das liegt daran, dass zwei verschiedene Punkte durch überabzählbar viele disjunkte - bis auf Anfangs und Endpunkt - stetige Kurven verbunden sind, es also wenigstens eine Kurve gibt, die keinen der abzählbar vielen Punkte trifft), also insbesondere auch zusammenhängend (denn wegzusammenhängende Räume auch zusammenhängend).

5.1.6 Lemma

Bilder zusammenhängender (bzw. wegzusammenhängender) Mengen unter stetigen Abbildungen sind zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend).

Beweis: Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Wenn $f(A) \subseteq U \cup V$, mit $f(A) \cap U \neq \emptyset f(B) \cap V$, dann offensichtlich $A \subseteq f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ mit $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset \neq A \cap f^{-1}(V)$. Also $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ und somit $U \cap V \neq \emptyset$.

Der zweite Teil bleibt als Übung.

5.1.7 Lemma

Sei X ein top. Raum und A eine zusammenhängende Teilmenge von X. Wenn $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, dann ist auch B zusammenhängend. Insbesondere sind somit die Zusammenhangskomponenten abgeschlossen (sonst wäre der Abschluss einer solchen Komponente echt größer und ebenfalls zusammenhängend).

Beweis: Wenn $B \subseteq U \cup V$ mit $B \cap U \neq \emptyset \neq B \cap V$, so offensichtlich $\overline{A} \cap U \neq \emptyset \neq \overline{A} \cap V$, also auch $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$ und demzufolge auch $U \cap V \neq \emptyset$.

5.1.8 Beispiel

Sei $X := \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann ist $\overline{X}$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Beweis: Wir haben $\overline{X} = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\} \cup X$. Und das $\overline{X}$ zusammenhängend ist, folgt aus vorigem Lemma. Annahme es gibt ein stetiges $f : [0,1] \to \overline{X}$, mit $f(0) = (0,0)$ und $f(1) = (1/\pi, 0)$. Nun ist $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ mit f_1, f_2 stetig und $f_1(0) = 0$ bzw. $f_1(1) = 1$. Also existiert ein $t_1 \in [0,1)$ mit $f_1(t_1) = 2/((2 \cdot 1 + 1)\pi)$. Also gibt es ein $t_2 \in [0, t_1)$ mit $f_1(t_2) = 2/((2 \cdot 2 + 1)\pi)$. ... Es gibt ein $t_{n+1} \in [0, t_n)$ mit $f_1(t_{n+1}) = 2/((2 \cdot (n+1) + 1)\pi)$. (t_n) ist nun eine streng monoton fallende, nach unten durch 0 beschränkte Folge. Demzufolge existiert $lim\, t_n =: t \geq 0$. Da $(f_1(t_n), f_2(t_n)) \in X$ $(f_1(t_n) \neq 0)$, folgt $f_2(t_n) = \sin(1/(f_1(t_n))) = \sin(\pi(2n+1)/2) = (-1)^n$. Dann wäre aber $f(t_n)$ nicht konvergent - im Widerspruch zur Stetigkeit.

5.1.9 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Die Familie $(A_i)_{\in I}$ von Teilmengen von X heißt **kettenverbunden** in X, wenn alle A_i zusammenhängend sind und es zu zwei $i, j \in I$ endlich viele Indizes $i = i_0, \ldots, i_n = j$ gibt derart, dass $A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ gilt (für $k = 0, \ldots, n-1$).

5.1.10 Lemma

a) Wenn es zu je zwei Punkten in X eine zusammenhängende die beiden Punkte enthaltene Teilmenge gibt, dann ist auch X zusammenhängend.
b) Wenn $(A_i)_{\in I}$ kettenverbunden in X ist, dann ist $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ zusammenhängend.

Beweis: Bleibt auch als Übung. Insbesondere ist also die Vereinigung zweier zusammenhängender Teilmengen, mit nichtleerem Schnitt, zusammenhängend.

5.1.11 Satz

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie zusammenhängender (wegzusammenhängender) topologischer Räume. Dann ist auch $X := \prod_{i\in I} X_i$ zusammenhängend (wegzusammenhängend).

Beweisskizze: Erst zeigt man die Aussage für zwei zusammenhängende topologische Räume Z, Y. Wenn nämlich $(z,y),(z',y') \in Z \times Y$, dann $(z,y),(z',y') \in (Z \times \{y\}) \cup (\{z'\} \times Y)$. Letztere Menge ist aber zusammenhängend, also ist dies auch $Z \times Y$. Durch Induktion verallgemeinert man auf beliebige endliche Produkte. Nun wählen wir ein $(y_i)_{i\in I} = y \in \prod_{i\in I} X_i$ und bilden $Y := \{x \in X \mid x_i = y_i$ bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen $\}$. Zwei Punkte aus Y unterscheiden sich also an höchstens endlich vielen Koordinaten, und man kann nun leicht mit dem ersten Teil zeigen, dass es eine zusammenhängende die beiden Punkte enthaltene Teilmenge von Y gibt. Y ist also zusammenhängend. Noch leichter sieht man, dass Y auch dicht in X liegt. Hieraus gewinnt man dann, dass auch X zusammenhängend sein muss. Das Produkte wegzusammenhängender Räume wieder wegzusammenhängend sind, lässt sich sehr viel einfacher beweisen.

5.1.12 Lemma

Seien A, B abgeschlossen und $A\cup B$, $A\cap B$ zusammenhängend (in einem top. Raum (X, τ)). Dann sind auch A und B zusammenhängend.

Beweis: Es reicht, wenn wir zeigen, dass A zusammenhängend ist. Nehmen wir mal an es gibt offene und disjunkte U, V mit $A \subseteq U \cup V$ und $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$. Da $A \cap B$ zusammenhängend ist, können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass $A \cap B \subseteq V$ (also $A \cap B \cap U = \emptyset$).Setzen wir dann $P := U \cap (X \setminus B)$ und $Q := V \cup (X \setminus A)$, so kann man leicht nachrechnen, dass gilt: $A\cup B \subseteq P \cup Q$, $(A\cup B)\cap P \neq \emptyset \neq (A\cup B)\cap Q$ und $(A\cup B)\cap P \cap Q = \emptyset$ - ein Widerspruch.

5.1.13 Satz

Sei (X,τ) ein zusammenhängender Raum mit $|X| \geq 2$.

a) Sei $A \subseteq X$ und A auch zusammenhängend. Sei ferner $X \setminus A = U \cup V$ mit $U \cap V = \emptyset$ und U,V : offen in $X \setminus A$. Dann ist $A \cup U$ zusammenhängend (in X).

b) Sei $A \subseteq X$ wieder zusammenhängend und B eine Zusammenhangskomponente von $X \setminus A$, also von der Form $B = \bigcup\{C \mid a \in C \subseteq X \setminus A,\ C : \text{zusammenhängend in } X \setminus A\}$, für ein gewisses $a \in X \setminus A$. Dann ist $X \setminus B$ zusammenhängend!

c) Es gibt zwei disjunkte, nicht leere zusammenhängende Teilmengen M,N mit $X = M \cup N$.

Beweis: a) U und V sind auch abgeschlossen in $X \setminus A$, es gibt also in X abgeschlossene Mengen U',V' mit $U = U' \cap (X \setminus A)$ und $V = V' \cap (X \setminus A)$. Nehmen wir nun an $A \cup U$ ist nicht zusammenhängend. Dann ist $A \cup U = C \cup D$, mit $C \cap D = \emptyset$ und $C \neq \emptyset$ und $D \neq \emptyset$ und $C = C' \cap (A \cup U)$ und $D = D' \cap (A \cup U)$, wobei C',D' offen in X sind. O.B.d.A. ist $A \subseteq C$ (da A zusammenhängend ist), also $A \cap D' = \emptyset$. Wir setzen nun $P := (X \setminus V') \cap D'$ und $Q := (X \setminus U') \cup C'$. Wir zeigen nun im Folgenden, dass P und Q nichtleere offene, aber disjunkte Mengen sind, deren Vereinigung gleich X ist. Dies ist dann ein Widerspruch, da X zusammenhängend ist.

Es ist $D \subseteq X \setminus V'$, denn Annahme $x \in D$ und $x \in V'$ impliziert $x \in V' \cap (X \setminus A) = V$, also $x \notin A \cup U = C \cup D$ - Widerspruch. Also $D \subseteq (X \setminus V') \cap D'$ und damit $P \neq \emptyset$.

Offensichtlich ist $C \subseteq Q$, also $Q \neq \emptyset$.

Berechnen wir $P \cap Q$. Es gilt $P \cap Q = [(X \setminus V') \cap D' \cap (X \setminus U')] \cup [(X \setminus V') \cap D' \cap C']$. Nun ist $(X \setminus V') \cap D' \cap (X \setminus U') = D' \cap [X \setminus (U' \cup V')] \subseteq D' \cap A = \emptyset$. Andererseits erhalten wir

$(X \setminus V') \cap D' \cap C' \subseteq (X \setminus V') \cap [X \setminus (A \cup U)] = (X \setminus V') \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus U) = (X \setminus V') \cap (U \cup V) \cap (X \setminus U) \subseteq (X \setminus V') \cap V = \emptyset$.

Insgesamt also $P \cap Q = \emptyset$.

Sei nun $x \in X$ und $x \notin Q$. Dann ist $x \in U'$ und $x \in X \setminus C' \subseteq X \setminus C \subseteq X \setminus A$. Also ist $x \in U$. Währe $x \in V'$, so also auch in V, was im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$ steht. Also ist $x \in X \setminus V'$. Da außerdem $x \in U \subseteq A \cup U = C \cup D$ und $x \notin C'$, folgt $x \in D \subseteq D'$ und damit $x \in P$. Wir erhalten also $X = P \cup Q$.

b) Annahme $X \setminus B$ ist nicht zusammenhängend, also von der Form $X \setminus B = U \cup V$, mit in $X \setminus B$ offenen, disjunkten und nicht leeren Mengen U,V. Nun ist auch B zusammenhängend in X und $A \subseteq X \setminus B$, also o.B.d.A. $A \subseteq U$ (da A zusammenhängend ist). Aus a) folgt aber $B \cup V$ ist zusammenhängend und außerdem $B \cup V \subseteq X \setminus A$. Also ist $B \cup V$ auch in $X \setminus A$ zusammenhängend, und da B eine Komponente (in $X \setminus A$) ist, folgt $V \subseteq B$ - ein Widerspruch!

c) Folgt unmittelbar aus b). Für $x \in X$ setzen wir $A := \{x\}$. Sei dann B die Zusammenhangskomponente (in $X \setminus A$) eines $y \in X \setminus A$. Wir setzen einfach $M := B$ und $N := X \setminus B$.

5.1.14 Satz

Sei (X,τ) ein lokal-kompakter T_4-Raum.

a) Sei C eine kompakte Zusammenhangskomponente von X. Dann bilden die offenen und gleichzeitig abgeschlossenen Mengen P mit $C \subseteq P$ eine Umgebungsbasis von C.

b) Sei X nun auch zusammenhängend, $K \in \tau$ mit $\overline{K}$ kompakt und $C \neq \emptyset$ eine Zusammenhangskomponente von $\overline{K}$. Dann gilt $C \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$ (o.B.d.A. sei $K \neq X$).

c) Sei wieder X zusammenhängend und $K \subseteq X$ kompakt. Sei C eine Komponente von K. Dann gilt $C \cap \overline{X \setminus K} \neq \emptyset$.

Beweis: Für jedes $A \subseteq X$ mit $C \subseteq A$ setzen wir $\phi_A(C) := \{P \subseteq A \mid P \text{ ist offen und abgeschlossen in } A \text{ und } C \subseteq P\}$.

Sei nun A offen, mit $\overline{A}$ kompakt und $C \subseteq A$ (Warum existiert so ein A überhaupt?) Angenommen $C \subsetneq \bigcap_{P \in \phi_{\overline{A}}(C)} P =: B$.

Da C eine Zusammenhangskomponente ist, können wir B dann zerlegen in $B = M \cup N$, mit M,N offen in B, $M,N \neq \emptyset$, aber $M \cap N = \emptyset$. Da B abgeschlossen ist und M und N abgeschlossen in B sind, sind sie auch in X abgeschlossen. Wir finden also disjunkte und in X offene Mengen U,V mit $M \subseteq U$ und $N \subseteq V$. O.B.d.A. sei $C \subseteq M$. Es gilt dann $\overline{A} \setminus (U \cup V) \subseteq \overline{A} \setminus B = \bigcup_{P \in \phi_{\overline{A}}(C)} (\overline{A} \setminus P)$. Aus der Kompaktheit von $\overline{A} \setminus (U \cup V)$ folgern wir, dass es endlich viele $P_1,\dots,P_n \in \phi_{\overline{A}}(C)$ gibt, mit $\overline{A} \setminus (U \cup V) \subseteq \overline{A} \setminus \bigcap_{k=1}^n P_k$. Es gilt also $P := \bigcap_{k=1}^n P_k \subseteq U \cup V$. Nun ist auch P in $\overline{A}$ sowohl offen, als auch abgeschlossen. Darum ist $P \cap U$ offen in $\overline{A}$ und $P \cap (\overline{A} \setminus V)$ abgeschlossen in $\overline{A}$. Es ist aber $P \cap U = P \cap (\overline{A} \setminus V)$, also $P \cap U \in \phi_{\overline{A}}(C)$ - ein Widerspruch! Also $C = \bigcap_{P \in \phi_{\overline{A}}(C)} P$.

Es ist $C \subseteq A$, also $\emptyset = C \cap (\overline{A} \setminus A) = (\overline{A} \setminus A) \cap \bigcap_{P \in \phi_{\overline{A}}(C)}$. Wieder folgt aus der Kompaktheit, dass es bereits endlich viele $P_1',\dots,P_m' \in \phi_{\overline{A}}(C)$ gibt, mit $(\overline{A} \setminus A) \cap P_1' \cap \dots \cap P_m' = \emptyset$. Mit $P' := P_1' \cap \dots \cap P_m' \in \phi_{\overline{A}}(C)$ gilt also $P \cap (\overline{A} \setminus A) = \emptyset$. Nun ist P abgeschlossen und offen in $\overline{A}$, also auch abgeschlossen in X außerdem ist $P \subseteq A$ und auch offen in A, also auch offen in X (denn A ist offen in X). P ist also offen und abgeschlossen in X und da - wie man leicht nachrechnet - die offenen und relativ kompakten (das heißt hier der Abschluss ist kompakt) Umgebungen A von C eine Umgebungsbasis bilden, ist somit auch $\phi_X(C)$ eine!

b) Angenommen $C \cap (X \setminus K) = \emptyset$, also $C \subseteq K$. Dann gibt es in X offene und disjunkte Mengen U,V mit $C \subseteq U$ und $X \setminus K \subseteq V$ (T_4). Also auch $C \subseteq U' := U \cap K \in \tau$. Nun ist U' auch offen in $\overline{K}$, es gibt also ein $P \in \phi_{\overline{K}}(C)$ mit $C \subseteq P \subseteq U'$. Daraus folgt: P ist offen und abgeschlossen in X. Nun ist $\emptyset \neq P \neq X$ - ein Widerspruch dazu, dass X zusammenhängend ist.

c) 1.Fall $\overline{X \setminus K} = X$ - fertig.

2.Fall $\overline{X \setminus K} \neq X$. Dann ist $K^\circ \neq \emptyset$ und $\overline{K^\circ}$ kompakt.

Fall 2.1 Es ist $C \subseteq \overline{K^\circ}$. Dann folgt aus b) sofort $\emptyset \neq C \cap \overline{X \setminus K^\circ} = C \cap (X \setminus \overline{K^\circ}) = C \cap \overline{X \setminus K}$.

Fall 2.2 Es ist $C \nsubseteq \overline{K^\circ}$. Dann folgt $\emptyset \neq C \cap (K \setminus \overline{K^\circ}) \subseteq C \cap (K \setminus K^\circ) = C \cap \overline{X \setminus K}$.

5.1.15 Korollar

Sei (X,τ) kompakt, T_2 und zusammenhängend, $U \in \tau$ mit $\emptyset \neq U \neq X$ und C eine nicht leere Komponente von U. Dann ist $\overline{C} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.

Beweis: Falls $\overline{C} \subseteq U$, so gäbe es in X offene und disjunkte V,W mit $\overline{C} \subseteq V$ und $X \setminus U \subseteq W$ (der Raum ist auch T_4). Nun ist U als Teilraum lokal kompakt und $\overline{C}$ zusammenhängend mit $\overline{C} \subseteq U$. Es folgt $C = \overline{C}$ (!). Es ist ferner $C \subseteq V' := V \cap U \in \tau$ und C kompakt. Aus dem vorigen Lemma (einschließlich der dort verwendeten Notation) schließen wir auf die Existenz eines $P \in \phi_U(C)$ mit $C \subseteq P \subseteq V'$. Nun ist P offen in U, also auch in X und P ist abgeschlossen in U, also auch in $X \setminus W$ (da $P \subseteq X \setminus W \subseteq U$) und somit auch in X! Da $\emptyset \neq C \subseteq P \subseteq U \subsetneq X$, haben wir einen Widerspruch dazu, dass X zusammenhängend ist.

5.1.16 Satz

Sei (X,τ) ein kompakter und zusammenhängender T_2-Raum. Dann gibt es keine Folge paarweise disjunkter, nicht leerer abgeschlossener Mengen A_i mit $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Interessante Spezialfälle sind kompakte Intervalle $[a,b]$ aus $\mathbb{R}$.

Beweis: Angenommen es gibt doch solche A_i, also $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Sei $V \in \tau$ mit $A_2 \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus A_0$. Für ein $a \in A_1$ wählen wir eine Komponente C von $\overline{V}$ mit $a \in C$. Aus Satz 5.1.14 folgt $C \cap \overline{X \setminus \overline{V}} \neq \emptyset$. Sei dann $x \in C \cap \overline{X \setminus \overline{V}}$. Somit ist $x \notin A_0 \cup A_1$, also gibt es ein $i \neq 0,1$ mit $x \in A_i$. Das heißt $|\{i \in \mathbb{N} \mid C \cap A_i \neq \emptyset\}| \geq 2$ und $C \cap A_0 = \emptyset$. Da C zusammenhängend ist, muss es aber bereits unendlich viele A_i nicht leer schneiden, sonst $C = \bigcup_{k=1}^{n}(C \cap A_{i_k})$, für gewisse A_{i_k} und $C \cap A_{i_k}$ ist in C sowohl offen, als auch abgeschlossen.

Wir setzen nun $C_0 := C$. Seien $C_0,\dots,C_n$ bereits konstruierte kompakte zusammenhängende Mengen, mit 1) $C_n \subseteq \dots \subseteq C_0$, 2) $C_k \cap A_k = \emptyset$, für alle $0 \leq k \leq n$ und 3) jedes C_k schneidet unendlich viele A_l, $1 \leq k \leq n$ und $l \in \mathbb{N}$.

Falls $C_n \cap A_{n+1} = \emptyset$, so setzen wir $C_{n+1} := C_n$. Falls hingegen $C_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, dann gibt es wie schon bei der Konstruktion von $C = C_0$, ein kompaktes zusammenhängendes $C_{n+1} \subseteq C_n$ mit 1) $C_{n+1} \cap A_{n+1} = C_{n+1} \cap (C_n \cap A_{n+1}) = \emptyset$ und 2) $\{i \in \mathbb{N} \mid C_{n+1} \cap (C_n \cap A_i) \neq \emptyset\}$ ist unendlich (C_n übernimmt die Rolle von X und $C_n \cap A_i$ übernimmt die Rolle von A_i).

Wir bekommen somit eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter, nicht leerer (und zusammenhängender) Mengen mit $C_{n+1} \subseteq C_n$. Das bedeutet aber $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ (Kompaktheit!). Andererseits gilt aber $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n) \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k) \cap A_n] = \emptyset$ - ein Widerspruch!

5.1.17 Definition

Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Unter der **Quasikomponente** C eines Punktes $x \in X$ verstehen wir

$$C := \bigcap \{A \subseteq X \mid A, X \setminus A \in \tau \text{ und } x \in A\}$$

also den Schnitt aller offenen und abgeschlossenen den Punkt x enthaltenden Mengen.

Offenbar sind Quasikomponenten abgeschlossen und die Menge aller Quasikomponenten bildet eine Zerlegung von X (d.h. jeder Punkt $x \in X$ ist in einer Quasikomponente und für zwei Quasikomponenten C, C' mit $C \cap C' \neq \emptyset$ gilt $C = C'$).

5.1.18 Lemma

Ist C eine Quasikomponente und $x \in C$, so gilt

$$C = \{y \in X \mid \forall f : X \to \{0,1\} \text{ stetig ist } f(x) = f(y)\}$$

(wir versehen $\{0,1\}$ natürlich mit der diskreten Topologie).

Beweis: Setze $D = \{y \in X \mid \forall f : X \to \{0,1\} \text{ stetig ist } f(x) \neq f(y)\}$. Zu zeigen ist $C = D$. Sei $y \in C$ und $f : X \to \{0,1\}$ stetig. Dann ist $A := f^{-1}(f(x))$ eine offen und abgeschlossene Teilmenge von X mit $x \in A$. Da $y \in C$ ist $y \in A$ und somit $f(y) = f(x)$. Ist umgekehrt $y \in D$, so muss auch $y \in C$ gelten. Andernfalls gibt es eine offen abgeschlossene Menge A mit $x \in A$ und $y \in X \setminus A$. Wir definieren ein stetiges $f : X \to \{0,1\}$ durch $f(A) = \{0\}$ und $f(X \setminus A) = \{1\}$. Offenbar ist nun $f(x) \neq f(y)$ - Widerspruch.

5.1.19 Bemerkung

Man könnte nun auf den Gedanken kommen, dass jede stetige Funktion $f : C \to \{0,1\}$ konstant ist - C also zusammenhängend ist. VORSICHT: Wir wissen lediglich, dass jede stetige Abbildung $f : X \to \{0,1\}$ auf der Quasikomponente C konstant ist.

5.1.20 Satz

Seien (X_i, τ_i), $i \in I$ Topologische Räume und $x = (x_i)_{i \in I} \in X := \prod_{i \in I} X_i$. Für jedes $i \in I$ sei C_i die Quasikomponente von x_i. Dann ist $\prod_{i \in I} C_i$ die Quasikomponente von x.

Beweis: Sei C die Quasikomponente von x und $C' := \prod_{i \in I} C_i$. Sei $\mathscr{C}_i := \{A \subseteq X_i \mid A, X \setminus A \in \tau_i$ und $x_i \in A\}$, also $C_i = \bigcap \mathscr{C}_i$. Für jedes $j \in I$ sei $\mathscr{C}'_j := \{\prod_{i \in I} A_i \mid A_j \in \mathscr{C}_j \text{ und } \forall i \neq j : A_i = X_i\}$. Die Elemente in $\mathscr{C}'_j$ sind offen und abgeschlossen in X und enthalten alle x. Es folgt

$$C' = \prod_{j \in I} C_j = \bigcap_{j \in I} (\bigcap \mathscr{C}'_j) = \bigcap (\bigcup_{j \in I} \mathscr{C}'_j) \supseteq C \quad (*)$$

Für die andere Inkusion müssen wir weiter ausholen. Wir beweisen diese erst für ein Produkt von zwei Räumen. Sei C_x die Quasikomponente von $x \in X$ und C_y die Quasikomponente von $y \in Y$. Dann ist $C := C_x \times C_y$ die Quasikomponente von $(x,y) \in X \times Y$. Beweis dazu: Sei

$f : X \times Y \to \{0,1\}$ stetig und $(x',y') \in C$. Zu zeigen ist nur noch $f(x,y) = f(x',y')$. Dazu definieren wir die Homöomorphismen $g : X \times \{y\} \to X$, $(x_0,y) \mapsto x_0$ und $h : \{x'\} \times Y \to Y$, $(x',y_0) \mapsto y_0$. Dann sind $f \circ g^{-1} : X \to \{0,1\}$ und $f \circ h^{-1} : Y \to \{0,1\}$ stetig, also

$$f(x,y) = f \circ g^{-1}(x) = f \circ g^{-1}(x') = f(x',y) = f \circ h^{-1}(y) = f \circ h^{-1}(y') = f(x',y')$$

Damit haben wir $C \subseteq \{(x',y') \in X \times Y \mid \forall f : X \times Y \to \{0,1\} \text{ stetig ist } f(x,y) = f(x',y')\}$. Aus Lemma 5.1.18 und $(*)$ folgt dass C die Quasikomponente von (x,y) ist. Per Induktion bekommen wir, dass $C_1 \times ... \times C_n$ die Quasikomponente von $(x_1,...,x_n)$ in $X_1 \times ... \times X_n$ ist, falls C_i, $i = 1,...,n$ die Quasikomponente von x_i in X_i ist.

Kommen wir nun zurück zum allgemeinen Fall. Wir setzen dazu

$$D := \{y \in \prod_{i \in I} C_i \mid y_i = x_i \text{ bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen }\}.$$

und zeigen, dass jede stetige Abbildung $f : X \to \{0,1\}$ auf D konstant ist. Sei also $y \in D$. Es gibt dann ein endliches $J \subseteq I$ mit $y_i = x_i$ für alle $i \in I \setminus J$. Dann gilt

$$x,y \in O := \prod_{i \in I} O_i \quad \text{mit} \quad O_i = \begin{cases} \{x_i\} & \text{falls } i \notin J \\ X_i & \text{falls } i \in J \end{cases}$$

$g : O \to \prod_{i \in J} X_i$, $(z_i)_{i \in I} \mapsto (z_i)_{i \in J}$ ist ein Homöomorphismus. Dann ist aber $g^{-1}(\prod_{i \in J} C_i)$ die Quasikomponente von $x \in O$. Da $y \in g^{-1}(\prod_{i \in J} C_i)$ gilt für die stetige Einschränkung $f|O : O \to \{0,1\}$ von f auf O nach Lemma 5.1.18 aber $f|O(y) = f|O(x)$, also $f(y) = f(x)$.

Nun ist offenbar $\overline{D} = C' (= \prod_{i \in I} C_i)$ und $f|C' : C' \to \{0,1\}$ hat Werte in einem T_2-Raum. Da f eingeschränkt auf die dichte Teilmenge D konstant ist, muss auch die Einschränkung $f|C'$ von f auf C' konstant sein (Lemma 3.3.3). Mit Lemma 5.1.18 folgern wir $C' \subseteq C$.

5.2 Lokaler Zusammenhang, lokaler Wegzusammenhang

5.2.1 Definition

lokal zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend X heißt lokal zusammenhängend, wenn jeder Punkt aus X eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Umgebungen hat. Entsprechend ist lokal wegzusammenhängend definiert.

5.2.2 Satz

a) Ein Raum, der zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, der ist bereits wegzusammenhängend.
b) Ein Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ lokal zusammenhängender Räume ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn alle X_i lokal zusammenhängend sind und bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen die X_i sogar zusammenhängend sind.

Beweis: a) Die Wegzusammenhangskomponenten sind offen. Da der Raum zusammenhängend ist, kann er somit nicht disjunkte Vereinigung mehrere offener Mengen sein. Es gibt also genau eine Wegzusammenhangskomponente. b) Bleibt wieder als Übung :-).

5.2.3 Lemma

Ein Raum (X, τ) ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn jede Zusammenhangskomponente einer offenen Teilmenge offen ist. Dann ist offensichtlich die Menge $\mathscr{B}$ aller Zusammenhangskomponenten offener Mengen eine Basis der Topologie. Umgekehrt ist natürlich jeder topologische Raum, der eine Basis aus zusammenhängenden Mengen hat lokal zusammenhängend.

Beweis: Sei (X, τ) lokal zusammenhängend und C eine Komponente von $O \in \tau$. Wir wählen dann ein $c \in C$. Nun ist $c \in C \subseteq O$, es gibt also eine zusammenhängende Umgebung V von c mit $c \in V \subseteq O$. Dann ist aber auch $C \cup V$ zusammenhängend und $C \cup V \subseteq O$. Damit gilt $c \in V \subseteq C$. Dann enthält C mit jedem Punkt $c \in C$ also eine Umgebung von c und ist somit offen.

Für die Rückrichtung nehmen wir ein $x \in X$ und ein $O \in \dot{x} \cap \tau$. Der Punkt x steckt in einer Komponente C von O, die offen ist. Na ja, zusammenhängen ist sie offensichtlich auch. Also ist C eine Zusammenhängende Umgebung (sogar eine offene) mit $c \in C \subseteq V$. Der Raum ist also lokal zusammenhängend.

5.2.4 Satz

Sei (X, τ) lokal zusammenhängend. Seien weiter A, B abgeschlossene Teilmengen von X. Wenn $A \cap B$ und $A \cup B$ lokal zusammenhängend sind (als Teilraum), so sind dies auch A und B.

Beweis: Wir zeigen, dass A lokal zusammenhängend ist. Sei $x \in A$ und $U \in \dot{x} \cap \tau$. 1.Fall $x \in A \setminus B$. Dann ist auch $x \in U \setminus B \in \tau$ und es gibt ein $V \in \tau$ mit $V \cap (A \cup B)$ zusammenhängend und $V \cap (A \cup B) \subseteq (U \setminus B) \cap (A \cup B)$ (es ist $A \cup B$ lokal zusammenhängend). Es ist $V \cap A = V \cap (A \cup B) \subseteq (U \setminus B) \cap (A \cup B) \subseteq U \cap A$.

2.Fall $x \in A \cap B$ und $U \in \dot{x} \cap \tau$. Sei W die Zusammenhangskomponente von $x \in U \cap (A \cap B)$ in $U \cap (A \cap B)$. Dann ist W offen in $U \cap (A \cap B)$ (denn $A \cap B$ ist lokal zusammenhängend). Also $W = W' \cap U \cap (A \cap B)$, mit $W' \in \tau$. Sei V die Zusammenhangskomponente von W in $W' \cap U \cap (A \cup B)$. Dann ist V offen in $A \cup B$ (denn auch $A \cup B$ ist lokal zusammenhängend). Wir haben $(A \cap V) \cup (B \cap V) = (A \cup B) \cap V = V$ und $(A \cap V) \cap (B \cap V) = A \cap B \cap V = W$. Die Mengen $A \cap V$ und $B \cap V$ sind in V abgeschlossen, also ist nach Lemma 5.1.12 auch $A \cap V$ (und auch $B \cap V$) in V zusammenhängend (und damit auch in X). Nun ist V von der Form $V = V' \cap (A \cup B)$, mit $V' \in \tau$. Sei dann P die Zusammenhangskomponente von V in V'. Dann ist P

offen in X (denn X ist lokal zusammenhängend) und es gilt $V \subseteq P \cap (A \cup B) \subseteq V' \cap (A \cup B) = V$, also $P \cap A = V \cap A \subseteq U \cap A$.

5.2.5 Korollar

Sei (X, τ) lokal zusammenhängend, $Y \subseteq X$ und ∂Y lokal zusammenhängend (∂Y ist der Rand von Y). Dann ist auch $\overline{Y}$ lokal zusammenhängend.

Beweis: Setze $A := \overline{Y}$ und $B := \overline{X \setminus Y}$. Dann sind A und B abgeschlossen, $A \cap B = \partial Y$ ist lokal zusammenhängend und $A \cup B = X$ ist auch lokal zusammenhängend. Die Aussage folgt also aus dem vorigen Satz.

5.3 Homotopie

"Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben. Genauer: Die Natur spricht die Sprache der Mathematik: die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren."
Galileo Galilei

Hat man zwei stetige Abbildungen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ und stellt sich die zugehörigen Graphen einfach mal als "Gummibänder" vor, so ist es - irgendwie - klar, dass mann diese ineinander überführen kann (man zieht sie etwas in die Länge, oder staucht sie, oder legt sie einfach etwas anders hin). Ebenso ist auch - irgendwie - klar, dass dies alles "stetig" ablaufen kann. Der begriff der Homotopie präzisiert dieses "irgendwie".

5.3.1 Definition

Seien X, Y topologische Räume und $I := [0,1]$. Eine stetige Abbildung $F : X \times I \to Y$ heißt **Homotopie** ($X \times I$ mit Produkt-Topologie). Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen **homotop** (in Zeichen: $f \simeq g$), wenn es eine Homotopie $F : X \times I \to Y$ gibt, mit $f(x) = F(x,0)$ und $g(x) = F(x,1)$ (für alle $x \in X$).

$f : X \to Y$ heißt **nullhomotop**, wenn sie zu einer konstanten Abbildung $X \to Y$ homotop ist

Zwei Räume X, Y heißen **homotopieäquivalent**, wenn es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq id_X$ und $f \circ g \simeq id_Y$ gibt.

Wir nennen $A \subseteq X$ ein **Deformationsretrakt** von X, falls es eine Homotopie $F : X \times I \to X$ gibt mit $F(x,0) = x$ und $F(x,1) \in A$ für alle $x \in X$ bzw. $F(a,1) = a$ für alle $a \in A$. In diesem Fall nennen wir F eine **Deformationsretraktion** von X auf A.

5.3.2 Lemma

Ist A ein Deformationsretrakt von X, so sind A, X homotopieäquivalent.

Beweis: Sei $F: X \times I \to X$ stetig mit $F(x,0) = x$ und $F(x,1) \in A$ für alle $x \in X$ bzw. $F(a,1) = a$ für alle $a \in A$. Definiere $f: X \to A$, $x \mapsto F(x,1)$ und $g: A \to X$, $a \mapsto a$. Dann ist $f \circ g = id_A$ und $g \circ f = f$. Offenbar ist F eine Homotopie von id_X nach f. Fertig.

5.3.3 Lemma

(a) Die Relation $f \simeq g$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $C(X,Y)$ aller stetigen Funktionen von X nach Y.

(b) Homotopieäquivalent ist auch eine Äquivalenzrelation.

Beweis: (a) (1) $f \simeq f$ durch $F(x,t) := f(x)$

(2) $f \simeq g \;\Rightarrow\; g \simeq f$ durch $H(x,t) := F(x,1-t)$

(3) wenn $f \simeq g$ durch F und $g \simeq h$ durch H, dann $f \simeq h$ durch G, wobei $G(x,t) := F(x,2t)$ für $t \in [0,1/2]$ und $G(X,t) := H(x,2t-1)$ für $t \in [1/2,1]$. Aus dem Klebelemma (Lemma 2.2.4) folgt, dass G stetig ist. Teil (b) bleibt als Übung.

5.3.4 Lemma

Seien X,Y,Z top. Räume und $f,f': X \to Y$ und $g,g': Y \to Z$ stetige Abbildungen. Außerdem gelte $f \simeq f'$ durch F und $g \simeq g'$ durch G. Dann gilt auch $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Man kann nun also $\circ : (C(X,Y)/\simeq) \times (C(Y,Z)/\simeq) \to C(X,Z)/\simeq$ durch $[g] \circ [f] := [g \circ f]$ definieren.

Beweis $H(x,t) := G(F(x,t),t)$ ist eine Homotopie von $g \circ f$ nach $g' \circ f'$.

5.3.5 Lemma

Wenn X,Y homotopieäquivalent sind und X wegweise zusammenhängend, dann ist auch Y wegweise zusammenhängend.

Beweis: Es gibt stetige $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, $H: X \times I \to X$ und $G: Y \times I \to Y$, mit $H(x,0) = g(f(x))$, $H(x,1) = x$, $G(y,0) = f(g(y))$ und $G(y,1) = y$. Seien $y_1, y_2 \in Y$, dann ist $k(t) := G(y_1, 1-3t)$ für $t \in [0,1/3]$, $k(t) := f(h(3t-1))$ für $t \in [1/3,2/3]$ und $k(t) := G(y_2, 3t-2)$ für $t \in [2/3,1]$ wobei $h: I \to X$ stetig ist mit $h(0) = g(y_1)$ und $h(1) = g(y_2)$. Es folgt dann $k(0) = y_1$ und $k(1) = y_2$. Die Stetigkeit von k folgt leicht aus dem Klebelemma.

5.3.6 Lemma

(a) Sei $a \in S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$. Dann ist $S^n \setminus \{a\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.
(b) Sind $a, b \in S^n$, $a \neq b$, so ist $S^n \setminus \{a, b\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
(c) Sei $n > 0$, $a, b \in S^n$ mit $a \neq b$. Dann ist $S^n \setminus \{a, b\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1}

Beweis: (a) Sei $e_n = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ Dann ist $h : S^n \setminus \{e_n\} \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $x \mapsto (1 - x_n)^{-1}(x_0, ..., x_{n-1})$ ein Homöomorphismus (die Umkehrabbildung ist durch $y \mapsto ((1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1})y, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1})$ gegeben). Sei nun $a \in S^n$, dann $a^\perp := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a \cdot x = 0\}$. Es folgt $dim(a^\perp) = n$ und es gibt eine orthonormal Basis $\{a_0, ..., a_{n-1}\}$ von $a^\perp$. Setzen wir noch $a_n := a$, so ist $\{a_0, ..., a_n\}$ eine orthonormal Basis vom $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren nun durch $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $e_i \mapsto a_i$ einen Iso. + Homöomorphismus und wie man leicht nachrechnet gilt $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$. Demzufolge ist $f|S^n : S^n \to S^n$ ein Homöomorphismus mit $f(e_n) = a_n$. Abschließend haben wir also einen Homöomorphismus $f|S^n \setminus \{e_n\} : S^n \setminus \{e_n\} \to S^n \setminus \{a_n\}$.

(b) Sei $h : S^n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Offenbar ist dann auch $h|S^n \setminus \{a, b\} : S^n \setminus \{a, b\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{h(b)\}$ ein Homöomorphismus. Da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n \setminus \{h(b)\}$ ist, sind wir fertig.

(c) Wir definieren eine Homotopie $H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(x, t) \mapsto (1 - t)x + t\frac{x}{|x|}$. Das ist sinnvoll, denn wäre $(1 - t)x + t\frac{x}{|x|} = 0$, so folgt $1 - t + \frac{t}{|x|} = 0$. Da sowohl $1 - t \geq 0$ und $\frac{t}{|x|} \geq 0$, wäre dies ein Widerspruch. S^{n-1} ist somit ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Ist allgemein $A \subseteq X$, $H : X \times I \to X$ eine Deformationsretraktion von X auf A und $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus mit $f(A) =: B$, so ist $G := Y \times I \to Y$ definiert durch $G(y, t) := f(F(f^{-1}(y), t))$ eine Deformationsretraktion von Y auf B.

Für einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^n \setminus \{a, b\}$ bekommen wir damit, dass $f(S^{n-1})$ ein Deformationsretrakt von $S^n \setminus \{a, b\}$ ist. Also sind $f(S^{n-1})$ und $S^n \setminus \{a, b\}$ homotopieäquivalent. Da S^{n-1} und $f(S^{n-1})$ homöomorph sind, sind somit auch $S^n \setminus \{a, b\}$ und S^{n-1} homotopieäquivalent.

5.3.7 Beispiel

Sei $f : X \to S^n$ stetig, aber nicht surjektiv. Dann ist f nullhomotop. **Beweis:** Sei $y' \in S^n \setminus f(X)$ und $g : S^n \setminus \{y'\} \to \mathbb{R}^n$ homöomorph. Wähle $x_0 \in X$. Dann ist $g|f(X) : f(X) \to \mathbb{R}^n$ homotop zur konstanten Abbildung $k : f(X) \to \mathbb{R}^n$ $x \mapsto g(f(x_0))$, durch $H : f(X) \times I \to \mathbb{R}^n$, $(y, t) \mapsto (1 - t)g(y) + tg(f(x_0))$. Definiere nun $G : X \times I \to S^n$ durch $(x, t) \mapsto g^{-1}(H(f(x), t))$. Unser G ist stetig und es gilt $(x, 0) \mapsto f(x)$ bzw. $(x, 1) \mapsto f(x_0)$

5.3.8 Definition

Ein Raum Y heißt absolutes Retrakt (absolutes Umgebungsretrakt) wenn jede stetige Abbildung $f : A \to Y$ von einer abgeschlossenen Teilmenge A, eines T_4 Raums X, zu einer stetigen Abbildung auf ganz X (auf eine offene Umgebung U von A in X) erweitert werden kann. Jedes absolute Retrakt ist offensichtlich ein absolutes Umgebungsretrakt. Der Fortsetzungssatz von Tietze lehrt also bespielsweise, dass die reellen Zahlen ein absolutes Retrakt sind.

5.3.9 Lemma

Die Sphäre S^n ist ein absolutes Umgebungsretrakt und die Vollkugel D^{n+1} ein absolutes Retrakt.

Beweis: In beiden Fällen verwenden wir den Fortsetzungssatz von Tietze. Zuerst die Vollkugel: Wenn $f : A \to D^{n+1}$ stetig ist, schalten wir die standard Projektionen p_i dahinter und erhalten $f_i = p_i \circ f : A \to [-1,1]$. Diese lassen sich fortsetzen zu $F_i : X \to [-1,1]$. Mit der entsprechende Produktabbildung $G : X \to [-1,1]^{n+1}$ konstruieren wir wie folgt die Fortsetzung von f: Wir definieren $H : K \to D^{n+1}$ durch $H(x) := x$, falls $x \in D^{n+1}$ und sonst $H(x) := x/\|x\|$. H ist stetig (Klebelemma) und wir setzen dann $F := H \circ G$.

Nun zur Sphäre: Sei also $f : A \to S^n$ stetig. Wie eben setzen wir f durch $G : X \to [-1,1]^{n+1} =: K$ stetig fort und setzen $U := F^{-1}(K \setminus \{0\})$. Die Abbildung $F : U \to S^n$ definiert durch $F(x) := G(x)/\|G(x)\|$ ist dann die gesuchte Fortsetzung.

5.3.10 Definition

Homotopieerweiterungseigenschaft: Ein Raumpaar (X,A) hat die Homotopieerweiterungseigenschaft (HEE) bzgl. einem Raum Y, wenn es zu jedem stetigen $g : X \to Y$ und stetigem $G : A \times I \to Y$ mit $\forall a \in A : G(a,0) = g(a)$ ein stetiges $F : X \times I \to Y$ existiert, mit $F_{|A\times I} = G$.

5.3.11 Bemerkung

(X,A) hat die HEE bezüglich jedem Raum Y g.d.w. $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ ein Retrakt von $X \times I$ ist. Der Beweis

5.3.12 Satz

Homotopieerweiterungssatz von Borsuk: Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums (X,τ), für den gilt, dass $X \times I$ ein T_4-Raum ist. Dann hat (X,A) die HEE bzgl. jedem absoluten Umgebungsretrakt Y.

Beweis: Seien $g : X \to Y$ und $G : A \times I \to Y$, mit $\forall a \in A : G(a,0) = g(a)$, stetig. Wir setzen G auf natürliche Weise stetig zu $H : A \times I \cup X \times \{0\}$ fort. Dann gibt es eine offene Umgebung U von $A \times I \cup X \times \{0\}$ in $X \times [0,1]$ und eine stetige Fortsetzung $K : U \to Y$ von H. Nun ist $X \times I$ ein T_4-Raum, also gibt es ein stetiges $\eta : X \times I \to I$ welches auf $A \times I$ konstant 1 ist und auf $X \times I \setminus U$ verschwindet (=0 ist). Wir setzen nun $m(x) := min\{\eta(x,t) \mid t \in I\}$. Für jedes $(x,t) \in X \times I$ ist dann $(x, m(x)t) \in U$ (1F. $\exists t_0 \in I$ mit $\eta(x,t_0) = 0$, dann offensichtlich $(x,m(x)t) \in U$ und 2F. $\forall t'$ gilt $\eta(x,t') \neq 0$; dann offensichtlich $\{x\} \times I \subseteq U$, also erst recht $(x,m(x)t) \in U$). Wir setzen nun noch $F(x,t) := K(x,m(x)t)$ und haben damit unsere gesuchte Fortsetzung.

5.3.13 Satz

Seien X,Y,Z top. Räume und $p : X \to Y$ identifizierend. Desweiteren Sei $K : Y \times I \to Z$ eine Abbildung, so dass $H : X \times I \to Z$ definiert durch $H(x,t) := K(p(x),t)$ stetig ist. Dann ist auch K stetig.

Beweis: Es ist $H = K \circ (p \times id_I)$ stetig. Und da $p \times id_I$ identifizierend ist (Satz von Whitehead) ist K stetig (siehe Finaltopologie).

5.3.14 Satz

Seien X,Y top. Räume und $\emptyset \neq A \subseteq X$ bzw $\emptyset \neq B \subseteq Y$. Setze $x \sim_X x' :\Leftrightarrow x = x' \vee x,x' \in A$ und bilde den Quotientenraum $X/\sim_X$, analog mit $Y/\sim_Y$; $p : X \to X/\sim_X$ bzw. $q : Y \to Y/\sim_Y$ seien die standard Projektionen. Schlussendlich sei $H : X \times I \to Y$ stetig, mit $H(A \times I) \subseteq B$. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\bar{H} : (X/\sim_X) \times I \to Y/\sim_Y$ derart, dass $\bar{H}(p(x),t) = q(H(x,t))$

Beweis: Übung.

6 Einführung in die Singuläre Homologietheorie

”So etwas wie eine freie Presse gibt es nicht. Sie wissen es, und ich weiß es. Nicht einer unter Ihnen würde sich trauen, seine ehrliche Meinung zu sagen. Die eigentliche Aufgabe des Journalisten besteht darin, die Wahrheit zu zerstören, faustdicke Lügen zu erzählen, die Dinge zu verdrehen und sich selbst, sein Land und seine Rasse für sein tägliches Brot zu verkaufen. Wir sind Werkzeuge und Marionetten der Reichen, die hinter den Kulissen die Fäden in der Hand halten. Sie spielen die Melodie, nach der wir tanzen. Unsere Talente, unsere Möglichkeiten und unser Leben befinden sich in den Händen dieser Leute. Wir sind nichts weiter als intellektuelle Prostituierte.”

John Swaiton, ehem. Herausgeber der New York Times in den 70er und 80ern in seiner Abschiedsrede

Wenn auch nicht für alle Definitionen und Konstruktionen notwendig, so bezeichne dennoch R ein kommutativen Ring mit 1, der hier und jetzt für den Rest dieses Kapitels (Ausnahmen sind kenntlich gemacht) fest gewählt wird.

6.1 Freie Moduln, Exaktheit und Homologie von Kettenkomplexen

6.1.1 Definition

Sei M ein R-Modul. Eine Abbildung $x : I \to M$ heißt eine Basis von M, falls

$$\forall y \in M \, \exists\, ! r : I \to R \quad \text{mit} \quad y = \sum_{i \in I} r(i) x(i)$$

wobei $r(i) = 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Solch einen Modul nennen wir **frei** (über I).

Sei I eine beliebige Menge und R ein Ring. Wir setzen

$$R\langle I\rangle := \{\varphi : I \to R \mid \varphi(i) = 0 \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen } \}$$

und nennen $R\langle I\rangle$ den **freien R-Modul mit Basis I**. Das es sich bei $R\langle I\rangle$ mit Komponentenweiser Addition und R-Multiplikation um einen Modul handelt, ist klar. Warum mit Basis I? Nun, für $i \in I$ sei $e(i) \in R\langle I\rangle$ definiert durch

$$(e(i))(j) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

Offenbar ist $e : I \to R\langle I\rangle$ eine Basis für $R\langle I\rangle$, welche man aber mit I identifizieren kann. Wir tun einfach so, als ob $I \subseteq R\langle I\rangle$. Das führt zu keinen Mißverständnissen.

6.1.2 Satz

Sei I eine Menge, M ein R-Modul und $f : I \to M$ eine beliebige Abbildung. Dann existiert genau ein Homomorphismus $F : R\langle I\rangle \to M$, so dass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & M \\ R\langle I\rangle \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} \qquad (\text{also } F \circ e = f)$$

Beweis: Wir definieren $F : R\langle I\rangle \to M$ durch $F(\varphi) := \sum_{i\in I} \varphi(i)f(i)$. Der Rest ist nun klar.

6.1.3 Definition

Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Moduln über R. Dann ist

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid m_i = 0 \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen}\}$$

mit Komponenterweiser Addition und Multiplikation wieder ein Modul über R, direkte Summe der M_i, $i \in I$ genannt. Für endliches I gilt offenbar $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$. Ferner fassen wir den Ring R als Modul über sich selber auf. Für $I = \{i\}$ folgt somit $R \cong R\langle I\rangle = \bigoplus_{i\in I} R$.

6.1.4 Definition

Eine endliche oder unendliche Sequenz von Gruppen und Homomorphismen

$$\cdots \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow \cdots$$

heißt **exakt an der Stelle** L, falls $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$. Die Sequenz heißt **exakt**, wenn sie an jeder Stelle exakt ist. Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

nennen wir eine **kurze exakte Sequenz**. Gruppen werden wir im Folgenden additiv schreiben.

Das folgende Lemma (und dessen Beweis) ist typisch für eine ganze Reihe von Aussagen, denen wir in diesem Kapitel begegnen werden. Die Beweise sind, obwohl sie auf den ersten Blick vielleicht etwas länglich erscheinen, allesamt äußerst einfach und laufen gewissermaßen von ganz alleine. In Lemma 6.1.5 will man beispielsweise zeigen, dass ein Homomorphismus injektiv ist. Also nimmt man sich ein Element aus dem Kern, jagt entsprechend den Voraussetzungen durch das Diagramm und sammelt dabei solange Informationen, bis man weiß, dass es sich bei diesem Element um das Nullelement handelt - die Abbildung ist also injektiv. Am besten führt man diese Beweise alle selber und schaut nur im Zweifel nach.

6.1.5 Fünferlemma

Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von Gruppen und zugehörigen Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\varphi_3"'] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\varphi_4"'] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen (d.h. exakt an den Stellen $A_2, A_3, A_4, B_2, B_3, B_4$).

(1) Sind φ_2, φ_4 injektiv und φ_1 surjektiv, so ist φ_3 injektiv.

(2) Sind φ_2, φ_4 surjektiv und φ_5 injektiv, so ist φ_3 surjektiv.

(3) Sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ Isomorphismen, so ist auch φ_3 ein Isomorphismus.

Beweis: (1) Sei $a_3 \in \ker \varphi_3$. Dann ist $0 = \beta_3 \varphi_3 a_3 = \varphi_4 \alpha_3 a_3$, also $\alpha_3 a_3 = 0$ und somit $a_3 \in \ker \alpha_3 = \operatorname{im} \alpha_2$. Es gibt daher ein a_2 mit $\alpha_2 a_2 = a_3$. Aus $\beta_2 \varphi_2 a_2 = \varphi_3 \alpha_2 a_2 = \varphi_3 a_3 = 0$ folgt $\varphi_2 a_2 \in \ker \beta_2 = \operatorname{im} \beta_1$, also $\varphi_2 a_2 = \beta_1 b_1$ für gewisses $b_1 \in B_1$. Nun ist φ_1 surjektiv, also gibt es a_1 mit $b_1 = \varphi_1 a_1$ und es folgt $\varphi_2 a_2 = \beta_1 \varphi_1 a_1 = \varphi_2 \alpha_1 a_1$ und somit $a_2 = \alpha_1 a_1$ (denn φ_2 ist injektiv). Insgesamt $a_3 = \alpha_2 a_2 = \alpha_2 \alpha_1 a_1 = 0$ (exakte Zeile) und φ_3 ist somit injektiv.

(2) Sei $b_3 \in B_3$. Da φ_4 surjektiv gibt es ein a_4 mit $\beta_3 b_3 = \varphi_4 a_4$. Es folgt $0 = \beta_4 \beta_3 b_3 = \beta_4 \varphi_4 a_4 = \varphi_5 \alpha_4 a_4$, also $0 = \alpha_4 a_4$ und somit $a_4 \in \ker \alpha_4 = \operatorname{im} \alpha_3$. Daher gibt es a_3 mit $\alpha_3 a_3 = a_4$ und $\varphi_4 \alpha_3 a_3 = \beta_3 \varphi_3 a_3$. Es folgt $\beta_3(\varphi_3 a_3 - b_3) = 0$, also $\varphi_3 a_3 - b_3 \in \ker \beta_3 = \operatorname{im} \beta_2$ und es gibt ein b_2 mit $\beta_2 b_2 = \varphi_3 a_3 - b_3$. Es gibt aber auch ein a_2 mit $b_2 = \varphi_2 a_2$ und es folgt $\varphi_3 \alpha_2 a_2 = \beta_2 \varphi_2 a_2 = \beta_2 b_2 = \varphi_3 a_3 - b_3$. Insgesamt $b_3 = \varphi_3(a_3 - \alpha_2 a_2)$ und φ_3 ist surjektiv.

(3) Folgt unmittelbar aus (1) und (2).

6.1.6 Lemma von Barrett-Whitehead

Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen, wobei jede dritte Abbildung h_n ein Isomorphismus ist.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "f_n"'] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "g_n"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "h_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "j_n"'] & B'_n \arrow[r, "q_n"'] & C'_n \arrow[r, "\Delta_n"'] & A'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dann gibt es eine exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n} B_n \oplus A'_n \xrightarrow{\beta_n} B'_n \xrightarrow{\gamma_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

wobei $\alpha_n a_n := (i_n a_n, f_n a_n)$, $\beta_n(b_n, a'_n) := g_n b_n - j_n a'_n$ und $\gamma_n b'_n := d_n h_n^{-1} q_n b'_n$

Beweis: Exaktheit bei A_n: Es ist $\alpha_n\gamma_{n+1}b'_{n+1} = (i_n d_{n+1}h^{-1}_{n+1}q_{n+1}b'_{n+1}, f_n d_{n+1}h^{-1}_{n+1}q_{n+1}b'_{n+1}) = (0,0)$. Sei andererseits $(i_n, f_n)a_n = 0$, also $i_n a_n = 0$ und $f_n a_n = 0$. Dann gibt es ein c_{n+1} mit $d_{n+1}c_{n+1} = a_n$. Es folgt $\Delta_{n+1}h_{n+1}c_{n+1} = f_n d_{n+1}c_{n+1} = f_n a_n = 0$, also gibt es ein b'_{n+1} mit $h_{n+1}c_{n+1} = q_{n+1}b'_{n+1}$ und es folgt $c_{n+1} = h^{-1}_{n+1}q_{n+1}b'_{n+1}$ und somit $a_n = d_{n+1}h^{-1}_{n+1}q_{n+1}b'_{n+1}$.

Exaktheit bei $B_n \oplus A'_n$: Es ist $\beta_n\alpha_n a_n = g_n i_n a_n - j_n f_n a_n = 0$. Ist andererseits $\beta_n(b_n, a'_n) = 0$, so folgt $g_n b_n = j_n a'_n$ also $0 = q_n j_n a'_n = q_n g_n b_n = h_n p_n b_n$ und somit $p_n b_n = 0$. Es gibt daher ein a_n mit $i_n a_n = b_n$. Nun ist $j_n f_n a_n = g_n i_n a_n = g_n b_n = j_n a'_n$ und folglich $j_n(f_n a_n - a'_n) = 0$. Es gibt daher auch ein c'_{n+1} mit $\Delta_{n+1}c'_{n+1} = f_n a_n - a'_n$. Da h bijektiv, gibt es ein c_{n+1} mit $c'_{n+1} = h_{n+1}c_{n+1}$ und es folgt $f_n a_n - a'_n = \Delta_{n+1}c'_{n+1} = \Delta_{n+1}h_{n+1}c_{n+1} = f_n d_{n+1}c_{n+1}$ und somit $a'_n = f_n(a_n - d_{n+1}c_{n+1})$ und $b_n = i_n(a_n - d_{n+1}c_{n+1})$.

Exaktheit bei B'_n: Es ist $\gamma\beta(b_n, a'_n) = d_n h_n^{-1}q_n g_n b_n - d_n h_n^{-1}q_n j_n a'_n = d_n h_n^{-1}h_n p_n b_n = d_n p_n b_n = 0$. Ist andererseits $d_n h_n^{-1}q_n b'_n = 0$, so gibt es ein b_n mit $p_n b_n = h_n^{-1}q_n b'_n$, also $q_n b'_n = h_n p_n b_n = q_n g_n b_n$. Also $q_n(g_n b_n - b'_n) = 0$. Somit gibt es ein a'_n mit $j_n a'_n = g_n b_n - b'_n$ und es folgt $b'_n = g_n b_n - j_n a'_n = \beta(b_n, a'_n)$.

6.1.7 Lemma

Gegeben sei folgende kurze exakte Sequenz von R-Moduln:

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$$

Wir definieren: $A' \xrightarrow{i} A' \oplus A'' \xrightarrow{p} A''$ durch $i(a') := (a', 0)$ und $p(a', a'') := a''$. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:

(a) β hat eine Rechtsinverse (also ein Homomorphismus $\beta'' : A'' \to A$ mit $\beta\beta'' = id_{A''}$).

(b) Es gibt ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] & A \arrow[r, "\beta"] & A'' \\ & A' \oplus A'' \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

(c) Es gibt ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\delta"'] & A'' \\ & A' \oplus A'' \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

(d) α hat eine Linksinverse (also ein Homomorphismus $\alpha' : A \to A'$ mit $\alpha'\alpha = id_{A'}$).

Wenn eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist, so sagt man die Sequenz **spaltet**. Für die im Beweis erhaltenden Abbildungen gilt $\delta = \gamma^{-1}$ und $\alpha\alpha' + \beta''\beta = id_A$. Insbesondere ist A isomorph zu $A' \oplus A''$. Außerdem (das brauchen wir später) ist $\ker(\alpha') \cong A''$.

Beweis: Wir geben nur die Abbildungen an. Das Nachrechnen ist trivial.
(a) $\Rightarrow$ (b) Wir setzen $\gamma(a', a'') := \alpha(a') + \beta(a'')$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Wir definieren $\beta''(a'') := \gamma(0, a'')$.
(c) $\Rightarrow$ (d) Setze $q : A' \oplus A'' \to A'$, $q(a', a'') := a'$ und $\alpha' := q\delta$.
(d) $\Rightarrow$ (c) Setze $\delta(a) := (\alpha'(a), \beta(a))$.
(b) $\Rightarrow$ (c) Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"'] & A' \oplus A'' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\gamma"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha"'] & A \arrow[r, "\beta"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und wende Lemma 6.1.5 an.
(c) $\Rightarrow$ (b) Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id"'] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\delta"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] & A' \oplus A'' \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und wende Lemma 6.1.5 an. Die Gleichung $\alpha\alpha' + \beta''\beta = id_A$ verifiziert man durch nachrechnen. Zeigen wir noch $\ker(\alpha') \cong A''$. Definiere dazu $\beta_0 : \ker(\alpha') \to A''$ durch $a \mapsto \beta a$. Ist $a \in \ker(\beta_0)$, so ist, da $\delta a := (\alpha' a, \beta a)$, $p\delta a = \beta a = 0$ und $0 = \alpha' a = q\delta a$, also $\delta a = 0$ und folglich $a = 0$ (da δ ein Iso. ist). Für $a'' \in A''$ setze $a := \delta^{-1}(0, a'')$. Es folgt $\alpha' a = q\delta a = 0$, also $a \in \ker(\alpha')$ und $\beta_0 a = \beta a = p\delta a = a''$.

6.1.8 Definition

Ein **Kettenkomplex** $K = (K_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

von R-Moduln $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und Homomorphismen $\partial_n : K_n \to K_{n-1}$, welche $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllen. Die ∂_n nennen wir **Randoperatoren**. Statt Kettenkomplex schreiben wir manchmal kürzer Komplex.

$\partial_n\partial_{n+1} = 0$ bedeutet $\operatorname{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$. Schreiben wir kurz $Z_nK := \operatorname{im}(\partial_{n+1})$ bzw. $B_nK := \ker(\partial_n)$, so haben wir also $Z_nK \subseteq B_nK \subseteq K_n$. Es macht daher Sinn den Quotienten $H_nK := B_nK/Z_nK$ zu betrachten, den wir von nun an **n-te Homologie** von K nennen. Die Familie $(H_nK)_{n\in\mathbb{Z}}$ nennen wir den K zugeordneten **graduierten R-Homologiemodul** (oder auch einfach nur graduierten Homologiemodul).

Eine **Kettenabbildung** $f : K' \to K$ zwischen zwei Komplexen $K' = (K'_n, \partial'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $K = (K_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine Familie $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $f_n : K'_n \to K_n$ von Homomorphismen, welche

$$\partial_n f_n = f_{n-1}\partial'_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z}$$

erfüllt. Damit folgt $f_n(Z_nK') \subseteq Z_nK$ und $f_n(B_nK') \subseteq B_nK$. Durch $(H_nf)[z'] := [fz']$ bekommen wir somit einen Homomorphismus $H_nf : H_nK' \to H_nK$. Offenbar gilt

$$H_n(ff') = H_n(f)H_n(f') \quad \text{und} \quad H_n(id_K) = id_{H_nK}.$$

Sei $K = (K_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein Kettenkomplex und für jedes $n \in \mathbb{Z}$ sei K'_n ein Untermodul von K_n mit $\partial_n(K'_n) \subseteq K'_{n-1}$. Dann ist auch $K' = (K'_n, \partial'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, mit $\partial'_n := \partial_n|K'_n$ ein Kettenkomplex. In diesem Fall können wir für jedes $n \in \mathbb{Z}$ den Quotienten K_n/K'_n bilden und dazu definieren wir $\overline{\partial}_n : K_n/K'_n \to K_{n-1}/K'_{n-1}$ durch $\overline{\partial}_n([x]) := [\partial_n(x)]$ (wohldefiniert, da $\partial_n(K'_n) \subseteq K'_{n-1}$). Offenbar gilt ebenfalls $\overline{\partial}_n\overline{\partial}_{n+1} = 0$. Das heißt wir haben einen weiteren Kettenkomplex, den **Quotientenkettenkomplex** $K/K' := (K_n/K'_n, \overline{\partial}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Man kann nun leicht nachrechnen, dass

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K/K' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

wobei $i = (i_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Einbettungen $i_n : K'_n \to K_n$, $i_n(x) = x$ und $p = (p_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Projektionen $p_n : K_n \to K_n/K'_n$, $p_n(x) = [x]$ sind, eine exakte Sequenz von Kettenabbildungen ist (man muss natürlich auch nachrechnen, dass es sich wirklich um Kettenabbildungen handelt). Hierbei ist exakt so zu verstehen, dass die Sequenz $0 \longrightarrow K'_n \xrightarrow{i} K_n \xrightarrow{p} K_n/K'_n \longrightarrow 0$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ exakt ist. Umgekehrt folgt aus der Exaktheit einer Sequenz

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \longrightarrow 0 \qquad (**)$$

von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen und dem allgemeinen Homomorphisatz

$$K_n/\mathrm{im}\,(\alpha) = K_n/\ker(\beta_n) \cong \mathrm{im}\,(\beta_n) \quad \text{und} \quad \mathrm{im}\,(\alpha_n) \cong K'_n.$$

Mit anderen Worten: $(**)$ ist bis auf Isomorphie von der Bauart $(*)$.

6.1.9 Lemma

Ist $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen, dann ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$H_nK' \xrightarrow{H_n\alpha} H_nK \xrightarrow{H_n\beta} H_nK''$$

exakt an der Stelle H_nK.

Beweis: Zu zeigen ist $\ker(H_n\beta) = \mathrm{im}\,(H_n\alpha)$.

Sei $[x_n] \in \ker(H_n\beta)$, also $[\beta_nx_n] = H_n\beta[x_n] = 0$. Das bedeutet $\beta_nx_n \in \mathrm{im}\,(\partial''_{n+1})$. Es gibt daher ein $x''_{n+1} \in K''_{n+1}$ mit $\beta_nx_n = \partial''_{n+1}x''_{n+1}$. Nun ist β_{n+1} surjektiv, es gibt also ein $x_{n+1} \in K_{n+1}$ mit $\beta_{n+1}x_{n+1} = x''_{n+1}$. Es folgt $\beta_nx_n = \partial''_{n+1}\beta_{n+1}x_{n+1} = \beta_n\partial_{n+1}x_{n+1}$ (denn β ist eine

Kettenabbildung) und weiter $\beta_n(x_n - \partial_{n+1}x_{n+1}) = 0$. Also $x_n - \partial_{n+1}x_{n+1} \in \ker(\beta_n) = \operatorname{im}(\alpha)$ und somit gibt es ein $x'_n \in K'_n$ mit $x_n - \partial_{n+1}x_{n+1} = \alpha_n x'_n$. Schließlich bekommen wir $[x_n] = [\alpha_n x'_n + \partial_{n+1}x_{n+1}] = [\alpha_n x'_n] = H_n\alpha([x'_n]) \in \operatorname{im}(H_n\alpha)$.

Gilt umgekehrt $[x_n] \in \operatorname{im}(H_n\alpha)$, also $[x_n] = H_n\alpha([x'_n]) = [\alpha_n x'_n]$, so folgt
$H_n\beta([x_n]) = H_n\beta([\alpha_n x'_n]) = [\beta_n \circ \alpha_n x'_n] = [0] = 0$, also $[x_n] \in \ker(H_n\beta)$.

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ haben wir nun solche kleinen Sequenzen, die in der Mitte exakt sind. Ist es denn aber möglich diese vielen losen Stücke miteinander zu verbinden? Ja! Und unser Ziel ist es nun einen Homomorphismus $\delta_{*n} : H_nK'' \to H_{n-1}K'$ zu konstruieren derart, dass

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}K \xrightarrow{H_{n+1}\beta} H_{n+1}K'' \xrightarrow{\delta_{*n+1}} H_nK' \xrightarrow{H_n\alpha} H_nK \xrightarrow{H_n\beta} H_nK'' \xrightarrow{\delta_{*n}} H_{n-1}K' \longrightarrow \cdots$$

an jeder Stelle exakt ist. An den Stellen H_nK, $n \in \mathbb{Z}$ ist diese Sequenz nach Lemma 6.1.9 bereits exakt. Wir müssen also noch die Konstruktion von δ_{*n} durchführen und die Exaktheit an den Stellen H_nK'' und $H_{n-1}K'$ zeigen. Ans Werk:

Gegeben sei eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Die folgende Konstruktion verfolge man an dem ausführlicheren Diagramm der Sequenz $(*)$.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\partial'_{n+2}"] & {} \arrow[d, "\partial_{n+2}"] & {} \arrow[d, "\partial''_{n+2}"] & \\
0 \arrow[r] & K'_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] & K_{n+1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & K''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & K_n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & K''_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[d, "\partial'_{n-1}"] & K_{n-1} \arrow[r, "\beta_{n-1}"] \arrow[d, "\partial_{n-1}"] & K''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n-1}"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Sei $x''_n \in Z_nK''$. Dann gibt es ein $x_n \in K_n$ mit $x''_n = \beta_n x_n$. Also $0 = \partial''_n x''_n = \partial''_n \beta_n x_n = \beta_{n-1}\partial_n x_n$ und somit $\partial_n x_n \in \ker(\beta_{n-1}) = \operatorname{im}(\alpha_{n-1})$. Es gibt daher ein $x'_{n-1} \in K'_{n-1}$ mit $\partial_n x_n = \alpha_{n-1}x'_{n-1}$. Aus $\alpha_{n-2}\partial'_{n-1}x'_{n-1} = \partial_{n-1}\alpha_{n-1}x'_{n-1} = \partial_{n-1}\partial_n x_n = 0$ folgt $\partial'_{n-1}x'_{n-1} = 0$, also $x'_{n-1} \in Z'_{n-1}$. Wir definieren daher allgemein $\delta_n : Z_nK'' \to H_{n-1}K'$ durch $\delta_n(x''_n) := [x'_{n-1}]$. Zeigen wir, dass $\delta_n : Z_nK'' \to H_{n-1}K'$ auch wirklich wohldefiniert ist:

Falls $x''_n = \beta_n y_n$ und $\partial_n y_n = \alpha_{n-1}y'_{n-1}$, so folgt $0 = \beta_n(x_n - y_n)$, also $x_n - y_n = \alpha_n z'_n$ für ein gewisses $z'_n \in K'_n$. Es folgt $\alpha_{n-1}\partial'_n z'_n = \partial_n\alpha_n z'_n = \partial_n(x_n - y_n) = \alpha_{n-1}(x'_{n-1} - y'_{n-1})$ und somit $x'_{n-1} - y'_{n-1} = \partial_n z'_n$, also $[x'_{n-1}] = [y'_{n-1}]$. Das es sich bei δ_n um einen Homomorphismus handelt ist klar.

Nun können wir $\delta_{*n} : H_nK'' \to H_{n-1}K'$ durch $\delta_{*n}([x''_n]) := \delta_n(x''_n)$ definieren. Das es sich um einen Homomorphismus handelt ist klar. Zu zeigen ist nur die Wohldefiniertheit:

Sei $[x''_n] = [y''_n]$, also $x''_n - y''_n = \partial''_{n+1} z''_{n+1}$. Sei $x''_n = \beta_n x_n$ und $y''_n = \beta_n y_n$, also $\beta_n(x_n - y_n) = \partial''_{n+1} z''_{n+1}$. Nun gibt es aber auch ein z_{n+1} mit $\beta_{n+1} z_{n+1} = z''_{n+1}$ und es folgt $\partial''_{n+1} z''_{n+1} = \partial''_{n+1}\beta_{n+1} z_{n+1} = \beta_n \partial_{n+1} z_{n+1}$, also $\beta_n(x_n - y_n - \partial_{n+1} z_{n+1}) = 0$. Es gibt daher auch ein z'_n mit $x_n - y_n - \partial_{n+1} z_{n+1} = \alpha_n z'_n$ und wir erhalten $x''_n - y''_n = \beta_n(x_n - y_n) = \beta_n(\alpha_n z'_n + \partial_{n+1} z_{n+1}) = \beta_n \partial_{n+1} z_{n+1} = \partial''_{n+1}\beta_{n+1} z_{n+1}$ und damit $[x''_n] = [y''_n]$.

6.1.10 Lemma

Die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}K \xrightarrow{H_{n+1}\beta} H_{n+1}K'' \xrightarrow{\delta_{*n+1}} H_nK' \xrightarrow{H_n\alpha} H_nK \xrightarrow{H_n\beta} H_nK'' \xrightarrow{\delta_{*n}} H_{n-1}K' \longrightarrow \cdots$$

ist an jeder Stelle exakt.

Beweis: Exaktheit an den Stellen H_nK, $n \in \mathbb{Z}$ ist gerade in Lemma 6.1.9 bewiesen worden.
Teil 1: Es gilt $\operatorname{im}(H_n\beta) = \ker(\delta_{*n})$. Beweis dazu: Sei $[x''_n] = H_n\beta([x_n]) = [\beta_n x_n]$, für $[x_n] \in H_nK$, also $x_n \in Z_nK$. Es folgt $0 = \partial_n x_n$ und somit $\delta_{*n}([x''_n]) = [0]$, da $0 = \partial_n x_n = \alpha_{n-1}0$.
Sei $0 = \delta_{*n}([x''_n]) = [x'_{n-1}]$, wobei $\beta_n x_n = x''_n$ und $\partial_n x_n = \alpha_{n-1} x'_{n-1}$. Es gibt daher ein $x'_n \in K'_n$ mit $\partial'_n x'_n = x'_{n-1}$. Wir folgern $\alpha_{n-1} x'_{n-1} = \alpha_{n-1}\partial'_n x'_n = \partial_n \alpha_n x'_n$, $\beta_n(x_n - \alpha_n x'_n) = x''_n - \beta_n\alpha_n x'_n = x''_n$ und $\partial_n(x_n - \alpha_n x'_n) = \alpha_{n-1} x'_{n-1} - \alpha_{n-1}\partial'_n x'_n = 0$. Also ist der Ausdruck $[x_n - \alpha_n x'_n]$ sinnvoll und es gilt $H_n\beta([x_n - \alpha_n x'_n]) = [x''_n]$.
Teil 2: Es gilt $\operatorname{im}(\delta_{*n}) = \ker(H_{n-1}\alpha)$. Beweis dazu: Sei $[x_{n-1}] \in \operatorname{im}(\partial_{*n})$, also $\partial_{*n}([x''_n]) = [x'_{n-1}]$, $x''_n = \beta_n x_n$, $\partial_n x_n = \alpha_{n-1} y'_{n-1}$ und $[x'_{n-1}] = [y'_{n-1}]$. Es folgt $H_{n-1}\alpha([y'_{n-1}]) = [\alpha_{n-1} y'_{n-1}] = [\partial_n x_n] = 0$, also $[x'_{n-1}] \in \ker(H_{n-1}\alpha)$.
Sei $[x'_{n-1}] \in \ker(H_{n-1}\alpha)$, also $0 = [\alpha_{n-1} x'_{n-1}]$. Es folgt $\alpha_{n-1} x'_{n-1} = \partial_n x_n$ für gewisses $x_n \in K_n$. Für $x''_n := \beta x_n$ gilt dann $\partial''_n \beta_n x_n = \beta_{n-1}\partial_n x_n = \beta_{n-1}\alpha_{n-1} x'_{n-1} = 0$, also $x''_n \in Z_nK''$ und $\partial_{*n}([x''_n]) = [x'_{n-1}]$ und somit $[x'_{n-1}] \in \operatorname{im}(\partial_{*n})$.

6.1.11 Lemma

Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen, wobei beide Zeilen exakt sind.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma'"] & K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & K'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\kappa"'] & L \arrow[r, "\lambda"'] & L'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dann ist auch das folgende (unendliche) Diagramm kommutativ und hat exakte Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}K \arrow[r, "H_{n+1}\beta"] \arrow[d, "H_{n+1}\gamma"] & H_{n+1}K'' \arrow[r, "\delta^1_{*n+1}"] \arrow[d, "H_{n+1}\gamma''"] & H_nK' \arrow[r, "H_n\alpha"] \arrow[d, "H_n\gamma'"] & H_nK \arrow[r, "H_n\beta"] \arrow[d, "H_n\gamma"] & H_nK'' \arrow[r, "\delta^1_{*n}"] \arrow[d, "H_n\gamma''"] & H_{n-1}K' \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}\gamma'"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}L \arrow[r, "H_{n+1}\lambda"] & H_{n+1}L'' \arrow[r, "\delta^2_{*n+1}"] & H_nL' \arrow[r, "H_n\kappa"] & H_nL \arrow[r, "H_n\lambda"] & H_nL'' \arrow[r, "\delta^2_{*n}"] & H_{n-1}L' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beweis: Es reicht die Kommutativität in diesem Teil des Diagramms zu überprüfen.

$$\begin{tikzcd}
H_nK'' \arrow[r, "\delta^1_{*n}"] \arrow[d, "H_n\gamma''"] & H_{n-1}K' \arrow[d, "H_{n-1}\gamma'"] \\
H_nL'' \arrow[r, "\delta^2_{*n}"] & H_{n-1}L'
\end{tikzcd}$$

Sei $[x''_n] \in H_nK''$. Schauen wir uns den oberen Weg an: Es folgt $H_{n-1}\gamma' \circ \delta^1_{*n}([x''_n]) = [\gamma'_{n-1}x'_{n-1}]$, wobei $x''_n = \beta_n x_n$ und $\partial^1_n x_n = \alpha_{n-1}x'_{n-1}$.

Für den unteren Weg bemerken wir zunächst $\gamma''_n x''_n = \gamma''_n \beta_n x_n = \lambda_n \gamma_n x_n = \lambda_n y_n$ mit $y_n := \gamma_n x_n$. Damit folgt $\partial^2_n y_n = \partial^2_n \gamma_n x_n = \gamma_{n-1}\partial^1_n x_n = \gamma_{n-1}\alpha_{n-1}x'_{n-1} = \kappa_{n-1}(\gamma'_{n-1}x'_{n-1})$, also auch $\delta^2_{*n} \circ H_n(\gamma'')([x''_n]) = \delta^2_{*n}([\gamma''_n x''_n]) = [\gamma'_{n-1}x'_{n-1}]$.

6.2 Singuläre Homologie

6.2.1 Definition

$\Delta_q := \{(x_0,...,x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1\,,\ i = 0,...,q$ und $\sum_{i=0}^q x_i = 1\}$ heißt der **standard q-Simplex**. Offenbar ist Δ_q konvex, abgeschlossen, beschränkt (also auch kompakt). Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_q \to X$ bezeichnen wir als **singuläres q-Simplex** ist.

Sei $q \geq 1$ und $i \in \{0,...,q\}$. Wir definieren $d^i_q : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ durch

$$d^i_q(t_0,...,t_{q-1}) = (t_0,...,t_{i-1},0,t_i,...,t_{q-1}).$$

Man sieht leicht, dass d^i_q die Einschränkung der linearen Abbildung $\tilde{d}^i_q : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{q+1}$

$$\tilde{d}^i_q(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{falls } j < i \\ e_{j+1} & \text{falls } i \leq j \end{cases}$$

ist, wobei e_i ein standard Basisvektor der Form $(0,...,0,1,0,...,0)$ ist. Als lineare Abbildung ist $\tilde{d}^i_q$ und damit auch die Einschränkung $d^i_q = \tilde{d}^i_q|\Delta_{q-1}$ stetig. Noch eine kleine aber wichtige Bemerkung: Für alle $i,j \in \{0,...q\}$ mit $j < i$ ist

$$d^i_q d^j_{q-1} = d^j_q d^{i-1}_{q-1}$$

(beweist man leicht durch Anwendung auf die Basisvektoren). Sei nun (X,τ) ein topologischer Raum. Für alle $q \in \mathbb{Z}$ setzen wir nun

$$M_q(X)(=M_q(X,\tau)) := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } q<0 \\ \{\sigma \mid \sigma : \Delta_q \to X \text{ ist stetig}\} & \text{falls } 0 \le q \end{cases}$$

und anschließend $S_q(X) := R\langle M_q(X)\rangle$, den **$R$-Modul der singulären q-Ketten**. Man beachte unsere Konvention aus dem ersten Abschnitt: Wir fassen $M_q(X)$ als Teilmenge von $S_q(X)$ auf (um unnötige Notationen zu vermeiden)! Für $0 \le i \le q$ betrachten wir die Abbildung $\partial_q^i : M_q(X) \to M_{q-1}(X)$ definiert durch $\partial_q^i(\sigma) := \sigma \circ d_q^i$ und deren eindeutig bestimmte Fortsetzung auf $S_q(X)$ (Satz 6.1.2), die wir ebenfalls mit ∂_q^i bezeichnen (also $\partial_q^i : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$). Anschließend definieren wir den Randoperator[4]

$$\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X) \text{ durch } \partial_q := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_q^i \quad \text{bzw.} \quad \partial_q = 0 \text{ für } q \le 0.$$

6.2.2 Lemma

Es ist $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ und $(S_q(X), \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ist somit ein Kettenkomplex.

Beweis: Wir rechnen dies auf der Basis $M_{q+1}(X)$ nach. Sei also $\sigma \in M_{q+1}(X)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_q\partial_{q+1}(\sigma) &= \partial_q\Big(\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i \partial_{q+1}^i(\sigma)\Big) = \partial_q\Big(\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i \sigma d_{q+1}^i\Big) = \sum_{i=0}^{q+1}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{i+j}\sigma d_{q+1}^i d_q^j \\ &= \sum_{0\le j<i\le q+1}(-1)^{i+j}\sigma d_{q+1}^i d_q^j + \sum_{0\le i\le j\le q}(-1)^{i+j}\sigma d_{q+1}^i d_q^j \\ &= \sum_{0\le j<i\le q+1}(-1)^{i+j}\sigma d_{q+1}^j d_q^{i-1} + \sum_{0\le i\le j\le q}(-1)^{i+j}\sigma d_{q+1}^i d_q^j = 0 \end{aligned}$$

Einem beliebigen topologischen Raum X haben wir seinen **singulären Kettenkomplex** $SX = (S_q(X), \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ zugeordnet. Haben wir zwei topologische Räume X, Y und eine stetige Abbildung $f : X \to Y$, so wäre es natürlich schön, wenn wir mittels f eine Kettenabbildung $Sf = (S_q f)_{q\in\mathbb{Z}} : S(X) \to S(Y)$ bekommen. Für $\sigma \in M_q(X)$ ist $f \circ \sigma \in M_q(Y)$. Diese Beobachtung führt im Zusammenhang mit Satz 6.1.2 zur Existenz eines eindeutig bestimmten Homomorphismus $S_q f : S_q X \to S_q Y$ derart, dass $S_q f(\sigma) = f \circ \sigma$ für alle $\sigma \in M_q(X)$ gilt. Für zwei stetige Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ gilt $(S_q g)(S_q f) = S_q(gf)$ und $S_q id_X = id_{S_q(X)}$.

[4]Randoperatoren zu verschiedenen Räumen kennzeichnen wir durch ein hochgestellten Index (z.B. ∂_q^X)

6.2.3 Lemma

Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist $Sf := (S_q f)_{q\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung $Sf : S(X) \to S(Y)$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial^X_{q+1}"] \arrow[d, "S_{q+1}f"] & S_q(X) \arrow[r, "\partial^X_q"] \arrow[d, "S_q f"] & S_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "S_{q-1}f"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{q+1}(Y) \arrow[r, "\partial^Y_{q+1}"] & S_q(Y) \arrow[r, "\partial^Y_q"] & S_{q-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beweis: Es reicht die Behauptung auf der Basis $M_q(X)$ zu überprüfen. Sei $\sigma \in M_q(X)$.

$$\partial^Y_q \circ S_q f(\sigma) = \partial^Y_q (f\sigma) = \sum_{i=0}^{q} \partial^i_q (f\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (f\sigma) d^i_q = \sum_{i=0}^{q} f(\sigma d^i_q)$$

$$= \sum_{i=0}^{q} f \circ (\partial^i_q(\sigma)) = S_q f(\sum_{i=0}^{q} \partial^i_q(\sigma)) = S_q f(\partial^X_q(\sigma)) = S_q f \circ \partial^X_q(\sigma)$$

6.2.4 Definition

Unter einem **Raumpaar** (X,A) verstehen wir einen topologischen Raum (X,τ) mit einer Teilmenge $A \subseteq X$. Die Topologie wird (da meistens klar ist welche gemeint ist) in dieser Notation unterdrückt. Unter einer **Abbildung von Raumpaaren** $f : (X,A) \to (Y,B)$ verstehen wir eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Statt $(X,\emptyset)$ schreiben wir auch einfach X. Wir identifizieren X also mit $(X,\emptyset)$.

Sei ein Raumpaar (X,A) mit der Inklusionsabbildung $i_A : A \to X$, $i_A(a) = a$ gegeben. Offenbar ist $S_q i_A$ injektiv und wir definieren $S_q(X,A) := S_q(X)/S_q i_A(S_q(A))$ und $p : S_q(X) \to S_q(X,A)$ als die Projektion. Tatsächlich fassen wir $S_q(A)$ als Untermodul von $S_q(X)$ auf und schreiben daher $S_q(X,A) = S_q(X)/S_q(A)$. Da $\partial_q(S_q(A)) \subseteq S_{q-1}(A)$ können wir den Quotientenkettenkomplex $S(X,A) := S(X)/S(A)$ bilden. Dies führt zu der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{Si_A} SX \xrightarrow{p} S(X,A) \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Offenbar ist dann $S_q(X) \cong S_q(A) \oplus S_q(X,A)$ für jedes $q \in \mathbb{Z}$, das heißt die Sequenz $(*)$ spaltet. (Beweis: Jedes Element aus $S_q(X)$ lässt sich als Linearkombination von Elementen aus $M_q(X)$ schreiben; diejenigen, deren Bild in A ist und die, deren Bild nicht in A ist.)

6.2.5 Definition

Sei (X,A) ein Raumpaar. Den zum Kettenkomplex $S(X,A)$ zugehörigen **graduierten R-Homologiemodul** $(H_q(X,A))_{q\in\mathbb{Z}}$ mit $H_q(X,A) := H_q S(X,A)$ nennen wir den **relativen singulären graduierten**

R-Homologiemodul von (X,A). Für $X = (X,\emptyset)$ erhalten wir den **singulären graduierten R-Homologiemodul** $(H_qX)_{q\in\mathbb{Z}}$ mit $H_qX := H_qSX$.

Eine Abbildung $f : (X,A) \to (Y,B)$ induziert ein kommutatives Diagramm ($\overline{Sf}$ entsteht aus Sf durch Übergang zu Quotienten).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & SA \arrow[r, "S_q i_A"] \arrow[d, "S(f|A)"] & SX \arrow[r, "p"] \arrow[d, "Sf"] & S(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{Sf}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & SB \arrow[r, "S_q i_B"] & SY \arrow[r, "p"] & S(Y,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beachten wir, dass p offenbar durch die Inklusion $j : (X,\emptyset) \to (X,A)$ induziert ist, also $p_q = S_q j$, so bekommen wir mit Lemma 6.1.11 den wichtigen Satz:

6.2.6 Satz

(a) Für jedes Raumpaar (X,A) mit den Inklusionen $i : A \to X$ und $j : X \to (X,A)$ ist die folgende lange Sequenz von Homomorphismen exakt.

$$\cdots \longrightarrow H_qA \xrightarrow{H_q i} H_qX \xrightarrow{H_q j} H_q(X,A) \xrightarrow{\delta_{*q}^{(X,A)}} H_{q-1}A \longrightarrow \cdots$$

(b) Ist $f : (X,A) \to (Y,B)$ so bekommen wir das folgende kommutative, in den Zeilen exakte Diagramm, wobei $H_qf|A := H_qS(f|A)$ und entsprechend H_qf, $H_q\overline{f}$, H_qi_A, H_qj

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_qA \arrow[r, "H_q i_A"] \arrow[d, "H_q f|A"] & H_qX \arrow[r, "H_q j_X"] \arrow[d, "H_q f"] & H_q(X,A) \arrow[r, "\delta_{*q}^1"] \arrow[d, "H_q\overline{f}"] & H_{q-1}A \arrow[r] \arrow[d, "H_{q-1}f|A"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_qB \arrow[r, "H_q i_B"] & H_qY \arrow[r, "H_q j_Y"] & H_q(Y,B) \arrow[r, "\delta_{*q}^2"] & H_{q-1}B \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

6.2.7 Beispiel

Sei $P = \{p\}$ ein Einpunktraum. Dann ist $M_q(P) = \{\sigma : \Delta_q \to P \mid \sigma \text{ ist stetig}\} = \{\xi_q\}$ für $q \geq 1$ auch einelementig und folglich $S_q(P) \cong R$ (Für $q \leq 0$ ist $M_q(X) = \emptyset$). Ferner ist

$$\partial_q^P \xi_q = \begin{cases} \xi_{q-1} & \text{für } q \text{ gerade und } q \geq 1 \\ 0 \text{ (Nullabbildung)} & \text{für } q \text{ ungerade, oder } q \leq 0 \end{cases}$$

Damit überlegt man sich dann leicht

$$H_qP = \ker(\partial_q^X)/\mathrm{im}(\partial_{q+1}^X) \cong \begin{cases} R & \text{für } q = 0 \\ \{0\} & \text{für } q \neq 0 \end{cases}$$

6.2.8 Lemma

Sei (X,A) ein Raumpaar und $(X_d)_{d\in D}$ eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte offene Mengen. Mit $A_d := A \cap X_d$ für $d \in D$ ist $H_q(X,A) \cong \bigoplus_{d\in D} H_q(X_d,A_d)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Wir betrachten das folgende Diagramm und verwenden das Fünferlemma.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{d\in D} H_q(A_d) \arrow[r] \arrow[d, "f_q"] & \bigoplus_{d\in D} H_q(X_d) \arrow[r] \arrow[d, "g_q"] & \bigoplus_{d\in D} H_q(X_d,A_d) \arrow[r] \arrow[d, "h_q"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
H_q(A) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_q(X,A) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die horizontalen Abbildungen sind inklusionsinduziert (in der oberen Zeile in jeder Dimension d) und die vertikalen Abbildungen f_q, g_q, h_q sind alle von der Art

$$h_q(([c_d])_{d\in D}) := \sum_{d\in D} H_q i_d([c_d]) = [\sum_{d\in D} c_d]$$

wobei $i_d : (X_d,A_d) \to (X,A)$ die entsprechende Inklusion ist. Um Lemma 6.1.5 anwenden zu können, müssen wir nur noch zeigen, dass g_q ein Isomorphismus ist. Die restlichen Voraussetzungen (Exaktheit, Kommutativität, ...) sind offensichtlich erfüllt. Wir betrachten also die Abbildung $g_q(([c_d])_{d\in D}) := \sum_{d\in D} H_q i_d([c_d]) = [\sum_{d\in D} c_d]$, mit Inklusion $i_d : X_d \to X$. Dass es sich um einen wohldefinierten Homomorphismus handelt, ist klar. Da Δ_q wegweise zusammenhängend ist, gilt für alle $q \in M_q(X)$ $\sigma(\Delta_q) \subseteq X_d$ für genau ein $d \in D$. Damit sieht man $S_q(X) \cong \bigoplus_{d\in D} S_q(X_d)$ $(*)$ und natürlich auch $\partial_q(S_q(X_d)) \subseteq S_{q-1}(X_d)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Injektivität: Sei $g_q(([c_d])_{d\in D}) = [\sum_{d\in D} c_d] = 0$. Dann gibt es ein $b \in S_{q+1}(X)$ mit $\partial_{q+1} b = \sum_{d\in D} c_d$. Es gibt aber auch eindeutig bestimmte $b_d \in S_{q+1}(X_d)$ mit $b = \sum_{d\in D} b_d$. Aus $\sum_{d\in D} c_d = \partial_{q+1} b = \sum_{d\in D} \partial_{q+1} b_d$ und der Eindeutigkeit der Darstellung (folgt aus $(*)$) folgt nun $\partial_{q+1} b_d = c_d$. Dann folgt aber $[c_d] = 0$ in $H_q(X_d)$.

Surjektivität: Sei $[c] \in H_q(X)$, mit $c \in \ker(\partial_q)$. Es ist $c = \sum_{d\in D} c_d$ (mit eindeutig bestimmten $c_d \in S_q(X_d)$). Aus $0 = \partial_q c = \sum_{d\in D} \partial_q c_d$ und der Eindeutigkeit der Darstellung folgt $\partial_q c_d = 0$ für alle $d \in D$, also $[c] = g_q(([c_d])_{d\in D})$ mit $([c_d])_{d\in D} \in \bigoplus_{d\in D} H_q(X_d)$.

6.3 Homotopieinvarianz

6.3.1 Definition

Seien $f, g : K \to K'$ zwei Kettenabbildungen zwischen zwei Kettenkomplexen $K = (K_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $K' = (K'_n, \partial'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Eine Familie $p = (p_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $p_n : K_n \to K'_{n+1}$ bezeichnet man als **Kettenhomotopie von** f **nach** g (in Zeichen $p : f \to g$), falls $\partial'_{n+1} p_n + p_{n-1}\partial_n = f_n - g_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir schreiben $f \sim g$ falls solch eine Kettenhomotopie existiert und sagen f und g sind **kettenhomotop**.

6.3.2 Lemma

(1) Kettenhomotop ist eine Äquivalenzrelation.

(2) Seien $f,g : K \to K'$ und $f',g' : K' \to K''$ Kettenabbildungen und $f \sim g$ mittels $p = (p_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bzw. $f' \sim g'$ mittels $q = (q_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, so ist $f' \circ f \sim g' \circ g$ mittels $(f'_{n+1} \circ p_n + q_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(3) Wenn $f \sim g : K \to K'$, so gilt $H_n f = H_n g$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis: (1) $f \sim f$ mittels $p = (0)_{n\in\mathbb{Z}}$ (Familie von 0-Homomorphismen).
Falls $p : f \to g$, so $-p = (-p_n)_{n\in\mathbb{Z}} : g \to f$.
$p : f \to g$ und $q : g \to h$, so $p+q = (p_n + q_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f \to h$.
(2) Es gilt $f' \circ f \sim f' \circ g$ mittels $p' = (f'_{n+1} \circ p_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $f' \circ g \sim g' \circ g$ mittels $q' = (q_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Der Rest folgt aus dem Beweis der Transitivität in (1).
(3) Sei $p = (p_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f \to g$ und $[x_n] \in H_n K$. Da $\partial_n x_n = 0$ und $[\partial'_{n+1} p_n x_n] = 0$ folgt $H_n f([x_n]) - H_n g([x_n]) = [(f_n - g_n)(x_n)] = [\partial'_{n+1} p_n x_n] + [p_{n-1}\partial_n x_n] = 0$.

6.3.3 Definition

Sei X konvex und $A_0,...,A_q \in X$. Dann ist $[A_0,...,A_q] : \Delta_q \to X$ definiert durch

$$[A_0,...,A_q](t_0,...,t_q) := \sum_{i=0}^{q} t_i A_i$$

Das Ziel des Rest dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden fundamentalen Satzes: Sind $f,g : X \to Y$ homotop, so ist $H_q f = H_q g$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. Sind $f,g : X \to Y$ homotop, so gibt es eine stetige Abbildung $F : X \times I \to Y$, wobei $I = [0,1]$ derart, dass $\forall x \in X\ f(x) = F(x,0)$ und $g(x) = F(x,1)$. Definieren wir $\lambda_t : X \to X \times I$, $x \mapsto (x,t)$ für $t \in I$, so ist also $f = F \circ \lambda_0$ und $g = F \circ \lambda_1$. Es folgt damit $H_q f = (H_q F) \circ (H_q \lambda_0)$ und $H_q g = (H_q F) \circ (H_q \lambda_1)$. Wenn wir also $H_q \lambda_0 = H_q \lambda_1$ zeigen können, so sind wir fertig. Nach Lemma 6.3.2 genügt es dafür eine Kettenhomotopie $(P_q^X)_{q\in\mathbb{Z}} : (S_q \lambda_0)_{q\in\mathbb{Z}} \to (S_q \lambda_1)_{q\in\mathbb{Z}}$ zu finden. Wir definieren dazu

$$A_i^q := [(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_q,1)] : \Delta_{q+1} \to \Delta_q \times I$$

Für $\sigma \in M_q(X)$ setzen wir nun

$$P_q^X(\sigma) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma \times id_I) \circ A_i^q$$

und betrachten dann die lineare Fortsetzung auf $S_q(X)$.

6.3.4 Lemma

Ist $f: X \to Y$ stetig, so ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} S_q(X) \arrow[r, "P_q^X"] \arrow[d, "S_q f"] & S_{q+1}(X \times I) \arrow[d, "S_{q+1}(f \times id_I)"] \\ S_q(Y) \arrow[r, "P_q^Y"] & S_{q+1}(Y \times I) \end{tikzcd}$$

Beweis: Wir rechnen die Behauptung auf $M_q(X)$ nach. Sei also $\sigma \in M_q(X)$. Es folgt
$P_q^Y \circ S_q f(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i ((f \circ \sigma) \times id_I) \circ A_i^q = \sum_{i=0}^q (-1)^i S_{q+1}((f \circ \sigma) \times id_I)(A_i^q)$
$= S_{q+1}((f \circ \sigma) \times id_I)(\sum_{i=0}^q (-1)^i A_i^q) = S_{q+1}(f \times id_I) \circ S_{q+1}(\sigma \times id_I)(\sum_{i=0}^q (-1)^i A_i^q)$
$= S_{q+1}(f \times id_I)(\sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \times id_I) \circ A_i^q) = S_{q+1}(f \times id_I) \circ P_q^X(\sigma)$.

6.3.5 Lemma

Es ist

$$\partial_{q+1}^{\Delta_q \times I} P_q^{\Delta_q}([e_0, ..., e_q]) + P_{q-1}^{\Delta_q} \partial_q^{\Delta_q}([e_0, ..., e_q]) = [(e_0, 1), ..., (e_q, 1)] - [(e_0, 0), ..., (e_q, 0)]$$

Beweis: Es ist

$$\partial_{q+1}^{\Delta_q \times I} P_q^{\Delta_q}([e_0, ..., e_q]) = \partial_{q+1}^{\Delta_q \times I} P_q^{\Delta_q}(id_{\Delta_q}) = \partial_{q+1}^{\Delta_q \times I}(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i (id_{\Delta_q} \times id_I) \circ A_i^q)$$

$$= \partial_{q+1}^{\Delta_q \times I}(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i A_i^q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_{q+1}^{\Delta_q \times I} A_i^q = T_1 + T_2 + T_3'$$

mit

$$T_1 := \sum_{i,j=0, j<i}^{q} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), ..., (\hat{e_j, 0}), ..., (e_i, 0)(e_i, 1), ..., (e_q, 1)],$$

$$T_2 := \sum_{0 \leq i = j \leq q} [(e_0, 0), ..., (\hat{e_i, 0}), (e_i, 1), ..., (e_q, 1)] \quad \text{und}$$

$$T_3' := \sum_{i,j=0, i<j}^{q+1} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., (\hat{e_{j-1}, 1}), ..., (e_q, 1)]$$

$$= - \sum_{i,j=0, i<j}^{q} (-1)^{i+j} [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., (\hat{e_j, 1}), ..., (e_q, 1)]$$

$$-\sum_{i=0}^{q}[(e_0,0),...,(e_i,0),(\hat{e_i,1}),...,(e_q,1)].$$

Setzen wir $T_3 := -\sum_{i,j=0,i<j}^{q}(-1)^{i+j}[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(\hat{e_j,1}),...,(e_q,1)]$ und

$T_4 := -\sum_{i=0}^{q}[(e_0,0),...,(e_i,0),(\hat{e_i,1}),...,(e_q,1)]$, so bekommen wir

$\partial_{q+1}^{\Delta_q\times I}P_q^{\Delta_q}([e_0,...,e_q]) = T_1+T_2+T_3+T_4$ und $T_2+T_4 = [(e_0,1),...,(e_q,1)]-[(e_0,0),...,(e_q,0)]$.

Andererseits ist $P_{q-1}^{\Delta_q}\partial_q^{\Delta_q}([e_0,...,e_q]) = P_{q-1}^{\Delta_q}(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j[e_0,...,\hat{e}_j,...,e_q])$

$$= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j P_{q-1}^{\Delta_q}([e_0,...,\hat{e}_j,...,e_q]) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^{i+j}([e_0,...,\hat{e}_j,...,e_q]\times id_I)\circ A_i^{q-1}$$

$$= \sum_{i,j=0,i<j}^{q}(-1)^{i+j}[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(\hat{e_j,1}),...,(e_q,1)]$$

$$+\sum_{i,j=0,j\leq i}^{q-1}(-1)^{i+j}[(e_0,0),...,(\hat{e_j,0}),...,(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),...,(e_q,1)]$$

$$= \sum_{i,j=0,i<j}^{q}(-1)^{i+j}[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(\hat{e_j,1}),...,(e_q,1)]$$

$$-\sum_{i,j=0,j<i}^{q}(-1)^{i+j}[(e_0,0),...,(\hat{e_j,0}),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_q,1)] = -T_3-T_1.$$

6.3.6 Lemma

$(P_q^X)_{q\in\mathbb{Z}}$ ist eine Kettenhomotopie von $(S_q\lambda_0)_{q\in\mathbb{Z}}$ nach $(S_q\lambda_1)_{q\in\mathbb{Z}}$.

Beweis: Mit dem vorigen Lemma erhalten wir für $\sigma\in S_q(X)$

$$\partial_{q+1}^{X\times I}P_q^X(\sigma) = \partial_{q+1}^{X\times I}P_q^X S_q\sigma(id_{\Delta_q}) = \partial_{q+1}^{X\times I}S_{q+1}(\sigma\times id_I)P_q^{\Delta_q}(id_{\Delta_q})$$

$$= S_{q+1}(\sigma\times id_I)\partial_{q+1}^{\Delta_q\times I}P_q^{\Delta_q}(id_{\Delta_q}) = S_{q+1}(\sigma\times id_I)\partial_{q+1}^{\Delta_q\times I}P_q^{\Delta_q}([e_0,...,e_q])$$

$$= S_{q+1}(\sigma\times id_I)(-P_{q-1}^{\Delta_q}\partial_q^{\Delta_q}([e_0,...,e_q])+[(e_0,1),...,(e_q,1)]-[(e_0,0),...,(e_q,0)])$$

$$= -P_{q-1}^X\partial_q^X(\sigma)+S_q(\lambda_1)(\sigma)-S_q(\lambda_0)(\sigma)$$

wobei wir Lemma 6.3.4 und $S_{q+1}(\sigma\times id_I)([(e_0,t),...,(e_q,t)]) = S_q(\lambda_t)(\sigma)$ verwendet haben.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

6.3.7 Homotopieinvarianz für Räume

Sind $f, g : X \to Y$ homotop, so ist $H_q f = H_q g : H_q X \to H_q Y$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

6.3.8 Definition

$f, g : (X,A) \to (Y,B)$ sind homotop, falls ein stetiges $F : (X \times I, A \times I) \to (Y,B)$ existiert mit $f(x) = F(x,0)$ und $g(x) = F(x,1)$ (für alle $x \in X$).

6.3.9 Homotopieinvarianz für Paare

Sind $f, g : (X,A) \to (Y,A)$ homotop, so ist $H_q f = H_q g : H_q(X,A) \to H_q(Y,B)$.

Beweis: Setze wieder $\lambda_s := (X,A) \to (X \times I, A \times I)$, $x \mapsto (x,s)$. Damit gilt wieder $f = F \circ \lambda_0$ und $g = F\lambda_1$. Wir müssen zeigen $H_q\lambda_0 = H_q\lambda_1 : H_q(X,A) \to H_q(X \times I, A \times I)$. Dafür genügt es eine Kettenhomotopie $(\overline{P}_q : S_q(X)/S_q(A) \to S_{q+1}(X \times I)/S_{q+1}(A \times I))_{q \in \mathbb{Z}}$ von $(\overline{S}_q\lambda_0)_{q\in\mathbb{Z}}$ nach $(\overline{S}_q\lambda_1)_{q\in\mathbb{Z}}$ zu finden. Beachten wir, dass folgendes Diagramm kommutativ ist,

$$\begin{tikzcd}
S_q(A) \arrow[r, "S_q i"] \arrow[d, "P_q^A"] & S_q(X) \arrow[d, "P_q^X"] \\
S_{q+1}(A \times I) \arrow[r, "S_{q+1} i"] & S_{q+1}(X \times I)
\end{tikzcd}$$

ist klar, dass es eine Quotientenabbildung $\overline{P}_q : S_q(X)/S_q(A) \to S_{q+1}(X \times I)/S_{q+1}(A \times I)$ gibt.

6.4 Ausschneidungssatz

6.4.1 Satz

Für einen topologischen Raum X ist äquivalent:

- **Aussschneidung 1:** Für alle $U \subseteq A \subseteq X$ mit $\overline{U} \subseteq A^\circ$ induziert die Inklusion $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ für jedes $q \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$H_q i : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \to H_q(X,A)$$

- **Aussschneidung 2:** Für alle $X_1, X_2 \subseteq X$ mit $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ induziert die Inklusion $j : (X_1, X_1 \cap X_2) \to (X, X_2)$ einen Isomorphismus
$$H_q j : H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \to H_q(X, X_2)$$

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Sei $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$. Setze $A := X_2$ und $U := X \setminus X_1$. Dann ist $\overline{U} = X \setminus X_1^\circ \subseteq X_2^\circ = A^\circ$ und $(X \setminus U, A \setminus U) = (X_1, X_1 \cap X_2)$ und $(X, A) = (X, X_2)$. Die Inklusionen stimmen überein. Da 1. gilt, wird ein Iso. induziert.

2. $\Rightarrow$ 1. Sei $\subseteq \overline{U} \subseteq A^\circ \subseteq A \subseteq X$. Wir setzen $X_2 := A$ und $X_1 := X \setminus U$. Dann folgt $X_1^\circ \cup X_2^\circ = A^\circ \cup X \setminus \overline{U} \supseteq \overline{U} \cup X \setminus \overline{U} = X$ und $(X_1, X_1 \cap X_2) = (X \setminus U, A \setminus U)$ bzw. $(X, X_2) = (X, A)$. Die Inklusionen stimmen also wieder überein und da 2. gilt, wird ein Iso. induziert.

6.4.2 Definition

Für konvexes $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei
$$SL_q(X) := \langle ML_q(X) \rangle, \quad \text{wobei} \quad ML_q(X) := \{[A_0, ..., A_q] \mid A_0, ..., A_q \in X\},$$
also $SL_q(X) \leq S_q(X)$. Dann definieren wir für jedes $P \in X$ durch lineare Fortsetzung
$$K_P^q : SL_q(X) \to SL_{q+1}(X) \quad \text{durch} \quad K_P^q([A_0, ..., A_q]) := [P, A_0, ..., A_q].$$
Offenbar gilt auch $\partial_q^X(SL_q(X)) \subseteq SL_{q-1}(X)$ und $(SL_q(X), \partial_q^X | SL_q(X))_{q \in \mathbb{Z}}$ können wir als Unterkomplex von $(S_q(X), \partial_q^X)_{q \in \mathbb{Z}}$ auffassen.

Ohne Probleme nachrechnen (auf $ML_q(X)$) kann man folgendes Lemma.

6.4.3 Lemma

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $P \in X$. Dann gilt:

(a) $\forall q \geq 1 \, \forall c_q \in SL_q(X)$ ist $(\partial_{q+1}^X \circ K_P^q)(c_q) = c_q - (K_P^{q-1} \circ \partial_q^X)(c_q)$.

(b) $\forall c_0 \in SL_0(X)$ ist $(\partial_1^X \circ K_P^0)(c_0) = c_0 - \varepsilon_X(c_0) \cdot [P]$, wobei $\varepsilon_X : S_0(X) \to R$ durch lineare Fortsetzung von $M_0 \ni \sigma \mapsto 1$ definiert ist.

Für $A_0, ..., A_q \in X$ definieren wir den **Schwerpunkt** $B(A_0, ..., A_q) := \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^q A_i$.

Ohne Beweis noch folgende einfache aber nützliche Bemerkung: Seien X bzw. Y konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^k$ und $f : X \to Y$ die Einschränkung einer linearen Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und $B \in X$. Dann ist $(S_{q+1} f) \circ K_B^q = K_{f(B)}^q \circ (S_q f)$ für alle $q \in \mathbb{N}$.

6.4.4 Definition

Wir definieren induktiv eine Abbildung $U_q^X : S_q(X) \to S_q(X)$, den sogenanten **Unterteilungsoperator** durch

$$U_q^X \sigma := \begin{cases} 0 & \text{für } \ q < 0 \\ (S_q\sigma) U_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q} & \text{für } \ q \geq 0 \end{cases} \text{ mit } U_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q} := K_{B_q}^{q-1} U_{q-1}^{\Delta_q} \partial_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q} \text{ und } U_0^{\Delta_0} id_{\Delta_0} := id_{\Delta_0}$$

Durch Induktion lassen sich dann leicht folgende Aussagen beweisen.

(1) $S_q f \circ U_q^X = U_q^Y \circ S_q f$ für alle stetigen $f : X \to Y$.
(2) Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $q \geq 1$, $\sigma = [A_0, ..., A_q]$, so ist $U_q^X \sigma = K_{B(A_0,...,A_q)}^{q-1} U_{q-1}^X \partial_q^X \sigma$.
(3) $U_q^X (SL_q(X)) \subseteq SL_q(X)$, falls $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex ist.

6.4.5 Lemma

$U^X := (U_q^X : S_q(X) \to S_q(X))_{q \in \mathbb{Z}} : SX \to SX$ ist eine Kettenabbildung.

Beweis: Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $q \leq 0$ ist alles klar.
Sei $q = 1$: $\partial_1^X U_1^X \sigma = \partial_1^X (S_1\sigma) U_1^{\Delta_1} id_{\Delta_1} = (S_0\sigma) \partial_1^{\Delta_1} U_1 \Delta_1 id_{\Delta_1} = (S_0\sigma) \partial_1^{\Delta_1} K_{B_1}^0 U_0^{\Delta_1} \partial_1^{\Delta_1} id_{\Delta_1}$
$= (S_0\sigma) \partial_1^{\Delta_1} K_{B_1}^0 \partial_1^{\Delta_1} id_{\Delta_1} = (S_0\sigma)(\partial_1^{\Delta_1} id_{\Delta_1} - \varepsilon_X(\partial_1^{\Delta_1}) \cdot [B_1]) = (S_0\sigma) \partial_1^{\Delta_1} id_{\Delta_1} = \partial_1^X (S_1\sigma) id_{\Delta_1}$
$= \partial_1^X \sigma = U_0^X \partial_1^X \sigma$.
Schritt $q-1 \to q$: $\partial_q^X U_q^X \sigma = \partial_q^X (S_q\sigma) U_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q} = (S_{q-1}\sigma) \partial_q^{\Delta_q} U_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q}$

$$= (S_{q-1}\sigma) \partial_q^{\Delta_q} K_{B_q}^{q-1} \underbrace{U_{q-1}^{\Delta_q} \partial_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q}}_{=:c} = (S_{q-1}\sigma)(c - K_{B_q}^{q-1} \partial_{q-1}^{\Delta_q} c)$$

$$= (S_{q-1}\sigma) c - (S_{q-1}\sigma) K_{B_q}^{q-1} \underbrace{\partial_{q-1}^{\Delta_q} U_{q-1}^{\Delta_q}}_{=U_{q-2}^{\Delta_q} \partial_{q-1}^{\Delta_q}} \partial_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q} = (S_{q-1}\sigma) U_{q-1}^{\Delta_q} \partial_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q}$$

$= U_{q-1}^X (S_{q-1}\sigma) \partial_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q} = U_{q-1}^X \partial_q^X (S_q\sigma) id_{\Delta_q} = U_{q-1}^X \partial_q^X \sigma$.

Unser nächstes Ziel ist es eine Kettenhomotopie $(R_q^X : S_q(X) \to S_{q+1}(X))_{q \in \mathbb{Z}}$ von $(U_q^X)_{q \in \mathbb{Z}}$ nach $(id_{S_q(X)})_{q \in \mathbb{Z}}$ zu konstruieren. Die Definition zieht sich (ähnlich wie beim Unterteilungsoperator) induktiv über zwei Etappen.

6.4.6 Definition

Sei $\sigma \in M_q(X)$. Setze dann

$$R_q^X \sigma := \begin{cases} 0 & \text{für } \ q \leq 0 \\ (S_{q+1}\sigma) R_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q} & \text{für } \ q \geq 1 \end{cases} \text{ mit } R_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q} := K_{B_q}^q (id_{\Delta_q} - U_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q} - R_{q-1}^{\Delta_q} \partial_q^{\Delta_q} id_{\Delta_q})$$

Und wieder lassen sich durch Induktion leicht folgende Aussagen zeigen.

6.4.7 Lemma

(1) Es gilt $S_{q+1}fR_q^X = R_q^Y S_q f$ für stetiges $f : X \to Y$ und $R_q^X(SL_q(X)) \subseteq SL_{q+1}(X)$.

(2) $(R_q^X : S_q(X) \to S_{q+1}(X))_{q\in\mathbb{Z}}$ ist eine Kettenhomotopie von $(U_q^X)_{q\in\mathbb{Z}}$ nach $(id_{S_q(X)})_{q\in\mathbb{Z}}$.

6.4.8 Definition

Sei $\sigma = [A_0,...,A_q] \in ML_q(\mathbb{R}^n)$ gegeben.

$$D(\sigma) := \operatorname{diam}(\sigma(\Delta_q)) = \sup_{x,y\in\Delta_q} (|\sigma(x) - \sigma(y)|)$$

bezeichnen wir als den Durchmesser von σ.

Da $\sigma(\Delta_q) = \{\sum_{i=0}^q \lambda_i A_i \mid (\lambda_0,...,\lambda_q) \in \Delta_q\} = \{\sum_{i=0}^q \lambda_i A_i \mid 0 \le \lambda_i \le 1\,,\, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\}$ folgt:

6.4.9 Lemma

Sei $\sigma = [A_0,...,A_q]$ für $A_0,...,A_q \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(1) Ist $x \in \sigma(\Delta_q)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $|x-y| \le \max\{|A_i - y| \mid 0 \le i \le q\}$.

(2) Es ist $D(\sigma) = \max_{i,j\le q} |A_i - A_j|$.

Beweis: (1) Sei $x = \sum_{i=0}^q \lambda_i A_i$, mit $\sum_{i=0}^q \lambda_i = 1$ und $\lambda_i \ge 0$. Also $|x-y| = |\sum_{i=0}^q \lambda_i A_i - \sum_{i=0}^q \lambda_i y| = |\sum_{i=0}^q \lambda_i (A_i - y)| \le \sum_{i=0}^q \lambda_i |A_i - y| \le max_{i\le q}|A_i - y| \sum_{i=0}^q \lambda_i = max_{i\le q}|A_i - y|$.

(2) Seien $x, y \in \sigma(\Delta_q)$. Dann folgt aus (1) $|x-y| \le max_{i\le q}|A_i - y|$. Nochmalige Anwendung von (1) führt auf $max_{i\le q}|A_i - y| \le max_{i,j\le q}|A_i - A_j|$.

6.4.10 Lemma

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $A_0,...,A_q \in X$ und $U_q^X([A_0,...,A_q]) = \sum_{\sigma\in ML_q(X)} r_\sigma \sigma$. Dann gilt für alle $\sigma \in ML_q(X)$: $r_\sigma \neq 0 \Rightarrow D(\sigma) \le \frac{q}{q+1} D([A_0,...,A_q])$.

Beweis: Für $q = 0$ ist alles klar. Sei die Behauptung für alle $k < q$ bewiesen. Nun ist

$$U_q^X[A_0,...,A_q] = K_{B(A_0,...,A_q)}^{q-1} U_{q-1}^X \partial_q^X [A_0,...,A_q] = K_{B(A_0,...,A_q)}^{q-1} \sum_{i=0}^q (-1)^i U_{q-1}^X [A_0,...,\hat{A}_i,...,A_q].$$

Per Induktion folgt für die linearen τ's, welche in $U^X_{q-1}[A_0,...,\hat{A}_i,...,A_q]$ vorkommen

$$D(\tau) \leq \frac{q-1}{q} D([A_0,...,\hat{A}_i,...,A_q]) \leq \frac{q-1}{q} D([A_0,...,A_q]).$$

Nun sind die linearen σ's aus $U^X_q[A_0,...,A_q]$ solche, deren eine Ecke $B(A_0,...,A_q)$ und deren restliche Ecken von einem τ aus der Darstellung von $U^X_{q-1}[A_0,...,\hat{A}_i,...,A_q]$ stammen. Schätzen wir den Abstand von $B(A_0,...,A_q)$ zu den Ecken eines der τ's ab. Dieser ist

$$\leq \sup\{|B(A_0,...,A_q) - x \mid x \in \tau(\Delta_{q-1})\} \leq \sup\{|B(A_0,...,A_q) - x \mid x \in [A_0,...,A_q](\Delta_q)\}$$

$$\leq \max\{|B(A_0,...,A_q) - A_i| \mid 0 \leq i \leq q\} = \max\{|\frac{1}{q+1}(\sum_{i=0}^{q} A_j) - A_i| \mid 0 \leq i \leq q\}$$

$$\leq \max\{\frac{1}{q+1}\sum_{i=0}^{q}|A_j - A_i| \mid 0 \leq i \leq q\} \leq \frac{q}{q+1}\max\{|A_i - A_j| \mid 0 \leq i,j \leq q\} = \frac{q}{q+1} D([A_0,...,A_q])$$

Zwei Ecken aus einem solchen σ haben also einen Abstand

$$\leq \max(\frac{q-1}{q} D([A_0,...,A_q]), \frac{q}{q+1} D([A_0,...,A_q])) = \frac{q}{q+1} D([A_0,...,A_q])$$

und damit folgt dann $D(\sigma) \leq \frac{q}{q+1} D([A_0,...,A_q])$ nach Lemma 6.4.9.

6.4.11 Definition

Sei X ein topologischer Raum und $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(X)$ mit $\bigcup \Gamma = X$. Wir setzen

$$\mathrm{Simp}_q(X,\Gamma) := \{\sigma \in M_q(X) \mid \exists G \in \Gamma \text{ mit } \sigma(\Delta_q) \subseteq G\} \quad \text{und} \quad S_q(X,\Gamma) := \langle \mathrm{Simp}_q(X,\Gamma) \rangle.$$

Offenbar gilt $\partial^X_q(S_q(X,\Gamma)) \subseteq S_{q-1}(X,\Gamma)$ und wir können $(S_q(X,\Gamma), \partial^X_q|S_q(X,\Gamma))_{q\in\mathbb{Z}}$ als Unterkomplex von $(S_q(X), \partial^X_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ auffassen. Ist $A \subseteq X$ so ist $S_q(A) \cap S_q(X,\Gamma) = S_q(A,\Gamma_A)$, wobei $\Gamma_A := \{G \cap A \mid A \in \alpha\}$.

(Beweis dazu: $S_q(A,\Gamma_A) \subseteq S_q(A) \cap S_q(X,\Gamma)$ ist klar. Ist $x \in S_q(A) \cap S_q(X,\Gamma)$, so folgt $x = \sum_{\sigma \in M_q(X)} r_\sigma \sigma$, wobei $r_\sigma \neq 0 \Rightarrow \sigma \in \mathrm{Simp}_q(X,\Gamma)$ und $x = \sum_{\sigma \in M_q(X)} s_\sigma \sigma$, wobei $s_\sigma \neq 0 \Rightarrow \sigma \in S_q(A)$. Also $0 = \sum_{\sigma \in M_q(X)} (r_\sigma - s_\sigma)\sigma$ und somit $r_\sigma = s_\sigma$ für alle $\sigma \in M_q(X)$. Das bedeutet aber $r_\sigma \neq 0 \Rightarrow \sigma \in \mathrm{Simp}_q(X,\Gamma) \cap S_q(A) = \mathrm{Simp}_q(A,\Gamma_A)$ und damit offenbar $x \in S_q(A,\Gamma_A)$.)

Wir bilden nun den Quotienten $S(X)/S(X,\Gamma) := (S_q(X)/S_q(X,\Gamma), \overline{\partial}^X_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ und beweisen im Anschluss das folgende fundamentale Lemma.

6.4.12 Lemma

(a) Sei X ein topologischer Raum und $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(X)$ mit $X = \bigcup_{G\in\Gamma} G^\circ$. Dann ist

$$H_q(S(X)/S(X,\Gamma)) = 0 \quad \text{für alle} \quad q \in \mathbb{Z}.$$

(b) Inklusion $i_q : S_q(X,\Gamma) \to S_qX$ induziert einen Isomorphismus $H_qi_q : H_q(X,\Gamma) \to H_qX$

(c) Ist zusätzlich $A \subseteq X$, dann induziert der durch Inklusion $i_q : S_q(X,\Gamma) \to S_q(X)$ induzierte Homomorphismus

$$\eta_q : S_q(X,\Gamma)/S_q(A,\Gamma_A) \to S_q(X)/S_q(A)$$

einen Isomorphismus der Homologiegruppen

$$H_q\eta : H_q(S(X,\Gamma)/S(A,\Gamma_A)) \to H_q(X,A).$$

Beweis[5]: (a) Für $q < 0$ ist alles klar. Sei $q \geq 0$ und $z \in H_q(S(X)/S(X,\Gamma))$, also $z = [c']$ mit $c' \in \ker(\overline{\partial}_q^X)$. Nun ist $c' = c + S_q(X,\Gamma)$ und aus $c' \in \ker(\overline{\partial}_q^X)$ folgt $\partial_q^X c \in S_{q-1}(X,\Gamma)$. Wir zeigen, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $U_q^n c \in S_q(X,\Gamma)$.

Nun gibt es $\sigma_1,\ldots,\sigma_m \in M_q(X)$ mit $c = \sum_{i=1}^m r_i\sigma_i$. Für jedes $i = 1,\ldots,m$ ist $\{\sigma_i^{-1}(G^\circ) \mid G \in \Gamma\}$ eine offene Überdeckung von Δ_q. Es gibt daher ein $\varepsilon_i > 0$ derart, dass zu jedem $V \subseteq \Delta_q$ mit $\operatorname{diam}(V) := \sup\{|A-B| \mid A,B \in V\} < \varepsilon_i$ ein $G \in \Gamma$ existiert mit $V \subseteq \sigma_i^{-1}(G)$, also $\sigma_i(V) \subseteq G$. Für alle $V \subseteq \Delta_q$ mit $\operatorname{diam}(V) < \varepsilon := \min(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$ und jedes $i \in \{1,\ldots,m\}$ gibt es somit ein $G = G(i,V) \in \Gamma$ mit $\sigma_i(V) \subseteq G$. Nach Lemma 6.4.10 enthält $U_q id_{\Delta_q}$ nur τ's mit $D(\tau) \leq \frac{q}{q+1}D(\Delta_q) = \frac{q}{q+1}\sqrt{2}$. Da $0 \leq \frac{q}{q+1} < 1$ gibt es ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{q}{q+1})^n\sqrt{2} < \varepsilon$. Da $U_q^n id_{\Delta_q}$ nur τ's enthält mit $D(\tau) \leq (\frac{q}{q+1})^n\sqrt{2}$ und außerdem $U_q^n\sigma_i = (U_q^n S_q\sigma_i)id_{\Delta_q} = (S_q\sigma_i)U_q^n id_{\Delta_q}$ gilt (einfache Induktion), folgt $U_q^n\sigma_i \in S_q(X,\Gamma)$ (man beachte, dass $\tau : \Delta_q \to \Delta_q$ und $D(\tau) = \operatorname{diam}(\tau(\Delta_q))$), also auch $U_q^n c \in S_q(X,\Gamma)$.

Nun ist $(R_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenhomotopie von $(U_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ nach $(id_{S_q(X)})_{q\in\mathbb{Z}}$ (Lemma 6.4.7), also:

$$\begin{aligned}
&\partial_{q+1}R_qc = -R_{q-1}\partial_qc + c - U_qc\\
&\partial_{q+1}R_qU_qc = -R_{q-1}\partial_qU_qc + U_qc - U_q^2c\\
&\quad\vdots\\
&\partial_{q+1}R_qU_q^{n-1}c = -R_{q-1}\partial_qU_q^{n-1}c + U_q^{n-1}c - U_q^nc
\end{aligned}$$

Addition der Gleichungen ergibt:

$$\partial_{q+1}(\sum_{i=0}^{n-1} R_qU_q^ic) = -(\sum_{i=0}^{n-1} R_{q-1}\partial_qU_q^ic) + c - U_q^nc = -(\sum_{i=0}^{n-1} R_{q-1}U_{q-1}^i\partial_qc) + c - U_q^nc$$

Es ist $U_q^nc \in S_q(X,\Gamma)$. Da $\partial_qc \in S_{q-1}(X,\Gamma)$ und somit auch $U_{q-1}^i\partial_qc \in S_{q-1}(X,\Gamma)$, ist auch

[5] Wir vereinfachen die Notation ein wenig, indem wir obere Indizes teilweise fort lassen.

$R_{q-1}U^i_{q-1}\partial_q c \in S_q(X,\Gamma)$ und daher $\partial_{q+1}(\sum_{i=0}^{n-1} R_q U^i_q c) - c = -(\sum_{i=0}^{n-1} R_{q-1}U^i_{q-1}\partial_q c) - U^n_q c \in S_q(X,\Gamma)$. Also ist $z = [c'] = [c + S_q(X,\Gamma)] = [\overline{\partial}_{q+1}((\sum_{i=0}^{n-1} R_q U^i_q c) + S_q(X,\Gamma))] = 0$.

(b) Zur der Inklusion $i_q : S_q(X,\Gamma) \to S_q(X)$, $q \in \mathbb{Z}$ gehört eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S(X,\Gamma) \longrightarrow S(X) \longrightarrow S(X)/S_q(X,\Gamma) \longrightarrow 0$$

von entsprechenden Kettenkomplexen, zu der nach Lemma 6.1.10 die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(S(X)/S(X,\Gamma)) \longrightarrow H_q(X,\Gamma) \xrightarrow{H_q i_q} H_q(X) \longrightarrow H_q(S(X)/S(X,\Gamma)) \longrightarrow \cdots$$

gehört. Da $H_q(S(X)/S(X,\Gamma)) = 0$ ist für alle $q \in \mathbb{Z}$ ist $H_q i_q$ ein Isomorphismus!

(c) Wir betrachten nun das folgende durch Inklusionen und Projektionen induzierte kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_q(A,\Gamma_A) \arrow[r] \arrow[d, "j_q"] & S_q(X,\Gamma) \arrow[r] \arrow[d, "i_q"] & S_q(X,\Gamma)/S_q(A,\Gamma_A) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_q(A) \arrow[r] & S_q(X) \arrow[r] & S_q(X)/S_q(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dieses induziert nach Lemma 6.1.11 eine kommutative und in den Zeilen exakte "Leiter". Aus (b) folgt, dass $H_q i$ und $H_q j$ Isomorphismen sind und mit dem Fünferlemma (Lemma 6.1.5) folgt, dass $H_q\eta : H_q(S(X,\Gamma)/S(A,\Gamma_A)) \to H_q(X,A)$ ein Isomorphismus ist.

6.4.13 Ausschneidungssatz

Sei (X,A) ein Raumpaar und $U \subseteq X$ mit $\overline{U} \subseteq A^\circ$. Dann induziert die Inklusion $e : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ einen Isomorphismus $H_q e : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \to H_q(X,A)$.

Beweis: $\Gamma := \{X \setminus U, A\}$ ist eine Überdeckung und erfüllt die Voraussetzung von Lemma 6.4.12 und $H_q\eta : H_q(S(X,\Gamma)/S(A,\Gamma_A)) \to H_q(X,A)$ ist ein Isomorphismus. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S_q(X \setminus U)/S_q(A \setminus U) \arrow[r, "j_q"] \arrow[d, "="] & S_q(X,\Gamma)/S_q(A,\Gamma_A) \arrow[d, "="] \\
S_q(X \setminus U)/S_q(X \setminus U) \cap S_q(A) \arrow[r, "\cong"] & (S_q(X \setminus U) + S_q(A))/S_q(A,\Gamma_A)
\end{tikzcd}$$

(man beachte $S_q(A,\Gamma_A) = S_q(A) \cap S_q(X,\Gamma) = S_q(A)$, da wegen $A \in \Gamma$ bereits $S_q(A) \subseteq S_q(X,\Gamma)$) folgt, dass die Inklusion induzierte Abbildung j_q ein Isomorphismus ist. Da $S_q e = \eta_q j_q$ und $H_q j$ nun auch ein Isomorphismus ist, ist auch $H_q e = (H_q\eta) \circ (H_q j)$ ein Isomorphismus.

6.5 Eilenberg-Steenrod Axiome

6.5.1 Definition

Eine **Kategorie** $\mathscr{C}$ besteht aus

1. einer Klasse von Objekten, bezeichnet mit $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

2. Mengen $[X,Y]_{\mathscr{C}}$ von Morphismen, für jedes Paar X,Y von Objekten. Wenn $F \in [X,Y]_{\mathscr{C}}$, dann schreiben wir auch $F : X \to Y$. Die Klasse $\mathrm{Mor}(\mathscr{C}) := \bigcup_{X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})} [X,Y]_{\mathscr{C}}$ nennen wir die Morphismenklasse von $\mathscr{C}$.

3. Abbildungen von $\circ : [X,Y]_{\mathscr{C}} \times [Y,Z]_{\mathscr{C}} \to [X,Z]_{\mathscr{C}}$, für jedes geordnet Tripel X,Y,Z von Objekten, Kompositionen genannt, welche die folgenden beiden Eigenschaften erfüllen:

   (a) $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ für alle $A,B,C,D \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ mit $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D$.

   (b) Für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ existiert ein $id_X \in [X,X]_{\mathscr{C}}$ mit $\alpha \circ id_X = \alpha$ und $id_Y \circ \alpha = \alpha$ für alle $\alpha \in [X,Y]_{\mathscr{C}}$ (die id_X nennen wir Identität von X; sie ist offenabr eindeutig).

Sind $\mathscr{C}$ und $\mathscr{C}'$ Kategorien, so ist $\mathscr{C}'$ eine Unterkategorie von $\mathscr{C}$, falls
(1) jedes Objekt von $\mathscr{C}'$ auch Objekt von $\mathscr{C}$ ist.
(2) $[X,Y]_{\mathscr{C}'} \subseteq [X,Y]_{\mathscr{C}}$ für alle $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$.
(3) $\beta \circ_{\mathscr{C}'} \alpha = \beta \circ_{\mathscr{C}} \alpha$ für alle $X,Y;Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$ und alle $\alpha \in [X,Y]_{\mathscr{C}'}$ bzw. $\beta \in [Y,Z]_{\mathscr{C}'}$.
(4) Die Identitäten aller $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$ stimmen in $\mathscr{C}$ und $\mathscr{C}'$ überein.

6.5.2 Definition

Seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Kategorien. Ein (kovarianter) **Funktor** T von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ (in Symbolen $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$) ist eine Abbildung $T : \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \cup \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \cup \mathrm{Mor}(\mathscr{D})$ mit

1. $T(\mathrm{Ob}(\mathscr{C})) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$

2. $T([X,Y]_{\mathscr{C}}) \subseteq [T(X),T(Y)]_{\mathscr{D}}$, für alle $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ mit

   (a) $T(\beta \circ \alpha) = T(\beta) \circ T(\alpha)$ für alle $\alpha \in [X,Y]_{\mathscr{C}}$, $\beta \in [Y,Z]_{\mathscr{C}}$.

   (b) $T(id_X) = id_{TX}$ für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

Sind $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ und $T : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ Funktoren, so kann man diese (als Abbildung aufgefasst) offenbar nacheinander ausführen. Das Ergebnis $T \circ S$ ist offenbar wieder ein Funktor.

6.5.3 Definition

Seien $S,T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ zwei Funktoren. Eine **natürlichen Transformation** $\phi = (\phi_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$ von S nach T (in Symbolen $\phi : S \to T$) nennen wir ein System von Morphismen $\phi_X \in [SX,TX]_{\mathscr{D}}$, einen für jedes $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ derart, dass jedes der folgenden Diagramme

$$\begin{tikzcd} SX \arrow[r, "S\alpha"] \arrow[d, "\phi_X"'] & SY \arrow[d, "\phi_Y"] \\ TX \arrow[r, "T\alpha"'] & TY \end{tikzcd}$$

für alle $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ und alle $\alpha \in [X,Y]_{\mathscr{C}}$ kommutiert.

Mit **TOP** bezeichnen wir die Kategorie, die als Objekte topologische Räume und als Morphismen stetige Abbildungen hat. Mit $\mathbf{TOP}^2$ bezeichnen wir die Kategorie, die als Objekte Raumpaare und als Morphismen stetige Abbildungen zwischen Raumpaaren hat. Durch den Funktor $I : \mathbf{TOP} \to \mathbf{TOP}^2$ mit $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{TOP}) \Rightarrow IX := (X,\emptyset)$ und $f \in [X,Y]_{\mathbf{TOP}} \Rightarrow If := f$ können wir **TOP** als Unterkategorie von $\mathbf{TOP}^2$ auffassen

Mit **GRAD R-MODULN** bezeichnen wie die Kategorie der Graduierten R-Moduln und Familien $(f_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ von Homomorphismen als Morphismen.

Wir fassen die wichtigsten Ergebisse nun in der Sprache der Kategorientheorie zusammen.

6.5.4 Singuläre Homologietheorie

Unter einer singulären Homologietheorie verstehen wir ein Paar (H,∂_*), bestehend aus einem kovarianten Funktor

$$H = (H_q)_{q\in\mathbb{Z}} : \mathbf{TOP}^2 \to \textbf{GRAD R-MODULN}$$

und einer natürlichen Transformation $\partial_* = (\partial_*^{(X,A)})_{(X,A)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{TOP}^2)} : H \to H_{-1} \circ J$
wobei $H_{-1} := (H_{q-1})_{q\in\mathbb{Z}}$ aus H durch Indexverschiebung hervorgeht und $J : \mathbf{TOP}^2 \to \mathbf{TOP}^2$ durch $J(X,A) := (A,\emptyset)$ und $J(f : (X,A) \to (Y,B)) := f|A : (A,\emptyset) \to (B,\emptyset)$ definiert ist, so dass die *Eilenberg-Steenrod Axiome* erfüllt sind:

1. **Exaktheit:** Für jedes Raumpaar (X,A) mit den Inklusionen $i : A \to X$ und $j : X = (X,\emptyset) \to (X,A)$ ist die folgende lange Sequenz von Homomorphismen exakt.

$$\cdots \longrightarrow H_qA \xrightarrow{H_qi} H_qX \xrightarrow{H_qj} H_q(X,A) \xrightarrow{\delta_{*q}^{(X,A)}} H_{q-1}A \longrightarrow \cdots$$

2. **Homotopieinvarianz:** Sind $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ homotope Abbildungen von Raumpaaren, so ist $Hf = Hg : H(X,A) \to H(Y;B)$.

3. **Ausschneidungseigenschaft:** Für jedes Raumpaar (X,A) und jede Teilmenge U von X mit $\overline{U} \subseteq A^\circ$ ist $He : H(X\setminus U, A\setminus U) \to H(X,A)$ ein Isomorphismus; hierbei sei $e : (X\setminus U, A\setminus U) \to (X,A)$ die Inklusion.

4. **Dimensionseigenschaft:** Ist $P = \{p\}$ ein topologischer Raum, der aus einem Punkt besteht, so ist $HP = (H_qP)_{q\in\mathbb{Z}}$ mit $H_qP = \begin{cases} R & \text{für } q = 0 \\ 0 & \text{für } q \neq 0 \end{cases}$

5. **Additivitätseigenschaft:** Für jedes Raumpaar (X,A) und Zerlegung von X in paarweise disjunkte offene Mengen $(X_d)_{d\in D}$, ist $H_q(X,A) \cong \bigoplus_{d\in D} H_q(X_d,A_d)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$, wobei $A_d := A \cap X_d$ für $d \in D$

Die Natürlichkeit von $\partial_* : H \to H_{-1} \circ J$ bedeutet ausführlich, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X,A) & \xrightarrow{H_q f} & H_q(Y,B) \\ \partial_{*q}^{(X,A)} \downarrow & & \downarrow \partial_{*q}^{(Y,B)} \\ H_{q-1}(A,\emptyset) & \xrightarrow[H_{q-1}(f|A)]{} & H_{q-1}(B,\emptyset) \end{array}$$

für alle Raumpaare und Abbildungen $f : (X,A) \to (Y,B)$ und $q \in \mathbb{Z}$ kommutiert.

Die Existenz solch einer singulären Homologietheorie (H, ∂_*) wurde ausführlich in den vorangehenden Abschnitten bewiesen. Fragen, die Eindeutigkeit betreffend, werden wir hier nicht erörtern. Aus der langen Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_q X \xrightarrow{id} H_q X \xrightarrow{H_q j} H_q(X,X) \xrightarrow{\delta_{*q}^{(X,X)}} H_{q-1} X \xrightarrow{id} \cdots$$

folgt übrigens sofort $H_q(X,X) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

6.6 Reduzierte Homologie und Mayer-Vietoris Sequenz

Noch eine kleine Bemerkung: Da wir jeden Raum X mit dem Paar $(X,\emptyset)$ identifizieren, schreiben wir zuweilen statt $H_q(X,\emptyset)$ auch einfach $H_q(X)$ (und entsprechend auch für die gleich definierten $\tilde{H}_q$).

6.6.1 Definition

$\emptyset \neq A \subseteq X$ heißt ein **Retrakt** von X, wenn es eine stetige und surjektive Abbildung $r : X \to A$ gibt mit $r|A = id_A$. Die Abbildung r nennen wir auch eine **Retraktion**.

6.6.2 Lemma

Ist A ein Retrakt von X, so ist $H_q X \cong H_q(A) \oplus H_q(X,A)$ und $H_q(X,A) \cong \ker(H_q r)$.

Beweis: Sei $r : X \to A$ eine Retraktion und $i : A \to X$ bzw. $j : X = (X,\emptyset) \to (X,A)$ Inklusionen. Dann ist folgende lange Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\delta_{*q+1}^{(X,A)}} H_q A \xrightarrow{H_q i} H_q X \xrightarrow{H_q j} H_q(X,A) \xrightarrow{\delta_{*q}^{(X,A)}} H_{q-1} A \longrightarrow \cdots$$

exakt. Aus $(H_q r) \circ (H_q i) = id_{H_q A}$ folgt, dass $H_q i$ injektiv und $H_q r$ surjektiv ist. Also im $(\partial_{*q}) = \ker(H_{q-1} i) = 0$ und somit im $(H_q j) = \ker(\partial_{*q}) = H_q(X,A)$. Also ist auch $H_q j$ surjektiv und folgende kurze Sequenz ist exakt und spaltet

$$0 \longrightarrow H_q A \xrightarrow{H_q i} H_q X \xrightarrow{H_q j} H_q(X,A) \longrightarrow 0$$

($H_q r$ ist Linksinverse von $H_q i$)! Folglich ist (wie wir allgemein in Lemma 6.1.7 gesehen haben) $H_q X \cong H_q A \oplus H_q(X,A)$ und auch $H_q(X,A) \cong \ker(H_q r)$.

Für den Einpunktraum $P = \{\emptyset\}$ sei $k_X : X \to P$ die für jeden topologischen Raum X eindeutig bestimmte (stetige und konstante) Abbildung.

6.6.3 Definition

Unter dem q-ten reduzierten Homologiemodul $\tilde{H}_q(X,A)$ eines Raumpaares (X,A) verstehen wir

$$\tilde{H}_q(X,A) := \begin{cases} H_q(X,A) & \text{für } A \neq \emptyset \\ \ker(H_q r_X) & \text{für } A = \emptyset \end{cases}$$

6.6.4 Lemma

Für jeden topologischen Raum X mit $x_0 \in X$ ist $\tilde{H}_q X \cong H_q(X,\{x_0\})$ und damit $H_q X \cong H_q(\{x_0\}) \oplus \tilde{H}_q X$. Insbesondere ist auch $\tilde{H}_q(\{x_0\}) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Außerdem gilt $H_q f(\tilde{H}_q X) \subseteq \tilde{H}_q Y$ für stetiges $f : X \to Y$ und die Einschränkung $\tilde{H}_q f := H_q f | \tilde{H}_q X : \tilde{H}_q X \to \tilde{H}_q Y$ definiert ein Homomorphismus.

Für homöomorphe Räume X,Y folgt aus dem oberen Teil übrigens sofort $\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_q(Y)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus Lemma 6.6.2, da $\{x_0\}$ offenbar ein Retrakt von X ist. Damit ist dann $H_q X \cong H_q(\{x_0\}) \oplus H_q(X,\{x_0\}) \cong H_q(\{x_0\}) \oplus \tilde{H}_q X$.

Der Rest folgt aus $(H_q r_Y) \circ (H_q f) = H_q r_X$, denn $r_Y \circ f = r_X$.

6.6.5 Lemma

Sei $F : X \times I \to X$ stetig, $A \subseteq X$, $a_0 \in A$, $q \in \mathbb{Z}$, $F(x,0) = x$, $F(x,1) \in A$ für alle $x \in X$, $F(a,1) = a$ für alle $a \in A$ und $F(a_0,t) = a_0$ für alle $t \in I$. Dann ist $\tilde{H}_q(X) = \tilde{H}_q(A)$.

Beweis: Definiere $f : (X,\{a_0\}) \to (A,\{a_0\})$, $x \mapsto F(x,1)$ und $g : (A,\{a_0\}) \to (X,\{a_0\})$, $a \mapsto a$. Dann ist $g \circ f : (X,\{a_0\}) \to (X,\{a_0\})$ homotop zu $id_{(X,\{a_0\})}$ vermöge $H : (X \times I, \{a_0\} \times I) \to (X,\{a_0\})$, $(x,t) \mapsto F(x,t)$ und $f \circ g = id_{(A\{a_0\})}$. Es folgt aus Satz 6.3.9 $(H_q f) \circ (H_q g) = id_{H_q(A,\{a_0\})}$ und $(H_q g) \circ (H_q f) = id_{H_q(X,\{a_0\})}$. Also ist $H_q f : H_q(X,\{a_0\}) \to H_q(A,\{a_0\})$ ein Isomorphismus. Da $H_q(A,\{a_0\}) \cong \tilde{H}_q(A)$ und $H_q(X,\{a_0\}) \cong \tilde{H}_q(X)$ folgt $\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_q(A)$.

6.6.6 Satz

Zu jedem Raumpaar (X,A) mit $A \neq \emptyset$ existiert die reduzierte lange exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_q A \longrightarrow \tilde{H}_q X \longrightarrow \tilde{H}_q(X,A) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1} A \longrightarrow \cdots$$

deren Homomorphismen Einschränkungen der Homomorphismen aus der Homologiesequenz des Paares (X,A) sind.

Beweis: Aus Lemma 6.6.2 und der Dimensionseigenschaft schließen wir, dass es genügt die Exaktheit (und Wohldefiniertheit der Abbildungen) auf dem Stück

$$\tilde{H}_1(X,A) \xrightarrow{\tilde{\partial}_{*1}^{(X,A)}} \tilde{H}_0 A \longrightarrow \tilde{H}_0 X \longrightarrow \tilde{H}_0(X,A) \xrightarrow{\tilde{\partial}_{*0}^{(X,A)}} \tilde{H}_{-1} A \qquad (*)$$

nachzuprüfen (hier ist $\tilde{\partial}_{*q}^{(X,A)} := \partial_{*q}^{(X,A)} | \tilde{H}_q(X,A)$). Zu $k : (X,A) \to (P,P)$ gehört das kommutative und in den Zeilen exakte Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_1(X,A) \arrow[r, "\partial_{*1}^{(X,A)}"] \arrow[d] & H_0 A \arrow[r] \arrow[d] & H_0 X \arrow[r] \arrow[d] & H_0(X,A) \arrow[r, "\partial_{*0}^{(X,A)}"] \arrow[d] & H_{-1} A \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H_0 P \arrow[r] & H_0 P \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

da $H_1(P,P) = 0$, $H_0(P,P) = 0$ und $H_{-1}P = 0$. Die Wohldefiniertheit von $\tilde{\partial}_{*1}^{(X,A)}$ ist nun klar. Ebenso sieht man nun über den Umweg der unteren Zeile, dass die Sequenz $(*)$ exakt ist.

6.6.7 Definition

Ein **Raumtripel** (X,A,B) ist ein toplogischen Raum X mit $B \subseteq A \subseteq X$.

6.6.8 Lemma

Zu jedem Raumtripel (X,A,B) existiert eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_q(A,B) \longrightarrow H_q(X,B) \longrightarrow H_q(X,A) \xrightarrow{d} H_{q-1}(A,B) \longrightarrow \cdots$$

Gibt es zudem ein kommutatives Diagramm von Raumpaaren

$$\begin{tikzcd}
(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & (X,B) \arrow[r] \arrow[d] & (X,A) \arrow[d] \\
(A',B') \arrow[r] & (X',B') \arrow[r] & (X',A')
\end{tikzcd}$$

dann gibt es ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X,B) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X,A) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & H_{q-1}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(A',B') \arrow[r] & H_q(X',B') \arrow[r] & H_q(X',A') \arrow[r, "\Delta"] & H_{q-1}(A',B') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beweis: Wir könne dies auf zwei Arten beweisen. Mit den Inklusionen i, j bekommen wir $0 \longrightarrow S(A,B) \xrightarrow{i} S(X,B) \xrightarrow{j} S(X,A) \longrightarrow 0$ und mit Lemma 6.1.10 die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(A,B) \xrightarrow{H_{q+1}i} H_{q+1}(X,B) \xrightarrow{H_{q+1}j} H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\delta_{*q+1}} H_q(A,B) \xrightarrow{H_q i} H_q(X,B) \longrightarrow \cdots$$

Eine andere Möglichkeit ist eine Diagrammjagd auf Basis der Eilenberg-Steenrod Axiome.

6.6.9 Satz (Existenz der Mayer-Vietoris Sequenz)

ei X ein top. Raum und $X_1, X_2 \subseteq X$ mit $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ und $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Dann gibt es eine exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\alpha_n} \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \xrightarrow{\beta_n} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\gamma_n} \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots$$

Beweis: Sei $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Wir betrachten das Diagramm von Inklusionen

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & (X_1, x_0) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & (X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[d, "h"] \\
(X_2, x_0) \arrow[r, "j"'] & (X, x_0) \arrow[r, "r"'] & (X, X_2)
\end{tikzcd}$$

Obiges Lemma führt zu folgendem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[r, "H_q i_1"] \arrow[d, "H_q i_2"] & H_q(X_1, x_0) \arrow[r, "H_q p"] \arrow[d, "H_q g"] & H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "H_q h"] & H_{q-1}(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "H_{q-1} i_2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(X_2, x_0) \arrow[r, "H_q j"'] & H_q(X, x_0) \arrow[r, "H_q r"'] & H_q(X, X_2) \arrow[r, "\Delta"] & H_{q-1}(X_2, x_0) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Die Ausschneidung liefert, dass jedes $H_q h$ ein Isomorphismus ist. Die Aussage folgt nun aus Lemma 6.1.6 und 6.6.4.

6.7 Anwendungen im $\mathbb{R}^n$

"The paradox is now fully established that the utmost abstractions are the true weapons with which to control our thought of concrete fact."
Alfred North Whitehead

Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ und $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$. Mit $\langle a,b\rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i$ bezeichnen wir das standard Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

6.7.1 Lemma

(a) Sei $n > 0$, $q \in \mathbb{Z}$ und $a,b \in S^n$ mit $a \neq b$. Dann gilt $\tilde{H}_q(S^n \setminus \{a,b\}) \cong \tilde{H}_q(S^{n-1})$.
(b) Sei $n \geq 0$, $q \in \mathbb{Z}$ und $a \in S^n$. Dann ist $\tilde{H}_q(S^n \setminus \{a\}) = 0$.
(c) Für $n \geq 1$ und $q \in \mathbb{Z}$ ist $\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$.
(d) Für $q \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 0$ ist $\tilde{H}_q(S^n) = \begin{cases} R & \text{falls } q = n \\ 0 & \text{falls } q \neq n \end{cases}$

Beweis: (a) Die Abbildung $H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(x,t) \mapsto (1-t)x + t\frac{x}{|x|}$ mit $X := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $A := S^{n-1}$ erfüllen alle Voraussetzungen von Lemma 6.6.5. Also $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_q(S^{n-1})$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 5.3.6 und 6.6.4.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Definiere $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $(x,t) \mapsto (1-t)x + ta$ und $A := \{a\}$. Aus Lemma 6.6.5 folgt $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n) = 0$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 5.3.6 und 6.6.4.

(c) Seien $a,b \in S^n$ mit $a \neq b$. Setze $X_1 := S^n \setminus \{a\}$ und $X_2 := S^n \setminus \{b\}$. Da $X_1 \cap X_2 = S^n \setminus \{a,b\} \neq \emptyset$ und $S^n = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ gilt (tatsächlich sind X_1, X_2 sogar selbst offen), existiert die Mayer-Vietoris Sequenz (Satz 6.6.9)

$$\longrightarrow \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \longrightarrow$$

Aus (a) und (b) folgt $\tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) = 0$, $\tilde{H}_{q-1}(X_1) \oplus \tilde{H}_{q-1}(X_2) = 0$ und $\tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$. Da die Sequenz exakt ist folgt schließlich $\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$.

(d) Aus (c) folgt mit Lemma 6.6.4 und der Additivitätseigenschaft $\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-n}(S^0) = \tilde{H}_{q-n}(\{-1,1\}) = H_{q-n}(\{-1,1\},\{-1\}) \cong H_{q-n}(\{-1\},\{-1\}) \oplus H_{q-n}(\{1\},\emptyset) = H_{q-n}(\{1\})$ Mit einem Verweis auf die Dimensionseigenschaft sind wir fertig.

6.7.2 Satz

S^n ist kein Retrakt von D^{n+1}.

Beweis: Mit Lemma 6.6.5 macht man sich sehr schnell klar, dass $\tilde{H}_q(D^{n+1}) = 0$ ist für alle $q \in \mathbb{Z}$. Wäre $r : D^{n+1} \to S^n$ eine Retraktion und $i : S^n \to D^{n+1}$ die Einbettung, so folgt

$r \circ i = id_{S^n}$, also $(H_q r) \circ (H_q i) = id_{H_q S^n}$. Das heißt $H_q r$ ist für alle $q \in \mathbb{Z}$ surjektiv. Wir kennnen nun aber $H_q S^n$ und $H_q D^{n+1}$ und sehen, dass das nicht für alle $q \in \mathbb{Z}$ stimmen kann. (Der Fall $n = 0$ geht elementar, da S^0 nicht zusammenhängend ist D^1 aber schon.) Man kann das Ganze auch direkt mit Lemma 6.6.2 beweisen.

6.7.3 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$, $n \geq 0$ hat einen Fixpunkt.

Beweis: Für $n = 0$ ist alles klar (elementare Analysis)! Sei $n > 0$. Annahme $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^n$. Für alle $x \in D^n$ suche $t(x) > 0$ mit $f(x) + t(x)(x - f(x)) \in S^{n-1}$, d.h. $1 = |f(x) + t(x)(x - f(x))|^2 = |f(x)| + 2t(x)\langle f(x), x - f(x)\rangle + t(x)^2 |x - f(x)|^2$. Mit $A(x) := |x - f(x)|^2 > 0$, $B(x) := 2\langle f(x), x - f(x)\rangle$ und $C(x) := |f(x)|^2 - 1 \leq 0$ haben wir $A(x)t(x)^2 + B(x)t(x) + C(x) = 0$. Da $t(x) > 0$ ist

$$t(x) = \frac{-B(x) + \sqrt{B(x)^2 - 4A(x)C(x)}}{2A(x)}$$

Setze $t : D^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto t(x)$. Dann ist t stetig und $r : D^n \to S^{n-1}$, $r(x) := f(x) + t(x)(x - f(x))$ ist eine Retraktion - Widerspruch! Einen elementaren Beweis gibt es im Kapitel *Fixpunktsätze*.

6.7.4 Definition

Sei $r \in \mathbb{N}$ und $I := [0,1]$. Ein Raum X heißt r-**Zelle** falls X homöomorph zuI^r.

6.7.5 Lemma

Ist $e_r \subseteq S^n$ eine r-Zelle, $n \geq 0$. Dann ist $\tilde{H}_q(S^n \setminus e_r) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Induktion über r. Für $r = 0$ ist $e_r = \{a\}$ und es folgt mit Lemma 6.7.1 $\tilde{H}_q(S^n \setminus e_r) = \tilde{H}_q(S^n \setminus \{a\}) = 0$. Sei $r \geq 1$ und die Behauptung für alle $k < r$ bewiesen. Sei $\varphi : I^{r-1} \times I \to e_r$ ein Homöomorphismus. Setze $Y := e_r$, $Y' := \varphi(I^{-1} \times [0, \frac{1}{2}])$ und $Y'' := \varphi(I^{-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$. Dann sind Y', Y'' ebenfalls r-Zellen und $Y' \cap Y'' = \varphi(I^{r-1} \times \{\frac{1}{2}\})$ ist eine $r-1$-Zelle. Da Y' und Y'' kompakt sind, sind $S^n \setminus Y'$, $S^n \setminus Y''$ offen in $S^n \setminus (Y' \cap Y'')$. Mit der Mayer-Vietoris Sequenz

$$\tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus (Y' \cap Y'')) \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus Y) \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus Y') \oplus \tilde{H}_q(S^n \setminus Y'') \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus (Y' \cap Y''))$$

sehen wir, dass $(\tilde{H}_q i', \tilde{H}_q j) : \tilde{H}_q(S^n \setminus Y) \to \tilde{H}_q(S^n \setminus Y') \oplus \tilde{H}_q(S^n \setminus Y'')$ ein Isomorphismus ist, wobei $i' : S^n \setminus Y \to S^n \setminus Y'$ und entsprechend j Inklusionen sind. Nehmen wir - um einen Widerspruch zu erhalten - an, dass $\tilde{H}_q(S^n \setminus Y) \neq 0$ ist. Sei also $0 \neq z \in \tilde{H}_q(S^n \setminus Y)$. Dann ist wenigstens einer der beiden Werte $\tilde{H}_q i' z$ oder $\tilde{H}_q j z$ ungleich 0. Dieses Argument iteriert angewendet ergibt eine Folge $(E_p)_{p\in\mathbb{N}}$ von r-Zellen, $E_p = \varphi(I^{r-1} \times I_p)$ mit Intervall $I_p \subseteq I$, $I_{p+1} \subseteq I_p$ und $\operatorname{diam}(I_p) = 2^{-p}$ und eine Folge $(i_p : S_n \setminus Y \to S_n \setminus E_p)_{p\in\mathbb{N}}$ von Inklusionen mit $H_q i_p z \neq 0$. Offenbar ist $E := \bigcap_{p\in\mathbb{N}} E_p$ eine $r-1$-Zelle und daher $\tilde{H}_q(S^n \setminus E) = 0$. Sei i die Inklusion $i : S^n \setminus Y \to S^n \setminus E$. Dann ist $\tilde{H}_q iz = 0$ in $\tilde{H}_q(S^n \setminus E)$. Sei $z = [x]$. Es gibt daher eine endliche Summe $\beta = \sum_l r_l \sigma_l \in S_{q+1}(S^n \setminus E)$ mit $\partial_{q+1}\beta = S_q ix$. Nun ist $A := \bigcup_l \sigma_l(\Delta_{q+1})$ kompakt in $S^n \setminus E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}}(S^n \setminus E_p)$, wobei letzteres eine aufsteigende Folge offener Mengen ist. Es gibt somit ein p mit $A \subseteq S^n \setminus E_p$. Wir sind im Grunde fertig, der Rest ist nur noch die präzise Herausschälung des offensichtlichen Widerspruches. Sei $g : S^n \setminus E_p \to S^n \setminus E$ die Inklusion. Zu jedem l gibt es ein eindeutiges $\sigma_l' : \Delta_{q+1} \to S^n \setminus E_p$ mit $g \circ \sigma_l' = \sigma_l$. Setze $\beta' := \sum_l r_l \sigma_l'$. Mit $g \circ i_p = i$ folgt $(S_q g)(S_q i_p)x = S_q ix = \partial_{q+1}\beta = \partial_{q+1}(S_{q+1}g)\beta' = (S_q g)\partial_{q+1}\beta'$, also $S_q i_p x = \partial_{q+1}\beta'$ denn $S_q g$ ist offenbar injektiv. Also $\tilde{H}_q i_p z = H_q i_p z = [S_q i_p x] = [\partial_{q+1}\beta'] = 0$ im Widerspruch zur Konstruktion!

6.7.6 Lemma

Sei $n > 0$, $r \geq 0$ und $S_r \subseteq S^n$, wobei S_r homöomorph zu S^r ist. Dann ist

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus S_r) \cong \begin{cases} R & \text{falls} \quad q = n-r-1 \\ 0 & \text{falls} \quad q \neq n-r-1 \end{cases} \qquad \text{für alle } \ q \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Für $r = 0$ ist $S_r = \{a,b\}$ mit $a \neq b$. Der Induktionsstart folgt daher aus Lemma 6.7.1.

Sei jetzt $r > 0$ und für jedes $k < r$ sei die Aussage bewiesen. Wir setzen $E_+ := \{(x_0,\dots,x_r) \in S^r \mid x_r \geq 0\}$ und $E_- := \{(x_0,\dots,x_r) \in S^r \mid x_r \leq 0\}$. Offenbar ist $\varphi : (E_+, E_+ \cap E_-) \to (D^r, S^{r-1})$, $(x_0,\dots,x_r) \mapsto (x_0,\dots,x_{r-1})$ stetig und bijektiv und somit, da es sich um kompakte Hausdorffräume handelt, bereits ein Homöomorphismus. Analog mit $\psi : (E_-, E_+ \cap E_-) \to (D^r, S^{r-1})$. Da wegen Lemma 11.3.18 I^r homöomorph zu D^r ist, ist I^r auch homöomorph zu E_+ bzw. E_- und diese sind daher r-Zellen. Sei $\phi : S^r \to S_r$ ein Homöomorphismus. Wir setzen $e_+ := \phi(E_+)$ und $e_- := \phi(E_-)$. Dementsprechend sind auch e_+ und e_- r-Zellen. Da diese kompakt sind, sind sie abgeschlossen in S^n und $X' := S^n \setminus e_+$, $X'' := S^n \setminus e_-$ offen in S^n und somit auch in $X' \cup X'' = S^n \setminus (e_+ \cap e_-)$. Mit Lemma 6.7.5 bekommen wir aus der Mayer-Vietoris Sequenz

$$\tilde{H}_{q+1}(X') \oplus \tilde{H}_{q+1}X'' \longrightarrow \tilde{H}_{q+1}(X' \cup X'') \longrightarrow \tilde{H}_q(X' \cap X'') \longrightarrow \tilde{H}_q(X') \oplus \tilde{H}_q X''$$

sofort $\tilde{H}_{q+1}(X' \cup X'') \cong \tilde{H}_q(X' \cap X'')$. Da $e_+ \cap e_-$ homöomorph zu S^{r-1} folgt dann aus der Induktionsvoraussetzung

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus S_r) = \tilde{H}_q(X' \cap X'') \cong \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus (e_+ \cap e_-)) \cong \begin{cases} R & \text{falls} \quad q+1 = n-(r-1)-1 \\ 0 & \text{falls} \quad q+1 \neq n-(r-1)-1 \end{cases}$$

6.7.7 Lemma

Ist X wegzusammenhängend und $\emptyset \neq A \subseteq X$, so ist $H_0(X,A) = 0$. Insbesondere folgt aus Lemma 6.6.4 dann $\tilde{H}_0(X) = 0$.

Beweis: Zur Erinnerung: $S_q(X,A) := S_q(X)/S_q(A)$ und $H_q(X,A) := \frac{\ker(\overline{\partial}_q)}{\operatorname{im}(\overline{\partial}_{q+1})}$ wobei $\overline{\partial}_q : S_q(X,A) \to S_{q-1}(X,A)$. Sei $x_0 \in A$. Jedes $\sigma \in M_0(X)$ wird eindeutig durch einen Punkt $x \in X$ repräsentiert. Wir identifizieren deshalb $M_0(X)$ mit X. Sei nun $\beta = (\sum_{x\in X} r_x x) + S_0(A) \in \ker(\overline{\partial}_0) = S_0(X,A)$ gegeben. Für jedes $x \in X$ sei $\sigma_x : \Delta_1 \to X$ stetig mit $\sigma_x(e_0) = x_0$ und $\sigma_x(e_1) = x$. Dann ist $\gamma := (\sum_{x\in X} r_x \sigma_x) + S_1(A) \in S_1(X,A)$.

Nun ist $\partial_1(\sum_{x\in X} r_x \sigma_x) = (\sum_{x\in X} r_x x) - (\sum_{x\in X} r_x x_0)$, wobei $\sum_{x\in X} r_x x_0 \in S_0(A)$. Also ist

$$\beta = (\sum_{x\in X} r_x x) + S_0(A) = (\sum_{x\in X} r_x x) - (\sum_{x\in X} r_x x_0) + S_0(A) = \overline{\partial}_1(\gamma)$$

Insgesamt demnach $\ker(\overline{\partial}_0) \subseteq \operatorname{im}(\overline{\partial}_1)$ und somit $H_0(X,A) = 0$.

6.7.8 Lemma

(a) $S^n \setminus e_r$, wobei e_r eine r-Zelle $\subseteq S^n$ ist, ist wegzusammenhängend.

(b) Sei s homöomorph zu S^r. Für $r = n-1$ hat $S^n \setminus s$ genau zwei offene Wegzusammenhangskomponenten = Zusammenhangskomponenten. Für $r \neq n-1$ ist $S^n \setminus s$ wegzusammenhängend.

Beweis: (a) Es ist nach Lemma 6.7.5 $\tilde{H}_0(S^n \setminus e_r) = 0$, also $H_0(S^n \setminus e_r) \cong R$. Sei $x \in s$. Nun ist s kompakt, also abgeschlossen in S^n. Demzufolge ist $S^n \setminus s$ als offener Teilraum von $S^n \setminus \{x\}$ ebenfalls lokal wegzusammenhängend. Eine Zerlegung von $S^n \setminus s$ in seine Wegzusammenhangskomponenten $(X_d)_{d\in D}$ ist daher eine Zerlegung von $S^n \setminus s$ in paarweise offene und disjunkte Teilmengen. Aus der Additivitätseigenschaft und Lemma 6.7.7 folgt $R \cong \bigoplus_{d\in D} R$. Wir hatten uns ganz am Anfang darauf geeinigt, dass R einen fest gewählten Ring bezeichnet. Setzen wir für R z.B. den Körper $\mathbb{R}$ ein, so kann die Gleichung $R \cong \bigoplus_{d\in D} R$ für ein D mit mehr als einem Element offenbar nicht mehr gelten (Dimension von Vektorräumen)! Folglich $|D| = 1$ und $S^n \setminus s$ ist wegzusammenhängend!

(b) Sei $r \neq n-1$. Es folgt $\tilde{H}_0(S^n \setminus s) = 0$ und wir schließen wie eben. Ist $r = n-1$, so sei $(X_d)_{d\in D}$ wieder die Zerlegung von $S^n \setminus s$ in Wegzusammenhangskomponenten. Es folgt wieder mit Lemma 6.7.6, 6.7.7 und der Ausschneidungseigenschaft $\bigoplus_{d\in D} R \cong H_0(S^n \setminus s) = R \bigoplus R$. Für $R = \mathbb{R}$ geht dies nur für $|D| = 2$!

6.7.9 Trennungssatz von Jordan-Brouwer

Sei $s \subseteq S^n$ homöomorph zu S^{n-1}. Dann hat $S^n \setminus s$ genau zwei offene (Weg)Zusammenhangskomponenten U, V mit $\partial U = \partial V = s$.

Beweis: $S^n \setminus s$ hat nach Lemma 6.7.8 genau zwei offene Wegzusammenhangskomponenten = Zusammenhangskomponenten U, V. Da V offen ist und $S^n \setminus V = U \cup s$, folgt $\overline{U} \subseteq U \cup s$ und somit auch $\partial U = \overline{U} \setminus U \subseteq s$ Analog mit V.

Sei $x \in s$ und W offen in S^n mit $x \in W$. Wegen $\emptyset \neq W \cap (V \cup s) = W \cap (S^n \setminus U)$ bleibt nur noch $W \cap U \neq \emptyset$ zu zeigen. Sei $\varphi : s \to S^{n-1}$ ein Homöomorphismus und $a := \varphi(x)$. Es ist $W \cap s$ offen in s und demnach $P := \varphi(W \cap s)$ offen in S^{n-1}. Sei $\psi : S^{n-1} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ ebenfalls ein Homöomorphismus. Wegen $\mathbb{R}^{n-1} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K(0,k)$ und $S^{n-1} \setminus P \subseteq S^{n-1} \setminus \{a\} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \psi^{-1}(K(0,k))$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $S^{n-1} \setminus P \subseteq \psi^{-1}(\overline{K(0,k)})$ (beachte: $S^{n-1} \setminus P$ ist kompakt). Es folgt $A := s \setminus \varphi^{-1}(\psi^{-1}(\overline{K(0,k)})) \subseteq \varphi^{-1}(P) = W \cap s$ und $s \setminus A$ ist eine $n-1$-Zelle, denn $\overline{K(0,k)}$ ist eine. Also $\tilde{H}_0(S^n \setminus (s \setminus A)) = 0$ und $S^n \setminus (s \setminus A) = (S^n \setminus s) \cap A$ ist daher wegzusammenhängend! Sei $u \in U$ und $v \in V$. Es gibt dann ein $f : I \to S^n \setminus (s \setminus A)$ mit $f(0) = u$ und $f(1) = v$. Folglich $f(I) \cap A \neq \emptyset$. Nun ist $f(I) \cap A \subseteq f(I) \cap s \subseteq f(I) \cap (S^n \setminus (s \setminus A)) \cap s \subseteq f(I) \cap A$, also $f(I) \cap A = f(I) \cap s$. Setze $t_0 := \inf\{t \in I \mid f(t) \in s\} = \inf\{t \in I \mid f(t) \in A\}$. Folglich $f(t_0) \in f(I) \cap A = f(I) \cap s$ und somit $f(t_0) \in W$. Da $f(0) = u$, $f(1) = v$ und $f(t_0) \in s$ ist $0 < t_0 < 1$. Setze $J := [0, t_0)$. Dann ist $f(J)$ zusammenhängend und $f(J) \subseteq f(I) \cap (S^n \setminus s) \subseteq f(I) \cap (U \cup V)$. Da $u \in f(J)$ folgt $f(J) \subseteq U$. Da $t_0 \in \overline{f^{-1}}(W)$: offen, ist $J \cap f^{-1}(W) \neq \emptyset$, also $f(J) \cap W \neq \emptyset$ und somit $W \cap U \neq \emptyset$. Es folgt $x \in \overline{S^n \setminus U} \cap \overline{U} = \partial U$ und analog $x \in \partial V$.

Leicht kann man dieses Ergebnis nun auch auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen:

6.7.10 Korollar

Sei $n \geq 2$, $s \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^{n-1}. Dann zerfällt $R^n \setminus s$ in exakt zwei offene Wegzusammenhangskomponenten = Zusammenhangskomponenten U, V mit $s = \partial U = \partial V$.

6.7.11 Satz von der Invarianz des Gebietes

Sind U, V homöomorphe Teilmengen von S^n, von denen eine offen ist, dann ist auch die andere offen.

Beweis: Sei U offen, $h : U \to V$ ein Homöomorphismus und $y \in V$. Sei $h(x) = y$. Sei W eine abgeschlossene zu I^n (also auch D^n) homöomorphe Umgebung von x in U, so dass ∂W homöomorph zu S^{n-1} ist. W und $h(W)$ sind dementsprechend n-Zellen. Nun ist $S^n \setminus h(W)$

zusammenhängend und $S^n \setminus h(\partial W)$ hat zwei Komponenten. Da $S^n \setminus h(\partial W) = (S^n \setminus h(W)) \cup (h(W) \setminus h(\partial W))$ und beide Terme der rechten Seite disjunkt und zusammenhängend sind, handelt es sich um die Komponenten von $S^n \setminus (\partial W)$. Sie sind also auch offen. insbesondere ist $h(W) \setminus h(\partial W)$ offen in S^n. Aber $y \in h(W) \setminus h(\partial W) \subseteq V$. Also ist V offen.

Auch dieses Ergebnis lässt sich nun leicht auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen:

6.7.12 Korollar

Sind $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph und ist eine der beiden Mengen offen, so ist auch die andere Menge offen.

7 Hyperräume

"Die Menschheitsgeschichte wird mehr und mehr zu einem Rennen zwischen Aufklärung und Katastrophe."
H.G. Wells

7.1 Hausdorff-Metrik und Selbstähnlichkeit

Sei (E,d) ein metrischer Raum mit Metrik d und sei $\alpha := \{A \subseteq E \mid \emptyset \neq A$ ist abgeschlossen und beschränkt$\}$. Unser Ziel ist es α zu einem metrischen Raum zu machen (mit der sogenannten **Hausdorff-Metrik**). Für $A,B \in \alpha$ setzen wir dazu

$$\delta(A,B) := \max(\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(A,y)) \quad \text{wobei} \quad d(x,A) := \inf_{a\in A} d(x,a).$$

Man beachte, dass $d(x,A) = d(A,x)$ für alle $A \subseteq E$ und für alle $x \in E$ gilt. Ein Wort zur Notation: Mit $K_d^E(x,\varepsilon)$ bezeichnen wir in jedem metrischen Raum (E,d) die offene Kugel um x mit Radius ε, also $K_d^E(x,\varepsilon) := \{y \in E \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ (wenn klar ist um welchen Raum es sich handelt, schreiben wir einfach $K(x,\varepsilon)$).

7.1.1 Satz (Existenz der Hausdorff-Metrik)

δ ist eine Metrik auf α.

Beweis: (1) Die Symmetrie ist klar.
(2) Es gilt $\delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in A} d(x,B) = 0 = \sup_{y\in B} d(A,y) \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B$ und $\overline{B} \subseteq A$. Da $A,B \in \alpha$ ist $\overline{A} = A$ und $\overline{B} = B$. Es folgt $\delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
(3) (Dreiecksungleichung) Seien $A,B;C \in \alpha$.
Sei $x \in A$ beliebig.
1.Fall $x \in A \setminus C$, dann $\forall c \in C:\ d(x,B) \le d(x,c) + d(c,B)$, also $d(x,B) \le \delta(A,C) + \delta(C,B)$.
2.Fall $x \in A \cap C$, dann $d(x,B) \le \delta(B,C) \le \delta(A,C) + \delta(B,C)$.
Sei nun $y \in B$ beliebig.
1.Fall $y \in B \setminus C$, dann $\forall c \in C:\ d(y,A) \le d(y,c) + d(c,A)$, also $d(y,A) \le \delta(B,C) + \delta(A,C)$.
2.Fall $y \in B \cap C$, dann $d(y,A) \le \delta(A,C) \le \delta(A,C) + \delta(B,C)$.
Es folgt $\delta(A,B) := \max(\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(A,y)) \le \delta(A,C) + \delta(B,C)$.

7.1.2 Satz (Vollständigkeit der Hausdorff-Metrik)

Ist (E,d) vollständig, so ist auch (α,δ) vollständig.

Beweis: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in α. Setze $Y_n := \overline{\bigcup_{k\ge n} A_k}$ und $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n$.

1.Schritt: Alle Y_n sind beschränkt. Außerdem ist $A \neq \emptyset$, abgeschlossen und beschränkt.

Beweis dazu: Für $\varepsilon = 1\ \exists M \in \mathbb{N}\, \forall k,l \geq M:\ \delta(A_l,A_k) < 1$. Sei $n \geq M$ und $x \in Y_n = \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$. Dann gibt es ein $x' \in \bigcup_{k\geq n} A_k$ mit $d(x,x') < 1$. Es gibt also ein $l \geq n$ mit $x' \in A_l$ und es folgt $d(x,A_n) \leq d(x,x') + d(x',A_n) < 1 + \delta(A_l,A_n) < 2$. Da $x \in Y_n$ beliebig war und A_n beschränkt ist, muss auch Y_n beschränkt sein. Also sind alle Y_n, $n \geq M$ beschränkt. Aus der Beschränktheit von Y_{p+1} folgt aber die Beschränktheit von Y_p, denn $Y_p := \overline{\bigcup_{k\geq p} A_k} = \overline{A_p} \cup \overline{\bigcup_{k\geq p+1} A_k} = \overline{A_p} \cup Y_{p+1}$ und $\overline{A_p}$ ist natürlich auch beschränkt. Also sind auch alle Y_n, $n < M$ beschränkt.

Als Schnitt abgeschlossener und beschränkter Mengen ist A offenbar abgeschlossen und beschränkt. Zeigen wir $A \neq \emptyset$: Für jedes $n \in \mathbb{N}\, \exists N_n \in \mathbb{N}$, $N_n \geq N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}$, so dass $\forall k,l \geq N_n:\ \delta(A_k,A_l) < 2^{-n}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze nun $B_n := A_{N_n}$. Für alle $k,l,n \in \mathbb{N}$ mit $k,l \geq n$ gilt $\delta(B_k,B_l) = \delta(A_{N_k},A_{N_l}) < 2^{-n}$, da $N_k,N_l \geq N_n$. Wähle $x_0 \in B_0$. Sei $x_n \in B_n$ gewählt.

1.Fall $x_n \in B_{n+1}$, dann setze $x_{n+1} := x_n$.

2.Fall $x_n \notin B_{n+1}$. Nun gilt $\delta(B_n,B_{n+1}) < 2^{-n}$, insbesondere $\sup_{x\in B_{n+1}} d(x,B_n) < 2^{-n}$ (und $B_{n+1} \neq \emptyset$). Wähle dann $x_{n+1} \in B_{n+1}$ mit $d(x_n,x_{n+1}) < 2^{-n}$.

Offenbar ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E. Bis auf endlich viele Anfangsglieder ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ daher auch eine Cauchyfolge in jedem Y_n. Für $y := \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt somit $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n = A$.

2.Schritt: $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in α.

Beweis dazu: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall k,l \geq N:\ \delta(A_k,A_l) < \varepsilon/2$. Seien $k,l \geq N$ und $y \in Y_k = \overline{\bigcup_{p\geq k} A_p}$. Dann $\exists y' \in K(y,\varepsilon/2) \cap (\bigcup_{p\geq k} A_p)$. Also ist $y' \in A_p$, für gewisses $p \geq k$. Es folgt $d(y,Y_l) \leq d(y,y') + d(y',\overline{\bigcup_{q\geq l} A_q}) = d(y,y') + d(y',\bigcup_{q\geq l} A_q) < \varepsilon/2 + d(y',A_l) \leq \varepsilon/2 + \delta(A_p,A_l) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Analog bekommt man $d(y,Y_k) < \varepsilon$ für jedes $y \in Y_l$. Damit folgt nun aber $\delta(Y_k,Y_l) \leq \varepsilon$ für alle $k,l \geq N$.

3.Schritt: A ist ein Häufungspunkt von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (das heißt zu jeder Umgebung O von A ist $\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n \in O\}$ unendlich) und damit $\lim_{n\to\infty} \delta(Y_n,A) = 0$.

Beweis dazu: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $N_n \in \mathbb{N}$, $N_n \geq N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}$ mit $\forall k,l \geq N_n:\ \delta(Y_k,Y_l) < 2^{-n}$. Für $Z_n := Y_{N_n}$ folgt für alle $k,l \geq n:\ \delta(Z_k,Z_l) = \delta(Y_{N_k},Y_{N_l}) < 2^{-n}$, da $N_k,N_l \geq N_n$. Angenommen A ist kein Häufungspunkt von $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0\, \forall n \in \mathbb{N}:\ \delta(Z_n,A) \geq \varepsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon/2$.

Wähle $z_N \in Z_N$ mit $d(z_N,A) \geq \frac{3\varepsilon}{4}$ (man beachte $A \subseteq Z_N$). Sei $z_n \in Z_n$, $n \geq N$ gewählt. Falls $z_n \in Z_{n+1}$, so setze $z_{n+1} := z_n$. Falls $z_n \notin Z_{n+1}$, so ist trotzdem $\delta(Z_n,Z_{n+1}) < 2^{-n}$. Es gibt also ein $z_{n+1} \in Z_{n+1}$ mit $d(z_n,z_{n+1}) < 2^{-n}$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $d(z_{N+k},A) \geq d(z_N,A) - (d(z_{N+k} - z_{N+k-1}) + \ldots + d(z_{N+1},z_N)) \geq \frac{3\varepsilon}{4} - (2^{-N} + \ldots + 2^{-(N+k-1)}) > \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{4}$. Nun ist $(z_k)_{k=N}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in jedem Y_n (bis auf endliche viele Ausnahmen), also $z := \lim_{n\to\infty} z_n \in A$. Es folgt $d(z_n,A) \leq d(z_n,z) \to 0$ im Widerspruch zu $d(z_n,A) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $n \geq N$. Also ist A ein Häufungspunkt von $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, folgt $\lim_{n\to\infty} \delta(Y_n,A) = 0$.

4.Schritt: Es gilt $\lim_{n\to\infty} \delta(A_n,A) = 0$.

Beweis dazu: Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall k,l \geq N:\ \delta(A_l,A_k) < \varepsilon$. Nun ist $\delta(A_n,A) \leq \delta(Y_n,A) + \delta(Y_n,A_n)$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Außerdem $\delta(Y_n,A_n) = \sup\{d(x,A_n) \mid x \in \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}\}$, da $A_n \subseteq Y_n = \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$. Sei nun $x \in \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$. Dann gibt es ein $x' \in \bigcup_{k\geq n} A_k$ mit $d(x,x') < \varepsilon$. Es gibt also ein $l \geq n$ mit $x' \in A_l$ und es folgt $d(x,A_n) \leq d(x,x') + d(x',A_n) < \varepsilon + \delta(A_l,A_n) < 2\varepsilon$ für $n \geq N$, also auch $\delta(Y_n,A_n) \leq 2\varepsilon$ für $n \geq N$. Schließlich gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $N' \geq N$ und $\delta(Y_n,A) < \varepsilon$ für $n \geq N'$und es folgt $\forall n \geq N':\ \delta(A_n,A) \leq \delta(Y_n,A) + \delta(Y_n,A_n) < 3\varepsilon$.

7.1.3 Satz

(a) Ist (E,d) total beschränkt, so ist auch (α,δ) total beschränkt.
(b) Ist (E,d) kompakt, so ist auch (α,δ) kompakt.

Beweis: (a) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $F \subseteq E$, F: endlich mit $d(x,F) < \frac{\varepsilon}{2}$, für alle $x \in E$. Setze $\mathscr{F} := \mathscr{P}(F)$. Sei $A \in \alpha$. Zu jedem $a \in A$ gibt es ein $f_a \in F$ mit $d(a,f_a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $F' := \{f_a \mid a \in A\}$. Dann ist $\delta(A,F') = \max(\sup_{a\in A} d(a,F'), \sup_{f\in F'} d(A,f))$. Es folgt $\sup_{a\in A} d(a,F') \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Schauen wir uns noch $\sup_{f\in F'} d(A,f)$ an. Für $f \in F'$ $\exists a \in A$ mit $f = f_a$, folglich $d(A,f) \leq d(a,f_a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Also auch hier $\sup_{f\in F'} d(A,f) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Und somit $\delta(A,F') < \varepsilon$, also $\delta(A,\mathscr{F}) < \varepsilon$ für alle $A \in \alpha$.

(b) Ist (E,d) kompkakt so ist (E,d) vollständig und total beschränkt, also ist (α,δ) vollständig und total beschränkt und somit auch kompakt.

7.1.4 Lemma

Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus α mit $\exists K := \lim_{n\to\infty} K_n$, $K \in \alpha$. Sind alle K_n total beschränkt, so ist auch K total beschränkt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\delta(K_n,K) < \frac{\varepsilon}{4}$. Da K_n total beschränkt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq K_n$ mit $\forall x \in K_n$ gilt $d(x,F) < \frac{\varepsilon}{4}$. Aus $\delta(K_n,K) < \frac{\varepsilon}{4}$ folgt, dass es zu jedem $y \in K$ ein $f(y) \in K_n$ gibt mit $d(y,f(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Außerdem gibt es zu jedem $x \in K_n$ ein $g(x) \in F$ mit $d(x,g(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Wir haben also Abbildungen $K \xrightarrow{f} K_n \xrightarrow{g} F$. Setze $h := g \circ f$. Für jedes $z \in F$ mit $h^{-1}(z) \neq \emptyset$ sei $y_z \in h^{-1}(z)$ und $A_z := \{y_z\}$. Falls $h^{-1}(z) = \emptyset$, setze $A_z := \emptyset$. Sei dann $F' := \bigcup_{z\in F} A_z$. Offenbar ist F' endlich und $F' \neq \emptyset$.

Sei nun $y \in K$. Dann ist $d(y,h(y)) \leq d(y,f(y)) + d(f(y),g(f(y))) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $z := h(y)$, also $h^{-1}(z) \neq \emptyset$. Folglich gibt es ein $y_z \in F$ mit $h(y_z) = z$. Es folgt $d(y,y_z) \leq d(y,h(y)) + d(h(y),y_z) = d(y,h(y)) + d(h(y_z),y_z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

7.1.5 Lemma

Sei $\kappa := \{K \subseteq E \mid K \text{ kompakt und } K \neq \emptyset\}$. Ist (E,d) vollständig, so ist (κ,δ) vollständig, wobei wir δ auf κ einschränken.

Beweis: Wir zeigen, dass κ ein abgeschlossener Teilraum von α ist. Da (α,δ) vollständig ist, sind wir dann fertig. Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus κ, die in α konvergiert (bzgl. δ), also $\lim_{n\to\infty} K_n = K \in \alpha$. Nun sind alle K_n total beschränkt (da sie kompakt sind). Folglich ist auch K (wie eben gezeigt wurde) total beschränkt. Da K aber auch abgeschlossen ist, ist K somit auch kompakt, folglich $K \in \kappa$! Damit ist gezeigt, dass κ abgeschlossen ist.

7.1.6 Lemma

Sei (E,d) ein metrischer Raum und $f_i : E \to E$, $i = 1,...,n$ eine Familie von Kontraktionen (d.h. $\forall\, i = 1,...,n$ ist $q_i := \sup_{x \neq y} \frac{d(f_i(x),f_i(y))}{d(x,y)} < 1$). Dann ist auch $f : \alpha \to \alpha$, definiert durch $f(A) := \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(A)}$ eine Kontraktion.

Beweis: Setze $q := \max(q_1,...,q_n)$. Wir zeigen $\delta(\overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(A)}, \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(B)}) \leq q \cdot \delta(A,B)$, für beliebige $A,B \in \alpha$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Sei $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(A)}$. Dann gibt es ein $y \in \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$ mit $d(x,y) < \varepsilon$. Sei $l \in \{1,...,n\}$ und $a \in A$ mit $f_l(a) = y$. Nun gibt es ein $b \in B$ mit $d(a,b) < d(a,B) + \varepsilon$. Sei $z \in \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(B)}$ mit $d(f_l(b),z) < \varepsilon$. Es folgt

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y, f_l(b)) + d(f_l(b),z) < \varepsilon + qd(a,b) + \varepsilon < qd(a,B) + (2+q)\varepsilon.$$

Da ε beliebig war gilt $d(x, \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(B)}) \leq d(x,z) \leq qd(a,B) \leq q \sup_{a \in A} d(a,B)$. Da auch $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(A)}$ beliebig war, gilt $\sup_{x \in \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(A)}} d(x, \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(B)}) \leq q \sup_{a \in A} d(a,B)$. Aus Symmetriegründen folgt damit dann $\delta(\overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(A)}, \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(B)}) \leq q \cdot \delta(A,B)$.

7.1.7 Satz (Existenz selbstähnlicher Mengen)

Sei (E,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f_i : E \to E$, $i = 1,...,n$ eine Familie von Kontraktionen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte und nicht leere kompakte Teilmenge K von E mit $K = \bigcup_{i=1}^n f_i(K)$.

Beweis: Sei wieder $\kappa := \{K \subseteq E \mid K \text{ kompakt und } K \neq \emptyset\}$. Dann ist (κ, δ) vollständig. Satz 7.1.6 lehrt, dass $f : \kappa \to \kappa$, definiert durch $f(K) := \overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(K)}$ eine Kontraktion ist, denn $\overline{\bigcup_{i=1}^n f_i(K)} = \bigcup_{i=1}^n f_i(K)$, da alle f_i stetig sind, die $f_i(K)$ somit kompakt, also auch abgeschlossen sind und daher auch $\bigcup_{i=1}^n f_i(K)$ kompakt und abgeschlossen ist. Laut dem Banchschen Fixpunktsatz gibt es genau ein $K \in \kappa$ mit $f(K) = K$, also $K = \bigcup_{i=1}^n f_i(K)$.

7.2 Vietoris-Topologie

7.2.1 Definition

Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $\alpha := \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ ist abgeschlossen}\}$. Wir werden α nun zu einem topologischen Raum machen. Für $U_1,...,U_n \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ setzen wir

$$V(U_1,...,U_n) := \{A \in \alpha \mid A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k \text{ und } \forall k \in \{1,...,n\} \text{ ist } U_k \cap A \neq \emptyset\}$$

und $\mathscr{B} := \{V(U_1,...,U_n) \mid U_1,...,U_n \in \tau \setminus \{\emptyset\}\}$. Seien $U_1,...,U_p,W_1,...,W_q \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Setze $U := (\bigcup_{k=1}^p U_k) \cap (\bigcup_{l=1}^q W_l)$. Dann ist offenbar

$$V(U_1,...,U_p) \cap V(W_1,...,W_q) = V(U \cap U_1,...,U \cap U_n, U \cap W_1,...,U \cap W_n).$$

Die von $\mathscr{B}$ erzeugte Topologie τ_V nennnen wir die **Vietoris-Topologie** auf α. Aus dem bisher gezeigten folgt, dass $\mathscr{B}$ eine Basis für τ_V ist. Aus

$$V(U_1,...,U_p) = V(\bigcup_{k=1}^p U_k) \cap \bigcap_{k=1}^p V(X,U_k)$$

folgt, dass $\mathscr{S} := \{V(U) \mid U \in \tau \setminus \{\emptyset\}\} \cup \{V(X,U) \mid U \in \tau \setminus \{\emptyset\}\}$ eine Subbasis für τ_V ist.

7.2.2 Satz

Ein topologischer Raum (X,τ) ist genau dann kompakt, wenn (α,τ_V) kompakt ist.

Beweis: Sei (α,τ_V) kompakt und sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann ist $(V(X,U_i))_{i\in I}$ offensichtlich eine offene Überdeckung von α. Es gibt also eine endliche Teilüberdeckung $V(X,U_{i_1}),...,V(X,U_{i_n})$. Dann ist $U_{i_1},...,U_{i_n}$ eine Überdeckung von X, denn sonst wäre $A := X \setminus \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ eine nicht leere abgeschlossene Menge, also $A \in V(X,U_{i_k})$, für ein gewisses $k \in \{1,...,n\}$ und somit $A \cap U_{i_k} \neq \emptyset$ - ein Widerspruch.

Sei (X,τ) kompakt und $\{V(U_i) \mid i \in I\} \cup \{V(X,W_j) \mid j \in J\}$ eine offene Überdeckung von α mit Elementen aus der Subbasis $\mathscr{S}$ (wir verwenden den Alexanderschen Subbasissatz). Wir setzen dann $B := X \setminus \bigcup_{j\in J} W_j \in \alpha$. Ist $B = \emptyset$, so gibt es endlich viele $W_{j_1},...,W_{j_n}$ mit $X = W_{j_1} \cup ... \cup W_{j_n}$. Dann offensichtlich $\alpha = V(X,W_{j_1}) \cup ... \cup V(X,W_{j_n})$.

Gilt $B \neq \emptyset$, so ist B dann aber in einer der Überdeckungsmengen als Element enthalten. Dass kann aber nur noch eine Menge der Form $V(U_{i_0})$ sein, für ein $i_0 \in I$. Also $B \subseteq U_{i_0}$. Das bedeutet aber $X = U_{i_0} \cup \bigcup_{j\in J} W_j$. Da X kompakt ist, gibt es wieder endlich viele $W_{j_1},...,W_{j_n}$ mit $X = U_{i_0} \cup W_{j_1} \cup ... \cup W_{j_n}$. Dann folgt aber leicht $\alpha = V(U_{i_0}) \cup V(X,W_{j_1}) \cup ... \cup V(X,W_{j_n})$, denn jede abgeschlossene Menge A, die nicht Element von $V(U_{i_0})$ ist, also Teilmenge von U_{i_0}, muss bereits eines der W_{i_k} schneiden (der Grund liegt in der Gleichung $X = U_{i_0} \cup W_{j_1} \cup ... \cup W_{j_n}$) und ist somit Element von $V(X,W_{j_k})$.

7.2.3 Satz

Sei (X,τ) ein T_1-Raum. Dann ist (X,τ) genau dann zusammenhängend, wenn auch (α,τ_V) zusammenhängend ist.

Beweis: Sei (X,τ) zusammenhängend. Sei $a \in X$ fest gewählt. Für $n \geq 1$ setze $Y_n := \{f \in X^{\mathbb{N}} \mid \forall k \geq n \text{ ist } f(n) = a\}$, also $Y_n = \prod_{k\in\mathbb{N}} X_k^{(n)}$ mit $X_k^{(n)} := \begin{cases} X & \text{für } k < n \\ \{a\} & \text{für } n \leq k \end{cases}$. Offenbar ist jedes Y_n somit zusammenhängend. Sei $\phi_n : Y_n \to \alpha$ definiert durch $\phi_n(f) := \{f(0),...,f(n-1)\}$.

Zeigen wir, dass ϕ stetig ist. Dies rechnen wir auf der Subbasis $\{V(U), V(X,U) \mid \emptyset \neq U \in \tau\}$ von τ_V nach. Es ist $\phi_n^{-1}(V(U)) = \{f \in Y_n \mid \{f(0),...,f(n-1)\} \subseteq U\} = (\prod_{k\in\mathbb{N}} O_k) \cap Y_n$ mit $O_k := \begin{cases} U & \text{für } k < n \\ X & \text{für } n \leq k \end{cases}$ und $\phi_n^{-1}(V(X,U)) = \{f \in Y_n \mid \exists k < n \text{ mit } f(k) \in U\}$. Für $f \in \phi_n^{-1}(V(X,U))$ sei $k_f < n$ mit $f(k_f) \in U$. Dann ist $f \in (\prod_{k\in\mathbb{N}} W_k) \cap Y_n \subseteq \phi_n^{-1}(V(X,U))$, wobei $W_k := \begin{cases} U & \text{für } k = k_f \\ X & \text{sonst} \end{cases}$. ϕ_n ist daher stetig und $D_n := \phi_n(Y_n)$ somit zusammenhängend in α. Nun gilt $D_n \subseteq D_{n+1}$, also ist auch $\bigcup_{1\leq n} D_n = \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ und } A \text{ ist endlich}\}$ zusammenhängend und zudem dicht in α. Dann muss aber auch α zusammenhängend sein! Die T_1 Eigenschaft braucht man damit ϕ_n stetig und $\bigcup_{1\leq n} D_n$ dicht in α ist.

Sei umgekehrt (X,τ) nicht zusammenhängend. Dann gibt es ein offenes und abgeschlossenes $U \subseteq X$ mit $\emptyset \neq U \neq X$. Aus $\alpha \setminus V(X,U) = V(X \setminus U)$ folgt, dass auch $V(X,U)$ offen und abgeschlossen ist. Da (X,τ) ein T_1-Raum ist, gilt $\emptyset \neq V(X,U) \neq \alpha$.

7.2.4 Lemma

Sei (X,τ) ein T_1-Raum. Dann ist $\overline{V(U_1,...,U_n)} = V(\overline{U_1},...,\overline{U_n})$.

Beweis: Setze $P := V(U_1,...,U_n)$ und $Q := V(\overline{U_1},...,\overline{U_n})$. Zeigen wir, dass Q abgeschlossen ist. Sei $A \in \alpha \setminus Q$. Falls $A \not\subseteq \overline{U_1} \cup ... \cup \overline{U_n}$, dann $A \in V(X,W) \subseteq \alpha \setminus Q$, wobei $W := X \setminus \overline{U_1} \cup ... \cup \overline{U_n}$. Falls $A \cap \overline{U_k} = \emptyset$, für gewisses $k \in \{1,...,n\}$, so ist $A \in V(X \setminus \overline{U_k}) \subseteq \alpha \setminus Q$. Also ist $\alpha \setminus Q$ offen und es folgt $\overline{P} \subseteq \overline{Q} = Q$ (da $P \subseteq Q$). Zeigen wir die andere Inklusion. Sei $A \in Q$ und seien $W_1,...,W_m \in \tau$ gegeben, mit $A \in V(W_1,...,W_m)$. Für $i \in \{1,...,n\}$ sei $a_i \in A \cap \overline{U_i}$. Dann ist $a_i \in \bigcup_{l=1}^m W_l$, also $U_i \cap \bigcup_{l=1}^m W_l \neq \emptyset$. Für $j \in \{1,...,m\}$ sei $b_j \in A \cap W_j$. Also $b_j \in \overline{\bigcup_{k=1}^n U_k}$ und somit $W_j \cap \bigcup_{k=1}^n U_k \neq \emptyset$. Da (X,τ) ein T_1-Raum ist, folgt $V(U_1,...,U_n) \cap V(W_1,...,W_m) \neq \emptyset$ und somit $A \in \overline{V(U_1,...,U_n)}$. Also auch $Q \subseteq \overline{P}$.

7.2.5 Satz

Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $\alpha := \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ abgeschlossen}\}$.

(1) (α, τ_V) ist ein T_0-Raum.

(2) Ist (X,τ) ein T_1-Raum, dann gilt: (α,τ_V) ist T_2 $\Leftrightarrow$ (X,τ) ist T_3.

(3) Ist (X,τ) ein T_1-Raum, dann gilt: (α,τ_V) ist T_3 $\Leftrightarrow$ (X,τ) ist T_4.

Beweis: (1) Seien $A,B \in \alpha$ mit $A \neq B$. Also o.B.d.A. $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$. Setze $U := X \setminus B$. Dann ist $A \in V(X,U)$ und $B \notin V(X,U)$.

(2) Ist (α,τ_V) ein T_2-Raum und $x \in X \setminus A$, wobei A abgeschlossen (und o.B.d.A. $A \neq \emptyset$), so sind $A \cup \{x\}, A \in \alpha$, es gibt also $U_1,...,U_n,W_1,...,W_m \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ mit $A \cup \{x\} \in P := V(U_1,...,U_n)$, $A \in Q := V(W_1,...,W_m)$ und $P \cap Q = \emptyset$. Nun ist (rein formal) $P \cap Q = V(U \cap$

$U_1,...,U\cap U_n, U\cap W_1,...,U\cap W_m)$, wobei $U := (\bigcup_{k=1}^n U_k)\cap(\bigcup_{l=1}^m W_l)$. Also existiert ein $k \in \{1,...,n\}$ mit $U\cap U_k = \emptyset$. Dann muss aber $x \in U_k$ sein (andernfalls wäre $U_k \cap A \neq \emptyset$, also $U_k \cap U \neq \emptyset$).

Sei andererseits (X,τ) ein T_3-Raum und $A, B \in \alpha$, $A \neq B$. O.B.d.A. sei $x \in B\setminus A$. Dann gibt es $U, W \in \tau$ mit $x \in U$, $A \subseteq W$ und $U\cap W = \emptyset$. Setze $P := V(W)$, $Q := V(X,U)$ und es folgt $A \in P$, $B \in Q$ und $P \cap Q = \emptyset$. Das heißt (α, τ_V) ist T_2.

(3) Sei (X,τ) ein T_4-Raum. Sei $B \in V(U_1,...,U_n)$. Seien $W_i \in \tau$ derart, dass $W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i$, $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_i$ und $W_i \cap B \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1,...,n\}$ (siehe Satz 12.1.8; dieser endliche Spezialfall lässt sich aber auch leichter beweisen). Es folgt

$$B \in V(W_1,...,W_n) \subseteq \overline{V(W_1,...,W_n)} = V(\overline{W_1},...,\overline{W_n}) \subseteq V(U_1,...,U_n).$$

Sei andererseits (α,τ_V) ein T_3-Raum. Sei $A \subseteq U$, also $A \in V(U)$. Dann gibt es $W_1,...,W_n \in \tau$ mit $P := V(W_1,...,W_n)$ und $A \in P \subseteq \overline{P} \subseteq V(U)$. Da $\overline{P} = V(\overline{W_1},...,\overline{W_n})$, folgt
$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n W_k \subseteq \overline{\bigcup_{k=1}^n W_k} = \bigcup_{k=1}^n \overline{W_k} \subseteq U$.

7.2.6 Lemma

(a) Sei (E,d) ein metrischer Raum, $\varepsilon > 0$ und $A \subseteq E$. Dann ist $U_\varepsilon^d(A) := \{y \in E \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ eine offene Menge mit $A \subseteq U_\varepsilon^d(A)$.

(b) Sei K kompakt und U offen in (E,d) mit $K \subseteq U$. Dann $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $K \subseteq U_\varepsilon^d(K) \subseteq U$.

(c) Sei (E,d) ein metrischer Raum, A abgeschlossen $\subseteq E$ und δ die zu $\alpha := \{A \subseteq E \mid A$ ist abgeschlossen und beschränkt$\}$ gehörige Hausdorff-Metrik. Dann ist $U_\varepsilon^d(A) = \bigcup K_\delta^\alpha(A)$. Ist A kompakt und beschränken wir δ auf $\kappa := \{K \subseteq E \mid K$ ist kompakt und $K \neq \emptyset\}$, so gilt ebenfalls $U_\varepsilon^d(A) = \bigcup K_\delta^\kappa(A)$.

Beweis: (a) $A \subseteq U_\varepsilon^d(A)$ ist klar. Sei $y \in U_\varepsilon^d(A)$ und setze $r := \varepsilon - d(y,A)$. Dann ist $K(y,r) \subseteq U_\varepsilon^d(A)$, denn $x \in K(y,r)$ impliziert $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) < r + d(y,A) = \varepsilon$, also $x \in U_\varepsilon^d(A)$.

(b) Für jedes $x \in K$ sei $\varepsilon_x > 0$ mit $K(x,2\varepsilon) \subseteq U$. Da K kompakt, gibt es endlich viele $x_1,...,x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n K(x_k,\varepsilon_{x_k})$. Setze $\varepsilon := \min(\varepsilon_{x_1},...,\varepsilon_{x_n})$. Zeigen wir $U_\varepsilon^d(K) \subseteq U$. Sei $x \in U_\varepsilon^d(K)$, also $d(x,K) < \varepsilon$. Also gibt es $z \in K$ mit $d(x,z) < \varepsilon$. Dann gibbt es aber auch ein $k \in \{1,...,n\}$ mit $z \in K(x_k,\varepsilon_{x_k})$. Es folgt $d(x,x_k) \leq d(x,z) + d(z,x_k) < \varepsilon + \varepsilon_{x_k} \leq 2\varepsilon_{x_k}$, also $x \in K(x_k, 2\varepsilon_{x_k}) \subseteq U$.

(c) Sei $x \in U_\varepsilon^d(A)$, also $d(x,A) < \varepsilon$. Setze $A' := A \cup \{x\}$. Dann ist auch A' abgeschlossen (bzw. kompakt, falls A kompakt ist). Es ist $\sup_{y\in A} d(y,A') = 0$, da $A \subseteq A'$ und $\sup_{z\in A'} d(z,A) = d(x,A)$, also $\delta(A,A') = \max(\sup_{y\in A} d(y,A'), \sup_{z\in A'} d(z,A)) = d(x,A) < \varepsilon$. Demnach $x \in A' \subseteq \bigcup K_\delta^\alpha(A,\varepsilon)$.

Zu $x \in \bigcup K_\delta^\alpha(A,\varepsilon)$ $\exists\, A' \in K_\delta^\alpha(A,\varepsilon)$ mit $x \in A'$. Also $\max(\sup_{y\in A} d(y,A'), \sup_{z\in A'} d(z,A)) = \delta(A,A') < \varepsilon$. Insbesondere $d(x,A) \leq \sup_{z\in A'} d(z,A) < \varepsilon$ und somit $x \in U_\varepsilon^d(A)$.

7.2.7 Satz

Sei (E,d) ein metrischer Raum, δ die Hausdorff-Metrik auf $\alpha := \{A \subseteq E \mid \emptyset \neq A$ ist abgeschlossen und beschränkt$\}$ und sei $\kappa := \{K \subseteq E \mid \emptyset \neq K$ ist kompakt$\}$. Sei τ die Vietoris-Topologie auf $\{A \subseteq E \mid \emptyset \neq A$ ist abgeschlossen$\}$. Dann stimmt die durch τ auf dem Teilraum κ induzierte Teilraumtopologie τ_κ mit der von der auf κ eingeschränkten Metrik δ induzierten Topologie überein. Wichtiger Spezialfall: Ist (E,d) selber kompakt, so wird τ von δ induziert.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $K \in \kappa$. Zeigen wir $K_\delta^\kappa(K,\varepsilon) \in \tau_\kappa$. Es genügt, wenn wir in E offene $U_1,...,U_n$ finden mit $K \in V(U_1,...,U_n) \subseteq K_\delta^\kappa(K,\varepsilon)$. Da K kompakt ist, gibt es $x_1,...,x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n K_d^E(x_k, \frac{1}{3}\varepsilon)$. Setze dann $U_k := K_d^E(x_k, \frac{1}{3}\varepsilon)$. Sei $K' \in V(U_1,...,U_n)$. Es folgt $\delta(K,K') = \max(\sup_{x\in K} d(x,K'), \sup_{y\in K'} d(y,K))$. Schätzen wir $\sup_{x\in K} d(x,K')$ ab. Sei $x \in K$. Dann gibt es ein k mit $x \in U_k$. Sei $y \in U_k \cap K'$. Es folgt $d(x,K') \leq d(x,y) < 2\cdot\frac{1}{3}\varepsilon$, also $\sup_{x\in K} d(x,K') \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$. Analog bekommen wir $\sup_{y\in K'} d(y,K) < \varepsilon$, also $\delta(K,K') < \varepsilon$.

Für die Rückrichtung beweisen wir, dass die Elemente der Subbasis $\mathscr{S} := \{V(U) \mid U \in \tau\setminus\{\emptyset\}\} \cup \{V(X,U) \mid U \in \tau\setminus\{\emptyset\}\}$ offen bzgl. δ sind. Sei $K \in V(U)$, für in E offenes U. Also $K \subseteq U$. Dann $\exists\,\varepsilon > 0$ mit $K \subseteq U_\varepsilon^d(K) \subseteq U$ (Lemma 7.2.6). Es folgt $K_\delta^\kappa(K,\varepsilon) \subseteq V(U)$, denn $K' \in K_\delta^\kappa(K,\varepsilon)$ impliziert $K' \subseteq \bigcup K_\delta^\kappa(K,\varepsilon) = U_\varepsilon^d(K) \subseteq U$ (wieder Lemma 7.2.6).

Sei nun $K \in V(X,U)$. Es folgt $K \cap U \neq \emptyset$. Sei $x \in K \cap U$ und sei $\varepsilon > 0$ mit $K_d^E(x,\varepsilon) \subseteq U$ Offenbar ist nun $K \in K_\delta^\kappa(K,\varepsilon) \subseteq V(X,U)$, denn falls $K' \in K_\delta^\kappa(K,\varepsilon)$ mit $K \cap U = \emptyset$, isbesondere somit $K' \cap K_d^E(x,\varepsilon) = \emptyset$, so wäre $\sup_{y\in K} d(y,K') \geq d(x,K') \geq \varepsilon$, also $\delta(K,K') \geq \varepsilon$.

8 Funktionenräume

”What you need is that your brain is open.”
Paul Erdös

8.1 Der Satz von Stone-Weierstraß

Was unterscheidet stetige Abbildungen (in $\mathbb{R}$) von nicht stetigen? Man könnte sagen, sie sind im allgemeinen etwas ”ruhiger”als ihre nicht stetigen Kollegen. Stetige Abbildungen auf kompakten Mengen sind sogar schon fast ”zahm”. Wie zahm sie sind, das bring z.B. der klassische Approximationssatz von Weierstraß zum Ausdruck: Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von Polynomen - und Polynome sind schon ziemlich ”zahm” ;-)

Diesen schönen Satz erhalten wir als Korollar aus einem sehr viel allgemeineren Resultat - dem Satz von Stone-Weierstraß.

8.1.1 Definition

Grundlegendes Sei (X,τ) ein kompakter topologischer Raum. Mit $C(X,\tau)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X, also $C(X,\tau) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f$ ist stetig$\}$. Besteht über die Topologie τ kein Zweifel, so schreiben wir einfach $C(X)$. Für zwei Funktionen $f,g \in C(X)$ und reelle Zahlen a,b ist $af + bg$ durch $(af + bg)(x) := af(x) + bg(x)$ sinnvoll definiert. Wir bekommen damit einen reellen Vektorraum. Ebenso ist aber auch fg definiert durch $(fg)(x) := f(x)g(x)$ sinnvoll und der Vektorraum $C(X)$ (mit Addition und skalarer Multiplikation) wird mit dieser zusätzlichen Multiplikation eine reelle (Funktionen)Algebra (das Linearkombination und Produkte reellwertiger stetiger Funktionen wieder stetig sind, bleibt als Übungsaufgabe). Auf $C(X)$ führen wir nun die Norm $\|f\| := sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ (ist sinnvoll, da X kompakt ist) ein und bekommen damit ein topologischer Raum, dessen Topologie durch die Metrik $d(f,g) := \|f - g\|$ erzeugt wird. Für zwei $f,g \in C(X)$ ist $max(f,g)$ und $min(f,g)$ definiert als $max(f,g)(x) := max(f(x),g(x))$ und $min(f,g)(x) := min(f(x),g(x))$ (wieder als Übung bleibt zu zeigen, dass $max(f,g), min(f,g) \in C(X)$). Unter einer Unteralgebra verstehen wir ein $C_0 \subseteq C(X)$ mit $C_0 \neq \emptyset$, und mit der Eigenschaft falls $f,g \in C_0$ und $a,b \in \mathbb{R}$, dann auch $af + bg \in C_0$ und $fg \in C_0$.

8.1.2 Bemerkung

Für einen kompakten Raum X ist $C(X)$ mit der oben eingeführten Norm eine Banach Algebra, das heißt eine Algebra im Sinne von oben, die zudem vollständig ist (jede Cauchy-Folge konvergiert). Der Nachweis der Vollständigkeit bleibt als Übungsaufgabe.

8.1.3 Lemma

Sei (X,τ) ein kompakter Raum und $\mathscr{A}$ eine Teilmenge von $C(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $x,y \in X$ mit $x \neq y$ und alle $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gibt es ein $f \in \mathscr{A}$, mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$.

2. Für alle $f,g \in \mathscr{A}$ ist $max(f,g), min(f,g) \in \mathscr{A}$.

Dann ist $\mathscr{A}$ dicht in $C(X)$.

Beweis: Sei $f \in C(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $h \in \mathscr{A}$ gibt, mit $h \in K(f,\varepsilon)$. Zuerst zeigen wir dass wir zu $x \neq y$ und $a \in \mathbb{R}$ auch ein $f \in \mathscr{A}$ finden mit $g(x) = a = g(y)$. Wir finden nämlich ein g' mit $g'(x) = a$ und $g'(y) = a+1$ und wir finden ein g'' mit $g''(x) = a+1$ und $g''(y) = a$. Dann ist aber $g := min(g',g'') \in \mathscr{A}$ und leistet das gewünschte. Zurück zu f und ε. Für $x,y \in X$ finden wir ein $g_{xy} \in \mathscr{A}$ mit $g_{xy}(x) = f(x)$ und $g_{xy}(y) = f(y)$. Aus der Stetigkeit von $g_{xy} - f$ folgern wir die Existenz von $U_{xy} \in \dot{x} \cap \tau$ bzw. $V_{xy} \in \dot{y} \cap \tau$ mit $(g_{xy} - f)(U_{xy}) \subseteq K(0,\varepsilon)$ und $(g_{xy} - f)(V_{xy}) \subseteq K(0,\varepsilon)$. Für festes y und "laufendes" x gilt somit $X = \bigcup_{x \in X} U_{xy}$. Nun ist X kompakt, also gibt es ein endliches $X_y \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{x \in X_y} U_{xy}$. Wir setzen dann $h_y := min\{g_{xy} \mid x \in X_y\}$. Für $z \in X$ gilt $z \in U_{x'y}$, für $x' \in X_y$ und somit $h_y(z) \leq g_{x'y}(z) < f(z) + \varepsilon$. Dies gilt für jedes $y \in X$ und wir bezeichnen dies mit $(*)$. Wir bilden nun $W_y := \bigcap_{x \in X_y} V_{xy}$. Für $z \in W_y$ gilt $h_y(z) > f(z) - \varepsilon$, da $g_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon$ für jedes $x \in X_y$ gilt; dies bezeichnen wir mit $(**)$. Aus der Kompaktheit folgern wir nun die Existenz von $y_1,\ldots,y_m$, mit $X = W_{y_1} \cup \ldots \cup W_{y_m}$ und setzen $h := max(h_{y_1},\ldots,h_{y_m})$. Für $z \in X$ gilt dann $z \in W_{y_l}$ und somit nach $(**)$ $h(z) \geq h_{y_l}(z) > f(z) - \varepsilon$. Aus $(*)$ hingegen folgt $h(z) = h_{y_{l'}}(z) < f(z) + \varepsilon$. Insgesamt also $\|h - f\| < \varepsilon$ und somit $h \in K(f,\varepsilon)$.

8.1.4 Lemma

Sei $X(,\tau)$ wieder ein kompakter topologischer Raum und C_0 eine Unteralgebra von $C(X)$.

a) Für alle $x \neq y$ existiert $f \in C_0$ mit $f(x) \neq f(y)$. Außerdem enthalte C_0 alle konstanten Abbildungen (für $a \in \mathbb{R}$ bezeichne die f_a die konstante Abbildung $x \mapsto a$). Dann gibt es für $x \neq y$ und $a,b \in \mathbb{R}$ ein $k \in C(X)$ mit $k(x) = a$ und $k(y) = b$.

b) Ist C_0 in $C(X)$ abgeschlossen und enthält die konstanten Abbildungen, so ist mit $f,g \in C_0$ auch $max(f,g)$ und $min(f,g)$ in C_0.

Beweis: a) Seien $x \neq y$ und $a,b \in \mathbb{R}$. Es gibt dann ein $f \in C_0$ mit $f(x) \neq f(y)$. Setze $g := f - f_{f(x)}$, $h := g \cdot f_{\frac{b-a}{g(y)}}$ und $k := h + f_a$.
b) Es gilt $max(f,g)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$ und $min(f,g)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$. Es genügt demnach zu zeigen, dass mit $f \in C_0$ auch $|f| \in C_0$ (dabei ist $|f|(x) := |f(x)|$ und $f \in C(X) \Rightarrow |f| \in C(X)$). Wir verwenden dafür die Reihenentwicklung von $\sqrt{1-x} =$

$1-\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\ldots$, für $|x|\leq 1$. Außerdem gilt $|af|=|a||f|$, wir brauchen die Aussage also nur für f mit $\|f\|\leq 1$ beweisen. Wir setzen $g_n(h):=1-\frac{1}{2}f-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}f^2-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}f^3-\ldots-\frac{1\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot\ldots\cdot 2n}f^n$ für $h\in C(X)$ mit $\|h\|\leq 1$. Für $f\in C_0$ mit $\|f\|\leq 1$ gilt auch $\|1-f^2\|\leq 1$ und somit $g_n(1-f^2)\to\sqrt{1-(1-f^2)}=|f|$. Da $g_n(1-f^2)\in C_0$ und C_0 abgeschlossen ist, ist auch $|f|\in C_0$.

8.1.5 Lemma

Sei $C_0\subseteq C(X)$ eine Unteralgebra. Dann ist auch $\overline{C_0}$ eine Unteralgebra.

Beweis: Seien $f,g\in\overline{C_0}$ und $a,b\in\mathbb{R}$. Dann gibt es zwei Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus C_0 mit $f_n\to f$ und $g_n\to g$. Dann ist aber auch $(af_n+bg_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus C_0 und es gilt $\|af_n+bg_n-(af+bg)\|\leq|a|\|f_n-f\|+|b|\|g_n-g\|\to 0$ für $n\to\infty$. Also $af+bg\in\overline{C_0}$.

Es gilt weiterhin $\|f_ng_n-fg\|\leq\|f_ng_n-f_ng\|+\|f_ng-fg\|=\|f_n\|\|g_n-g\|+\|g\|\|f_n-f\|\to\infty$, da die $\|f_n\|$ beschränkt sind. Also auch $fg\in\overline{C_0}$.

8.1.6 Satz von Stone-Weierstraß

Ist $C_0\subseteq C(X)$ eine Unteralgebra für einen kompakten Raum (X,τ), enthält C_0 die konstanten Abbildungen und gibt es zu je zwei Punkten $x\neq y$ ein $f\in C_0$ mit $f(x)\neq f(y)$, dann liegt C_0 dicht in $C(X)$.

Beweis: $\overline{C_0}$ ist nach Lemma 8.1.5 eine abgeschlossene Unteralgebra, die nach Lemma 8.1.4 alle Voraussetzungen von Lemma 8.1.3 erfüllt. $\overline{C_0}$ ist also dicht in $C(X)$ und demnach ist auch C_0 dicht in $C(X)$.

8.1.7 Klassischer Approximationssatz von Weierstraß

Jede stetige Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ist Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von Polynomen.

Beweis: Die Menge aller Polynome von $[0,1]\to\mathbb{R}$ erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 8.1.6, liegt somit dicht in $C([0,1])$. Für $f\in C([0,1])$ gibt es also eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, die gegen f konvergiert (im Sinne der Metrik von $C([0,1])$). Dies bedeutet aber gerade gleichmäßige Konvergenz.

8.2 Allgemeines über Funktionenräume

Unter Funktionenräumen versteht man im allgemeinen Mengen von Abbildungen, auf denen einen Topologie erklärt ist. Also eine Teilmenge H der Menge aller Abbildungen von X nach

Y ($H \subseteq Y^X$). Natürlich sollte die Topologie auf Y^X schon irgendwie mit schon vorhandenen Strukturen auf X bzw. Y in sinnvoller Beziehung stehen. Ist z.B (Y,σ) ein topologischer Raum, so bekommen wir auf Y^X eine natürliche Topologie. Wir fassen Y^X dazu einfach als $\prod_{x\in X} Y$ auf und betrachten die Produkttopologie. Diese Topologie auf Y^X beschreibt die Punktweise Konvergenz. Als Spezielfall von Lemma 3.2.11 erhalten wir nämlich, dass ein Filter Φ auf Y^X genau dann gegen ein Element $f \in Y^X$ konvergiert, wenn $pr_x(\Phi)$ gegen $f(x) \in Y$ konvergiert (hier ist $pr_x : \prod_{x\in X} Y \to Y$ die x-te Projektion).

8.2.1 Definition

Seien $X,Y;Z$ Mengen. Die natürliche Bijektion $\Lambda : Y^{Z\times X} \to (Y^X)^Z$ definiert durch $\Lambda(f)(z)(x) := f(z,x)$ bezeichnen wir als **Exponentialabbildung**. Die Abbildung $\Omega : Y^X \times X \to Y$ definiert durch $\Omega(f,x) := f(x)$ bezeichnen wir als **Auswertungsabbildung**. Die Abbildung $\Sigma : Z^Y \times Y^X \to Z^X$ definiert durch $\Sigma(g,f) := g\circ f$ bezeichnet die gewöhnliche **Nacheinanderausführung**.

Seien (X,τ) und (Y,σ) zwei topologische Räume. Die Menge aller stetigen Abbildungen zwischen X und Y bezeichnen wir mit $c(X,Y)$ (eigentlich mit $c((X,\tau),(Y,\sigma))$, aber in der Regel betrachten wir nur eine Topologie auf den Mengen X bzw. Y, so dass es nicht zu Verwechslungen kommen kann; falls wir mehrere Topologien betrachten, so werden wir dass dann eindeutig kennzeichnen).

Im Folgenden betrachten wir zunächst Topologien auf $c(X,Y)$, zwischen zwei topologischen Räumen X und Y.

Wir führen folgende Konvention ein. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und $C \subseteq A$, so schreiben wir statt $f|C : C \to B$ einfach $f : C \to B$. Betrachten wir beispielsweise die Abbildung Ω eingeschränkt auf $c(X,Y)\times X$, so schreiben wir einfach $\Omega : c(X,Y)\times X \to Y$.

8.2.2 Definition

Sei τ eine Topologie auf $c(X,Y)$. Wir nennen

a) τ **propper**[6], wenn $\Lambda(c(Z\times X,Y)) \subseteq c(Z,c(X,Y))$ für jeden topologischen Raum Z gilt.

b) τ **admissible**, wenn $\Lambda^{-1}(c(Z,c(X,Y))) \subseteq c(Z\times Z,Y)$ für jeden top. Raum Z gilt.

c) τ **aktzeptabel**, wenn τ propper und admissible ist.

8.2.3 Satz

Seien X und Y topologische Räume und τ, τ' zwei Topologien auf $c(X,Y)$.

(1) τ ist auf $c(X,Y)$ genau dann admissible, wenn $\Omega : c(X,Y)\times X \to Y$ stetig ist.

(2) Ist $\tau' \subseteq \tau$ und τ propper, so ist auch τ' propper.

(3) Ist $\tau \subseteq \tau'$ und τ admissible, so ist auch τ' admissible.

(4) Ist τ propper und τ' admissible, so ist $\tau \subseteq \tau'$.

(5) Auf $c(X,Y)$ gibt es höchstens eine aktzeptable Topologie.

[6] Lieber die englische Bezeichnung als eine holprige deutsche Übersetzung.

Beweis: (1) Sei τ admissible. Zu zeigen ist $\Omega \in c(c(X,Y) \times X, Y)$. Setzen wir in Definition 8.2.2 $c(X,Y)$ für Z ein, so reicht es also zu zeigen, dass $\Omega \in \Lambda^{-1}(c(c(X,Y), c(X,Y)))$, also $\Lambda(\Omega) \in c(c(X,Y), c(X,Y))$ ist. Nun ist $\Lambda(\Omega)(f)(x) = f(x)$ und somit $\Lambda(\Omega) = id_{c(X,Y)}$. Da offensichtlich $id_{c(X,Y)} \in c(c(X,Y), c(X,Y))$, sind wir fertig.

Sei andererseits $\Omega : c(X,Y) \times X \to Y$ stetig. Sei Z beliebig und $f : Z \to c(X,Y)$ stetig. Dann ist $\Lambda^{-1}(f) : Z \times X \to Y$. Zu zeigen bleibt, dass $\Lambda^{-1}(f)$ stetig ist. Dies folgt aber aus der Stetigkeit von $f \times id_X$ und der von Ω und aus der Gleichung $\Lambda^{-1}(f) = \Omega \circ (f \times id_X)$.

Die Aussagen (2) und (3) sind offensichtlich. Zeigen wir also (4). Sei $Z := (c(X,Y), \tau)$ und $Z' := (c(X,Y), \tau')$. Zu zeigen ist also $id_{c(X,Y)} : Z' \to Z$ ist stetig. Da τ' admissible ist, ist $\Omega \in c(Z' \times X, Y)$ und somit, da τ propper ist, $\Lambda(\Omega) \in c(Z', Z)$. Nun ist aber $\Lambda(\Omega) = id_{c(X,Y)}$.

Aussage (5) folgt nun unmittelbar aus (4).

8.3 Kompakt-offene Topologie

Neben der gewöhnlichen Produkttopologie auf Y^X (auch Topologie der Punktweisen Konvergenz genannt) ist die kompakt-offene Topologie wohl die wichtigste.

8.3.1 Definition

(kompakt-offene Topologie) Seien (X, τ) und (Y, σ) zwei topologische Räume und $E \subseteq F := Y^X$. Für $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ setzen wir $S(A,B) := \{f \in E \mid f(A) \subseteq B\}$. Seien nun $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ und $\beta \subseteq \mathscr{P}(Y)$ gegeben. Dann nennen wir die von der Subbasis $\mathscr{S} := \{S(A,B) \mid A \in \alpha$ und $b \in \beta\}$ erzeugte Topologie, die von α und β erzeugte **$\alpha - \beta$-Topologie** (auf E). Als einen wichtigen Spezialfall erhalten wir so die gewöhnliche Produkttopologie (die Topologie bzgl. der Punktweisen Konvergenz) auf $F = \prod_{x \in X} Y$. Wir setzen dazu einfach $\alpha = \{M \subseteq X \mid M :$ endlich$\}$ und $\beta = \sigma$ (Beweis als leichte Aufgabe).

Von größerer Bedeutung ist die sogenannte kompakt offene Topologie auf $c(X,Y)$. Dazu setzen wir einfach $\alpha := \kappa := \{K \subseteq X \mid K$ ist kompakt$\}$ und $\beta := \sigma$. Die **kompakt-offene Topologie** ist dann die $\kappa - \sigma$ Topologie.

Offenbar ist die kompakt-offene Topologie feiner als die gewöhnliche Produktopologie.

8.3.2 Lemma

Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Ist B abgeschlossen, so ist $S(A,B)$ in Y^X bzgl. der Produktopologie ebenfalls abgeschlossen. Da die kompakt-offene Topologie feiner als die gewöhnliche Produktopologie ist, ist $S(A,B)$ auch bzgl. der kompakt offenen Topologie abgeschlossen.

Beweis: Sei $f \in Y^X \setminus S(A,B)$. Dann $\exists a \in A$ mit $f(a) \in Y \setminus B$. Also ist $f \in S(\{a\}, Y \setminus B) \subseteq Y^X \setminus S(A,B)$. Da $S(\{a\}, Y \setminus B)$ offen ist, ist alles gezeigt.

8.3.3 Lemma

Sei $k \in \{0,1,2,3\}$ und Y ein T_k-Raum. Dann ist auch Y^X mit der kompakt-offenen Topologie ein T_k-Raum (gilt auch für $T_{3\frac{1}{2}}$-Räume, beweisen wir aber erst später).

Beweis: Für $k \in \{0,1,2\}$ folgt dies daher, da die kompakt-offene Topologie feiner als die gewöhnliche Produktopologie ist. Sei $k = 3$. Sei $f \in O$ und O offen. O.B.d.A. ist $O = S(K_1,U_1) \cap \ldots \cap S(K_n,U_n)$. Das bedeutet $f(K_i) \subseteq U_i$ für $i = 1,\ldots,n$. Da $f(K_i)$ kompakt und Y ein T_3-Raum ist, gibt es ein offenes V mit $f(K_i) \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$. Für $W := S(K_1,V_1) \cap \ldots \cap S(K_n,V_n)$ und $W' := W := S(K_1,\overline{V_1}) \cap \ldots \cap S(K_n,\overline{V_n})$ gilt dann $f \in W \subseteq \overline{W} \subseteq W' \subseteq O$, denn W' ist abgeschlossen.

8.3.4 Satz

(1) Für zwei top. Räume X,Y ist die kompakt-offene Topologie auf $c(X,Y)$ propper.

(2) Ist X zusätzlich stark lokal kompakt, so ist die kompakt offene Topologie aktzeptabel.

Beweis: (1) Sei Z ein beliebiger top. Raum. Zu zeigen ist $\Lambda(c(Z \times X,Y)) \subseteq c(Z,c(X,Y))$. Sei also $f : Z \times X \to Y$ stetig und $z \in Z$ fest gewählt. Dann ist die Einschränkung $f : \{z\} \times X \to Y$ stetig und da $\{z\} \times X$ und X homöomorph sind, ist es auch $\Lambda(f)(z) : X \to Y$. Demnach ist $\Lambda(f)$ eine Abbildung von $Z \to c(X,Y)$. Zu zeigen bleibt, dass $\Lambda(f)$ stetig ist. Für kompaktes K und offenes O betrachten wir dazu $S(K,O)$ und zeigen, dass $(\Lambda(f))^{-1}(S(K,O))$ offen ist. Sei $z \in (\Lambda(f))^{-1}(S(K,O))$, also $\{z\} \times K \subseteq f^{-1}(O)$. Aus dem Tubenlemma (Lemma 4.1.6) folgt, dass es offene U und V gibt mit $\{z\} \times K \subseteq U \times V \subseteq f^{-1}(O)$. Es folgt $z \in U \subseteq (\Lambda(f))^{-1}S(K,O)$.

(2) Zu zeigen bleibt, dass $\Omega : c(X,Y) \times X \to Y$ stetig ist. Sei O offen in Y und $(f,x) \in \Omega^{-1}(O)$. Dann ist $f(x) \in O$. Es gibt dann eine kompakte Umgebung K von x mit $f(K) \subseteq O$. Dann ist $W := S(K,O) \times K^\circ$ offen in $c(X,Y) \times X$ mit $(f,x) \in W$ und $W \subseteq \Omega^{-1}(O)$.

8.3.5 Satz

Seien $X,Y;Z$ top. Räume und Y zudem stark lokal kompakt. Dann ist $\Sigma : c(Y,Z) \times c(X,Y) \to c(X,Z)$ stetig, bzgl der kompakt offenen Topologie auf $c(Y,Z)$, $c(X,Y)$ und $c(X,Z)$.

Beweis: Zeigen wir, dass $\Sigma^{-1}(S(K,O))$ offen ist, für kompaktes $K \subseteq X$ und offenes $O \subseteq Z$. Sei $(g,f) \in \Sigma^{-1}(S(K,O))$, also $g \circ f(K) \subseteq O$, bzw. $f(K) \subseteq g^{-1}(O)$. Nun ist $f(K)$ kompakt und Y lokal kompakt. Zu jedem $y \in f(K)$ gibt es daher eine kompakte Umgebung V von

y mit $V \subseteq g^{-1}(O)$. Dann gibt es endliche vieler solcher V mit $f(K) \subseteq V_1^\circ \cup ... \cup V_n^\circ$. Nun ist $U := V_1^\circ \cup ... \cup V_n^\circ$ offen und $L := V_1 \cup ... \cup V_n$ kompakt mit $U \subseteq L \subseteq g^{-1}(O)$. Für $W := S(L,O) \times S(K,U)$ folgt damit $(g, f) \in W \subseteq \Sigma^{-1}(S(K,O))$.

8.3.6 Lemma

Sei (X, τ) ein top. Raum und $K \subseteq X$ und K als Teilraum kompakt und T_2. Sind $U_1, ..., U_n \in \tau$ und $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k$, so gibt es kompakte $K_k \subseteq U_k$ mit $K = \bigcup_{k=1}^n K_k$.

Beweis: Beweisen wir den Fall $n = 2$. Der Rest folgt durch Induktion. Sei $K \subseteq U_1 \cup U_2$. Dann sind $K \setminus U_1$ und $K \setminus U_2$ in K abgeschlossen und disjunkt. Es gibt somit $U', V' \in \tau$ mit $K \setminus U_1 \subseteq V'$, $K \setminus U_2 \subseteq U'$ und $K \cap U' \cap V' = \emptyset$. Dann ist $K_1 := K \setminus V' \subseteq U_1$ und $K_2 := K \setminus U' \subseteq U_2$, wobei K_1 und K_2 in K abgeschlossen, also auch kompakt sind. Es folgt $K_1 \cup K_2 = K \setminus (U' \cap V') = K$.

8.3.7 Lemma

Seien X und Y top. Räume, β eine Subbasis für Y und X ein T_2-Raum. Dann ist $\{S(K,B) \mid K : \text{kompakt und } B \in \beta\}$ eine Subbasis für die kompakt-offene Topologie auf $c(X,Y)$.

Beweis: Sei K kompakt $\subseteq X$ und O offen $\subseteq Y$. Sei $f \in S(K,O)$. Gesucht sind kompakte $K_1, ..., K_m \subseteq X$ und $B_1, ..., B_m \in \beta$ mit $f \in S(K_1, B_1) \cap ... \cap S(K_m, B_m) \subseteq S(K,O)$. Da O offen und β eine Subbasis ist, gibt es eine Menge I und für jedes $i \in I$ ein endliches $\beta_i \subseteq \beta$ mit $O = \bigcup_{i \in I}(\bigcap \beta_i)$. Da $f(K)$ kompakt ist, gibt es endlich viele dieser β_i mit $f(K) \subseteq (\bigcap \beta_{i_1}) \cup ... \cup (\bigcap \beta_{i_n})$. Für jedes $k = 1, ..., n$ setzen wir $U_k := \bigcap \beta_{i_k}$ und $V_k := f^{-1}(U_k)$. Es gilt also $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_k$. Entsprechend Lemma 8.3.6 gibt es kompakte Teilmengen $K_k \subseteq V_k$ mit $K = \bigcup_{k=1}^n K_k$. Ist $\beta_{i_k} = \{B_1^{(k)}, ..., B_{n_k}^{(k)}\}$ für $k = 1, ..., n$, so gilt $f \in W \subseteq S(K,O)$ mit $W := \bigcap_{k=1}^n \bigcap_{l=1}^{n_k} S(K_k, B_l^{(k)})$.

8.3.8 Satz

(1) Seien X, Y, Z topologische Räume und X, Z zusätzlich T_2. Dann ist $\Lambda : c(Z \times X, Y) \to c(Z, c(X,Y))$ eine topologische Einbettung (d.h. $\Lambda : c(Z \times X, Y) \to \Lambda(c(Z \times X, Y))$ ist ein Homöomorphismus) bzgl. der kompakt offenen Topologie auf $c(X,Y)$.

(2) Ist X zusätzlich lokal kompakt, so ist $\Lambda : c(Z \times X, Y) \to c(Z, c(X,Y))$ bijektiv, die Räume $c(Z \times X, Y)$ und $c(Z, c(X,Y))$ somit sogar homöomorph.

Beweis: (1) Aus Satz 8.3.4 folgt, dass die kompakt-offene Topologie propper ist. Also schon mal $\Lambda(c(Z \times X, Y)) \subseteq c(Z, c(X,Y))$. Zeigen wir, dass $\Lambda : c(Z \times X, Y) \to c(Z, c(X,Y))$ stetig ist.

Sei dazu $V := S(K,W)$ ein typisches Subbasiselement in $c(Z,c(X,Y))$ und $f \in \Lambda^{-1}(V)$. Aus Lemma 8.3.7 folgt, dass wir o.B.d.A. $W = S(L,O)$ wählen können. Dann ist $f(K \times L) \subseteq O$ und $M := K \times L$ ist kompakt. Es folgt $f \in S(M,O) \subseteq \Lambda^{-1}(V)$.

Zeigen wir, dass Λ offen in $\Lambda(c(Z \times X,Y))$ ist. Sei dazu W ein offenes Basiselement in $c(Z \times X,Y)$. Zu zeigen ist, dass $\Lambda(W)$ offen in $\Lambda(c(Z \times X,Y))$ ist. Es ist $W = S(K_1,O_1) \cap \ldots \cap S(K_n,O_n)$, wobei die K_i kompakt in $Z \times X$ und die O_i offen in Y sind. Da Lambda injektiv ist folgt $\Lambda(\bigcap_{k=1}^n S(K_k,O_k)) = \bigcap_{k=1}^n \Lambda(S(K_k,O_k))$. Es reicht also zu zeigen, dass $\Lambda(S(K,O))$ offen ist für K in $Z \times X$ kompakt und O offen in Y. Sei $f \in S(K,O)$, also $K \subseteq f^{-1}(O)$. Es gibt dann U_k, V_k offen in Z bzw. X mit $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k \times V_k \subseteq f^{-1}(O)$. Aus Lemma 8.3.6 folgt die Existenz kompakter Mengen $P_1,\ldots,P_n \subseteq Z \times X$ mit $K = \bigcup_{k=1}^n P_k$ und $P_k \subseteq U_k \times V_k$. Bezeichnen $p_Z : Z \times X \to Z$ und $p_X : Z \times X \to X$ die entsprechenden Projektionen, so sind $K_k := p_Z(P_k)$ und $L_k := p_X(P_k)$ kompakt mit $P_k \subseteq K_k \times L_k \subseteq U_k \times V_k$. Es folgt $\Lambda(f) \in [\bigcap_{k=1}^n S(K_k,S(L_k,O))] \cap \Lambda(c(Z \times X,Y)) \subseteq \Lambda(S(K,O))$.

(2) Als lokal kompakter T_2-Raum ist X stark lokal kompakt. Nach Satz 8.3.4 ist $\Lambda(c(Z \times X,Y)) = c(Z,c(X,Y))$. Die Behauptung folgt somit aus (1).

8.3.9 Satz

Sei α eine Kardinalzahl, $\mathscr{C}$ eine Basis für X und $\mathscr{D}$ eine Basis für Y mit $|\mathscr{C}| \leq \alpha$ und $|\mathscr{D}| \leq \alpha$. Ferner habe X die Eigenschaft: $\forall x \in X \, \forall U$ offen mit $x \in U$ $\exists$ offenes V mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ und $\overline{V}$ ist kompakt. Dann hat auch $c(X,Y)$ versehen mit der kompakt-offenen Topologie eine Basis von Kardinalität kleiner oder gleich α.

Beweis: Offenbar genügt es zu zeigen, dass es eine Subbasis β gibt mit $|\beta| \leq \alpha$. Sei $\mathscr{B} := \{\bigcup \mathscr{C}' \mid \mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$ und $\mathscr{C}'$ ist endlich$\}$. Dann ist auch $\mathscr{B}$ eine Basis von X mit $|\mathscr{B}| \leq \alpha$. Nach Lemma 8.3.7 ist $\mathscr{S} := \{S(K,U) \mid K$: kompakt $\subseteq X$ und $U \in \mathscr{D}\}$ eine Subbasis von $c(X,Y)$. Sei $f \in S(K,U)$. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ ein offenes V_x mit $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq f^{-1}(U)$ und $\overline{V_x}$ kompakt. Da K kompakt und $\mathscr{B}$ eine Basis ist, gibt es ein $B \in \mathscr{B}$ mit $K \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq f^{-1}(U)$ und $\overline{B}$ ist kompakt. Es folgt $f \in S(\overline{B},U) \subseteq S(K,U)$. Dementsprechend ist $\beta := \{S(\overline{B},U) \mid B \in \mathscr{B}, \, U \in \mathscr{D}\}$ eine Subbasis mit $|\beta| \leq \alpha$.

8.4 Semiuniforme Räume und der Satz von Arzelà-Ascoli

Widmen wir uns nun einem wichtigen Satz, der z.B. in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen häufig Anwendung findet. Bevor wir diesen formulieren, geben wir eine kleine Einführung in die Theorie der semiuniformen Räume (genauer: semiuniforme Überdeckungsräume). Nebenbei bekommen wir auf diesem Weg auch eine interessante Charakterisierung der T_3-Räume.

8.4.1 Definition

$\Gamma \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ heißt **Semiuniformität** auf X und (X,Γ) heißt semiuniformer Raum (eigentlich müsste man Γ Semiüberdeckungsuniformität nennen), falls

1. $\forall \gamma \in \Gamma$ gilt $\bigcup \gamma = X$
2. $\forall \alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ $[(\bigcup \alpha = X$ und $\exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \alpha) \Rightarrow \alpha \in \Gamma]$
3. $\forall \alpha, \beta \in \Gamma \exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \alpha, \beta$
4. $\forall \gamma \in \Gamma \exists \alpha \in \Gamma \forall A \in \alpha \exists \beta_A \in \Gamma \exists g \in \gamma$ mit $\beta_A(A) \subseteq g$

Nochmal zur Erinnerung: Für $\alpha, \beta \subseteq \mathscr{P}(X)$ bedeutet $\alpha < \beta :\Leftrightarrow \forall A \in \alpha \exists B \in \beta$ mit $A \subseteq B$. Und mit $\alpha(A)$ meinen wir $\alpha(A) := \bigcup\{B \in \alpha \mid B \cap A \neq \emptyset\}$. Die Beziehung zwischen γ und α in 4. bezeichnen wir kurz mit $\alpha <^+ \gamma$ und nennen α eine **lokale Sternverfeinerung** von γ.

Einem semiuniformen Raum (X, Γ) werden wir nun eine Topologie zuordnen. Wir setzen dazu $\tau_\Gamma := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists \gamma \in \Gamma \text{ mit } \gamma(x) \subseteq O\}$.

8.4.2 Lemma

Sei (X, Γ) ein seminuniformer Raum. Dann gilt:
(1) τ_Γ ist eine Topologie und $\forall A \subseteq X$ ist $A' := \{x \in A \mid \exists \gamma \in \Gamma \text{ mit } \gamma(x) \subseteq A\} = A^\circ$.
(2) $\forall x \in X \forall \alpha \in \Gamma \exists A \in \alpha$ mit $x \in A^\circ$. Oder kürzer: $\Gamma \ni \alpha^\circ := \{A^\circ \mid A \in \alpha\} < \alpha$.
(3) (X, τ_Γ) ist ein T_3-Raum.
(4) $\forall x \in X \forall \alpha \in \Gamma \exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\gamma(x)) \subseteq \alpha(x)$.

Beweis: (1) Offenbar ist $\emptyset, X \in \tau_\Gamma$ und mit $U, V \in \tau_\Gamma$ ist auch $U \cup V \in \tau_\Gamma$. Es ist aber auch $U \cap V \in \tau_\Gamma$, denn wenn $x \in U \cap V$, so gibt es $\alpha, \beta \in \Gamma$ mit $\alpha(x) \subseteq U$ und $\beta(x) \subseteq V$. Sei dann $\gamma < \alpha, \beta$, $\gamma \in \Gamma$. Offenbar ist dann $\gamma(x) \subseteq U \cap V$. Damit haben wir gezeigt, dass τ_Γ eine Topologie ist.

Sei $A \subseteq X$. Zeigen wir zuerst $A' \in \tau_\Gamma$. Sei $x \in A'$. Dann $\exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(x) \subseteq A$. Sei $\alpha <^+ \gamma$. Wir zeigen $\alpha(x) \subseteq A'$. Sei $y \in \alpha(x)$. Dann $\exists A_0 \in \alpha$ mit $x, y \in A_0$. Dann $\exists \beta_{A_0} \in \Gamma \exists g \in \gamma$ mit $\beta_{A_0}(A_0) \subseteq g$, also $\beta_{A_0}(y) \subseteq A$ und somit $y \in A'$. Aus $A' \in \tau_\Gamma$ und $A' \subseteq A$ folgt $A' \subseteq A^\circ$. Für die andere Inklusion nehmen wir uns ein $x \in A^\circ$. Dann gibt es ein $B \in \tau_\Gamma$ mit $x \in B \subseteq A^\circ$, also $\exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(x) \subseteq B$. Folglich ist $\gamma(x) \subseteq A$, also $x \in A'$.

(2) Seien $x \in X$ und $\alpha \in \Gamma$ gegeben. Es gibt dann ein $\beta \in \Gamma$ mit $\beta <^+ \alpha$. Sei $x \in B \in \beta$. Nun gibt es ein $\gamma_B \in \Gamma$ und $A \in \alpha$ mit $\gamma_B(B) \subseteq A$, also $\gamma_B(x) \subseteq A$ und folglich $x \in A' = A^\circ$.

(3) Sei $x \in O \in \tau_\Gamma$. Sei $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(x) \subseteq O$. Dann gibt es ein $\alpha \in \Gamma$ mit $\alpha <^+ \gamma$. Sei $A \in \alpha$ mit $x \in A^\circ$. Behauptung: $\overline{A} \subseteq O$. Beweis davon: Sei $y \in \overline{A}$. Nun gibt es $\beta_A \in \Gamma$ und $g \in \gamma$ mit $\beta_A(A) \subseteq g$. Sei $B \in \beta$ mit $y \in B^\circ$. Folglich ist $B \cap A \neq \emptyset$, also $y \in B \subseteq \beta_A(A) \subseteq g$. Da auch $x \in \beta_A(A)$, folgt $x, y \in g$ und somit $y \in \gamma(x) \subseteq O$.

(4) Sei $x \in X$ und $\alpha \in \Gamma$. Es gibt ein $\beta \in \Gamma$ mit $\beta <^+ \alpha$. Sei $B \in \beta$ mit $x \in B^\circ$. Es gibt ein $\delta_B \in \Gamma$ und es gibt ein $A \in \alpha$ mit $\delta_B(B) \subseteq A$. Zu x gibt es aber auch ein $\eta \in \Gamma$ mit $\eta(x) \subseteq B^\circ$. Sei $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \delta_B, \eta$. Es folgt $\gamma(\gamma(x)) \subseteq \gamma(B) \subseteq \delta_B(B) \subseteq A \subseteq \alpha(x)$, denn $x \in A$.

8.4.3 Lemma

Sei (X,τ) ein T_3-Raum. Dann gilt:

1. $\Gamma_\tau := \{\gamma \subseteq \mathscr{P}(X) \mid \exists \alpha \subseteq \tau \text{ mit } \bigcup \alpha = X \text{ und } \alpha < \gamma\}$ ist eine Semiuniformität auf X.

2. τ wird durch die Semiuniformität Γ_τ erzeugt, also $\tau = \tau_{\Gamma_\tau}$.

Als Korollar erhalten wir, dass ein topologischer Raum (X,τ) genau dann ein T_3-Raum ist, wenn es eine Semiuniformität Γ auf X gibt mit $\tau = \tau_\Gamma$.

Beweis: 1. Offenbar gilt $\bigcup \gamma = X$ für jedes $\gamma \in \Gamma$. Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ gegeben, so gibt es offene Überdeckungen α, β mit $\alpha < \gamma_1$ und $\beta < \gamma_2$. Offenbar ist dann $\alpha \wedge \beta := \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \beta\}$ eine offene Überdeckung mit $\alpha \wedge \beta < \gamma_1, \gamma_2$.

Sei $\gamma \in \Gamma$. Zu zeigen bleibt, dass es ein $\alpha \in \Gamma$ gibt mit $\alpha <^+ \gamma$. Nun gilt: $\forall g \in \gamma \forall x \in g \exists O_{g,x} \in \tau$ mit $x \in O_{g,x} \subseteq \overline{O_{g,x}} \subseteq g$. Setze $\alpha := \{O_{g,x} \mid g \in \gamma,\, x \in g\}$. Dann ist α eine lokale Sternverfeinerung von γ. Ist nämlich $A \in \alpha$, so ist $A = O_{g,x}$, für gewisses $g \in \gamma$, $x \in g$ und wir haben $\beta_A := \{g, X \setminus \overline{O_{g,x}}\} \in \Gamma_\tau$ mit $\beta_A(A) = g \subseteq g$.

2. Sei $O \in \tau$. Für jedes $x \in O$ gibt es $U \in \tau$ mit $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq O$. Nun ist $\gamma := \{O, X \setminus \overline{U}\} \in \Gamma_\tau$ und $\gamma(x) = O \subseteq O$, also $O \in \tau_{\Gamma_\tau}$. Sei andererseits $O \in \tau_{\Gamma_\tau}$. Zu $x \in O$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma_\tau$ mit $\gamma(x) \subseteq O$. Zu γ gibt es ein $\alpha \subseteq \tau$ mit $\bigcup \alpha = X$ und $\alpha < \gamma$, also $\tau \ni \alpha(x) \subseteq O$. Es folgt $O \in \tau$.

8.4.4 Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei semiuniformen Räumen (X,Γ), (Y,Σ) nennen wir **semiuniform**, wenn $f^{-1}(\sigma) := \{f^{-1}(S) \mid S \in \sigma\} \in \Gamma$ für alle $\sigma \in \Sigma$ gilt.

8.4.5 Lemma

Ist $f : X \to Y$ semiuniform zwischen zwei semiuniformen Räumen (X,Γ), (Y,Σ), so ist f stetig bezüglich $(X, \tau_{\Gamma)}$, (Y, τ_Σ).

Beweis: Sei $O \in \tau_\Sigma$. Zu zeigen ist $f^{-1}(O) \in \tau_\Gamma$. Sei $x \in f^{-1}(O)$, also $f(x) \in O$. Dann gibt es ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(f(x)) \subseteq O$. Es folgt $\gamma(x) \subseteq f^{-1}(O)$ mit $\gamma := f^{-1}(\sigma) \in \Gamma$.

Für die Formulierung des Satzes von Arzelà-Ascoli brauen wir zwei weiter Definitionen:

8.4.6 Definition

1. Seien (X,τ) und (Y,σ) topologische Räume und sei $F \subseteq Y^X$.

Wir nennen F **gleichstetig** in $x \in X$, falls

$$\forall y \in Y \forall V \in \dot{y} \cap \sigma \exists U_y \in \dot{x} \cap \tau \exists W_y \in \dot{y} \cap \sigma \forall f \in F\, (f(x) \in W_y \;\Rightarrow\; f(U_y) \subseteq V).$$

2. Sei (X,τ) ein topologischer, (Y,Σ) ein semiuniformer Raum und sei $F \subseteq Y^X$.

   Wir nennen F **gleichgradig stetig** in $x \in X$, falls

$$\forall \sigma \in \Sigma\, \exists U \in \dot{x} \cap \tau \text{ mit } \forall f \in F \text{ gilt } f(U) \subseteq \sigma(f(x)).$$

Wir nennen F gleichstetig bzw. gleichgradig stetig auf $A \subseteq X$, wenn F für alle $a \in A$ gleichstetig bzw. gleichgradig stetig ist. Sprechen wir davon, dass $F \subseteq Y^X$ gleichstetig ist, wobei (Y,Σ) ein semiuniformer Raum ist, so meinen wir natürlich gleichstetig bzgl. τ_Σ.

8.4.7 Lemma

Sei (X,τ) ein topologischer, (Y,Σ) ein semiuniformer Raum und sei $F \subseteq Y^X$.

1. Ist F gleichgradig stetig (in x), so ist F gleichstetig (in x).
2. Ist F gleichstetig (in x) und $F(x) := \{f(x) \mid f \in F\}$ relativ kompakt, so ist F gleichgradig stetig (in x). Relativ kompakt bedeutet hier, dass jede offene Überdeckung von Y eine endliche Teilüberdeckung von $F(x)$ besitzt.

Beweis: 1. Sei $y \in V \in \tau_\Sigma$. Es gibt ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(\sigma(y)) \subseteq V$. Zu σ gibt es nun ein $U \in \dot{x} \cap \tau$, so dass $\forall f \in F$ gilt $f(U) \subseteq \sigma(f(x))$. Sei nun $W \in \sigma$ mit $y \in W^\circ$. Gilt $f(x) \in W^\circ$ für ein $f \in F$, so folgt $f(U) \subseteq \sigma(f(x)) \subseteq \sigma(W) \subseteq \sigma(\sigma(y)) \subseteq V$.

2. Sei $\xi \in \Sigma$ gegeben. O.B.d.A. sei $\xi = \xi^\circ$. Zu jedem $y \in Y$ wählen wir ein $S_y \in \dot{y} \cap \xi$. Es gibt nun ein $U_y \in \dot{x} \cap \tau$ und ein $W_y \in \dot{y} \cap \tau_\Sigma$ mit $\forall f \in F$ gilt $(f(x) \in W_y \;\Rightarrow\; f(U_y) \subseteq S_y)$. Da $F(x)$ relativ kompakt ist, gibt es endlich viele $y_1,\dots,y_n \in Y$ mit $F(x) \subseteq W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n}$. Setze $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$. Damit gilt $\forall f \in F \,:\, f(U) \subseteq \xi(f(x))$. Denn für $f \in F$ gibt es ein y_k mit $f(x) \in W_{y_k}$. Es folgt $f(U) \subseteq f(U_{y_k}) \subseteq S_{y_k} \subseteq \xi(f(x))$. Für die letzte Inklusion beachte man $x \in U_{y_k}$, also $f(x) \in S_{y_k}$.

8.4.8 Lemma

Sei (X,τ) ein k-Raum, (Y,σ) ein T_3-Raum, $c(X,Y)$ sei mit der kompakt-offenen Topologie versehen und F sei lokal kompakt $\subseteq c(X,Y)$. Dann ist $\Omega : F \times X \to Y$ stetig.

Beweis: Da auch $c(X,Y)$ ein T_3-Raum ist, ist es auch F. Als lokal kompakter T_3-Raum ist F stark lokal kompakt. Daher ist auch $F \times X$ ein k-Raum. Es reicht also die Stetigkeit von Ω auf kompakten Teilmengen K von $F \times X$ nachzuprüfen. Sei also K kompakt $\subseteq F \times X$. Bezeichne $p : F \times X \to X$ die Projektion $(f,x) \mapsto x$. Da $K \subseteq F \times p(K)$, reicht es zu zeigen, dass $\Omega|F \times p(K)$ stetig ist. Sei $(f,x) \in F \times p(K)$ und $\Omega(f,x) \in V \in \sigma$. Es gibt dann ein $W \in \sigma$ mit $\Omega(f,x) \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$. Dann ist $K' := f^{-1}(\overline{W}) \cap p(K)$ eine kompakte Umgebung von x in $p(K)$ und es folgt $\Omega(S(K',V) \times [f^{-1}(W) \cap p(K)]) \subseteq V$, wobei $(f,x) \in S(K',V) \times [f^{-1}(W) \cap p(K)]$ offen in $F \times p(K)$ ist.

8.4.9 Lemma

Sei (X,τ) beliebig und (Y,σ) ein T_3-Raum. Ist F kompakt $\subseteq c(X,Y)$ (bzgl. der der kompakt offenen Topologie) und $\Omega : F \times X \to Y$ stetig, so ist F gleichstetig.

Beweis: Sei $x \in X$, $y \in Y$ und $V \in \dot{y} \cap \sigma$. Sei dann $W \in \dot{y} \cap \sigma$ mit $\overline{W} \subseteq V$. Dann ist $S(x,\overline{W}) = \{f \in c(X,Y) \mid f(x) \in \overline{W}\}$ nach Lemma 8.3.2 abgeschlossen und $F \cap S(x,\overline{W})$ demnach kompakt. Nun ist $[F \cap S(x,\overline{W})] \times \{x\} \subseteq \Omega^{-1}(V)$. Aus Lemma 4.1.6 (Tubenlemma) folgt die Existenz eines $U \in \dot{x} \cap \tau$ mit $[F \cap S(x,\overline{W})] \times U \subseteq \Omega^{-1}(V)$. Offenbar folgt dann $\Omega(S(\{x\},W) \times U) \subseteq V$.

8.4.10 Lemma

Sei $E \subseteq Y^X$ gleichstetig und (Y,σ) ein T_3-Raum und (X,τ) beliebig. Dann ist $\overline{E}$ gleichstetig, wobei der Abschluß bzgl. der Produkttopologie auf $Y^X = \prod_{x\in X} Y$ gemeint ist.

Beweis: Sei $x \in X$, $y \in Y$ und V offen mit $y \in V$. Es gibt dann ein $P \in \dot{y} \cap \sigma$ mit $\overline{P} \subseteq V$. Außerdem gibt es $U \in \dot{x} \cap \tau$ und $W \in \dot{y} \cap \sigma$ mit $\forall g \in E\; g(x) \in W \;\Rightarrow\; g(U) \subseteq P$. Sei dann $f \in \overline{E}$ mit $f(x) \in W$. Angenommen es gibt ein $z \in U$ mit $f(z) \in Y \setminus \overline{P}$.

$$\text{Sei dann} \quad O := \prod_{a\in X} Y_a\,, \;\; \text{wobei} \;\; Y_a := \begin{cases} W & \text{falls } a = x \\ Y \setminus \overline{P} & \text{falls } a = z \\ Y & \text{falls } a \notin \{x,z\} \end{cases}$$

Offenbar ist $f \in O$. Es gibt somit ein $g \in O \cap E$. Aus $g(x) \in W$ folgt aber $g(U) \subseteq P$, im Widerspruch zu $z \in U$ und $g(z) \in Y \setminus \overline{P}$. Also $f(U) \subseteq \overline{P} \subseteq V$.

8.4.11 Lemma

Seien (X,τ) und (Y,σ) beliebige topologische Räume und $F \subseteq Y^X$ gleichstetig. Dann ist $\Omega : F \times X \to Y$ stetig (bzgl. der Produkttopologie auf $Y^X = \prod_{x\in X} Y$).

Beweis: Sei $\Omega(f,x) \in V \in \sigma$. Setze $y := f(x)$. Dann $\exists U \in \dot{x} \cap \tau \exists W \in \dot{y} \cap \sigma \forall g \in F$ gilt $(g(x) \in W$ impliziert $g(U) \subseteq V)$. Setze $O := \prod_{z \in X} Y_z$, wobei $Y_z := \begin{cases} W & \text{falls } z = x \\ Y & \text{falls } z \neq x \end{cases}$

Dann ist $(f,x) \in O \times U$ und $\Omega(O \times U) \subseteq V$ (denn $(h,a) \in O \times U$ impliziert $h(x) \in W$, denn $h \in O$, also $h(U) \subseteq V$ und somit $\Omega(h,a) = h(a) \in V$).

8.4.12 Satz von Arzelà-Ascoli

Für einen k-Raum (X,τ), einen semiuniformen Raum (Y,Σ) (den wir auch als topologischen Raum (Y,τ_Σ) auffassen) und $F \subseteq c(X,Y)$ ist äquivalent:

1. $\overline{F}$ ist kompakt (bzgl. der komkpakt offenen Topologie).
2. F ist gleichgradig stetig auf X (oder gleichstetig; siehe Lemma 8.4.7) und für jedes $x \in X$ ist $\overline{F(x)}$ kompakt (wobei $F(x) := \{f(x) \mid f \in F\}$).

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Da $\overline{F}$ kompakt ist, ist es auch lokal kompakt. Aus Lemma 8.4.8 folgt, dass $\Omega : \overline{F} \times X \to Y$ stetig ist. Aus Lemma 8.4.9 folgt, dass $\overline{F}$ gleichstetig ist. Demnach ist auch F gleichstetig. Für $x \in X$ ist $\Omega(\overline{F} \times \{x\})$ kompakt. Da Y ein T_3-Raum ist, ist auch $\overline{\Omega(\overline{F} \times \{x\})}$ kompakt und aus $\overline{F(x)} \subseteq \overline{\Omega(\overline{F} \times \{x\})}$ folgt, dass $\overline{F(x)}$ kompakt ist.

2. $\Rightarrow$ 1. Sei F' der Abschluß von F bzgl. der Produkttopologie auf $Y^X = \prod_{x \in X} Y$ (und mit der Produkttopologie versehen). Wegen Lemma 8.4.7 und Lemma 8.4.10 ist F' gleichstetig (also auch gleichgradig stetig). Lemma 8.4.11 impliziert, dass $\Omega : F' \times X \to Y$ stetig ist (bzgl. Produkttopologie auf F'). Für K kompakt in X, V offen in Y und $f \in S(K,V) \cap F'$, also $\{f\} \times K \subseteq \Omega^{-1}(V)$ folgt aus Lemma 4.1.6 (Tubenlemma) die Existenz eines in F' offenen W mit $f \in W$ und $W \times K \subseteq \Omega^{-1}(V)$, also $f \in W \subseteq S(K,V)$. Folglich stimmt auf F' die Produkttopologie mit der kompakt offenen Topologie überein. Es ist also $\overline{F} = F'$. Da $\prod_{x \in X} \overline{F(x)}$ kompakt und abgeschlossen (bzgl. der Produkttopologie) ist, folgt aus $F' \subseteq \prod_{x \in X} \overline{F(x)}$, dass auch F' kompakt ist. Demzufolge ist auch $\overline{F}$ mit der kompakt offenen Topologie kompakt!

Zum Abschluss dieses Abschnitts geben wir noch eine interessante Charakterisierung der Gleichstetigkeit. Zuvor noch etwas Notation. Für eine gegebene Menge X sei $\Phi(X)$ die Menge aller Filter auf X. Sei $H \subseteq Y^X$, $\mathscr{F} \in \Phi(H)$, $\varphi \in \Phi(X)$ und $x \in X$. Dann definieren wir

$$\mathscr{F}(x) := \{P \subseteq Y \mid \exists F \in \mathscr{F} \text{ mit } F(x) = \{f(x) \mid f \in F\} \subseteq P\}$$

$$\mathscr{F}(\varphi) := \{P \subseteq Y \mid \exists F \in \mathscr{F} \, \exists A \in \varphi \text{ mit } F(A) = \{f(a) \mid f \in \mathscr{F},\, a \in A\} \subseteq P\}.$$

Offenbar sind $\mathscr{F}(x)$ und $\mathscr{F}(\varphi)$ Filter auf Y.

8.4.13 Lemma

Seien (X,τ), (Y,σ) topologische Räume und $H \subseteq Y^X$. Dann ist äquivalent:
(a) H ist gleichstetig.
(b) $\forall x \in X \, \forall y \in Y \, \forall \mathscr{F} \in \Phi(H) \, \forall \varphi \in \Phi(X) \, [(\mathscr{F}(x) \to y \text{ und } \varphi \to x) \;\Rightarrow\; \mathscr{F}(\varphi) \to y]$

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $x \in X$, $y \in Y$, $\mathscr{F} \in \Phi(H)$ und $\varphi \in \Phi(X)$ mit $\mathscr{F}(x) \to y$, $\varphi \to x$. Sei nun $V \in \dot{y} \cap \sigma$. Dann gibt es $U \in \dot{x} \cap \tau$, $W \in \dot{y} \cap \sigma$ mit $\forall f \in H \, (f(x) \in W \;\Rightarrow\; f(U) \subseteq V)$. Es ist $U \in \varphi$ und $W \in \mathscr{F}(x)$, es gibt also ein $F \in \mathscr{F}$ mit $F(x) \subseteq W$. Das bedeutet aber $f(x) \in W$ für alle $f \in F$ und somit auch $f(U) \subseteq V$ für alle $f \in F$, also $F(U) \subseteq V$. Da $F(U) \in \mathscr{F}(\varphi)$, ist auch $V \in \mathscr{F}(\varphi)$. Zeigen wir (b) $\Rightarrow$ (a): Angenommen

$$\exists x \in X, y \in Y, V \in \dot{y} \cap \sigma \, \forall U \in \dot{x} \cap \tau \, \forall W \in \dot{y} \cap \sigma \, \exists f_{U,W} \in H \text{ mit } f_{U,W}(x) \in W \text{ und } f_{U,W}(U) \not\subseteq V$$

Setze $P_{U,W} := \{f \in H \mid \exists U' \in \dot{x} \cap \tau, \exists W' \in \dot{y} \cap \sigma \text{ mit } U' \subseteq U, W' \subseteq W \text{ und } f = f_{U',W'}\}$ und $\mathscr{F} := \{F \subseteq H \mid \exists U \in \dot{x} \cap \tau \, \exists W \in \dot{y} \cap \sigma \text{ mit } P_{U,W} \subseteq F\}$. Dann ist $\mathscr{F}$ ein Filter auf H.

Es gilt $\mathscr{F}(x) \to y$. Beweis: Für $O \in \dot{y} \cap \sigma$ ist $P_{U,O} \subseteq O$!

Es gilt $\mathscr{F}(\varphi) \not\to y$, wobei $\varphi := \{A \subseteq X \mid \exists U \in \dot{x} \cap \tau \text{ mit } U \subseteq A\}$. Beweis: Angenommen $\mathscr{F}(\varphi) \to y$. Dann gibt es $A \in \varphi$, $F \in \mathscr{F}$ mit $F(A) \subseteq V$ (denn $V \in \mathscr{F}(\varphi)$). Also gibt es $U, U' \in \dot{x} \cap \tau$, $W \in \dot{y} \cap \sigma$ mit $P_{U',W}(U) \subseteq V$ und somit auch $P_{U \cap U',W}(U) \subseteq V$. Aber für $f \in P_{U \cap U',W}$ gilt $f(U \cap U') \not\subseteq V$ (und natürlich ist $P_{U \cap U',W} \neq \emptyset$). Dies ist ein Widerspruch!

9 Stetige Konvergenz und allgemeine Konvergenzräume

Mein Vorschlag geht nun dahin, jedesmal, wo es vorteilhaft ist - und es ist, wie ich glaube, mit ganz wenigen Ausnahmen immer vorteilhaft, den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz in der Funktionentheorie durch den Begriff der stetigen Konvergenz zu ersetzen, den H. Hahn vor einigen Jahren in die Mathematik eingeführt hat und dessen Handhabung unvergleichlich einfacher ist.

Constantin Caratheodory

Der Inhalt dieses Kapitels ist aus [15].

9.1 Stetige Konvergenz, schwach stetige Abbildungen und (S)-Räume

1921 führte H. Hahn den Begriff der stetigen Konvergenz von reellen Funktionen in seinem Buch [20] *offiziell* in die Mathematik ein[7] (genau genommen definierte er stetige Konvergenz in einem Punkt). Caratheodory griff dieses Konzept 1929 auf (siehe [7]) und ersetzte mit diesem den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz in der Funktionentheorie.

9.1.1 Ursprüngliche Definition der stetigen Konvergenz

Eine Folge reeller Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert stetig gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn für jede in $\mathbb{R}$ gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Der Begriff der stetigen Konvergenz in einem Punkt ergibt sich nun auch unmittelbar.

Übertragen wir dieses Konzept nun auf allgemeine topologische Räume.

Für die reellen Zahlen oder auch für metrische Räume reicht das Konzept konvergierender Folgen völlig aus, um topologische Fragestellungen zu behandeln, aber eben nicht für allgemeine topologische Räume[8] (Beispiele hierzu findet man in [22]). In allgemeinen topologischen Räumen brauchen wir daher auch allgemeine Konzepte. Definition 9.1.1 wird sich also bei allgemeinen topologischen Räumen kaum sinnvoll anwenden lassen, da selbst so elementare Konzepte wie die Stetigkeit nicht allein durch Folgenkonvergenz beschreibbar sind.

Definition 9.1.2 und Lemma 9.1.3 geben nun Auskunft darüber, wie sich das obige Konzept der stetigen Konvergenz mittels Filter beschreiben lässt.

[7] Die Definition geht aber bereits auf Weierstrass zurück und der Name stammt von P. Du Bois-Reymond

[8] Natürlich sind metrische Räume nicht die größte Klasse topologischer Räume, deren Topologie bereits durch die Kenntnis aller Folgen (und ihrer Grenzwerte) bestimmt sind. Sinnigerweise werden diese im deutsch sprachigen Raum als Folgen bestimmte Topologische Räume bezeichnet (bzw. als sequential spaces im Englischen).

9.1.2 Definition: Stetige Konvergenz eines Filters

Für einen Filter ϕ auf $\emptyset \neq Z \subseteq Y^X$ und einen Filter ψ auf X sei $\phi(\psi) := \{A \subseteq Y \mid \exists P \in \phi, Q \in \psi \text{ mit } P(Q) \subseteq A\}$, wobei $P(Q) := \{g(x) \mid g \in P \text{ und } x \in Q\}$. Seien (X,τ) und (Y,σ) topologische Räume. Wir sagen ϕ **konvergiert stetig** auf Z gegen $f : X \to Y$, falls für alle Filter ψ auf X und alle $x \in X$ gilt: $\boxed{\psi \xrightarrow{\tau} x \quad \text{impliziert} \quad \phi(\psi) \xrightarrow{\sigma} f(x)}$.

Es folgen noch ein paar Bemerkungen.

1. ϕ konvergiert offenbar genau dann stetig gegen $f : X \to Y$, wenn zu jedem $x \in X$ und $W \in \overset{\bullet}{f(x)} \cap \sigma$ ein $P \in \phi$ und $V \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ existiert, mit $P(V) \subseteq W$.

2. Sei ϕ ein Filter auf $\varnothing \neq Z \subseteq Y^X$ und $f \in Y^X$. Wir setzen $\Phi := \{A \subseteq Y^X \mid \exists P \in \phi \text{ mit } P \subseteq A\}$. Dann gilt:

   $$\phi \text{ konvergiert stetig auf } Z \text{ gegen } f \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \text{ konvergiert stetig auf } Y^X \text{ gegen } f$$

   Bei Bedarf können wir in Definition 9.1.2 von $Z = Y^X$ ausgehen.

3. Sei $f \in Y^X$ und $\phi := \overset{\bullet}{f}$ stetig konvergent gegen f. Offenbar ist f dann stetig.

   Wenn wir möchten, dass Einpunktfilter auf Z wenigstens stetig gegen ihr erzeugendes Element konvergieren, sollten wir uns auf $Z = c(X,Y)$ zurückziehen.

9.1.3 Lemma

Seien (X,τ) und (Y,σ) topologische Räume, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $Z \subseteq Y^X$ und sei (X,τ) ein A1-Raum (jeder Punkt hat abzählbare Umgebungsbasis). Dann ist äquivalent:

1. Der mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Filter konvergiert stetig auf Z gegen f.
2. $\forall x \in X \,\forall$ Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X mit $x_n \xrightarrow{\tau} x$ gilt $f_n(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$.
   (Die ursprüngliche Definition der *stetigen Konvergenz* von Hans Hahn.)

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Sei $x_n \to x$. Sei φ der mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ϕ der mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Filter. Wegen $\varphi \xrightarrow{\tau} x$ folgt $\phi(\varphi) \xrightarrow{\sigma} f(x)$. Das bedeutet zu jedem $U \in \overset{\bullet}{f(x)} \cap \sigma$ existieren $P \in \phi$, $Q \in \varphi$ mit $P(Q) \subseteq U$. Folglich gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x_m) \in U$ für alle $n,m \geq N$. Für $n \geq N$ gilt somit $f_n(x_n) \in U$. Diese Richtung geht also auch ohne A1.

2. $\Rightarrow$ 1. Sei wieder ϕ der von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induzierte Filter auf Z, $x \in X$ und $\varphi \in \mathscr{F}(X)$ mit $\varphi \xrightarrow{\tau} x$ gegeben. Zu zeigen ist $\phi(\varphi) \xrightarrow{\sigma} f(x)$. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von x (o.B.d.A. mit $A_{n+1} \subseteq A_n$), insbesondere $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \varphi$. Falls nicht $\phi(\varphi) \xrightarrow{\sigma} f(x)$, so $\exists U \in \overset{\bullet}{f(x)} \cap \sigma \,\forall k \in \mathbb{N} \,\forall P \in \varphi \,\exists n \geq k$ mit $f_n(P) \not\subseteq U$.

Zu 0 und A_0 gibt es $n_0 \geq 0$ und $x_0 \in A_0$ mit $f_{n_0}(x_0) \notin U$.
Zu n_0+1 und A_{n_0+1} gibt es $n_1 \geq n_0+1$ und $x_1 \in A_{n_0+1}$ mit $f_{n_1}(x_1) \notin U$.
Zu n_1+1 und A_{n_1+1} gibt es $n_2 \geq n_1+1$ und $x_2 \in A_{n_1+1}$ mit $f_{n_2}(x_2) \notin U$.
$\vdots$

Es gibt also eine streng monoton steigende Folge $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}$ und eine Folge $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ aus X mit $x_l \to x$ und $f_{n_l}(x_l) \notin U$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ bilden wir nun $l(n) := \min\{l \in \mathbb{N} \mid n \leq n_l\}$ und $x'_n := x_{l(n)}$. Offenbar gilt auch $x'_n \to x$ aber <u>nicht</u> $f_n(x'_n) \to f(x)$. Dies ist ein Widerspruch!

9.1.4 Bemerkung

Definition 9.1.2 ist die Definition, mit der ich im Folgenden arbeiten werden. Sollte ich an einer Stelle von der stetigen Konvergenz einer Funktionenfolge sprechen, so ist dies nicht im Sinne von Definition 9.1.1, sondern ich meine die stetige Konvergenz des mit der Folge assoziierten Filter (im Sinne von 9.1.2).

9.1.5 Definition: Schwach stetig

Wir nennen $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ **schwach stetig**, falls

$$\forall x \in X\, \forall O \in \overset{\bullet}{f(x)} \cap \sigma\, \exists Q \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau \text{ mit } f(Q) \subseteq \overline{O}.$$

Offenbar ist f genau dann schwach stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist. Ist Y T_3 und f schwach stetig, so ist f offenbar stetig.

9.1.6 Lemma

Seien (X,τ) und (Y,σ) beliebige topologische Räume.

1. Ist ϕ ein Filter, der stetig gegen $f : X \to Y$ konvergiert, so ist f schwach stetig.
2. Ist $f : D \to Y$ stetig, mit $D \subseteq X = \overline{D}$ und der Eigenschaft: $\forall x \in X\, \exists$ ein stetiges $f_x : D \cup \{x\} \to Y$ mit $f_x|D = f$, dann ist $g : X \to Y, x \mapsto f_x(x)$ schwach stetig.

Korollar in beiden Fällen: Ist (Y,σ) zusätzlich T_3, so ist f bzw. g stetig.

Beweis: 1. Sei $U \in \overset{\bullet}{f(x)} \cap \sigma$. Sei ψ der von $\overset{\bullet}{x} \cap \tau$ erzeugte Filter. Wegen $\phi(\psi) \xrightarrow{\sigma} f(x)$ gibt es $P \in \phi$, $Q \in \overset{\bullet}{f(x)} \cap \sigma$ mit $P(Q) \subseteq U$. Angenommen $f(Q) \cap (Y \setminus \overline{U}) \neq \varnothing$. Wähle dann ein $z \in Q$ mit $f(z) \in Y \setminus \overline{U}$. Nun gilt $\overset{\bullet}{z} \xrightarrow{\tau} z$, also $\phi(\overset{\bullet}{z}) \xrightarrow{\sigma} f(z)$. Es gibt also $P' \in \phi$ mit $P'(z) \subseteq Y \setminus \overline{U}$. Für $P'' := P \cap P' \in \phi$ folgt schließlich $P''(z) \subseteq P'(z) \subseteq Y \setminus \overline{U}$. Dies ist ein Widerspruch, denn $P''(z) \subseteq P(z) \subseteq P(Q) \subseteq U$ und $P''(z) \neq \varnothing$.

2. Sei $x \in X$ mit $g(x) \in V \in \sigma$. Es gibt nun ein $U \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ mit $f_x(U \cap (D \cup \{x\})) \subseteq V$. Angenommen es ist $g(U) \not\subseteq \overline{V}$. Sei dann $z \in U$ mit $g(z) \in Y \setminus \overline{V}$. Da auch f_z stetig ist, $\exists U' \in \overset{\bullet}{z}$

$\cap\tau$ mit $f_z(U'\cap(D\cup\{z\}))\subseteq Y\setminus\overline{V}$. Wegen $z\in U\cap U'\in\tau$ gibt es ein $d\in U\cap U'\cap D$. Es folgt $f_z(d)\in Y\setminus\overline{V}$, aber $f_z(d)=f_x(d)\in V$!

9.1.7 Satz

Für jeden topologischen Raum (Y,σ) sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

1. (Y,σ) ist ein T_3-Raum.
2. Für jeden topologischen Raum (X,τ), jeden Filter ϕ auf Y^X und jede Abbildung $f:X\to Y$ gilt:
$$\left(\phi \overset{\text{konvergiert stetig}}{\longrightarrow} f\right) \quad \text{impliziert} \quad (f \text{ ist stetig})$$
3. Jede schwach stetige Abbildung von einem topologischen Raum (X,τ) nach (Y,σ) ist stetig.
4. Für jeden Raum (X,τ), jede Teilmenge $D\subseteq X$ mit $\overline{D}=X$ und jede stetige Abbildung $f:D\to Y$ mit der Eigenschaft
$$\forall x\in X \text{ existiert eine stetige Abbildung } f_x:D\cup\{x\}\to Y \text{ mit } f_x|D=f$$
ist die Abbildung $\overline{f}:X\to Y$ mit $\overline{f}(x):=f_x(x)$ stetig.
5. Für jeden Raum (X,τ), jede Teilmenge $D\subseteq X$ mit $\overline{D}=X$ und jede stetige Abbildung $f:D\to Y$ mit der Eigenschaft
$$\forall x\in X\setminus D\ \exists y_x\in Y\,\forall\varphi\in\mathscr{F}(X):\ [(D\in\varphi \text{ und } \varphi\overset{\tau}{\to}x)\ \Rightarrow\ f(\varphi|D)\overset{\sigma}{\to}y_x]$$
ist die Abbildung $\overline{f}:X\to Y$ mit $\overline{f}(x):=y_x$ für $x\in X\setminus D$ und $\overline{f}(x):=f(x)$ für $x\in D$ stetig. (Offenbar gilt $\overline{f}|D=f$.)

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Siehe Lemma 9.1.6.

2. $\Rightarrow$ 1. Beweisen wir statt dessen: $\neg 1.\ \Rightarrow\ \neg 2.$ Sei $a\in Y$, $U\in\overset{\bullet}{a}\cap\sigma$ derart, dass a keine abgeschlossene Umgebung unterhalb U hat. Für jedes $V\in\overset{\bullet}{a}\cap\sigma$ sei $\vec{V}:=\{W\in\overset{\bullet}{a}\cap\sigma\mid W\subseteq V\}$. Sei ℓ eine Menge, die in keiner bereits definierten Menge als Element vorkommt. Wir setzen

$$X:=(\textstyle\bigcup_{V\in\overset{\bullet}{a}\cap\sigma}\overline{V}\times\{V\})\cup\{(a,\ell)\},$$

$$\mathscr{A}_1:=\{(\overline{W}\cap V)\times\{W\}\mid W\in\overset{\bullet}{a}\cap\sigma \text{ und } V\in\sigma\},$$

$$\mathscr{A}_2:=\{(\textstyle\bigcup_{Q\in\vec{W}}\overline{Q}\times\{Q\})\cup\{(a,\ell)\}\mid W\in\overset{\bullet}{a}\cap\sigma\},$$

$$\mathscr{B} := \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2 \quad \text{und anschließend} \quad \tau := \{\bigcup \mathscr{B}' \mid \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}\}$$

und zeigen, dass τ eine Topologie auf X ist. Dazu zeigen wir, dass $\mathscr{B}$ das Folgende erfüllt und damit bereits eine Basis für τ ist (beachte auch $\bigcup \mathscr{B} = X$.).

$\boxed{\forall x \in X\, \forall A, A' \in \mathscr{B} : \ (x \in A \cap A' \ \text{impliziert} \ \exists A'' \in \mathscr{B} \ \text{mit} \ x \in A'' \subseteq A \cap A'),}$

Beweis dazu: (1) Sind $A, A' \in \mathscr{A}_1$, so gilt mit $A = (\overline{W_1} \cap V_1) \times \{W_1\}$, $A' = (\overline{W_2} \cap V_2) \times \{W_2\}$ und $(y,Q) \in A \cap A'$ offenbar $W_1 = Q = W_2$ und $(y,Q) \in A'' := (\overline{Q} \cap V_1 \cap V_2) \times \{Q\} \in \mathscr{A}_1$ und $A'' \subseteq A \cap A'$.

(2) Sind $A, A' \in \mathscr{A}_2$, so gilt mit $W_3 := W_1 \cap W_2 \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$, $A = (\bigcup_{Q \in \vec{W}_1} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}$ und $A' = (\bigcup_{Q \in \vec{W}_2} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}$ offenbar $A \cap A' = (\bigcup_{Q \in \vec{W}_3} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\} \in \mathscr{A}_2$.

(3) Sind $A \in \mathscr{A}_1$ und $A' \in \mathscr{A}_2$, so gilt mit $A = (\overline{W_1} \cap V) \times \{W_1\}$, $A' = (\bigcup_{Q \in \vec{W}_2} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}$ und $(y,z) \in A \cap A'$ offenbar $z = W_1 \in \vec{W}_2$ und $(y,z) \in A = A \cap A'$.

$$\text{Wir definieren nun } f : X \to Y\,, \ (y,z) \mapsto y.$$

$\boxed{f \text{ ist in } (a,\ell) \text{ nicht stetig.}}$ **Beweis dazu:** Nach Voraussetzung an a und U gilt $\overline{V} \not\subseteq U$, für alle $V \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$. Wäre f doch in (a,ℓ) stetig, so gäbe es ein $A \in \mathscr{A}_2$ mit $f(A) \subseteq U$. Sei $W \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$ mit $A = (\bigcup_{Q \in \vec{W}} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}$. Wir erhalten den Widerspruch $\overline{W} = f(\overline{W} \times \{W\}) \subseteq f(A) \subseteq U$!

Wir werden nun einen Filter ψ konstruieren, der stetig gegen f konvergiert. Für $(y,Q) \in X$, $V \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma$, $Q \neq \ell$ bzw. $W \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$ setze dazu

$$P_0((y,Q),V) := \{g : X \to Y \mid g((\overline{Q} \cap V) \times \{Q\}) \subseteq V\}$$

$$P_a(W) := \{g : X \to Y \mid g((\bigcup_{Q \in \vec{W}} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}) \subseteq W\}$$

und anschließend

$$\psi' := \{P_0((y,Q),V) \mid (y,Q) \in X, V \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma, Q \neq \ell\} \cup \{P_a(W) \mid W \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma\}.$$

$\boxed{\text{Endlich viele Elemente aus } \psi' \text{ haben einen nicht leeren Schnitt.}}$

Beweis dazu: Seien endlich viele Elemente $P_0((y_i,Q_i),V_i)$, $i \in J$ und $P_a(W_i)$, $i \in K$ aus ψ' gegeben ($J \cap K = \varnothing$). Setze

$$\mathscr{D}_i := \begin{cases} \{(\overline{Q}_i \cap V_i) \times \{Q_i\},\ X \setminus [(\overline{Q}_i \cap V_i) \times \{Q_i\}]\} & \text{falls } i \in J \\ \{(\bigcup_{Q \in \vec{W}_i} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\},\ X \setminus [(\bigcup_{Q \in \vec{W}_i} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}]\} & \text{falls } i \in K \end{cases}$$

und anschließend

$$\mathscr{D} := \prod_{i \in J \cup K} \mathscr{D}_i \qquad \text{und} \qquad \xi := \{\bigcap_{i \in J \cup K} \alpha(i) \mid \alpha \in \mathscr{D}\}.$$

Offenbar ist ξ eine Zerlegung von X. Wir definieren nun ein $g : X \to Y$, welches im Schnitt liegt. Sei dazu $(y,z) \in X$. Es gibt nun ein $\alpha \in \mathscr{D}$ mit $(y,z) \in \bigcap_{i \in J \cup K} \alpha(i)$. Sei

$$J_\alpha := \{i \in J \mid \alpha(i) = (\overline{Q}_i \cap V_i) \times \{Q_i\}\}$$

$K_\alpha := \{i \in K \mid \alpha(i) = (\bigcup_{Q \in \vec{W}_i} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}\}$

Wir unterscheiden vier Fälle.

Fall 1 $J_\alpha = \varnothing$, $K_\alpha \neq \varnothing$. Dann sei $g(y,z)$ beliebig aus $\bigcap_{k \in K_\alpha} W_k$.

Fall 2 $J_\alpha \neq \varnothing$, $K_\alpha = \varnothing$. Dann sei $g(y,z)$ beliebig aus $\bigcap_{i \in J_\alpha} V_i$.

Fall 3 $J_\alpha = \varnothing$, $K_\alpha = \varnothing$. Dann sei $g(y,z)$ vollkommen beliebig aus Y.

Fall 4 $J_\alpha \neq \varnothing$. $K_\alpha \neq \varnothing$. Dann ist

$$(y,z) \in [\bigcap_{i \in J_\alpha} (\overline{Q}_i \cap V_i) \times \{Q_i\}] \cap [\bigcap_{i \in K_\alpha} (\bigcup_{Q \in \vec{W}_i} (\overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\})].$$

Also $Q_i = z =: Q'$ für alle $i \in J_\alpha$ und $Q' \in \vec{W}_i$ für alle $i \in K_\alpha$. Es folgt $y \in (\bigcap_{i \in J_\alpha} V_i) \cap \overline{Q'}$ und damit $\varnothing \neq (\bigcap_{i \in J_\alpha} V_i) \cap Q' \subseteq (\bigcap_{i \in J_\alpha} V_i) \cap (\bigcap_{k \in K_\alpha} W_k)$. In diesem Fall sei $g(y,z)$ beliebig aus $(\bigcap_{i \in J_\alpha} V_i) \cap (\bigcap_{k \in K_\alpha} W_k)$.

Offenbar gilt nun $g \in (\bigcap_{i \in J} P_0((y_i,Q_i),V_i)) \cap (\bigcap_{i \in K} P_a(W_i))$. Wir setzen

$$\psi := \{P \subseteq Y^X \mid \exists P_1,\ldots,P_n \in \psi' \text{ mit } P_1 \cap \ldots \cap P_n \subseteq P\}.$$

$\boxed{\text{Der Filter } \psi \text{ konvergiert stetig gegen } f.}$ **Beweis dazu:** Sei $f(y,z) \in O \in \sigma$.

Fall 1 $z = \ell$. Dann ist $y = a$ und für $P := P_a(O) \in \psi$ gilt $P((\bigcup_{Q \in \vec{O}} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}) \subseteq O$.

Fall 2 $z \neq \ell$, also $z = Q' \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$. Dann gilt für $P := P_0((y,Q'),O) \in \psi$ in diesem Fall $P((\overline{Q'} \cap O) \times \{Q'\}) \subseteq O$.

1. $\Rightarrow$ 3. ist trivial. Also 3. $\Rightarrow$ 1. Wir zeigen wieder $\neg$1. $\Rightarrow$ $\neg$4. Dies folgt aber unmittelbar aus obiger Konstruktion und Lemma 9.1.6 (siehe auch Bemerkung 9.1.8).

4. $\Rightarrow$ 1. Wir zeigen $\neg$1. $\Rightarrow$ $\neg$4. und knüpfen dazu an obiger Konstruktion an. Neben (X,τ) und $f : X \to Y$ definieren wir nun noch

$$D := \bigcup_{Q \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma} Q \times \{Q\} \text{ und } g : D \to Y,\ (y,Q) \mapsto y.$$

$\boxed{\text{Es gilt } X = \overline{D}.}$ **Beweis dazu:** $(a,\ell) \in \overline{D}$ ist offensichtlich. Sei $(y,Q_0) \in \bigcup_{Q \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma} \overline{Q} \times \{Q\}$, also $y \in \overline{Q}_0$. Falls $(y,Q_0) \in A \in \mathscr{A}_2$, so offenbar $A \cap D \neq \varnothing$. Falls $(y,Q_0) \in A \in \mathscr{A}_1$, also $A = (\overline{Q}_0 \cap V) \times \{Q_0\}$, so folgt $y \in V$ und daher $V \cap Q_0 \neq \varnothing$. Für $y \in V \cap Q_0$ folgt nun $(y,Q_0) \in A \cap D$.

$\boxed{g \text{ lässt sich stetig auf jedes } (y,z) \in X \text{ fortsetzen.}}$ **Beweis dazu:** Tatsächlich ist die Einschränkung von f auf $X \setminus \{(a,\ell)\}$ stetig. Gilt nämlich $(y,Q_0) \in X \setminus \{(a,\ell)\}$ und $f(y,Q_0) \in O \in \sigma$, so folgt $(y,Q_0) \in (\overline{Q}_0 \cap O) \times \{Q_0\}$ und $f((\overline{Q}_0 \cap O) \times \{Q_0\}) \subseteq O$. Andererseits ist aber auch die Einschränkung von f auf $D \cup \{(a,\ell)\}$ (also $f_0 := f|(D \cup \{(a,\ell)\})$) stetig. Gilt nämlich

$a = f_0(a,\ell) \in W \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$, so folgt $f_0(D \cap [(\bigcup_{Q \in \vec{W}} \overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}]) \subseteq W$. Und gilt $a \neq y = f_0(y,Q) \in V \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma$, so folgt $f_0(D \cap [(\overline{Q} \cap V) \times \{Q\}]) \subseteq V$.

Bezeichnet $g_{(y,z)} : D \cup \{(y,z)\} \to Y$ die stetige Fortsetzung von g auf $D \cup \{(y,z)\}$, so gilt $f(y,z) = g_{(y,z)}(y,z)$. Aber f ist nicht stetig! Damit ist der Beweis beendet.

1. $\Rightarrow$ 4. Folgt aus Lemma 9.1.6 zusammen mit Eigenschaft 4. aus diesem Satz.

4. $\Rightarrow$ 5. Sei $x \in X \setminus D$ beliebig. Wir zeigen, dass sich f stetig auf $D \cup \{x\}$ fortsetzen lässt. Der Filter $\varphi := \{P \subseteq X \mid \exists U \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau \text{ mit } U \cap D \subseteq P\}$ konvergiert gegen x. Wir definieren die Abbildung

$$f_x(z) := \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in D \\ y_x & \text{falls } z = x \end{cases}$$

Zeigen wir die Stetigkeit:

Sei $d \in D$ und $f(d) \in O \in \sigma$. 1.Fall $y_x \in O$, dann gibt es ein $U \in \overset{\bullet}{d} \cap \tau$ mit $f(U \cap D) \subseteq O$, also $f_x(U \cap (D \cup \{x\})) \subseteq O$.

2.Fall $y_x \notin O$. Dann ist $O \notin f(\varphi|D)$. Es gilt $f_x^{-1}(O) = f^{-1}(O) = V \cap D$, für ein $V \in \overset{\bullet}{d} \cap \tau$. Wäre $x \in V$, so wäre $V \cap D \in \varphi|D$, also $O \in f(\varphi|D)$ - ein Widerspruch. Also ist $x \notin V$ und somit $f^{-1}(O) = V \cap (D \cup \{x\})$.

Sei nun $O \in \overset{\bullet}{y}_x \cap \sigma$. Dann ist $O \in f(\varphi|D)$, es gibt also ein $P \in \varphi|D$ mit $f(P) \subseteq O$. Zu P gibt es ein $U \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ mit $U \cap D \subseteq P$. Damit gilt dann $f_x(U \cap (D \cup \{x\})) \subseteq O$.

Die Stetigkeit ist damit gezeigt und folglich ist $\overline{f} : X \to Y$ stetig (wobei $\overline{f}(z) := f_z(z)$). Wegen $f_z(z) = y_z$ ist alles gezeigt.

5. $\Rightarrow$ 4. Sei $x \in X \setminus D$ und $\varphi_x := \{P \subseteq X \mid \exists Q \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau \text{ mit } Q \subseteq P\}$. Betrachte den auf $D \cup \{x\}$ eingeschränkten Filter $\varphi_x' := \{P \cap (D \cup \{x\}) \mid P \in \varphi_x\}$. Nun gilt auch $\varphi_x' \to x$ (in der Teilraumtopologie) und folglich $f_x(\varphi_x') \to f_x(x) =: y_x$. Offenbar erfüllt dieses y_x gerade die Bedingung aus 5. und folglich ist $\overline{f} : X \to Y$ mit $\overline{f}(x) := y_x$ stetig. Es gilt aber $f_x(x) = y_x$.

9.1.8 Bemerkungen zu Satz 9.1.7

1. Die obige Konstruktion von $X := (\bigcup_{V \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma} \overline{V} \times \{V\}) \cup \{(a,\ell)\}$ funktioniert auch indem wir σ durch eine beliebig gewählte Basis ρ von σ ersetzen. Diese Einsicht ist für Definition 9.1.11 und Lemma 9.1.12 wichtig.

2. Dass es in einen nicht T_3-Raum eine schwach stetige Abbildung gibt, die nicht stetig ist, sieht man leicht direkt. Sei (Y,σ) ein top. Raum, $y \in Y$ und $U \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma$ mit $\overline{V} \not\subseteq U$ für alle $V \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma$. Nun ist $\mathscr{B} := \{\{z\} \mid z \in Y \setminus \{y\}\} \cup \{\overline{V} \mid V \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma\}$ die Basis einer Topologie τ auf Y und $id_Y : (Y,\tau) \to (Y,\sigma)$ ist nicht stetig ($U = id_Y^{-1}(U) \notin \tau$), aber schwach stetig!

3. Betrachte den Sierpinski-Raum (Y,σ) mit $Y := \{0,1\}$ und $\sigma := \{\{0\},Y,\emptyset\}$. Seien ferner (X,τ) mit $D \subseteq X$ völlig beliebig. Ist $f : D \to Y$ eine beliebige stetige Abbildung, so lässt sich f stetig auf ganz X fortsetzen. **Beweis:** O.B.d.A. ist f nicht konstant und

demzufolge surjektiv. Da $f^{-1}(0)$ offen in D ist, gibt es $V \in \tau$ mit $f^{-1}(0) = D \cap V$. Definiere $\tilde{f} : X \to Y$ durch $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in V \\ 1 & \text{falls } x \in X \setminus V \end{cases}$. Dann ist $\tilde{f}$ stetig mit $\tilde{f}|D = f$.

4. Der Notationsaufwand beim Nachweis, dass endlich viele Elemente aus ψ' einen nicht leeren Schnitt haben, mag etwas übertrieben sein, allerdings ist so die Konstruktion des g besonders deutlich! Interessant ist nun nämlich die Frage, ob sich auch ein Filter auf $c(X,Y)$ finden lässt, der stetig gegen f konvergiert (das g aus dem Schnitt also immer stetig gewählt werden kann)?

Nehmen wir Bemerkung 4 aus 9.1.8 als Anlass für das Folgende.

9.1.9 Definition: (S)-Raum

Ein topologischer Raum (Y, σ) heißt (S)-Raum, falls für jeden topologischen Raum (X, τ), jeden Filter ϕ auf $c(X,Y)$ und jede Abbildung $f : X \to Y$ gilt:

$$\left(\phi \overset{\text{konvergiert stetig}}{\longrightarrow} f\right) \quad \text{impliziert} \quad (f \text{ ist stetig})$$

Offenbar ist jeder T_3-Raum ein (S)-Raum (Satz 9.1.7). Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel eines recht gutartigen Raumes (d.h. unter anderem T_2), der kein (S)-Raum ist.

9.1.10 Allgemeines Beispiel

Sei (Y, σ) ein topologischer Raum und $A \subseteq Y$ nicht abgeschlossen mit der Eigenschaft

(E) $\quad \forall a \in A \; \forall U \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma \; \exists z \in U \setminus A$.

Sei $y \in \overline{A} \setminus A$. Wir definieren die Topologie $T(\sigma) := \{U \setminus B \mid U \in \sigma \text{ und } B \subseteq A\}$ auf Y. Wegen

1. $\varnothing, Y \in T(\sigma)$
2. $U_1 \setminus B_1, U_2 \setminus B_2 \in T(\sigma)$ impliziert $(U_1 \setminus B_1) \cap (U_2 \setminus B_2) = (U_1 \cap U_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \in T(\sigma)$
3. $U_i \setminus B_i \in \sigma$ für alle $i \in I$ impliziert $\bigcup_{i \in I}(U_i \setminus B_i) = (\bigcup_{i \in I} U_i) \setminus B \in T(\sigma)$, wobei $B := \{a \in A \mid \forall i \in I \, (a \notin U_i \text{ oder } a \in B_i)\}$

ist $T(\sigma)$ tatsächlich eine Topologie auf Y mit $\sigma \subseteq T(\sigma)$. Der Raum $(Y, T(\sigma))$ ist nicht T_3.
Beweis: A ist bzgl. $T(\sigma)$ abgeschlossen und $y \in Y \setminus A$. Seien $U, V \in \sigma$ und $B, B' \subseteq A$ mit $y \in U \setminus B$ und $A \subseteq V \setminus B'$. Folglich ist $B' = \varnothing$. Wegen $y \in \overline{A} \setminus A$ (bzgl. σ) gibt es ein $a \in U \cap A$. Da auch $a \in V$, $\exists z \in (U \cap V) \setminus A$ (wegen (E)). Folglich ist $z \in U \setminus B$ und $z \in V$.

Wir wenden diese Überlegungen auf die euklidische Topologie $\tau_{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}$ mit $A := \{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ an. Offenbar erfüllt A die Eigenschaft (E). Da $\tau_{\mathbb{R}}$ T_2 ist und $\tau_{\mathbb{R}} \subseteq T(\tau_{\mathbb{R}})$, ist $(\mathbb{R}, T(\tau_{\mathbb{R}}))$ ein T_2, aber kein T_3-Raum. Ist $\mathscr{B}$ eine Basis für die euklidische Topologie $\tau_{\mathbb{R}}$, so kann man schnell nachrechnen, dass

$$\mathscr{B}' := \{B \setminus A \mid B \in \mathscr{B}\} \cup \{(B \setminus A) \cup \{\frac{1}{n+1}\} \mid B \in \mathscr{B}, n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} \in B\}$$

eine Basis für $T(\tau_{\mathbb{R}})$ ist. Da es für $\tau_{\mathbb{R}}$ abzählbare Basen gibt, gibt es die auch für $T(\tau_{\mathbb{R}})$.

(**Bemerkung:** Offenbar kann man sich sogar auf die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ einschränken, mit der entsprechend induzierten Topologie $T(\tau_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{Q}}$. Also ist $(\mathbb{Q}, T(\tau_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{Q}})$ ein abzählbarer Raum, mit abzählbarer Basis, der T_2, aber nicht T_3 ist. Im Folgenden bleiben wir aber bei $(\mathbb{R}, T(\tau_{\mathbb{R}}))$.)

Sei $X := \{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ und ξ die euklidische Topologie von $\mathbb{R}$ eingeschränkt auf X. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge irrationaler Zahlen mit $r_n \to 1$ (bzgl. der euklidischen Topologie). Wir definieren wie folgt Abbildungen $f, f_n : (X, \xi) \to (\mathbb{R}, T(\tau_{\mathbb{R}}))$.

$$f(x) := x \quad \text{und} \quad f_n(x) := r_n x \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stetig gegen f.

   Beweis: Zum Nachweis verwenden wir (der Einfachheit halber) Lemma 9.1.3. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in (X, ξ) konvergente Folge, also $x_n \to x$. Falls $x \neq 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \ x_n = x$. Für $n \geq N$ folgt $f_n(x_n) = f_n(x) = r_n x$ und damit $f_n(x_n) \to x$ für $n \to \infty$. Falls $x = 0$ folgt $f_n(x_n) = r_n x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Man beachte, dass $r_n x_n \notin A$!

2. Die Abbildungen f_n sind alle stetig.

   Beweis: Sei wieder $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in (X, ξ) konvergente Folge, also $x_k \to x$. Falls $x \neq 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N: \ x_k = x$. Für $k \geq N$ folgt $f_n(x_k) = f_n(x)$ und damit $f_n(x_k) \to f_n(x)$. Falls $x = 0$ folgt $f_n(x_k) = r_n x_k \to 0$ für $n \to \infty$. Beachte, dass $f_n(X) \cap A = \varnothing$ gilt.

3. Die Abbildung f ist nicht stetig.

   Beweis: Offenkundig konvergiert $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, ξ) gegen 0, aber $(f(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $(\mathbb{R}, T(\tau_{\mathbb{R}}))$ <u>nicht</u> gegen 0. Folglich kann f nicht stetig sein.

Bemerkung: Auch in obiger allgemeiner Konstruktion mit (Y, σ) und $(Y, T(\sigma))$ können wir $X := A \cup \{y\}$ setzen und für $U \in \sigma$ mit $U \cap X \neq \varnothing$ die Menge $P(U) := \{g : X \to Y \mid g(U \cap X) \subseteq U \setminus A\}$ definieren. Wegen Eigenschaft (E) gilt für alle $U \in \sigma \setminus \{\varnothing\}$: $U \setminus A \neq \varnothing$. Und mit einem analogen Argument wie im Beweis zu Satz 9.1.7 sieht man, dass je endlich viele Elemente aus

$$\varphi' := \{P(U) \mid U \in \sigma \ \text{ mit } \ U \cap X \neq \varnothing\}$$

einen nicht leeren Schnitt haben und der von φ' erzeugte Filter folglich stetig gegen die nicht stetige Abbildung $f : X \to Y$, $x \mapsto x$ konvergiert. Genau wie in Satz 9.1.7 kann ich aber auch hier nicht sagen, ob man immer stetige Abbildungen im Schnitt finden kann, ob also $\varphi' \cup \{c(X,Y)\}$ die endliche Schnitt Eigenschaft hat.

9.1.11 Definition: Stabil

Wir nennen den topologischen Raum (Y, σ) an der Stelle $a \in Y$ stabil, falls eine Basis ρ existiert, so dass für alle $Q \in \dot{a} \cap \rho$ und für alle $V_1, \ldots, V_n \in \rho$ eine stetige Abbildung $f : \overline{Q} \to Q$ existiert, mit $f(\overline{Q} \cap V_i) \subseteq Q \cap V_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

9.1.12 Lemma

Ist der topologische Raum (Y,σ) an der Stelle $a \in Y$ stabil, aber bei a nicht T_3 (d.h. es gibt $U \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$, so dass $\overline{V} \nsubseteq U$ für alle $V \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$ gilt), so ist (Y,σ) kein (S)-Raum.

Beweis: Sei ρ eine Basis für σ, im Sinne von Definition 9.1.11 (beachte Bemerkung 9.1.8). Wir setzen an der Konstruktion im Beweis zu Satz 9.1.7 an und zeigen: Je endlich viele Elemente aus $\psi' \cup \{c(X,Y)\}$ haben einen nicht leeren Schnitt. Der von $\psi' \cup \{c(X,Y)\}$ erzeugte Filter konvergiert dann nämlich immer noch stetig gegen das nicht stetige f, enthält nun aber auch $c(X,Y)$. Wir müssen also zeigen, dass das $g \in (\bigcap_{i\in J} P_0((y_i,Q_i),V_i)) \cap (\bigcap_{i\in K} P_a(W_i))$ stetig gewählt werden kann.

1. Für (a,ℓ) setzen wir $g(a,\ell) := a$.

2. Sei $Q \in \overset{\bullet}{a} \cap \rho$. Wir definieren g auf $\overline{Q} \times \{Q\}$. Sei dazu $J' := \{i \in J \mid Q_i = Q\}$. Nun gibt es ein stetiges $h_Q : \overline{Q} \to Q$ mit $h_Q(\overline{Q} \cap V_i) \subseteq V_i$ für alle $i \in J'$ und wir setzen $g(y,Q) := h_Q(y)$, für $(y,Q) \in \overline{Q} \times \{Q\}$.

Für $W \in \overset{\bullet}{a} \cap \rho$ gilt offenbar $g(\bigcup_{Q\in\vec{W}}(\overline{Q} \times \{Q\}) \cup \{(a,\ell)\}) \subseteq W$, also ist g in (a,ℓ) stetig. Für (y,Q) mit $g(y,Q) \in V' \in \rho$ gibt es ein $V \in \overset{\bullet}{y} \cap \rho$ mit $h_Q(\overline{Q} \cap V) \subseteq V'$. Folglich gilt $g((\overline{Q} \cap V) \times \{Q\}) \subseteq V'$ und g ist auch in (y,Q) stetig. g ist natürlich auch im Schnitt enthalten.

9.1.13 Definition: T_0-Reflexion

Sei (Y,σ) ein topologischer Raum. Wir definieren folgende Äquivalenzrelation auf Y:

$$y_1 \sim y_2 \;\;:\Leftrightarrow\;\; \forall O \in \sigma \text{ gilt } (O \cap \{y_1,y_2\} \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \{y_1,y_2\} \subseteq O)$$

Sei $Z := Y/\sim := \{[y]_\sim \mid y \in Y\}$, mit $[y]_\sim := \{y' \in Y \mid y \sim y'\}$ und $q : Y \to Z,\ y \mapsto [y]_\sim$. Setze dann $\xi := \{O \subseteq Z \mid q^{-1}(O) \in \sigma\}$. Offenbar ist ξ die Quotiententopologie bezüglich $\sim$. Wir nennen (Z,ξ) im Folgenden die **T_0-Reflexion** (oder T-nullifizierung ;-)) von (Y,σ).

9.1.14 Lemma

1. Die T_0-Reflexion (Z,ξ) eines Raumes (Y,σ) ist immer T_0. Ist (Y,σ) bereits selber T_0, so lassen sich Z und Y auf offensichtliche Weise miteinander identifizieren. Für $O \in \sigma$ gilt $q^{-1}(q(O)) = O$ und $q^{-1}(q(Y \setminus O)) = Y \setminus O$. Die Abbildung q ist demnach offen und abgeschlossen.

2. (Y,σ) ist genau dann T_3, wenn die T_0-Reflexion (Z,ξ) ein T_3-Raum ist.

3. (Y,σ) ist genau dann (S), wenn die T_0-Reflexion (Z,ξ) ein (S)-Raum ist.

Beweis: 1. Sei $O \in \sigma$. $O \subseteq q^{-1}(q(O))$ ist klar. Sei $y \in q^{-1}(q(O))$, also $q(y) \in q(O)$. Es gibt ein $y' \in O$ mit $q(y) = q(y')$. Also gilt $y \in O$! Wegen $q^{-1}(q(O)) = O \in \sigma$ ist $q(O) \in \xi$ und q ist offen. Sei $A := Y \setminus O$. $A \subseteq q^{-1}(q(A))$ ist wieder offensichtlich. Sei $y \in q^{-1}(q(A))$, also $q(y) \in q(A)$. Es gibt ein $a \in A$ mit $q(y) = q(A)$. Wäre $y \in Y \setminus A = O$, so wäre auch $a \in O = Y \setminus A$. Also ist $y \in A$. Wegen $q^{-1}(Z \setminus q(A)) = Y \setminus q^{-1}(q(A)) = Y \setminus A = O \in \sigma$ ist $Z \setminus q(A) \in \xi$, also $q(A)$ abgeschlossen. Also ist q auch abgeschlossen.

Seien $z, z' \in Z$ mit $z \neq z'$, also $z = q(y)$ und $z' = q(y')$. Wegen $y \not\sim y'$ existiert ein $O \in \sigma$ mit $|O \cap \{y, y'\}| = 1$. O.B.d.A. sei $y \in O$ und $y' \notin O$. Setze $V := q(O) \in \xi$. Es gilt dann $z = q(y) \in V$ und $z' = q(y') \notin V$ (andernfalls $q(y') = q(y'')$ mit $y'' \in O$, also auch $y' \in O$).

2. Sei (Y, σ) T_3 und $q(y) = z \in O \in \xi$. Es ist $y \in V := q^{-1}(O) \in \sigma$. Sei $W \in \sigma$ mit $y \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$. Da q offen und abgeschlossen ist folgt $z = q(y) \in q(W) \subseteq \overline{q(W)} \subseteq q(\overline{W}) \subseteq q(V)$.

Sei umgekehrt (Z, ξ) ein T_3-Raum. Sei $y \in O \in \sigma$. Es folgt $z := q(y) \in q(O) \in \xi$. Also gibt es ein $V \in \xi$ mit $z \in V \subseteq \overline{V} \subseteq q(O)$. Es ist $y \in U := q^{-1}(V) \in \sigma$. Da $U \subseteq q^{-1}(\overline{V}) \subseteq O$ und $q^{-1}(\overline{V})$ abgeschlossen ist, gilt $y \in U \subseteq \overline{U} \subseteq O$.

3. Sei (Y, σ) ein (S)-Raum und ϕ stetig konvergent auf $c(X,Z)$ gegen $f : X \to Z$. Wir definieren wie folgt eine Abbildung $\alpha : c(X,Z) \to c(X,Y)$

(a) Ist $h \in c(X,Z)$, so wählen wir zu jedem $x \in X$ ein $y_x \in Y$ mit $q(y_x) = h(x)$.

(b) Wir definieren $\alpha(h)$ durch $\alpha(h)(x) := y_x$.

(c) $g : X \to Z$ ist stetig, genau dann wenn $\alpha(g) : X \to Y$ stetig ist. Beweis: Sei g stetig und $O \in \sigma$. Es folgt $\alpha(g)^{-1}(O) = \alpha(g)^{-1}(q^{-1}(q(O))) = g^{-1}(q(O)) \in \tau$. Ist andererseits $\alpha(g)$ stetig, folgt für $U \in \xi$: $g^{-1}(U) = \alpha(g)^{-1}(q^{-1}(U)) \in \tau$.

Zeigen wir, dass $\alpha(\phi)$ stetig gegen $\alpha(f)$ konvergiert. Sei $x \in X$ und $\alpha(f)(x) \in O \in \sigma$. Für $V := q(O) \in \xi$ gilt $f(x) = q(\alpha(f)(x)) \in q(O) = V$, also gibt es $Q \in \phi$, $U \in \dot{x} \cap \tau$ mit $Q(U) \subseteq V$. Dann ist aber $\alpha(Q)(U) \subseteq O$, denn es gilt $q(\alpha(Q)(U)) \subseteq Q(U) \subseteq V = q(O)$ und $O \in \sigma$. Da $\alpha(\phi)$ stetig gegen $\alpha(f)$ konvergiert, ist $\alpha(f)$ stetig, also auch f.

Sei umgekehrt (Z, ξ) ein (S)-Raum und ϕ stetig konvergent auf $c(X,Y)$ gegen $f : X \to Y$. Definiere $\beta : c(X,Y) \to c(X,Z)$ durch $\beta(h) := q \circ h$. Definiere anschließend $\psi := \{P \subseteq c(X,Z) \mid \exists Q \in \phi \text{ mit } \beta(Q) \subseteq P\}$. Man rechnet leicht nach, dass ψ stetig gegen $q \circ f$ konvergiert, $q \circ f$ also stetig ist. Dann ist aber auch f stetig (Quotiententopologie)!

9.1.15 Satz

1. Jeder (S)-Raum (Y, σ) ist ein R_0-Raum.
2. Jeder T_0-(S)-Raum (Y, σ) ist auch T_2.
3. Sei $(Y_i, \sigma_i)_{i \in I}$ eine Familie von (S)-Räumen und $(f_i : Y \to Y_i)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann ist (Y, σ) ein (S)-Raum, wobei σ die Initialtopologie ist.
4. Die topologische Summe von (S)-Räumen ist ein (S)-Raum.

Beweis: 1. Angenommen $\exists y_0 \in Y$ und $O \in \overset{\bullet}{y_0} \cap \sigma$ mit $\overline{\{y_0\}} \not\subseteq O$. Sei $y_1 \in A := \overline{\{y_0\}} \setminus O$. Offenbar ist A in Y abgeschlossen. Sei $X := Y \cup \{\ell\}$, wobei $\ell \notin Y$ (also z.B. $\ell = Y$) und $\tau := \sigma \cup \{X\}$. Wir erhalten einen Widerspruch, wenn wir folgende Abbildungen definieren $f : X \to Y, x \mapsto y_0$ und $g : X \to Y, g(x) := \begin{cases} y_0 & \text{für } x \in X \setminus A \\ y_1 & \text{für } x \in A \end{cases}$ Dann ist f stetig und g nicht stetig (denn $g^{-1}(A) = A$ ist nicht in X abgeschlossen), aber $\overset{\bullet}{f}$ konvergiert auf $c(X,Y)$ stetig gegen g. Gilt nämlich $\varphi \xrightarrow{\tau} x$, so folgt $\overset{\bullet}{f}(\varphi) = f(\varphi) = \overset{\bullet}{y_0} \xrightarrow{\sigma} g(x)$.

2. (Y,σ) ist nach 1. R_0, also wegen T_0 bereits T_1. Angenommen $y_1 \neq y_2$ lassen sich in Y nicht durch offene Mengen trennen. Wir bilden den Filter (Y ist ein T_1-Raum!)

$$\xi := \{Q \subseteq Y \setminus \{y_1,y_2\} \mid \exists U \in \overset{\bullet}{y_1} \cap \sigma, V \in \overset{\bullet}{y_2} \cap \sigma \text{ mit } (U \cap V) \setminus \{y_1,y_2\} \subseteq Q\}.$$

Für jedes $Q \in \xi$ sei $P_Q := \{g \in c(Y,Y) \mid g(Y) \subseteq Q\}$ und anschließend

$$\phi := \{P \subseteq Y^Y \mid \exists Q \in \xi \text{ mit } P_Q \subseteq P\}.$$

Offenbar ist ϕ ein Filter mit $c(Y,Y) \in \phi$. Wir definieren $f : Y \to Y$ durch $f(y) := \begin{cases} y_1 & \text{für } y \neq y_2 \\ y_2 & \text{für } y = y_2 \end{cases}$
Dann ist $f : (Y,\sigma) \to (Y,\sigma)$ nicht stetig (andernfalls wäre $\{y_2\} = f^{-1}(Y \setminus \{y_1\})$ offen, denn (Y,σ) ist T_1 und y_1, y_2 wären doch durch offene Mengen trennbar). Der Filter ϕ konvergiert nun aber stetig gegen f.
Beweis: Sei $\varphi \in \mathscr{F}(Y)$ mit $\varphi \xrightarrow{\sigma} y$.

Falls $y = y_2$, so sei $V \in \overset{\bullet}{y_2} \cap \sigma$. Dann ist $Q := V \setminus \{y_1,y_2\} \in \xi$ und es folgt $P_Q(Y) \subseteq Q \subseteq V$, wobei $P_Q \in \phi$ und $Y \in \varphi$. Also $\phi(\varphi) \xrightarrow{\sigma} y_2 = f(y_2)$.

Falls $y \neq y_2$, so sei $U \in \overset{\bullet}{y_1} \cap \sigma$. Dann ist $Q := U \setminus \{y_1,y_2\} \in \xi$ und es folgt $P_Q(Y) \subseteq Q \subseteq U$, wobei $P_Q \in \phi$ und $Y \in \varphi$. Also $\phi(\varphi) \xrightarrow{\sigma} y_1 = f(y)$.

3. Sei (X,τ) ein top. Raum und ϕ ein Filter auf $c(X,Y)$, der stetig gegen $f : X \to Y$ konvergiert. Zu zeigen ist, dass $f_i \circ f$ für jedes $i \in I$ stetig ist. Sei $j \in I$. Wir betrachten $\alpha : c(X,Y) \to c(X,Y_j), g \mapsto f_j \circ g$. Dann ist $\phi' := \alpha(\phi)$ ein Filter auf $c(X,Y_j)$, der stetig gegen $f_j \circ f$ konvergiert. Beweis dazu: Für $x \in X$ und $f_j \circ f(x) \in U_j \in \sigma_j$ gilt $f(x) \in f_j^{-1}(U_j) \in \sigma$, es existiert demnach ein $P \in \phi$ und $Q \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ mit $P(Q) \subseteq f_j^{-1}(U_j)$. Nun ist $P' := \{\alpha(g) \mid g \in P\} \in \phi'$ und offenbar gilt $P'(Q) \subseteq U_j$. Da ϕ' somit stetig gegen $f_j \circ f$ konvergiert, ist $f_j \circ f$ stetig.

4. Sei $(Y_i, \sigma_i)_{i \in I}$ eine Menge von (S)-Räumen und bezeichne (Y,σ) die topologische Summe. Sei (X,τ) ein weiterer topologischer Raum und ϕ ein Filter auf $c(X,Y)$, der stetig gegen $f : X \to Y$ konvergiert. Sei $x \in X$ und $f(x) \in O \in \sigma$. Es gibt genau ein $j \in I$ mit $f(x) \in Y_j \times \{j\}$. Sei $X_j := f^{-1}(Y_j \times \{j\})$ und $P_0 \in \phi$, $Q \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$, mit $P_0(Q) \subseteq Y_j \times \{j\}$. Man beachte: $Y_j \times \{j\}$ ist homöomorph zu Y_j, also auch ein (S)-Raum.

Es gilt $Q \subseteq X_j$. Andernfalls sei $z \in Q$ mit $f(z) \in Y_l \times \{l\}$, $j \neq l$. Es gäbe dann ein $P' \in \phi$ und $Q' \in \overset{\bullet}{z} \cap \tau$ mit $P'(Q') \subseteq Y_l \times \{l\}$. Für $P'' := P_0 \cap P' \in \phi$ folgt dann aber $P''(z) \subseteq P_0(Q) \subseteq Y_j \times \{j\}$ und $P''(z) \subseteq P'(Q') \subseteq Y_l \times \{l\}$ - ein Widerspruch.

Wegen $Q \subseteq X_j$ und $P_0(Q) \subseteq Y_j \times \{j\}$ ist $\varphi := \{P \cap c(Q, Y_j \times \{j\}) \mid P \in \phi\}$ ein Filter auf $c(Q, Y_j \times \{j\})$, der stetig gegen $f|Q : Q \to Y_j \times \{j\}$ konvergiert. Folglich ist $f|Q : Q \to Y_j \times \{j\}$ stetig und es gibt demnach ein $U \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ mit $(f|Q)(U) \subseteq O$. Also $f(Q \cap U) \subseteq O$.

9.1.16 Bemerkungen

1. Aus Satz 9.1.15 folgt, dass Produkte und Teilräume von (S)-Räumen wieder (S)-Räume sind, insbesondere also auch der inverse Limes eines inversen Systems von (S)-Räumen (da Teilraum des Produktes).

2. Der Quotient eines (S)-Raumes braucht selber nicht (S) sein. Betrachte dazu $X := [0,1]$ mit euklidischer Topologie und die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \{x,y\} \subseteq [1, 1/2)$ oder $\{x,y\} \subseteq [1/2, 1]$. Der Quotientenraum ist homöomorph zum Sierpinskiraum (Y, σ) mit $Y := \{0,1\}$ und $\sigma := \{\varnothing, \{0\}, Y\}$. Dieser ist nicht R_0, insbesondere also nicht (S).

3. Es reicht, wegen Lemma 9.1.14 und Satz 9.1.15, die Implikation $\boxed{T_2 + (S) \;\Rightarrow\; T_3}$ zu beweisen, um die Gleichheit $\boxed{T_3 = (S)}$ zu zeigen. Oder anders: Wenn es (S)-Räume gibt, die nicht T_3 sind, dann gibt es auch T_2-(S)-Räume, die nicht T_3 sind.

4. Sei E eine topologische Eigenschaft derart, dass $T_2 \wedge E \Rightarrow T_3$ gilt und wenn ein Raum die Eigenschaft E hat, dann auch seine T_0-Reflexion (z.B. E = parakompakt or E = lokal kompakt). Dann gilt $E \wedge \neg T_3 \Rightarrow \neg(S)$.

   Beweis: Sei (Y, σ) ein (S)-Raum mit Eigenschaft E. Die T_0-Reflextion (Z, ξ) von (Y, σ) ist ebenfalls T_0 und (S), ist also T_2 und wegen E auch T_3. Dann ist aber auch Y T_3.

9.1.17 Beispiel

Sei (Y, σ) nicht T_3, aber R_0 und $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ nicht stetig. Sei ferner ϕ ein Filter auf Y^X mit $c(X,Y) \in \phi$ und $\phi \overset{\text{konvergiert stetig}}{\longrightarrow} f$ (also z.B. der Raum aus Beispiel 9.1.10). Seien $a, b \notin Y$ (irgendwelche vollkommen beliebigen Mengen). Wir setzen $Z := Y \cup \{a,b\}$, $q : Y \to Z$, $y \mapsto y$, $\alpha : Y^X \to Z^X$, $h \mapsto q \circ h$ und $\mathscr{B} := \sigma \cup \{\{a,b\}\}$ und schließlich $\xi := \{\bigcup \mathscr{B}' \mid \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}\}$. Dann ist (Z, ξ) nicht T_3, nicht T_0, aber immer noch R_0 und nicht (S), denn $\alpha(\phi)$ konvergiert stetig gegen $\alpha(f)$, wobei $\alpha(f)$ nicht stetig ist und $c(X,Z) \in \alpha(\phi)$.

9.1.18 Satz

Ist $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ perfekt, X ein T_2 und Y ein (S)-Raum, so ist auch X ein (S)-Raum. Vergleiche dazu auch Lemma 4.9.9.

Beweis: Sei $g : (Z, \xi) \to (X, \tau)$ eine Abbildung und ϕ ein Filter auf $c(Z,X)$, der stetig gegen g konvergiert. Sei $\alpha : c(Z,X) \to c(Z,Y)$ definiert durch $\alpha(h) := f \circ h$. Dann konvergiert $\alpha(\phi)$ stetig gegen $\alpha(g) = f \circ g$, denn aus $\varphi \overset{\xi}{\to} z$ folgt $(\alpha(\phi))(\varphi) = f(\phi(\varphi)) \overset{\sigma}{\to} f(g(z))$, wegen

$\phi(\varphi) \xrightarrow{\tau} g(z)$. Folglich ist $f \circ g$ stetig. Zeigen wir nun die Stetigkeit von g. Sei dazu φ ein Filter auf Z mit $\varphi \xrightarrow{\xi} z$. Sei $\psi_0 \in \mathscr{F}_0(g(\varphi))$. Es reicht, wenn wir $\psi_0 \xrightarrow{\tau} g(z)$ zeigen (dann folgt nämlich $\overset{\bullet}{g(z)} \cap \tau \subseteq \bigcap_{\psi_0 \in \mathscr{F}_0(g(\varphi))} \psi_0 = g(\varphi)$, also $g(\varphi) \xrightarrow{\tau} g(z)$). Nach Lemma 3.2.5 gibt es einen Ultrafilter $\varphi_0 \in \mathscr{F}_0(\varphi)$ mit $g(\varphi_0) = \psi_0$, also $f(g(\varphi_0)) \xrightarrow{\sigma} f(g(z))$. Da f perfekt ist und $g(\varphi_0)$ ein Ultrafilter ist, gibt es ein $x \in f^{-1}(f(g(z)))$ mit $g(\varphi_0) \xrightarrow{\tau} x$. Angenommen $x \neq g(z)$. Seien $U, V \in \tau$ mit $U \cap V = \varnothing$ und $x \in U$ und $g(z) \in V$. Seien $Q, Q' \in \varphi_0$ und $P \in \phi$ mit $g(Q) \subseteq U$ und $P(Q') \subseteq V$ (wegen $g(\varphi_0) \xrightarrow{\tau} x$ ist $U \in g(\varphi_0)$, wegen $\phi(\varphi_0) \xrightarrow{\tau} g(z)$ ist $V \in \phi(\varphi_0)$). Sei $z_0 \in Q \cap Q'$. Offenbar gilt $\phi(\overset{\bullet}{z_0}) \xrightarrow{\tau} g(z_0) \in U$, folglich gibt es $P' \in \phi$ mit $P'(z_0) \subseteq U$. Sei $h \in P \cap P'$. Es folgt $h(z_0) \in P'(z_0) \subseteq U$ und $h(z_0) \in P(Q') \subseteq V$, im Widerspruch zu $U \cap V = \varnothing$.

9.2 Allgemeine Konvergenzstrukturen

In diesem Absachnitt stellen wir den Begriff der Konvergenz axiomatisch an den Anfang und entwickeln systematisch Teile dieser umfangreichen Theorie. Im Anschluss daran verallgemeinern wir einige der neuen Resultate sogleich in diesen Kontext.

Die Motivation, allgemeine topologische Räume zu untersuchen, rührt unter anderem daher, dass man mit Metriken im Allgemeinen nicht einmal die punktweise Konvergenz von Funktionen beschreiben kann. Zur Erinnerung: Ein Filter ϕ auf Y^X konvergiert punktweise gegen $f \in Y^X$, wenn $\phi(x) := \{Q \subseteq Y \mid \exists P \in \phi \text{ mit } P(x) \subseteq Q\}$ gegen $f(x)$ konvergiert (für jedes $x \in X$). Offenbar wird diese Konvergenz durch die Produkttopologie auf $Y^X = \prod_{x \in X} Y$ beschrieben (ein Filter auf Y^X konvergiert genau dann punktweise, wenn er bzgl. der Produkttopologie konvergiert). Die punktweise Konvergenz ist also immer topologisierbar, aber nicht immer metrisierbar. Es gilt nämlich: Ein Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ von mindestens zweipunktigen metrischen Räumen (X_i, d_i) ist genau dann metrisierbar, wenn die Indexmenge abzählbar ist[9]. Beispielsweise ist die punktweise Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ folglich nicht durch eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ beschreibbar. Für die stetige Konvergenz ergibt sich nun als natürliche Frage: Wann gibt es eine Topologie ξ_0 auf $c(X,Y)$, so dass ein Filter auf $c(X,Y)$ genau dann stetig gegen eine Abbildung f konvergiert, wenn er bzgl. ξ_0 gegen f konvergiert? Der folgende Satz[10]

9.2.1 Satz

Sei (X, τ) ein top. Raum. Mit (a), (b), ... seien folgende Eigenschaften bezeichnet.

(a) (X, τ) ist stark lokal kompakt.

(b) $\forall$ topologischen Räume (Y, σ) ist $\Omega : c(X,Y) \times X \to Y$, $\Omega(f,x) := f(x)$ stetig, wobei $c(X,Y)$ mit der kompakt offenen Topologie versehen ist.

[9] Dies folgt unmittelbar aus dem Metrisationssatz von Nagata und Smirnow. Siehe dazu z.B. [16].

[10] Der Satz entstammt - in mehrere Teile zerlegt - den Büchern [22], gibt Antworten auf diese Frage und zeigt sehr interessante Beziehungen zwischen (auf den ersten Blick) sehr verschiedenen topologischen Eigenschaften auf (der Beweis dort enthält allerdings einige Lücken, sowie kleinere Fehler).

Bemerkung: Für $A \subseteq X, B \subseteq Y$ sei $S(A,B) := \{f \in Y^X \mid f(A) \subseteq B\}$. Die kompakt offene Topologie τ_{co} ist die durch folgende Subbasis $\mathscr{S}$ erzeugte Topologie.

$$\mathscr{S} := \{S(K,O) \mid K \text{ kompakt } \subseteq X \text{ und } O \text{ offen } \subseteq Y\}$$

(c) $\forall$ topologischen Räume (Y,σ) $\exists$ gröbste Topologie ξ_0 auf $c(X,Y)$, so dass $\Omega : c(X,Y) \times X \to Y$ stetig ist.

(d) $\forall$ topologischen Räume (Y,σ) wird die Struktur q_c der stetigen Konvergenz auf $c(X,Y)$ durch eine Topologie ξ_0 erzeugt.

(e) $\forall$ topologischen Räume (Y,σ) $\exists$ Topologie ξ_0 auf $c(X,Y)$, so dass $\forall$ topologischen Räume (Z,η) die Abbildung $\Gamma : c(X \times Z, Y) \to c(Z, c(X,Y))$ bijektiv ist, wobei Γ definiert ist durch $\Gamma(f)(z)(x) := f(x,z)$.

(f) $\forall$ topologischen Räume (Y,σ), (Z,σ') und Quotientenabbildungen $g : Y \to Z$ ist $id_X \times g : X \times Y \to X \times Z$ eine Quotientenabbildung.

(g) $\forall$ topologischen T_2-Räume (Y,σ), (Z,σ') und Quotientenabbildungen $g : Y \to Z$ ist $id_X \times g : X \times Y \to X \times Z$ eine Quotientenabbildung.

Es gilt nun:

$$\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)} \Rightarrow \text{(c)} \Rightarrow \text{(d)} \Rightarrow \text{(e)} \Rightarrow \text{(f)} \Rightarrow \text{(g)} \quad \text{und} \quad \text{(g)+}T_2 \Rightarrow \text{(a)}$$

Die durch (c), (d) und (e) definierte Topologie ist gerade die kompakt offene Topologie.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei (Y,σ) ein topologischer Raum und $c(X,Y)$ mit der kompakt-offenen Topologie versehen. Sei $\Omega(f,x) \in V \in \sigma$, also $f(x) \in V$ und somit $x \in f^{-1}(V) \in \tau$. Sei K kompakt mit $x \in K^\circ \subseteq K \subseteq f^{-1}(V)$. Es folgt $(f,x) \in S(K,V) \times K^\circ$ und $\Omega(S(K,V) \times K^\circ) \subseteq V$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Bezeichnet τ_{co} die kompakt-offene Topologie auf $c(X,Y)$ und ist ξ eine Topologie auf $c(X,Y)$, so dass $\Omega : c(X,Y) \times X \to Y$ stetig ist, so reicht es zu zeigen, dass $\tau_{co} \subseteq \xi$ gilt. Sei $f \in S(K,U)$ gegeben, also $f(K) \subseteq U$. Für jedes $x \in K$ sei $O_x \in \dot{x} \cap \tau$ und $V_x \in \dot{f} \cap \xi$ mit $\Omega(O_x \times V_x) \subseteq U$. Es gibt $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $K \subseteq O := \bigcup_{k=1}^n O_{x_k}$ und $V := \bigcap_{k=1}^n V_{x_k} \in \xi$. Also $\Omega(V \times O) \subseteq U$. Wegen $K \subseteq O$ folgt $f \in V \in S(K,U)$ und $S(K,U) \in \xi$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sei ξ_0 die gröbste Topologie auf $c(X,Y)$, so dass $\Omega : c(X,Y) \times X \to Y$ stetig ist. Konvergiert ϕ bzgl. ξ_0 auf $c(X,Y)$ gegen f und φ auf X bzgl. τ gegen x, so konvergiert $\phi(\varphi) = \Omega(\phi \times \varphi)$ gegen $\Omega(f,x) = f(x)$. Folglich konvergiert ϕ stetig gegen f.

Konvergiert ϕ umgekehrt stetig gegen f, so sei

$$\xi_1 := \{O \subseteq c(X,Y) \mid f \notin O \text{ oder } O \in \phi\} = \phi \cup [\mathscr{P}(c(X,Y)) \setminus \dot{f}].$$

Zeigen wir die Stetigkeit von $\Omega : c(X,Y) \times X \to Y$ bzgl. ξ_1. Sei $\Omega(g,x) \in O \in \sigma$, also $g(x) \in O$. Sei $U \in \tau$, $V \in \xi_0$ mit $(g,x) \in V \times U$ und $\Omega(V \times U) \subseteq O$.

1. Fall $f = g$. Dann ist $f(x) \in O$ und folglich $\exists U' \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ und $P \in \phi$ mit $P(U') \subseteq O$. Für $U'' := U \cap U'$ und $P' := P \cup \{g\} \in \phi$ gilt dann $P'(U'') \subseteq O$, also $\Omega(P' \times U'') \subseteq O$, mit $(g,x) \in P' \times U''$.

2. Fall $f \neq g$. Setze $B := \{h \in c(X,Y) \mid h(U) \subseteq O \text{ und } h \neq f\}$. Es folgt $g \in B \in \xi_1$ und $\Omega(B \times U) \subseteq O$.

Aus der Stetigkeit von Ω folgt nun $\xi_0 \subseteq \xi_1$. Falls also $A \in \overset{\bullet}{f} \cap \xi_0$, so auch $A \in \xi_1$, also $A \in \phi$. Das heißt $\phi \overset{\xi_0}{\to} f$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Sei ξ_0 entsprechend (d) auf $c(X,Y)$ gewählt. Zeigen wir, dass $\Gamma : c(X \times Z, Y) \to c(Z, c(X,Y))$ sinnvoll definiert ist. Für $f \in c(X \times Z, Y)$ ist $\Gamma(f)(z) = f \circ q_z$, wobei $q_z : X \to X \times Z$, $x \mapsto (x,z)$ ist. Da q_z stetig ist, ist $\Gamma(f)(z) \in c(Z, c(X,Y))$. Zu zeigen bleibt, dass $\Gamma(f)$ stetig ist. Sei ϕ ein Filter auf Z mit $\phi \to z$. Zu zeigen ist $\Gamma(f)(\phi) \to \Gamma(f)(z)$. Da auf $c(X,Y)$ Konvergenz bzgl. ξ_0 = stetige Konvergenz ist, genügt es für jeden Filter φ auf X mit $\varphi \to x$ zu zeigen, dass $\Gamma(f)(\phi)(\varphi) \to \Gamma(f)(z)(x)$ gilt, also $f(\varphi \times \phi) \to f(x,z)$. Letzteres folgt aber gerade aus der Stetigkeit von f. Die Injektivität von Γ ist offensichtlich.

Zeigen wir die Surjektivität: Sei $g : Z \to c(X,Y)$ stetig. Definiere $f : X \times Z \to Y$ durch $f(x,z) := g(z)(x)$. Zu zeigen ist nur noch, dass f stetig ist. Sei φ ein Filter auf $X \times Z$ mit $\varphi \to (x,z)$. Seien $P_1 : X \times Z \to X$ und $P_2 : X \times Z \to Z$ die Projektionen und $\varphi_1 := P_1(\varphi)$ bzw. $\varphi_2 := P_2(\varphi)$. Wegen $\varphi_1 \to x$, $\varphi_2 \to z$ und $\varphi_1 \times \varphi_2 \subseteq \varphi$ reicht es $f(\varphi_1 \times \varphi_2) \to f(x,z)$ zu zeigen. Da $g(\varphi_2)$ stetig gegen $g(z)$ konvergiert, folgt $g(\varphi_2)(\varphi_1) \to g(z)(x)$, also $f(\varphi_1 \times \varphi_2) \to f(x,z)$.

(e) $\Rightarrow$ (f): Sei ξ_0 entsprechend (e) eine Topologie auf $c(X, X \times Z)$, mit Produkttopologie ρ auf $X \times Z$, so dass $\Gamma_B : c(X \times B, X \times Z) \to c(B, c(X, X \times Z))$ für jeden topologischen Raum B bijektiv ist. Sei ξ die Finaltopologie auf $X \times Z$ bzgl. $id_X \times g$. Da $id_X \times g$ stetig ist bzgl. ρ, folgt $\rho \subseteq \xi$. Zu zeigen bleibt $\xi \subseteq \rho$, also die Stetigkeit von $id_{X \times Z} : (X \times Z, \rho) \to (X \times Z, \xi)$.

Nun sind die nach (e) bijektiven Abbildungen $\Gamma_B : c(X \times B, X \times Z) \to c(B, c(X, X \times Z))$ natürlich nicht nur auf $c(X \times B, X \times Z)$ definiert, sondern auf ganz $(X \times Z)^{X \times B}$ (für jeden topologischen Raum B). Es reicht also zu zeigen, dass $\Gamma_Z(id_{X \times Z})$ stetig ist. Dafür wiederum genügt es, die Stetigkeit von $h := \Gamma_Z(id_{X \times Z}) \circ g$ zu zeigen (denn g ist eine Quotientenabbildung). Für die Bijektion $\Gamma_Y : c(X \times Y, X \times Z) \to c(Y, c(X, X \times Z))$ gilt aber $h = \Gamma_Y(id_X \times g)$.

(g)+T_2 $\Rightarrow$ (a): Vorweg ein paar Bezeichnungen und Bemerkungen (nur für diesen Beweis). Für einen Filter φ auf X und $P \in \varphi$ sei $\vec{P} := \{Q \in \varphi \mid Q \subseteq P\}$. Setze

$$X_\varphi := \varphi \cup \{\varphi\} \quad \text{und} \quad \tau_\varphi := \mathscr{P}(\varphi) \cup \{A \subseteq X_\varphi \mid \varphi \in A \text{ und } \exists P \in \varphi \text{ mit } \vec{P} \subseteq A\}.$$

Ist φ ein freier Filter auf X (also $\bigcap \varphi = \varnothing$), so ist $(X_\varphi, \tau_\varphi)$ ein T_2-Raum.

Beweis dazu: Sei $P \in \varphi$ und $\varphi \in X_\varphi$ gegeben. Sei $p \in P$. Wegen $\bigcap \varphi = \varnothing$ gibt es ein $Q \in \varphi$ mit $p \notin Q$. Für $R := P \cap Q \in \varphi$ gilt $\vec{R} \cup \{\varphi\} =: A \in \tau_\varphi$, $\varphi \in A$, $\{P\} \in \tau_\varphi$ und $\{P\} \cap A = \varnothing$.

$\boxed{(X,\tau) \text{ ist ein } T_3\text{-Raum.}}$ **Beweis dazu:** Wäre er nicht T_3, so gäbe es ein $x_0 \in X$ und $U \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau$, so dass $\forall V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau$ gilt $\overline{V} \setminus U \neq \varnothing$. Setze $\mathscr{U} := \{V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau \mid V \subseteq U\}$. Für jedes $V \in \mathscr{U}$ gibt es nun einen freien Ultrafilter φ_V auf X mit

(1) $V \in \varphi_V$ und (2) φ_V konvergiert gegen einen Punkt aus $\overline{V} \setminus U$

Beweis dazu: Sei $x \in \overline{V} \setminus U$ und $\varphi'_V := \{P \subseteq X \mid \exists W \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau \exists F$ endlich $\subseteq X$ mit $(W \cap V) \setminus F \subseteq P\}$. Offenbar ist $V = (X \cap V) \setminus \varnothing \in \varphi'_V$. Für $W \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ gilt $(W \cap V) \setminus \varnothing \subseteq W$, also $W \in \varphi'_V$ und folglich $\varphi'_V \to x$. Außerdem ist $\bigcap \varphi'_V \subseteq \bigcap_{z \in X} [(X \cap V) \setminus \{z\}] = \varnothing$. Für $W \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ ist $W \cap V \neq \varnothing$ und offen. Wäre $W \cap V$ endlich, so auch abgeschlossen (T_2-Raum!) und demzufolge auch $W' := W \setminus (W \cap V)$ offen mit $x \in W'$. Allerdings wäre nun $W' \cap V = \varnothing$ im Widerspruch zu $x \in \overline{V}$. Also ist φ'_V ein freier Filter. Sei nun φ_V ein beliebiger Ultrafilter mit $\varphi'_V \subseteq \varphi_V$.

Wir setzen nun:

1. $Y := \bigcup_{V \in \mathscr{U}} X_{\varphi_V} \times \{V\}$ und $j_V : X_{\varphi_V} \to Y,\ a \mapsto (a, V)$

2. $\sigma := \{O \subseteq Y \mid \forall V \in \mathscr{U}$ ist $j_V^{-1}(O) \in \tau_{\varphi_V}\}$

(Y, σ) ist also die topologische Summe der $(X_{\varphi_V}, \tau_{\varphi_V}), V \in \mathscr{U}$ (und damit auch T_2). Auf Y definieren wir durch

$$(a,V) \sim (a',V') \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a,V) = (a',V') & \text{oder} \\ a = \varphi_V \text{ und } a' = \varphi_{V'} \end{cases}$$

eine Äquivalenzrelation und betrachten den Quotientenraum $Y_\sim$ mit der Topologie $\sigma_\sim := \{O \subseteq Y_\sim \mid q^{-1}(O) \in \sigma\}$, wobei $q : Y \to Y_\sim$ die natürlich Projektion $y \mapsto [y]_\sim$ ist. Wir zeigen nun $id_X \times q : X \times Y \to X \times Y_\sim$ ist keine Quotientenabbildung, im Widerspruch dazu, dass $q : Y \to Y_\sim$ eine ist (beachte auch $Y_\sim$ ist T_2). Hierzu setzen wir

$$B := [(X \setminus U) \times \{(\varphi_V, V) \mid V \in \mathscr{U}\}] \cup \left[\bigcup \{\overline{P} \times \{(P,V)\} \mid V \in \mathscr{U},\ P \in \varphi_V\}\right]$$

B ist in $X \times Y$ abgeschlossen. **Beweis dazu:** Sei $(z,a,V) \in (X \times Y) \setminus B$.

1. Fall $a = \varphi_V$. Dann ist $z \notin X \setminus U$, also $z \in U$. Da φ_V gegen ein Element aus $\overline{V} \setminus U$ konvergiert und da (X, τ) ein T_2-Raum ist, konvergiert φ_V nicht gegen z. Da φ_V ein Ultrafilter ist, gibt es folglich ein $O \in \overset{\bullet}{z} \cap \tau$ und $Q \in \varphi_V$ mit $O \subseteq U$ und $O \cap Q = \varnothing$. Es folgt
$$(z,a,V) \in O \times (A \times \{V\}) \subseteq (X \times Y) \setminus B,$$
wobei $A := \vec{Q} \cup \{\varphi_V\}$ offen in X_{φ_V} ist und demzufolge $O \times (A \times \{V\})$ offen in $X \times Y$ ist.

2. Fall $a = P_0 \in \varphi_V$. Dann ist $z \notin \overline{P}_0$. Für $O := X \setminus \overline{P}_0$ ist $O \times \{(P_0, V)\}$ offen in $X \times Y$ mit $(z,a,V) \in O \times \{(P_0,V)\} \subseteq (X \times Y) \setminus B$.

$C := (id_X \times q)(B)$ ist in $X \times Y_\sim$ nicht abgeschlossen. **Beweis dazu:** Es ist $(x_0, q(\varphi_U, U)) \in (X \times Y) \setminus C$. Sei $W \times L$ eine offene Basisumgebung von $(x_0, q(\varphi_U, U))$ bzgl. der Produkttopologie. Dann ist $q^{-1}(L)$ offen in Y mit $\{(\varphi_V, V) \mid V \in \mathscr{U}\} \subseteq q^{-1}(L)$. Folglich gibt es gewisse $P_V \in \varphi_V$ mit $\bigcup_{V \in \mathscr{U}} (\vec{P}_V \cup \{\varphi_V\}) \times \{V\} \subseteq q^{-1}(L)$. Da

$$\left(W \times [\bigcup_{V \in \mathscr{U}} (\vec{P}_V \cup \{\varphi_V\}) \times \{V\}]\right) \cap B \neq \varnothing$$

ist auch $(W \times q^{-1}(L)) \cap B \neq \varnothing$, also

$$\varnothing \neq (id_X \times q)((W \times q^{-1}(L)) \cap B) \subseteq \underbrace{W \times q(q^{-1}(L))}_{\subseteq W \times L} \cap \underbrace{(id_X \times q)(B)}_{=C}$$

und folglich $(W \times L) \cap C \neq \varnothing$. Dann kann C nicht abgeschlossen sein.
Wegen $(id_X \times q)^{-1}(C) = B$ (diese Gleichung ist offensichtlich) kann $id_X \times q$ keine Quotientenabbildung sein - Widerspruch und (X, τ) ist daher doch T_3.

$\boxed{(X,\tau) \text{ ist stark lokal kompakt.}}$ **Beweis dazu:** Wäre $x_0 \in X$ ein Punkt, an dem X nicht stark lokal kompakt ist, so wäre für alle $V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau$ der Abschluss $\overline{V}$ nicht kompakt (beachte, dass (X, τ) als T_3 erkannt ist). Das heißt, für alle $V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau$ gibt es einen Ultrafilter φ_V auf X mit $\overline{V} \in \varphi_V$ und φ_V konvergiert überhaupt nicht in X (beachte, dass φ_V frei ist).
Wir setzen analog zur obigen Konstruktion

1. $Y := \bigcup_{V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau} X_{\varphi_V} \times \{V\}$ und $j_V : X_{\varphi_V} \to Y$, $a \mapsto (a, V)$
2. $\sigma := \{O \subseteq Y \mid \forall V \in \mathscr{U} \text{ ist } j_V^{-1}(O) \in \tau_{\varphi_V}\}$
3. $Y_\sim$ mit entsprechender Quotiententopologie
4. $B := \bigcup\{\overline{P} \times \{(P, V)\} \mid V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau,\ P \in \varphi_V\}$

B ist in $X \times Y$ abgeschlossen: **Beweis dazu:** Sei $(z, a, V) \in (X \times Y) \setminus B$.

1. Fall $a = \varphi_V$. Da φ_V nicht gegen z konvergiert und φ_V ein Ultrafilter ist, gibt es $O \in \overset{\bullet}{z} \cap \tau$ und $Q \in \varphi_V$ mit $O \cap Q = \varnothing$ (also auch $O \cap \overline{Q} = \varnothing$). Es folgt $(z, a, V) \in O \times (A \times \{V\}) \subseteq (X \times Y) \setminus B$, wobei $A := \vec{Q} \cup \{\varphi_V\}$.

2. Fall $a = P_0 \in \varphi_V$ geht genauso wie beim Nachweis von T_3.

$A := (id_X \times q)(B)$ ist in $X \times Y_\sim$ nicht abgeschlossen. **Beweis dazu:** Sei $W \times L$ eine offene Basisumgebung von $(x_0, q(\varphi_X, X))$ bzgl. der Produkttopologie (beachte $(x_0, q(\varphi_X, X)) \in (X \times Y_\sim) \setminus A$). Dann ist $q^{-1}(L)$ offen in Y mit $\{(\varphi_V, V) \mid V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau\} \subseteq q^{-1}(L)$. Folglich gibt es $P_V \in \varphi_V$ mit $\bigcup_{V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau} (\vec{P}_V \cup \{\varphi_V\}) \times \{V\} \subseteq q^{-1}(L)$. Wäre $\left(W \times [\bigcup_{V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau} (\vec{P}_V \cup \{\varphi_V\}) \times \{V\}]\right) \cap B = \varnothing$, so wäre auch $W \cap \overline{P}_V = \varnothing$, für alle $V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau$. Sei $W_0 \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau$ mit $\overline{W}_0 \subseteq W$. Wegen $W \cap \overline{P}_{W_0} = \varnothing$ folgt $W \cap P_{W_0} = \varnothing$, also $\overline{W}_0 \cap P_{W_0} = \varnothing$ im Widerspruch zu $\overline{W}_0, P_{W_0} \in \varphi_{W_0}$. Also $\left(W \times [\bigcup_{V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau} (\vec{P}_V \cup \{\varphi_V\}) \times \{V\}]\right) \cap B \neq \varnothing$ und wir schließen wie schon oben $(W \times L) \cap A \neq \varnothing$. Also ist A nicht abgeschlossen. Wegen $(id_X \times q)^{-1}(A) = B$ (offensichtlich) ist $id_X \times q$ im Widerspruch zur Voraussetzung keine Quotientenabbildung. Also ist (X, τ) stark lokal kompakt.

9.2.2 Bemerkung

Ist (X,τ) nicht stark lokal kompakt, aber trotzdem T_2 (siehe [46] oder betrachte einfach unendlich dimensionale Topologische Vektorräume), so gibt es einen Raum (Y,σ), so dass die stetige Konvergenz auf $c(X,Y)$ nicht durch eine Topologie erzeugt wird. Andernfalls gilt für den Raum X die Eigenschaft (d)+T_2, also ist er nach Satz 9.2.1 auch stark lokal kompakt. Es bietet sich also an, allgemeinere Strukturen als topologische Räume zu untersuchen und die stetige Konvergenz in diesem Rahmen zu entwickeln:

9.2.3 Definition: Konvergenzstruktur und Konvergenzraum

Sei X eine Menge. Eine Relation $q \subseteq \mathscr{F}(X) \times X$ zwischen Filtern auf X und Elementen aus X nennen wir **Konvergenzstruktur**. Für $(\phi, x) \in q$ schreiben wir auch $\phi \xrightarrow{q} x$ oder einfach $\phi \to x$, wenn über q kein Zweifel besteht. Das Paar (X,q) nennen wir einen **Konvergenzraum**.

Als Einführung in die Theorie allgemeiner Konvergenzräume greife man z.B. zu [19],[39] oder dem klassischen Artikel [17]. Im Folgenden nennen wir grob die wichtigsten Eigenschaften, denn in obiger allgemeiner Formulierung lässt sich keine befriedigende Theorie entwickeln.

Ein paar zusätzliche Eigenschaften sind z.B.

(K0) $\forall x \in X$ gilt: $\exists \phi \in \mathscr{F}(X)$ mit $\phi \xrightarrow{q} x$.

(K1) $\forall x \in X$ gilt: $\overset{\bullet}{x} \xrightarrow{q} x$.

(K2) $\forall x \in X \, \forall \phi, \psi \in \mathscr{F}(X)$ gilt: $(\phi \xrightarrow{q} x$ und $\phi \subseteq \psi)$ impliziert $\psi \xrightarrow{q} x$.

(K3) $\forall x \in X \, \forall \phi \in \mathscr{F}(X)$ gilt: $\phi \xrightarrow{q} x$ impliziert $\phi \cap \overset{\bullet}{x} \xrightarrow{q} x$.

(K4) $\forall x \in X \, \forall \phi, \psi \in \mathscr{F}(X)$ gilt: $(\phi \xrightarrow{q} x$ und $\psi \xrightarrow{q} x)$ impliziert $\phi \cap \psi \xrightarrow{q} x$.

(K5) $\forall x \in X \, \forall \phi \in \mathscr{F}(X)$ gilt: $(\forall \psi \in \mathscr{F}_0(\phi)$ gilt $\psi \xrightarrow{q} x)$ impliziert $\phi \xrightarrow{q} x$.

(K6) $\forall x \in X$ gilt: $\exists \phi \in \mathscr{F}(X)$ mit $\phi \xrightarrow{q} x$ impliziert $\bigcap\{\phi \in \mathscr{F}(X) \mid \phi \xrightarrow{q} x\} \xrightarrow{q} x$.

Um z.B. zum Ausdruck zu bringen, dass (X,q) ein Konvergenzraum ist, der (K1) und (K2) erfüllt, schreiben wir: Sei (X,q) ein (K1)-(K2)-Konvergenzraum. Für jedes $A \subseteq X$ sei

$$cl_q(A) := A \cup \{x \in X \mid \exists \phi \in \mathscr{F}(X) \text{ mit } A \in \phi \text{ und } \phi \xrightarrow{q} x\}$$

der q-**Abschluss** von A und $cl_q : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ der zu q gehörige **Abschlussoperator**. Für einen Filter ϕ führen wir für die Menge seiner Konvergenzpunkte folgende Schreibweise ein:

$$\lim_q \phi := q(\phi) = \{x \in X \mid \phi \xrightarrow{q} x\}.$$

9.2.4 Bemerkung zur Notation

Schaut man sich die Artikel und Bücher zur Konvergenztheorie an, so stellt man fest, dass sich im Gegensatz zur Theorie topologischer Räume kaum eine einheitliche Notation durchgesetzt hat. Jeder Autor scheint für sich neu festzulegen, was ein Konvergenzraum, Limesraum, etc. ist. Diesem Umstand folgend habe ich beschlossen, nur einen Begriff zu verwenden (Konvergenzraum, so wie oben definiert) und in jedem Satz genau jene Voraussetzungen, die notwedig sind, um die Aussage zu beweisen, aufzuschreiben. Insofern sind viele Aussagen etwas allgemeiner, als in der üblichen Literatur.

9.2.5 Definition: Induzierte Konvergenzstruktur und assoziierte Topologie

Ist (X,τ) ein topologischer Raum, so sei q_τ die von τ induzierte Konvergenzstruktur

$$q_\tau := \{(\phi,x) \in \mathscr{F}(X) \times X \mid \overset{\bullet}{x} \cap \tau \subseteq \phi\}.$$

Offenbar gilt nun $\phi \xrightarrow{\tau} x \quad \Leftrightarrow \quad \phi \xrightarrow{q_\tau} x$.

Unter der von einer Konvergenzstruktur q auf X assoziierten Topologie τ_q verstehen wir

$$\tau_q := \{O \subseteq X \mid \forall (\phi,x) \in q \text{ gilt: } (x \in O \;\Rightarrow\; O \in \phi)\}.$$

Es gelten folgende allgemeine Beziehungen:

1. $\tau = \tau_{(q_\tau)}$ und $q \subseteq q_{\tau_q}$.
2. Für $P \subseteq X$ gilt: $X \setminus P \in \tau_q \;\Rightarrow\; P = cl_q(P)$.
   Falls (X,q) ein (K2)-Konvergenzraum ist, gilt auch: $P = cl_q(P) \;\Rightarrow\; X \setminus P \in \tau_q$.

Beweis: 1. Sei $O \in \tau$. Zu zeigen ist $\forall (\phi,x) \in q_\tau$ gilt: $(x \in O \;\Rightarrow\; O \in \phi)$. Dies ist offensichtlich. Sei andererseits $O \in \tau_{(q_\tau)}$. Zu $x \in O$ bilden wir $\phi := \{P \subseteq X \mid \exists U \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ mit $U \subseteq P\}$. Folglich ist $(\phi,x) \in q_\tau$. Wegen $x \in O$ und $O \in \tau_{(q_\tau)}$ folgt $O \in \phi$. Also $\exists U \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ mit $x \in U \subseteq O$. Da x beliebig war, folgt $O \in \tau$.

2. Sei $X \setminus P \in \tau_q$. Falls $x \in cl_q(P) \setminus P$ existiert ein $\varphi \in \mathscr{F}(X)$ mit $P \in \varphi \xrightarrow{q} x$, also $(\varphi,x) \in q$ und $P \in \varphi$. Wegen $x \in X \setminus P$ folgt wegen $(\varphi,x) \in q$ aber $X \setminus P \in \varphi$ - Widerspruch. Also $x \in P$. Da $P \subseteq cl_q(P)$ immer gilt, haben wir Gleichheit. Ist (X,q) (K2) und gilt $P = cl_q(P)$, so betrachte $(\varphi,x) \in q$ mit $x \in X \setminus P$. Sei $\psi \in \mathscr{F}_0(\varphi)$ beliebig. Wegen (K2) folgt $(\psi,x) \in q$. Wegen $x \notin cl_q(P)$ folgt $P \notin \psi$, also $X \setminus P \in \psi$. Folglich $X \setminus P \in \bigcap \mathscr{F}_0(\varphi) = \varphi$. Schliesslich folgt $X \setminus P \in \tau_q$.

9.2.6 Lemma

Sei (X,q) ein (K2)-Konvergenzraum. Dann gilt für den zu q gehörigen Abschlussoperator:

(a) $cl_q(\varnothing) = \varnothing$,

(b) $\forall A \subseteq X$ ist $A \subseteq cl_q(A)$ und

(c) $\forall A, B \subseteq X$ ist $cl_q(A \cup B) = cl_q(A) \cup cl_q(B)$.

Beweis: (a) und (b) sind trivial (und gelten für jeden Konvergenzraum). Sei $x \in cl_q(A \cup B)$. Falls $x \in A \cup B$, dann $x \in cl_q(A) \cup cl_q(B)$. Sei also $\phi \in \mathscr{F}(X)$ mit $A \cup B \in \phi$ und $\phi \xrightarrow{q} x$. Sei ψ ein Ultrafilter mit $\phi \subseteq \psi$. Aus (K2) folgt $\psi \xrightarrow{q} x$. Da ψ ein Ultrafilter ist, ist $A \in \psi$ oder $B \in \psi$, also $x \in cl_q(A) \cup cl_q(B)$. Die Umkehrung: $cl_q(A) \cup cl_q(B) \subseteq cl_q(A \cup B)$ ist trivial.

9.2.7 Satz

Sei $cl : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ eine Abbildung mit

(a) $cl(\varnothing) = \varnothing$,

(b) $\forall A \subseteq X$ ist $A \subseteq cl(A)$ und

(c) $\forall A, B \subseteq X$ ist $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$.

Dann bekommen wir durch

$$q_{cl} := \{(\phi, x) \in \mathscr{F}(X) \times X \mid \forall A \subseteq X \text{ gilt: } x \notin cl(X \setminus A) \text{ impliziert } A \in \phi\}$$

eine (K1)-(K2)-(K6)-Konvergenzstruktur auf X. Ferner gilt

1. $cl_{(q_{cl})}(A) = cl(A)$ für alle $A \subseteq X$ und
2. $q_{(cl_q)} = q$ für jede (K1)-(K2)-(K6)-Konvergenzstruktur q auf X.

Insbesondere haben wir bewiesen: Eine (K1)-(K2)-(K6)-Konvergenzstruktur q wird genau dann durch eine Topologie induziert, wenn der zugehörige Abschlussoperator idempotent ist (das bedeutet: $cl_q(cl_q(A)) = cl_q(A)$ für alle $A \subseteq X$).

Beweis: (K1), (K2) und (K6) prüft man für q_{cl} schnell nach. Zeigen wir 1. Es ist

$$cl_{(q_{cl})}(A) = A \cup \{x \in X \mid \exists \phi \in \mathscr{F}(X) \text{ mit } A \in \phi \text{ und } \phi \xrightarrow{q_{cl}} x\}.$$

Sei $x \in cl_{(q_{cl})}(A)$. O.B.d.A. $\exists \phi \in \mathscr{F}(X)$ mit $A \in \phi$ und $\phi \xrightarrow{q_{cl}} x$. Falls $x \notin cl(A)$, dann folgt $X \setminus A \in \phi$ (denn $(\phi, x) \in q_{cl}$) - Widerspruch.

Sei andernfalls $x \in cl(A)$. Setze $\beta := \{B \subseteq X \mid x \notin cl(X \setminus B)\}$. Für $B_1, ..., B_n \in \beta$ ist

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{n} cl(X \setminus B_k) = cl(\bigcup_{k=1}^{n}(X \setminus B_k)) = cl(X \setminus (\bigcap_{k=1}^{n} B_k)),$$

also $B_1 \cap ... \cap B_n \in \beta$. Außerdem gilt für $B \in \beta$: $A \cap B \neq \varnothing$, denn andernfalls ist $A \subseteq X \setminus B$ und somit $x \in cl(A) \subseteq cl(A) \cup cl(X \setminus B) = cl(A \cup (X \setminus B)) = cl(X \setminus B)$ - Widerspruch. Sei dann ϕ ein Filter auf X mit $\{A\} \cup \beta \subseteq \phi$. Also $(\phi, x) \in q_{cl}$ und wegen $A \in \phi$ ist $x \in cl_{(q_{cl})}(A)$.

2. Es ist $q_{(cl_q)} = \{(\phi, x) \in \mathscr{F}(X) \times X \mid \forall A \subseteq X$ gilt: $x \notin cl_q(X \setminus A)$ impliziert $A \in \phi\}$.

Sei $(\phi, x) \in q$. Sei $A \subseteq X$ mit $x \notin cl_q(X \setminus A)$. Sei Φ ein Ultrafilter mit $\phi \subseteq \Phi$. Offenbar gilt $(\Phi, x) \in q$. Aus der Definition von $cl_q(X \setminus A)$ folgt für alle $\psi \in \mathscr{F}(X)$:

$$X \setminus A \notin \psi \quad \text{oder} \quad (\psi, x) \notin q.$$

Also $X \setminus A \notin \Phi$ und damit $A \in \Phi$. Wegen $\phi = \bigcap_{\Phi \in \mathscr{F}_0(\phi)} \Phi$ folgt $A \in \phi$, also $(\phi, x) \in q_{(cl_q)}$.
Sei andernfalls $(\phi, x) \in q_{(cl_q)}$. Setze $\psi := \bigcap\{\rho \in \mathscr{F}(X) \mid (\rho, x) \in q\}$ (sinnvoll!). Dann gilt $(\psi, x) \in q$. Wir zeigen $\psi \subseteq \phi$, dann folgt nämlich $(\phi, x) \in q$. Sei $A \in \psi$. Nehmen wir einmal an, dass $x \in cl_q(X \setminus A)$ ist. Wir unterscheiden dann zwei Fälle:

Fall 1: $x \in X \setminus A$, dann ist aber $A \in \psi \subseteq \dot{x}$. Offensichtlich ist dies ein Widerspruch.

Fall 2: $\exists\, \psi' \in \mathscr{F}(X)$ mit $(\psi', x) \in q$ und $X \setminus A \in \psi'$, dann ist $A \in \psi \subseteq \psi'$ - Widerspruch.

Also $x \notin cl_q(X \setminus A)$. Aus $(\phi, x) \in q_{(cl_q)}$ folgt nun $A \in \phi$. Die letzte Behauptung über die topologische Induktion der Konvergenzstruktur folgt aus wohl bekannten Fakten über die Kuratowskischen Hüllenaxiome (siehe z.B. [16]) und der Gleichung $q_\tau = q_{cl_\tau}$, wobei cl_τ der Abschlussopearator bzgl. τ ist.

9.2.8 Definition und Lemma: (K6*)-Konvergenzraum

Wir nennen (X, q) einen (K6*)-Konvergenzraum, wenn

$$\varphi_x := \{P \subseteq X \mid \exists O \in \dot{x} \cap \tau_q \text{ mit } O \subseteq P\} \xrightarrow{q} x \quad \text{für alle } x \in X \text{ gilt.}$$

Ist (X, q) ein (K2)-(K6*)-Konvergenzraum, so gilt $cl_q(cl_q(A)) = cl_q(A)$ für alle $A \subseteq X$. Außerdem gilt (K6*) $\Rightarrow$ (K6) und (K2)+(K6 *) $\Rightarrow$ (K1).
Als Korollar erhalten wir: Ein Konvergenzraum (X, q) wird genau dann durch eine Topologie τ erzeugt (also $q = q_\tau$), wenn q eine (K2)-(K6*)-Konvergenzstruktur ist, denn die durch die Topologie erzeugte Konvergenzstruktur, stimmt offenbar mit der durch den Abschlussoperator erzeugten überein (und dann Satz 9.2.7 verwenden).

Beweis: (K2)+(K6*) implizieren unmittelbar $q_{(\tau_q)} \subseteq q$. Da $q \subseteq q_{(\tau_q)}$ immer gilt, folgt $q_{(\tau_q)} = q$. Folglich ist cl_q der Abschlussoperator im Sinne einer Topologie und damit idempotent.

9.2.9 Definition (noch mehr Eigenschaften allgemeiner Konvergenzräume)

[25] folgend sei für eine Menge J, einen Filter φ auf J und eine Abbildung $f : J \to \mathscr{F}(X)$

$$\kappa f \varphi := \bigcup_{F \in \varphi} \bigcap_{j \in F} f(j).$$

Zeigen wir, dass $\kappa f \varphi$ ein Filter auf X ist:
1. $\varnothing \notin \kappa f \varphi$ ist klar. 2. Seien $A, B \in \kappa f \varphi$, also $A \in \bigcap_{j \in F_1} f(j), B \in \bigcap_{j \in F_2} f(j)$. Also $A, B \in \bigcap_{j \in F_1 \cap F_2} f(j)$. Es folgt $A \cap B \in \bigcap_{j \in F_1 \cap F_2} f(j)$ und somit $A \cap B \in \kappa f \varphi$. 3. Sei $A \in \kappa f \varphi, A \subseteq B \subseteq X$. Also $A \in \bigcap_{j \in F} f(j)$ und folglich $B \in \bigcap_{j \in F} f(j)$, also $B \in \kappa f \varphi$.

Mit diesem Operator können wir ein paar weitere Eigenschaften formulieren.

(K7) $\forall f \in \mathscr{F}(X)^X \, [(\forall x \in X : f(x) \xrightarrow{q} x) \Rightarrow \forall \varphi \in \mathscr{F}(X) \forall x \in X \, (\varphi \xrightarrow{q} x \Rightarrow \kappa f \varphi \xrightarrow{q} x)]$

(K8) $\forall f \in \mathscr{F}_0(X)^X \, [(\forall x \in X : f(x) \xrightarrow{q} x) \Rightarrow \forall \varphi \in \mathscr{F}(X) \forall x \in X \, (\varphi \xrightarrow{q} x \Rightarrow \kappa f \varphi \xrightarrow{q} x)]$

(K9) $\forall J :$ Menge $\forall f \in \mathscr{F}(X)^J \forall g \in X^J$
$[(\forall j \in J : f(j) \xrightarrow{q} g(j)) \Rightarrow \forall \varphi \in \mathscr{F}(J) \forall x \in X \, (g(\varphi) \xrightarrow{q} x \Rightarrow \kappa f \varphi \xrightarrow{q} x)]$

(K10) $\forall J :$ Menge $\forall f \in \mathscr{F}_0(X)^J \forall g \in X^J$
$[(\forall j \in J : f(j) \xrightarrow{q} g(j)) \Rightarrow \forall \varphi \in \mathscr{F}(J) \forall x \in X \, (g(\varphi) \xrightarrow{q} x \Rightarrow \kappa f \varphi \xrightarrow{q} x)]$

9.2.10 Lemma

1. Offenbar gilt (daher ohne Beweis): (K9) $\Rightarrow$ (K7) $\Rightarrow$ (K8) und (K10) $\Rightarrow$ (K8)
2. Sei (X, q) ein (K1)-(K7) oder ein (K1)-(K2)-(K8)-Konvergenzraum. Dann gilt $cl_q(cl_q(A)) = cl_q(A)$ für jedes $A \subseteq X$.
3. Sei (X, q) ein (K1)-(K9) oder ein (K1)-(K2)-(K10)-Konvergenzraum.
   Dann ist (X, q) ein (K6)-Konvergenzraum.

Beweis: 2. Zu zeigen ist lediglich $cl_q(cl_q(A)) \subseteq cl_q(A)$. Wir führen den Nachweis für ein (K1)-(K2)-(K8)-Konvergenzraum (für (K1)-(K7) geht es analog). Sei $x \in cl_q(cl_q(A))$. Wähle dann ein $\phi \in \mathscr{F}_0(X)$ mit $cl_q(A) \in \phi \xrightarrow{q} x$. Für jedes $y \in cl_q(A)$ sei $\phi_y \in \mathscr{F}_0(X)$ mit $A \in \phi_y \xrightarrow{q} y$. Wir definieren nun

$$f : X \to \mathscr{F}_0(X) \quad \text{durch} \quad f(y) = \begin{cases} \phi_y, & \text{falls } y \in cl_q(A) \\ \xi_y & \text{andernfalls, wobei } \xi_y \in \mathscr{F}_0(X) \text{ beliebig mit } \xi_y \xrightarrow{q} y \end{cases}$$

Nach Voraussetzung gilt $\kappa f\phi \xrightarrow{q} x$. Für $B := cl_q(A) \in \phi$ folgt

$$A \in \bigcap_{y\in B} f(y) \subseteq \bigcup_{F\in\phi} \bigcap_{y\in F} f(y) = \kappa f\phi,$$

also $x \in cl_q(A)$ (wegen $\kappa f\phi \xrightarrow{q} x$ und $A \in \kappa f\phi$).

3. Sei $x \in X$. Zu zeigen ist $\bigcap\{\phi \in \mathscr{F}(X) \mid \phi \xrightarrow{q} x\} \xrightarrow{q} x$. Wir führen den Beweis für den (K2)-(K10) Konvergenzraum (der andere Fall geht analog). Sei $J := \{\phi \in \mathscr{F}_0(X) \mid \phi \xrightarrow{q} x\}$ und $f : J \to \mathscr{F}_0(X)$, $\phi \mapsto \phi$, sowie $g : J \to X$, $j \mapsto x$ und schließlich $\varphi := \{J\}$. Alle Voraussetzungen (für (K10)) sind erfüllt und wir erhalten $\kappa f\varphi \xrightarrow{q} x$. Wegen (K2) und weil jeder Filter gleich dem Durchschnitt seiner Oberultrafilter ist, ist der Durchschnitt aller gegen x konvergierenden Filter gleich dem Durchschnitt aller gegen x konvergierenden Ultrafilter und das ist hier gerade $\kappa f\varphi$, ist alles gezeigt.

9.2.11 Definition: Trennungsaxiome

Sei (X,q) ein Konvergenzraum.

(T0) (X,q) heißt T_0-Raum genau dann, wenn $\forall x,y \in X$ gilt: $\dot{x} \xrightarrow{q} y$ und $\dot{y} \xrightarrow{q} x$ impliziert $x = y$.

(T1) (X,q) heißt T_1-Raum genau dann, wenn $\forall x \in X$ gilt: $|\lim_q \dot{x}\,| \leq 1$.

(T2) (X,q) heißt T_2-Raum genau dann, wenn $\forall \phi \in \mathscr{F}(X)$ gilt: $|\lim_q \phi| \leq 1$.

(T2)* (X,q) heißt T_2^*-Raum genau dann, wenn $\forall \phi \in \mathscr{F}_0(X)$ gilt: $|\lim_q \phi| \leq 1$.

(T3) (X,q) heißt T_3-Raum genau dann, wenn $\forall \phi \in \mathscr{F}(X)$ gilt: $\lim_q \phi = \lim_q cl_q(\phi)$
Hier und im Folgenden bezeichnet $cl_q(\phi) := \{Q \subseteq X \mid \exists P \in \phi \text{ mit } cl_q(P) \subseteq Q\}$.

(T4) (X,q) heißt T_4-Raum genau dann, wenn (X,τ_q) ein T_4-Raum ist.

Man beachte, dass sich im Fall topologischer Räume diese Definition mit der gwöhnlichen Definition der Trennungsaxiome (siehe Anhang) deckt.

9.2.12 Bemerkung (siehe Definition 9.2.5)

Statt $cl_q(\phi)$ kann man nun auch folgenden Filter betrachten:

$$cl_{\tau_q}(\phi) := \{Q \subseteq X \mid \exists P \in \phi \;\text{ mit }\; P \subseteq Q \;\text{ und }\; X \setminus P \in \tau_q\}$$

Darauf aufbauend haben wir folgende Alternativ-Definition für T_3:

(X,q) heißt T_{3s}-Raum genau dann, wenn $\forall \phi \in \mathscr{F}(X)$ gilt: $\lim\limits_q \phi = \lim\limits_q cl_{\tau_q}(\phi)$.

Es gelten folgende Beziehungen:

1. Jeder T_{3s}-(K2)-Konvergenzraum ist auch T_3.
   Beweis: Folgt aus $cl_{\tau_q}(\phi) \subseteq cl_q(\phi)$. Siehe dazu Definition 9.2.5.
2. Jeder T_3-(K2)-Konvergenzraum mit idempotenten Abschlussoperator cl_q ist auch T_{3s}.
   Beweis: Folgt aus $cl_{\tau_q}(\phi) = cl_q(\phi)$. Siehe wieder Definition 9.2.5.

9.2.13 Definition: Eine Art Umkehrung von (K9) und (K10)

(K9*) $\forall J:$ Menge $\forall f \in \mathscr{F}(X)^J \forall g \in X^J$

$$[(\forall j \in J : f(j) \xrightarrow{q} g(j)) \Rightarrow \forall \varphi \in \mathscr{F}(J) \forall x \in X\,(\kappa f \varphi \xrightarrow{q} x \Rightarrow g(\varphi) \xrightarrow{q} x)]$$

(K10*) $\forall J:$ Menge $\forall f \in \mathscr{F}_0(X)^J \forall g \in X^J$

$$[(\forall j \in J : f(j) \xrightarrow{q} g(j)) \Rightarrow \forall \varphi \in \mathscr{F}(J) \forall x \in X\,(\kappa f \varphi \xrightarrow{q} x \Rightarrow g(\varphi) \xrightarrow{q} x)]$$

(K9*) impliziert natürlich (K10*).

9.2.14 Lemma

1. Sei (X,q) ein (K2)-T_3-Konvergenzraum. Dann ist (X,q) auch ein (K9*)-Konvergenzraum.
2. Sei (X,q) ein (K1)-(K2)-(K10*)-Konvergenzraum, dann ist (X,q) auch T_3.

Beweis: 1. Sei $f : J \to \mathscr{F}(X)$, $g : J \to X$ mit $f(j) \xrightarrow{q} g(j)$ ($\forall j \in J$) und sei $\varphi \in \mathscr{F}(J)$ mit $\kappa f \varphi \xrightarrow{q} x$. Zu zeigen ist $g(\varphi) \xrightarrow{q} x$. Es reicht $cl_q(\kappa f \varphi) \subseteq g(\varphi)$ zu zeigen. Sei $A \in \kappa f \varphi$, also $A \in \bigcap_{j \in F} f(j)$ für ein gewisses $F \in \varphi$. Wegen $A \in f(j) \xrightarrow{q} g(j)$ für alle $j \in F$ folgt $g(F) \subseteq cl_q(A)$ und insgesamt somit $cl_q(\kappa f \varphi) \subseteq g(\varphi)$.

2. Sei $\phi \in \mathscr{F}(X)$ und $\phi \xrightarrow{q} x$. Zu zeigen ist $cl_q(\phi) \xrightarrow{q} x$. Für jedes $A \in \phi$ sei

$$F_A := \{(\xi,z) \in \mathscr{F}_0(X) \times X \mid A \in \xi \quad \text{und} \quad \xi \xrightarrow{q} z\}.$$

Setze weiter $J := \bigcup_{A \in \phi} F_A = q \cap (\mathscr{F}_0(X) \times X)$. Wegen $\varnothing \neq F_{A \cap B} \subseteq F_A \cap F_B$ ist (beachte: $a \in A \Rightarrow (\dot{a},a) \in F_A$)

$$\varphi := \{J' \subseteq J \mid \exists A \in \phi \quad \text{mit} \quad F_A \subseteq J'\}$$

ein Filter auf J. Wir definieren nun $g : J \to X$ durch $(\xi,z) \mapsto z$ und $f : J \to \mathscr{F}_0(X)$ durch $(\xi,z) \mapsto \xi$. Offenbar gilt dann:

(1) $f(j) \xrightarrow{q} g(j)$ für alle $j \in J$,

(2) $g(\varphi) = cl_q(\phi)$ (denn $g(F_A) = cl_q(A)$) und

(3) $\phi \subseteq \kappa f \varphi$ (denn $A \in \phi$ impliziert offenbar $A \in \bigcap_{j \in F_A} f(j) \subseteq \kappa f \varphi$).

Folglich gilt $\kappa f \varphi \xrightarrow{q} x$, also $cl_q(\phi) = g(\varphi) \xrightarrow{q} x$.

9.2.15 Definition: Dichte und extrem dichte Teilmengen

Sei (X,q) ein Konvergenzraum. Wir nennen $A \subseteq X$ **dicht** (in X), falls $cl_q(A) = X$ gilt. Wir nennen einen Filter $\phi \in \mathscr{F}(X)$ α-uniform (für eine Kardinalzahl α), falls $|P| \geq \alpha$ für alle $P \in \phi$ gilt (für $\alpha = |X|$ einfach uniform). Wir definieren für jede Kardianlzahl α den α-Abschluss $cl_q^\alpha : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ durch

$$cl_q^\alpha(A) := A \cup \{x \in X \mid \exists \phi \in \mathscr{F}(X) : \ \alpha\text{-uniform, mit } \phi \xrightarrow{q} x \text{ und } A \in \phi\}.$$

Wir nennen A **α-dicht** (in X), falls $cl_q^\alpha(A) = X$. Im Fall $\alpha = |A|$ sprechen wir von **extrem dicht**.[11]

9.2.16 Lemma

Sei (X,q) ein T_2-(K2)-Konvergenzraum und $D \subseteq X$. Gilt $cl_q(D) = X$, so folgt $|X| \leq |\mathscr{F}_0(D)|$.
Dass diese Grenze angenommen werden kann, zeigt Satz 9.6.2.

Beweis: Für $x \in X$ sei ϕ_x ein Filter auf X mit $D \in \phi_x$ und $\phi_x \xrightarrow{q} x$. Sei $\phi_{x,D} := \{P \cap D \mid P \in \phi_x\}$. Sei $\psi_{x,D}$ ein Ultrafilter auf D mit $\phi_{x,D} \subseteq \psi_{x,D}$. Setze $\Phi_{x,D} := \{P \subseteq X \mid \exists Q \in \psi_{x,D} \text{ mit } Q \subseteq P\}$. Wegen $\phi_{x,D} \subseteq \Phi_{x,D}$ gilt auch $\Phi_{x,D} \xrightarrow{q} x$. Definiere nun $f : X \to \mathscr{F}_0(D)$ durch $x \mapsto \psi_{x,D}$. Offenbar ist f injektiv, denn $\psi_{x_1,D} = \psi_{x_2,D}$ impliziert $\Phi_{x_1,D} = \Phi_{x_2,D}$. Aus $\Phi_{x_1,D} \xrightarrow{q} x_1$ und $\Phi_{x_2,D} \xrightarrow{q} x_2$ folgt dann $x_1 = x_2$ (wegen T_2). Also ist $|X| \leq |\mathscr{F}_0(D)|$.

9.2.17 Definition: Stetige Abbildungen

Sind (X,q), (Y,r) zwei Konvergenzräume und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so nennen wir f **stetig** in $x \in X$ (bzgl. (X,q) und (Y,r)), falls für alle Filter ψ auf X gilt:

$$\psi \xrightarrow{q} x \quad \text{impliziert} \quad f(\psi) \xrightarrow{r} f(x).$$

Wir nennen f **stetig auf** X (bzw. einfach: stetig), falls f für jedes $x \in X$ stetig ist.

9.2.18 Lemma

Sei (X,q) ein (K2)-Konvergenzraum, (Y,r) ein T_2^*-Konvergenzraum, $f,g : X \to Y$ stetig, $D \subseteq X$ mit $f|D = g|D$. Dann gilt $f|cl_q(D) = g|cl_q(D)$.

[11] Im Zusammenhang mit dem Fortsetzungsproblem (siehe 9.5.1), ist das Konzept dichter Teilmengen natürlich fundamental. Extrem dichte Mengen interessieren uns hier nicht weiter. Eine interessante Anwendung dieses Konzeptes, zur Klärung der Frage wieviel Ultrafilter auf einer Menge existieren, findet sich im Anhang.

Beweis: Sei $x \in cl_q(D) \setminus D$ und $\psi' \in \mathscr{F}(X)$ mit $\psi' \xrightarrow{q} x$ und $D \in \psi'$. Sei $\psi \in \mathscr{F}_0(\psi)$. Es folgt $\psi \xrightarrow{q} x$ und somit $\phi_1 := f(\psi) \xrightarrow{r} f(x)$ und $\phi_2 := g(\psi) \xrightarrow{r} g(x)$. Wäre $f(x) \neq g(x)$, so wäre $\phi_1 \neq \phi_2$, es gäbe also $P_1 \in \phi_1, P_2 \in \phi_2$ mit $P_1 \cap P_2 = \varnothing$. Seien $Q_1, Q_2 \in \psi$ mit $f(Q_1) \subseteq P_1$ und $g(Q_2) \subseteq P_2$. Sei $d \in Q_1 \cap Q_2 \cap D \in \psi$, also ist $f(d) = g(d)$ und $f(d) \in P_1$ bzw. $g(d) \in P_2$.

9.2.19 Lemma

1. Seien (X,q), (Y,r) Konvergenzräume und $f: X \to Y$ stetig. Dann gilt

   $$f(cl_q(A)) \subseteq cl_r(f(A)) \quad \text{für alle} \quad A \subseteq X.$$

2. Sei (X,q) ein (K2)-Konvergenzraum, (Y,r) ein (K2)-(K6)-Konvergenzraum und f eine Abbildung mit

   $$f(cl_q(A)) \subseteq cl_r(f(A)) \quad \text{für alle} \quad A \subseteq X.$$

   Dann ist f stetig.

3. Sei (X,q) ein (K2) und (Y,r) ein (K5)-Konvergenzraum. In diesem Fall ist eine Abbildung $f: X \to Y$ genau dann stetig, wenn $f(\phi) \xrightarrow{r} f(x)$ für jedes $x \in X$ und jeden Ultrafilter ϕ auf X mit $\phi \xrightarrow{q} x$ gilt.

Beweis: 1. Sei $x \in cl_q(A) \setminus A$. Zeigen wir $f(x) \in cl_r(f(A))$. Nun $\exists\, \psi \in \mathscr{F}(X)$ mit $A \in \psi \xrightarrow{q} x$. Dann ist $\phi := f(\psi) \in \mathscr{F}(Y)$ mit $f(A) \in \phi = f(\psi) \xrightarrow{r} f(x)$. Also $f(x) \in cl_r(f(A))$.

2. Sei $\psi \xrightarrow{q} x$. Zu zeigen ist $f(\psi) \xrightarrow{r} f(x)$. Sei ϕ ein Ultrafilter mit $f(\psi) \subseteq \phi$ und sei ψ_0 ein Ultrafilter mit $\psi \subseteq \psi_0$ und $f(\psi_0) = \phi$ (Lemma 3.2.5). Wegen (K2) gilt $x \in cl_q(A)$ für alle $A \in \psi_0$. Folglich $f(x) \in cl_r(f(A))$ für alle $A \in \psi_0$. Das heißt $\forall A \in \psi_0 \,\exists\, \phi_A \in \mathscr{F}(Y)$ mit $f(A) \in \phi_A$ und $\phi_A \xrightarrow{r} f(x)$. Wegen (K6) folgt $\phi' := \bigcap\{\xi \in \mathscr{F}(Y) \mid \xi \xrightarrow{r} f(x)\} \xrightarrow{r} f(x)$. Für $P \in \phi'$ gilt daher $P \in \phi_A$ für jedes $A \in \psi_0$. Also $P \cap f(A) \neq \varnothing$ für jedes $A \in \psi_0$. Das bedeutet aber $P \in f(\psi_0)$, denn $f(\psi_0)$ ist ein Ultrafilter. Wegen $f(\psi_0) = \phi$ gilt $\phi' \subseteq \phi$, also $\phi \xrightarrow{r} f(x)$ (K2). Wegen (K6) gilt daher auch $f(\psi) \xrightarrow{r} f(x)$.

3. Zeigen wir, dass f unter dieser Voraussetzung stetig ist. Sei $\varphi \in \mathscr{F}(X)$ mit $\varphi \xrightarrow{q} x$. Sei $\psi \in \mathscr{F}_0(f(\varphi))$. Nach Lemma 3.2.5 existiert ein $\phi \in \mathscr{F}_0(\varphi)$ mit $f(\phi) = \psi$. Es folgt $\psi = f(\phi) \xrightarrow{r} f(x)$. Da $\psi \in \mathscr{F}_0(f(\varphi))$ beliebig gewählt wurde, folgt $f(\varphi) \xrightarrow{r} f(x)$.

9.2.20 Definition: Gröbere und feinere Konvergenzstrukturen

Seien q, r zwei Konvergenzstrukturen auf X. Wir sagen q ist **feiner** als r bzw. r ist **gröber** als q, falls $q \subseteq r$. Motiviert wird diese Definition durch die von Topologien induzierten Konvergenzstrukturen, denn es gilt für zwei beliebige Topologien τ, σ auf X:

$$\sigma \subseteq \tau \quad \Leftrightarrow \quad q_\tau \subseteq q_\sigma$$

9.2.21 Definition: Initialkonvergenzstruktur

Seien $(X_i, q_i)_{i\in I}$ Konvergenzräume, X eine Menge und $f_i : X \to X_i$, $i \in I$ entsprechende Abbildungen. Wir setzen

$$q := \{(\psi,x) \in \mathscr{F}(X) \times X \mid \forall i \in I \text{ gilt } f_i(\psi) \xrightarrow{q_i} f_i(x)\}.$$

Für q (die **Initialkonvergenzstruktur** bzgl. $(X_i, q_i)_{i\in I}$ und $f_i : X \to X_i$, $i \in I$) gilt:

1. Für einen Konvergenzraum (Y, r) ist eine Abbildung $f : Y \to X$ genau dann stetig, wenn $f_i \circ f$ für jedes $i \in I$ stetig ist.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i\circ f"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

   Durch diese universelle Eigenschaft ist q bereits vollständig charakterisiert.

2. q ist die gröbste Konvergenzstruktur auf X, so dass die Abbildungen f_i stetig sind.

9.2.22 Definition: Produktkonvergenzstruktur

Seien $(X_i, q_i)_{i\in I}$ Konvergenzräume, $X := \prod_{i\in I} X_i$ und p_i die entsprechenden Projektionen. Die Initialkonvergenzstruktur q auf X bzgl. $(X_i, q_i)_{i\in I}$ und $p_i : X \to X_i$, $i \in I$ nennen wir **Produktkonvergenzstruktur** auf X.

9.2.23 Definition: Kompakt

(X, q) ist kompakt, falls $\lim_q \phi \neq \varnothing$ für alle $\phi \in \mathscr{F}_0(X)$ gilt (alle Ultrafilter konvergieren).

9.2.24 Lemma

Seien $(X, q), (Y, r)$ Konvergenzräume, $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und (X, q) kompakt. Dann ist auch (Y, r) kompakt.

Beweis: Sei ϕ ein Ultrafilter auf Y und $\psi := \{Q \subseteq X \mid \exists P \in \phi \text{ mit } f^{-1}(P) \subseteq Q\}$. Offenbar ist $f(\psi) \subseteq \phi$. Sei dann ψ_0 in Ultrafilter auf X mit $\psi \subseteq \psi_0$ und $f(\psi_0) = \phi$ (Lemma 3.2.5). Nun $\exists x \in \lim_q(\psi_0)$ und aus der Stetigkeit von f folgt $\phi = f(\psi_0) \xrightarrow{r} f(x)$. Jeder Ultrafilter auf Y konvergiert - folglich ist (Y, r) kompakt.

9.2.25 Satz

Seien $(X_i, q_i)_{i\in I}$ Konvergenzräume, $X := \prod_{i\in I} X_i$, p_i die entsprechenden Projektionen und q die Produktkonvergenzstruktur auf X. Dann gilt:

$$(X,q) \ \text{ ist genau dann kompakt, wenn alle } \ (X_i,q_i)\,,\ i\in I \ \text{ kompakt sind.}$$

Beweis: Ist (X,q) kompakt, so folgt aus der Stetigkeit der Projektionen p_i (mit Lemma 9.2.24), dass auch (X_i,q_i) kompakt ist.

Seien andererseits alle (X_i,q_i), $i\in I$ kompakt. Sei ψ ein Ultrafilter auf X. Dann ist $p_i(\psi)$ ein Ultrafilter in X_i (für jedes $i\in I$). Dort gilt $p_i(\psi) \xrightarrow{q_i} x_i$ für ein $x_i \in X_i$. Setze $x := (x_i)_{i\in I}$. Per Definition (der Produktkonvergenzstruktur) folgt $\psi \xrightarrow{q} x$.

9.2.26 Definition: Teilraumkonvergenzstruktur

Sei (X,q) ein Konvergenzraum und $Z \subseteq X$. Die Initialkonvergenzstruktur q_Z auf Z bzgl. der Abbildung $i : Z \to X$, $z \mapsto z$ bezeichnen wir als **Teilraumkonvergenzstruktur**. Offenbar ist

$$q_Z = \{(\phi,z) \in \mathscr{F}(Z)\times Z \mid i(\phi) \xrightarrow{q} z\} = \{(\psi|Z,z) \mid (\psi,z)\in q \ \text{ mit } \ z\in Z\in\psi\}.$$

9.2.27 Definition: Finalkonvergenzstruktur

Seien $(X_i,q_i)_{i\in I}$ Konvergenzräume, X eine Menge und $f_i : X_i \to X$, $i\in I$ entsprechende Abbildungen. Wir setzen

$$q := \{(f_i(\psi_i), f_i(x_i)) \mid i\in I \ \text{ und } \ (\psi_i,x_i)\in q_i\}.$$

Für q (die **Finalkonvergenzstruktur** bzgl. $(X_i,q_i)_{i\in I}$ und $f_i : X \to X_i$, $i\in I$) gilt:

1. Für einen Konvergenzraum (Y,r) ist eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig, wenn $f\circ f_i$ für jedes $i\in I$ stetig ist.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f\circ f_i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

   Durch diese universelle Eigenschaft ist q bereits vollständig charakterisiert.

2. q ist die feinste Konvergenzstruktur auf X, so dass die Abbildungen f_i stetig sind.

9.2.28 Definition: Summenkonvergenzstruktur

Unter der **Summe** der Konvergenzräume $(X_i,q_i)_{i\in I}$ verstehen wir die Finalkonvergenzstruktur auf $X := \bigcup_{i\in I} X \times \{i\}$ bzgl. der Einbettungen $f_i : X_i \to X$.

9.3 Die Konvergenzstruktur der stetigen Konvergenz

Der folgende Abschnitt zeigt nun, wie sich die stetige Konvergenz als Konvergenzstruktur beschreiben lässt.

9.3.1 Definition: Die Konvergenzstruktur der stetigen Konvergenz

Seien (X,q) und (Y,r) Konvergenzräume, ϕ ein Filter auf $\varnothing \neq Z \subseteq Y^X$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir sagen ϕ **konvergiert stetig** auf Z gegen f, falls für alle Filter ψ auf X und alle $x \in X$ gilt:

$$\psi \xrightarrow{q} x \quad \text{impliziert} \quad \phi(\psi) \xrightarrow{r} f(x).$$

Da aus der Definition nicht $f \in Z$ folgt, handelt es sich hier nicht notwendig um eine Konvergenzstruktur im Sinne von Definition 9.2.3. Vielmehr haben wir eine Relation

$$q_c^Z = q_c^Z((X,q),(Y,r)) := \{(\phi,f) \in \mathscr{F}(Z) \times Y^X \mid \phi \text{ konvergiert stetig gegen } f\}.$$

In den meisten Fällen interessiert man sich aber nur für $Z = Y^X$ oder $Z = c(X,Y)$.

- Für $Z = Y^X$ ist q_c^Z natürlich eine Konvergenzstruktur im Sinne von Definition 9.2.3.
- Unter nicht allzu starken, zusätzlichen Voraussetzungen (siehe dazu Lemma 9.4.3) folgt für $Z = c(X,Y)$ aus $(\phi,f) \in q_c^Z$ bereits $f \in Z$. Wir haben also auch hier eine Konvergenzstruktur im Sinne von Definition 9.2.3.

Für $(\phi,f) \in q_c^Z$ schreiben wir wie gewohnt $\phi \xrightarrow{q_c^Z} f$.

9.3.2 Satz

1. Sei (X,q) ein beliebiger Konvergenzraum, (Y,r) ein (K2)-Konvergenzraum, $\varnothing \neq Z \subseteq Y^X$ und $\phi,\Phi \in \mathscr{F}(Z)$ mit $\phi \xrightarrow{q_c^Z} f$ und $\phi \subseteq \Phi$. Dann gilt auch $\Phi \xrightarrow{q_c^Z} f$.
2. Sei (X,q) ein (K2)-Konvergenzraum und (Y,r) ein (K2)-(K5)-Konvergenzraum. Dann ist auch (Y^X, q_c) ein (K2)-(K5)-Konvergenzraum.

Beweis: 1. Sei $\psi \xrightarrow{q} x$. Es folgt $\phi(\psi) \xrightarrow{r} f(x)$. Wegen $\phi(\psi) \subseteq \Phi(\psi)$ folgt auch $\Phi \xrightarrow{r} f(x)$.

2. Sei $\xi \in \mathscr{F}(Y^X)$ und $f \in Y^X$ derart, dass gilt:

$$\forall\, \psi \in \mathscr{F}_0(\xi) \text{ gilt } \psi \xrightarrow{q_c} f$$

Zu zeigen ist nun $\xi \xrightarrow{q_c} f$. Sei dazu $x \in X$ und $\nu \in \mathscr{F}(X)$ mit $\nu \xrightarrow{q} x$. Zu zeigen ist $\xi(\nu) \xrightarrow{r} f(x)$. Dazu reicht es zu zeigen:

$$\forall\, \alpha \in \mathscr{F}_0(\xi(\nu)) \text{ gilt } \alpha \xrightarrow{r} f(x)$$

Für einen Ultrafilter α auf Y mit $\xi(\nu) \subseteq \alpha$ gibt es nach lemma 3.2.5 aber Ultrafilter ξ_0 auf Y^X und ν_0 auf X mit $\xi \subseteq \xi_0$, $\nu \subseteq \nu_0$ und $\xi_0(\nu_0) \subseteq \alpha$. Es folgt $\nu_0 \xrightarrow{q} x$ und wegen 1. $\xi_0 \xrightarrow{q_c} f$, also $\xi_0(\nu_0) \xrightarrow{r} f(x)$ und somit auch $\alpha \xrightarrow{r} f(x)$.

9.3.3 Satz

1. Sei (X,q) ein beliebiger Konvergenzraum, (Y,r) ein (K2)-Konvergenzraum. Dann ist $\Omega : Y^X \times X \to Y$ stetig (bezüglich q_c auf Y^X und der Produktkonvergenzstruktur).
2. Sei (X,q) ein beliebiger Konvergenzraum, (Y,r) ein (K2)-Konvergenzraum und sei q_0 eine Konvergenz auf Y^X derart, dass $\Omega : Y^X \times X \to Y$ stetig ist. Dann gilt $q_0 \subseteq q_c$.
3. Sei (X,q) ein beliebiger Konvergenzraum, (Y,r) ein (K2)-Konvergenzraum und $g : Z \to Y^X$ eine Abbildung. Dann gilt:
$$g \text{ ist stetig} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \circ (g \times id_X) \text{ ist stetig}$$
(bezüglich q_c auf Y^X, q' auf Z bzw. Produktkonvergenz auf $Y^X \times X$).

1. Bezeichne q' die Produktkonvergenzstruktur auf $Y^X \times X$ und $p_1 : Y^X \times X \to Y^X$ bzw. $p_2 : Y^X \times X \to X$ die entsprechenden Projektionen. Sei $\Phi \in \mathscr{F}(Y^X \times X)$ und $\Phi \xrightarrow{q'} (f,x)$. Zu zeigen ist $\Omega(\Phi) \xrightarrow{r} \Omega(f,x) = f(x)$. Wegen $p_2(\Phi) =: \psi \xrightarrow{q} x$ und $p_1(\Phi) =: \phi \xrightarrow{q_c} f$ folgt $\phi(\psi) \xrightarrow{r} f(x)$. Zeigen wir $\phi(\psi) \subseteq \Omega(\Phi)$. Sei dazu $P \in \phi$ und $Q \in \psi$. O.B.d.A. gilt $P = p_1(P')$ und $Q = p_2(Q')$ für $P', Q' \in \Phi$. Für $P'' := P' \cap Q' \in \Phi$ gilt nun offenbar $\Omega(P'') \subseteq P(Q)$, also $P(Q) \in \Omega(\Phi)$.

2. Sei ϕ ein Filter auf Y^X mit $\phi \xrightarrow{q_0} f$. Zu zeigen ist $\phi \xrightarrow{q_c} f$. Sei $\psi \xrightarrow{q} x$. Für den Produktfilter $\Phi := \phi \times \psi$ gilt $\Phi \to (f,x)$ (bzgl. der Produktkonvergenzstruktur). Folglich $\Omega(\Phi) \xrightarrow{r} \Omega(f,x) = f(x)$. Wegen $\Omega(\Phi) = \phi(\psi)$ folgt $\phi(\psi) \xrightarrow{r} f(x)$.

3. "$\Rightarrow$" ist klar. Sei andererseits $\Omega \circ (g \times id_X) : Z \times X \to Y$ stetig. Sei ϕ ein Filter auf Z mit $\phi \xrightarrow{q'} z$. Zu zeigen ist $g(\phi) \xrightarrow{q_c} g(z)$. Sei also $\psi \xrightarrow{q} x$. Zu zeigen bleibt dann noch $g(\phi)(\psi) \xrightarrow{r} g(z)(x)$. Nun ist $g(\phi)(\psi) = \Omega \circ (g \times id_X)(\phi \times \psi)$ und $g(z)(x) = \Omega \circ (g \times id_X)(z,x)$. Aus der Stetigkeit von $\Omega \circ (g \times id_X)$ und wegen $\phi \times \psi \to (z,x)$ (bzgl. der Produktkonvergenzstruktur) folgt $\Omega \circ (g \times id_X)(\phi \times \psi) \xrightarrow{r} \Omega \circ (g \times id_X)(z,x)$.

9.4 Schwach stetige Abbildungen und wieder (S)-Räume

Im Folgenden verallgemeinern wir Definition 9.1.5 auf allgemeine Konvergenzräume. Man beachte, dass sich beide Definitionen im Fall topologischer Räume decken.

9.4.1 Definition: Schwach Stetig

Wir nennen die Abbildung $f:(X,q)\to(Y,r)$ schwach stetig, falls Folgendes gilt:

$$\forall\,(\varphi,x)\in q\ \exists\ \psi\in\mathscr{F}(Y)\ \text{ mit }\ (\psi,f(x))\in r\ \text{ und }\ cl_r(\psi)\subseteq f(\varphi)$$

Ist (Y,r) ein (K2)-T_3-Konvergenzraum, so ist jede schwach stetige Abbildung nach Y stetig.

9.4.2 Definition: strenger Teilraum

Sei (X,q) ein Konvergenzraum. Wir nennen [18] folgend $D\subseteq X$ einen strengen Teilraum, falls

$$cl_q(D)=X \quad \text{ und } \quad \forall(\varphi,x)\in q\,\exists\xi\in\mathscr{F}(X)\ \text{ mit }\ \xi\xrightarrow{q}x,\ D\in\xi\ \text{ und }\ cl_q(\xi)\subseteq\varphi.$$

9.4.3 Lemma

1. Sei (Y,r) beliebig, (X,q) ein (K1)-Konvergenzraum, $f:X\to Y$ eine Abbildung, ϕ ein Filter auf $Z\subseteq Y^X$, der stetig gegen f konvergiert. Dann ist f schwach stetig.
2. Seien (X,q), (Y,r) Konvergenzräume, D ein strenger Teilraum von X, $g:D\to Y$ eine Abbildung derart, dass für jedes $x\in X$ eine stetige Abbildung $f_x:D\cup\{x\}\to Y$ existiert, mit $f_x|D=g$. Dann ist $f:X\to Y$, $f(x):=f_x(x)$ schwach stetig.
3. Sei (X,q) ein (K1)-(K7)-Konvergenzraum, (Y,r) beliebig, $f:D\subseteq X\to Y$ eine stetige Abbildung mit $cl_q(D)=X$ und der Eigenschaft:

$$\forall x\in X\,\exists y_x\in Y\,\forall\varphi\in\mathscr{F}(X):\ [(D\in\varphi\ \text{ und }\ \varphi\xrightarrow{q}x)\ \Rightarrow\ f(\varphi|D)\xrightarrow{r}y_x]\quad(*)$$

   Dann ist $f_0:X\to Y$, $f_0(x)=y_x$ schwach stetig.

Korollar in allen Fällen: Ist (Y,r) zusätzlich (K2) und T_3, so ist f bzw. f_0 stetig.

Beweis: 1. Sei $\varphi\xrightarrow{q}x$. In jedem Fall gilt $\phi(\varphi)\xrightarrow{r}f(x)$. Zeigen wir $cl_r(\phi(\varphi))\subseteq f(\varphi)$. Falls dem nicht so ist, so $\exists P\in\phi$, $Q\in\varphi$ mit $f(Q)\not\subseteq cl_r(P(Q))$. Sei dann $v\in Q$ mit $f(v)\notin cl_r(P(Q))$. Nun gilt $\dot{v}\xrightarrow{q}v$, also $\phi(\dot{v})\xrightarrow{r}f(v)$. Aus $f(v)\notin cl_r(P(Q))$ folgt aber $P(Q)\notin\phi(\dot{v})$ - Widerspruch!

2. Sei φ ein Filter auf X mit $\varphi\xrightarrow{q}x$. Nach Voraussetzung an D gibt es einen Filter ξ auf X mit $\xi\xrightarrow{q}x$, $D\in\xi$ und $cl_q(\xi)\subseteq\varphi$. Dann gilt auch $\xi|(D\cup\{x\})\to x$ (im Teilraum) und somit $\psi:=f_x(\xi|(D\cup\{x\}))\xrightarrow{r}f_x(x)=f(x)$. Zeigen wir $cl_r(\psi)\subseteq f(\varphi)$. Zu $R\in cl_r(\psi)$ gibt es ein $P\in\xi$ mit $cl_q(f_x(P\cap(D\cup\{x\})))\subseteq R$. Es ist $Q:=cl_q(P\cap D)\in\varphi$.

Angenommen es gibt ein $z\in Q\setminus(P\cap D)$ mit $f(z)\notin R$. Da $z\in cl_q(P\cap D)$ gibt es einen Filter η mit $P\cap D\in\eta$ und $\eta\xrightarrow{q}z$. Folglich gilt $f_z(\eta|(D\cup\{z\}))\xrightarrow{r}f_z(z)=f(z)$. Wegen $f(z)\notin cl_q(f_x(P\cap(D\cup\{x\})))$ ist $f_x(P\cap(D\cup\{x\}))\notin f_z(\eta|(D\cup\{z\}))$.

1.Fall $z \notin D$ impliziert $P \cap D \in \eta|(D \cup \{z\})$ und $f_z(P \cap D) = g(P \cap D) \subseteq f_x(P \cap (D \cup \{x\}))$. Also doch $f_x(P \cap (D \cup \{x\})) \in f_z(\eta|(D \cup \{z\}))$, was ein Widerspruch ist.

2.Fall $z \in D$ impliziert nun $f_z((P \cap D) \cap (D \cup \{z\})) \subseteq f_x(P \cap (D \cup \{x\}))$, wegen $f_x(z) = f_z(z)$. Also auch in diesem Fall $f_x(P \cap (D \cup \{x\})) \in f_z(\eta|(D \cup \{z\}))$, was ein Widerspruch ist.

3. Wegen $cl_q(D) = X$, gibt es zu jedem $x \in X$ ein $g(x) \in \mathscr{F}(X)$ mit $D \in g(x) \xrightarrow{q} x$, also ein $g : X \to \mathscr{F}(X)$. Sei nun $x \in X$ fest gewählt und $\varphi \in \mathscr{F}(X)$ mit $\varphi \xrightarrow{q} x$. Da (X,q) ein (K7)-Konvergenzraum ist, folgt $\kappa g \varphi \xrightarrow{q} x$. Aus $(*)$, der Definition von f_0 und der Stetigkeit von f folgt schließlich $f(\kappa g \varphi|D) \xrightarrow{r} f_0(x)$. Nun ist aber

$$f(\kappa g \varphi|D) = f(\bigcup_{F \in \varphi} \bigcap_{z \in F} g(z)|D) \subseteq \bigcup_{F \in \varphi} \bigcap_{z \in F} f(g(z)|D).$$

Es reicht $cl_r(\bigcup_{F \in \varphi} \bigcap_{z \in F} f(g(z)|D)) \subseteq f_0(\varphi)$ zu zeigen. Sei $A \in \bigcup_{F \in \varphi} \bigcap_{z \in F} f(g(z)|D)$, also $A \in \bigcap_{z \in F} f(g(z)|D)$ für ein gewisses $F \in \varphi$. Da $g(z) \xrightarrow{q} z$, folgt $f(g(z)|D) \xrightarrow{r} f_0(z)$ für alle $z \in F$, also $f_0(F) \subseteq cl_r(A)$.

9.4.4 Bemerkung

Auch hier lässt sich leicht zeigen, dass es zu einem (nicht T_3)-(K1)-Konvergenzraum (Y,q) eine schwach stetige Abbildung nach Y gibt, die nicht stetig ist. Sei (Y,q) nicht T_3, d.h. es gibt ein $(\psi, y) \in q$ mit $(cl_q(\psi), y) \notin q$. Wir definieren nun $r \subseteq \mathscr{F}(Y) \times Y$ durch

$$(\phi, z) \in r \;:\Leftrightarrow \begin{cases} z \in Y \text{ und } \phi = \dot{z} & \text{oder} \\ z = y \text{ und } cl_q(\psi) \subseteq \phi & \end{cases}$$

Dann ist $id_Y : (Y,r) \to (Y,q)$ schwach stetig, aber nicht stetig!
Analog zu Definition 9.1.9 könnte man nun weiter definieren:

9.4.5 Definition

(Y,r) heißt **(S*) Konvergenzraum**, falls für jedes $\varnothing \neq Z \subseteq Y^X$, für jeden (K1) Konvergenzraum (X,q), jeden Filter ϕ auf Z und jede Abbildung $f : X \to Y$ gilt:

$$\left(\phi \overset{\text{konvergiert stetig}}{\longrightarrow} f\right) \quad \text{impliziert} \quad (f \text{ ist stetig})$$

(Y,r) heißt **(S)-Konvergenzraum**, falls für jeden (K1)-Konvergenzraum (X,q) und für jeden Filter ϕ auf Y^X mit $c(X,Y) \in \phi$ und jede Abbildung $f : X \to Y$ gilt:

$$\left(\phi \overset{\text{konvergiert stetig}}{\longrightarrow} f\right) \quad \text{impliziert} \quad (f \text{ ist stetig})$$

Unmittelbar aus der Definition, bzw. mit Lemma 9.4.3 folgt: T_3 + (K2) $\Rightarrow$ (S*) $\Rightarrow$ (S).

9.4.6 Satz

1. Ist (Y,r) ein (K1)-(S)-Konvergenzraum, so gilt für alle $y_0,y_1 \in Y$:
$\dot{y_0} \xrightarrow{r} y_1$ impliziert $(\dot{y_0} \cap \dot{y_1} \xrightarrow{r} y_0$ und $\dot{y_1} \xrightarrow{r} y_0)$.

2. Jeder (K1)-(K2)-T_0-(S)-Konvergenzraum (Y,r) ist T_2.

3. Sei $(Y_i,r_i)_{i\in I}$ eine Familie von (S)-Konvergenzräumen (bzw. (S^*)-Konvergenzräumen) und $(f_i : Y \to Y_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann ist (Y,r) ein (S)-Konvergenzraum (bzw. (S^*)-Konvergenzraum), wobei r die Initialkonvergenzstruktur ist.

4. Die Eigenschaft (S) ist summentreu (analog mit (S^*)).

Beweis: 1. Annahme es gibt $y_0,y_1 \in Y$ mit $\dot{y_0} \xrightarrow{r} y_1$ und $(\dot{y_1} \overset{r}{\not\to} y_0$ oder $\dot{y_0} \cap \dot{y_1} \overset{r}{\not\to} y_0)$. Sei $X := Y \cup \{\ell\}$, wobei $\ell \notin Y$ (also z.B. $\ell = Y$) und $q := \{(\varphi,x) \in \mathscr{F}(X) \times X \mid \varphi|Y \xrightarrow{r} x \text{ oder } x = \ell\}$. Wir betrachten die Abbildungen $f,g : X \to Y$, $f(x) := y_0$ und $g(x) := \begin{cases} y_0 & \text{für } x \in \{y_0,\ell\} \\ y_1 & \text{für } x \notin \{y_0,\ell\} \end{cases}$.
Der Filter $\phi := \dot{f}$ konvergiert nun stetig gegen g, denn $\varphi \xrightarrow{q} x$ impliziert $\phi(\varphi) = f(\varphi) = \dot{y_0} \xrightarrow{r} g(x)$, aber g ist nicht stetig, denn $\dot{y_1} \xrightarrow{q} \ell$ und $\dot{y_0} \cap \dot{y_1} \xrightarrow{q} \ell$, aber $[g(\dot{y_1}) = \dot{y_1} \overset{r}{\not\to} y_0 = g(\ell)$ oder $g(\dot{y_0} \cap \dot{y_1}) = \dot{y_0} \cap \dot{y_1} \overset{r}{\not\to} y_0 = g(\ell)]$.

2. Angenommen (Y,r) ist nicht T_2. Sei ξ ein Filter mit $\xi \xrightarrow{r} y_1$, $\xi \xrightarrow{r} y_2$ mit $y_1 \neq y_2$. Für $Q \in \xi$ ist $Q \setminus \{y_1,y_2\} \neq \varnothing$ (andernfalls ist $Q \subseteq \{y_1,y_2\}$; dann aber $\xi \subseteq \dot{z}$ für $z = y_1$ oder $z = y_2$(!), also $\dot{z} \xrightarrow{r} y_1$ und $\dot{z} \xrightarrow{r} y_2$ - Widerspruch). Für $Q \in \xi$ setze $P_Q := \{g \in c(Y,Y) \mid g(Y) \subseteq Q \setminus \{y_1,y_2\}\}$ und $\phi := \{P \subseteq Y^Y \mid P_Q \subseteq P\}$. Die Abbildung $f : Y \to Y$, $f(y) := \begin{cases} y_1 & \text{für } y \neq y_2 \\ y_2 & \text{für } y = y_2 \end{cases}$ ist nicht stetig, denn für $\xi' := \{Q' \subseteq Y \mid \exists Q \in \xi \text{ mit } Q \setminus \{y_1,y_2\} \subseteq Q'\}$ gilt $\xi \subseteq \xi'$, also $\xi' \xrightarrow{r} y_1$, $\xi' \xrightarrow{r} y_2$ und $f(\xi') = \dot{y_1}$, aber $\dot{y_1} \overset{r}{\not\to} y_2$. Der Filter ϕ konvergiert nun aber stetig gegen f. Zum Beweis sei $\varphi \xrightarrow{r} y$. Es reicht $\xi \subseteq \phi(\varphi)$ zu zeigen. Sei $Q \in \xi$. Dann ist $P_Q \in \phi$ und $Y \in \varphi$, also $P_Q(Y) \in \phi(\varphi)$. Wegen $P_Q(Y) \subseteq Q$ folgt $Q \in \phi(\varphi)$. (K1) brauchen wir nur, da Y die Rolle des X in der Definition 9.4.5 übernimmt.

3. Sei ϕ ein Filter auf Y^X mit $c(X,Y) \in \phi$, der stetig gegen f konvergiert. Zu zeigen bleibt $f_i \circ f$ ist für alle $i \in I$ stetig. Sei $j \in I$ und $\alpha : Y^X \to Y_j^X$, $g \mapsto f_j \circ g$. Wir zeigen der Filter $\phi' := \alpha(\phi)$ konvergiert stetig gegen $f_j \circ f$. Wegen $c(X,Y_j) \in \phi'$ ist $f_j \circ f$ dann stetig. Sei $x \in X$ und $\varphi \xrightarrow{q} x$. Es gilt $\phi(\varphi) \xrightarrow{r} f(x)$, also per Definition der Initialkonvergenzstruktur $\phi'(\varphi) = f_j(\phi(\varphi)) \xrightarrow{r_i} f_j(f(x))$.

4. Seien $(Y_i,r_i)_{i\in I}$ (S)-Konvergenzräume und (Y,r) deren Summe. Sei (X,q) ein (K1)-

Konvergenzraum und ϕ ein Filter auf $c(X,Y)$ der stetig gegen $f : X \to Y$ konvergiert. Sei $(\varphi,x) \in q$. Zu zeigen ist $(f(\varphi), f(x)) \in r$. In jedem Fall gilt $\phi(\varphi) \xrightarrow{r} f(x)$. Also gibt es ein $j \in I$ und $(\varphi_j, y_j) \in r_j$ mit $f_j(\varphi_j) = \phi(\varphi)$ und $f_j(y_j) = f(x)$. Wegen $Y_j \times \{j\} \in f_j(\varphi_j)$ gibt es $P_0 \in \phi$ und $Q \in \varphi$ mit $P_0(Q) \subseteq Y_j \times \{j\}$. Zeigen wir als nächstes $f(Q) \subseteq Y_j \times \{j\}$. Andernfalls gibt es ein $z \in Q$ mit $f(z) \in Y_l \times \{l\}$, wobei $j \neq l$. Wegen $\overset{\bullet}{z} \xrightarrow{q} z$ gilt $\phi(\overset{\bullet}{z}) \xrightarrow{r} f(z)$. Also gibt es $(\varphi_l, y_l) \in r_l$ mit $f_l(\varphi_l) = \phi(\overset{\bullet}{z})$ und $f_l(y_l) = f(z)$. Wegen $Y_l \times \{l\} \in f_l(\varphi_l)$ gibt es ein $P' \in \phi$ mit $P'(z) \subseteq Y_l \times \{l\}$. Für $P'' := P_0 \cap P'$ ergibt sich der Widerspruch $P''(z) \subseteq (Y_j \times \{j\}) \cap (Y_l \times \{l\})$.

Wegen $P_0(Q) \subseteq Y_j \times \{j\}$ und $f(Q) \subseteq Y_j \times \{j\}$ ist $\psi := \{(P|Q) \cap c(Q, Y_j \times \{j\}) \mid P \in \phi\}$ ein Filter auf $c(Q, Y_j \times \{j\})$ der stetig gegen $f|Q$ konvergiert. Demzufolge ist $f|Q$ stetig und es folgt $f(\varphi) = (f|Q)(\varphi|Q) \xrightarrow{r} f(z)$.

9.5 Äquivalenz von T3 und punktweise stetiger Fortsetzbarkeit

Die folgende alternative Konstruktion, zu der im Beweis von Theorem 1.1 aus dem Artikel [18], ist deutlich einfacher, beweist aber ebenso dessen Aussage. Satz 9.5.1 ist also eine partielle Verallgemeinerung von Satz 9.1.7.

9.5.1 Satz

Sei (Y,r) ein nicht T_3, aber (K1)-(K2)-(K3)-Konvergenzraum. Dann gibt es einen (K1)-(K2)-(K3)-Konvergenzraum (X,q) mit strengem Teilraum $Y_0 \subseteq X$ und einer nicht stetigen Abbildung $f : X \to Y$, deren Einschränkung auf $Y_0 \cup \{x\}$ für jedes $x \in X$ stetig ist. Für die Umkehrung siehe Lemma 9.4.3.

Beweis: (Y,r) ist nicht T_3, also gibt es ein $(\psi, a) \in r$ mit $(cl_r(\psi), a) \notin r$. Setze $Y_0 := Y \times \{0\}$, $Y_1 := Y \times \{1\}$ und $X := Y_0 \cup Y_1$. Wir betrachten die Abbildungen $f : X \to Y$, $(z, \varepsilon) \mapsto z$, $f_0 := f|Y_0$ und $h : Y \to X$, $y \mapsto (y,0)$, setzen $\gamma := \{P \subseteq X \mid \exists Q \in \psi \text{ mit } (Q \times \{0\}) \cup (cl_r(Q) \times \{1\}) \subseteq P\}$ und definieren $q \subseteq \mathscr{F}(X) \times X$ durch

$$(\phi, (y,\varepsilon)) \in q \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \eta \in \mathscr{F}(X) \text{ mit } Y_0 \in \eta,\ (f_0(\eta|Y_0), y) \in r \text{ und } \eta \cap \overset{\bullet}{(y,\varepsilon)} \subseteq \phi & \text{oder} \\ (y,\varepsilon) = (a,1) \text{ und } \overset{\bullet}{(a,1)} \cap \gamma \subseteq \phi \end{cases}$$

1. Dann ist auch (X,q) ein (K1)-(K2)-(K3)-Konvergenzraum (trivial). Da (Y,r) auch (K1) ist, gilt $cl_q(Y_0) = X$ (trivial) und Y_0 ist sogar ein strenger Teilraum.

   Beweis dazu: Sei $(\phi, (y,\varepsilon)) \in q$.

   1. Fall $\exists \eta \in \mathscr{F}(X)$ mit $Y_0 \in \eta$, $(f_0(\eta|Y_0), y) \in r$ und $\eta \cap \overset{\bullet}{(y,\varepsilon)} \subseteq \phi$. Offenbar gilt $\eta \xrightarrow{q} (y,\varepsilon)$. Es reicht also $cl_q(\eta) \subseteq \eta \cap \overset{\bullet}{(y,\varepsilon)}$ zu zeigen. Sei $P \in \eta$. Wegen $P \in \eta \xrightarrow{q} (y,\varepsilon)$ gilt offenbar $P \cup \{(y,\varepsilon)\} \subseteq cl_q(P)$ und damit ist alles gezeigt.

2. Fall $(y,\varepsilon) = (a,1)$ und $\overset{\bullet}{(a,1)} \cap \gamma \subseteq \phi$. Setze $\xi := \overset{\bullet}{(a,1)} \cap \{P \subseteq X \mid \exists Q \in \psi \text{ mit } Q \times \{0\} \subseteq P\}$. Wegen $\xi \xrightarrow{q} (a,1)$ reicht es $cl_q(\xi) \subseteq \overset{\bullet}{(a,1)} \cap \gamma$ zu zeigen. Dies folgt aus

$$Q \in \psi \;\Rightarrow\; (Q \times \{0\}) \cup (cl_r(Q) \times \{1\}) \subseteq cl_q(Q \times \{0\}) \subseteq cl_q((Q \times \{0\}) \cup \{(a,1)\}).$$

2. f ist nicht stetig, allerdings ist für jedes $x \in X$ die Einschränkung g_x von f auf $Y_0 \cup \{x\}$ stetig (und f somit schwach stetig).

   Beweis dazu: Wegen $f(\gamma) = cl_r(\psi)$ und $\gamma \xrightarrow{q} (a,1)$ ist f nicht stetig.
   Sei $x = (y,\varepsilon) \in X$ und $\phi \xrightarrow{q} (y,\varepsilon)$ mit $Y_0 \cup \{(y,\varepsilon)\} \in \phi$.

   1. Fall $\exists \eta \in \mathscr{F}(X)$ mit $Y_0 \in \eta$, $(f_0(\eta|Y_0), y) \in r$ und $\eta \cap \overset{\bullet}{(y,\varepsilon)} \subseteq \phi$. Hier gilt wegen $f_0(\eta|Y_0) \cap \overset{\bullet}{y} \subseteq g_{(y,\varepsilon)}(\phi|(Y_0 \cup \{(y,\varepsilon)\}))$ auch $g_{(y,\varepsilon)}(\phi|(Y_0 \cup \{(y,\varepsilon)\})) \xrightarrow{r} y$.

   2. Fall $(y,\varepsilon) = (a,1)$ und $\overset{\bullet}{(a,1)} \cap \gamma \subseteq \phi$. In diesem Fall gilt wegen $\psi \cap \overset{\bullet}{a} \subseteq g_{(a,1)}(\phi|(Y_0 \cup \{(a,1)\}))$ auch $g_{(a,1)}(\phi|(Y_0 \cup \{(a,1)\})) \xrightarrow{r} a$.

9.5.2 Bemerkung zu Satz 9.5.1

Für topologische Räume geht es auch so:

Sei (Y,σ) ein topologischer Raum. Sei ferner $a \in Y$ und $U \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$ mit $\forall V \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma$ gilt $\overline{V} \not\subseteq U$. Setze $Y_0 := Y \times \{0\}$, $Y_1 := Y \times \{1\}$ und $X := Y_0 \cup Y_1$. Anschließend definieren wir

$$\mathscr{A}_1 := \{V \times \{0\} \mid V \in \sigma\},$$

$$\mathscr{A}_2 := \{(V \times \{0\}) \cup \{(y,1)\} \mid y \in V \in \sigma \text{ mit } y \neq a\},$$

$$\mathscr{A}_3 := \{(V \times \{0\}) \cup (\overline{V} \times \{1\}) \mid V \in \overset{\bullet}{a} \cap \sigma\},$$

$$\mathscr{B} := \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2 \cup \mathscr{A}_3 \text{ und } \tau := \{O \subseteq X \mid \exists \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B} \text{ mit } \bigcup \mathscr{A}' = O\}$$

und schließlich die Abbildung $f : X \to Y$, $(y,\varepsilon) \mapsto y$.

Im Zusammenhang mit einer weiteren Klasse von Abbildungen, nämlich den perfekten, hatten wir bereits das interessante Lemma 4.9.4 (meines Wissens nur für topologische Räume bekannt), das etwas über die Unmöglichkeit von Fortsetzungen aussagt. Wir beweisen es hier für allgemeine Konvergenzräume. Zuerst die Definition (für topologische Räume siehe Lemma 4.9.2):

9.5.3 Definition: Perfekte Abbildungen

Seien (X,q) und (Y,r) Konvergenzräume. Wir nennen $f : X \to Y$ **fast perfekt**, falls

$$\forall y \in Y \, \forall \phi \in \mathscr{F}_0(X) \text{ gilt: } \left(f(\phi) \xrightarrow{r} y \text{ impliziert } \exists x \in f^{-1}(y) \text{ mit } \phi \xrightarrow{q} x\right)$$

Wir nennen f schließlich **perfekt**, wenn sie stetig und fast perfekt ist.

9.5.4 Lemma

Sei (X,q) ein (K2)-(T_2)-Konvergenzraum und (Y,r) ein (K2)-Konvergenzraum, $D \subseteq X$ mit $D \neq X$ und $cl_q(D) = X$ und sei $f : D \to Y$ eine perfekte Abbildung. Dann gibt es keine stetige Abbildung $g : X \to Y$ mit $g|D = f$.

Beweis: Sei s die Teilraumkonvergenzstruktur auf D. Angenommen es gibt eine stetige Abbildung $g : X \to Y$ mit $g|D = f$. Es gilt nun:
(1) $cl_r(g(D)) = g(X)$ und
(2) $f(D) = cl_r(f(D))$
Zeigen wir (1). Sei $x \in X$. Es gibt ein $\varphi \in \mathscr{F}(X)$ mit $D \in \varphi \xrightarrow{q} x$. Wegen der Stetigkeit von g folgt $g(\varphi) \xrightarrow{r} g(x)$ und $g(D) \in g(\varphi)$, also $g(x) \in cl_r(g(D))$.

Zeigen wir (2). Sei $y \in cl_r(f(D))$. Es gibt dann ein Ultrafilter ψ auf Y mit $f(D) \in \psi \xrightarrow{r} y$. Offenbar ist $\varphi := \{Q \subseteq D \mid \exists\, P \in \psi \text{ mit } f^{-1}(P) \subseteq Q\}$ nun ein Filter auf D mit $f(\varphi) \subseteq \psi$. Sei φ_0 ein Ultrafilter auf D mit $\varphi \subseteq \varphi_0$ und $f(\varphi_0) = \psi$ (vergleiche Lemma 3.2.5). Folglich gibt es ein $x' \in f^{-1}(y)$ ($\subseteq D\,!$) mit $\varphi_0 \xrightarrow{s} x'$. Es folgt $y = f(x') \in f(D)$.

Aus (1) und (2) folgt nun: $g(X) = cl_r(g(D)) = cl_r(f(D)) = f(D)$. Sei $x \in X \setminus D$. Es gibt dann ein Ultrafilter ϕ auf X mit $D \in \phi \xrightarrow{q} x$. Da g stetig ist und $D \in \phi$, gilt $f(\phi|D) = g(\phi) \xrightarrow{r} g(x)$. Da f perfekt ist, folgt: $\exists\, z \in f^{-1}(g(x))$ mit $\phi|D \xrightarrow{s} z$. Offenbar gilt dann auch $\phi \xrightarrow{q} z$. Dies ist ein Widerspruch, da $x \neq z$ und (X,q) T_2 ist.

9.6 Wie viele Ultrafilter gibt es auf einer Menge?

Eine Bemerkung zur Definition 9.2.15: Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $\varnothing \neq D \subseteq X$. Dann ist äquivalent:
1. Für alle $O \in \tau \setminus \{\varnothing\}$ gilt $|D| = |O \cap D|$.
2. D ist extrem dicht in X, also $cl_{q_\tau}^{|D|}(D) = X$.

9.6.1 Lemma

1. Jeder α-uniforme Filter auf X, mit $\alpha > \infty$, ist in einem α-uniformen Ultrafilter auf X enthalten.
2. Sei (X,q) ein T_2-(K2)-Konvergenzraum und $D \subseteq X$. Gilt $cl_q^{\alpha}(D) = X$, so folgt $|X| \leq |\mathscr{F}_0^{(\alpha)}(D)|$, für jede unendliche Kardinalzahl α. Mit $\mathscr{F}_0^{(\alpha)}(X)$ bezeichnen wir die Menge aller α-uniformen Ultrafilter auf X.

Beweis: 1. Sei φ ein α-uniformer Filter auf X. Mit Hilfe von Zorns Lemma schnappen wir uns einen maximalen α-uniformen Filter ω der unser φ enthält. Sei ψ ein Ultrafilter auf X mit $\omega \subseteq \psi$. Angenommen $\exists\, A \in \psi$ mit $|A| < \alpha$. Dann gilt $|Y \cap (X \setminus A)| = |Y \setminus A| = |Y| \geq \alpha$

für jedes $Y \in \omega$. Setze $\phi := \{Z \subseteq X \mid \exists Y \in \omega \text{ mit } Y \cap (X \setminus A) \subseteq Z\}$. Offensichtlich ist ϕ dann α-uniform und $\omega \subsetneq \phi$ im Widerspruch zur Maximalität von φ. Also ist ψ auch α-uniform, mit $\varphi \subseteq \psi$. Für 2. gilt fast derselbe Beweis wie in 9.2.16, denn ϕ_x und $\psi_{x,D}$ können nun α-uniform gewählt werden.

9.6.2 Satz

Sei A eine unendliche Menge, dann existiert ein topologischer T_2-Raum (X, τ) mit $|X| = |\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))|$ und $\exists\, F \subseteq X$, extrem dicht in X, mit $|F| = |A|$. Die Schranke aus Lemma 9.6.1 kann also angenommen werden.

Als Korollar erhalten wir $|\mathscr{F}_0^{(|A|)}(A)| = |\mathscr{F}_0(A)| = |\mathscr{F}(A)| = |\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))|$.

Beweis: Setze $X := \{0,1\}^{\mathscr{P}(A)}$. Für jedes endliche $J \subseteq A$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim_J$ auf $\mathscr{P}(A)$, durch $L_1 \sim_J L_2 \;:\Leftrightarrow\; L_1 \cap J = L_2 \cap J$. Setze

$$F_J := \{(a_L)_{L \in \mathscr{P}(A)} \in X \mid a_{L_1} = a_{L_2} \text{ für } L_1 \sim_J L_2\} \quad \text{und} \quad F := \bigcup \{F_J \mid J \subseteq A \text{ und } J \text{ endlich }\}.$$

Es gilt $|F_J| \leq |A^{\mathscr{P}(J)}| = |A|$, also $|F| \leq |A|$. Andererseits ist $\varphi : A \to F$ definiert durch $a \mapsto (x_L)_{L \in \mathscr{P}(A)}$, mit $\begin{cases} x_L = 1 & \text{falls } a \in L \\ x_L = 0 & \text{sonst} \end{cases}$ injektiv und wohldefiniert ($\varphi(a) \in F_J$ für $J := \{a\}$). Zusammen ergibt dies $|F| = |A|$. Zu zeigen bleibt noch, dass F extrem dicht in X ist, dass also für jedes offene O gilt: $|F| = |O \cap F|$. Für $K \in \mathscr{P}(A)$ und $i \in \{0,1\}$ setz wir $U_K^i := \prod_{L \in \mathscr{P}(A)} O_L$ mit $\begin{cases} O_L = \{0,1\} & \text{für } L \neq K \\ O_L = \{i\} & \text{sonst} \end{cases}$. U_K^i ist eine typische Subbasismenge der Produkttopologie. Sei dann $O = U_{L_1}^{i_1} \cap \ldots \cap U_{L_n}^{i_n}$ eine typische offene Basismenge. Es reicht also zu zeigen, dass $|O \cap F| = |F|$ ist. Aus $F = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,1\}^n} F \cap U_{L_1}^{i_1} \cap \ldots \cap U_{L_n}^{i_n}$ folgt die Existenz eines Tupels $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$ mit $|F| = |F \cap U_{L_1}^{i_1} \cap \ldots \cap U_{L_n}^{i_n}|$. Es gibt aber immer eine Injektion

$$\alpha : F \cap U_{L_1}^{i_1} \cap \ldots \cap U_{L_n}^{i_n} \to F \cap U_{L_1}^{j_1} \cap \ldots \cap U_{L_n}^{j_n} \quad \text{für} \quad (j_1, \ldots, j_n) \in \{0,1\}^n,$$

wie man folgendermaßen sieht:

1. Für $x \in F \cap U_{L_1}^{i_1} \cap \ldots \cap U_{L_n}^{i_n}$ wähle ein endliches $J_x \subseteq A$ mit $x \in F_{J_x} \cap U_{L_1}^{i_1} \cap \ldots \cap U_{L_n}^{i_n}$.
2. Für $x = (x_K)_{K \in \mathscr{P}(A)}$ sei $\alpha(x) := (y_K)_{K \in \mathscr{P}(A)}$, wobei $y_K = \begin{cases} j_l & \text{falls } K \in [L_l]_{J_x} \text{ (für } l = 1, \ldots, n) \\ x_K & \text{sonst} \end{cases}$

Diese Abbildung ist injektiv! Also gilt $|F| = |F \cap U_{L_1}^{i_1} \cap \ldots \cap U_{L_n}^{i_n}|$ für alle $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$ und somit auch $|O \cap F| = |F|$. Das Korollar ergibt sich nun direkt aus Lemma 9.6.1 (die letzte Ungleichung ist trivial):
$|\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))| = |X| \leq |\mathscr{F}_0^{(|F|)}(F)| = |\mathscr{F}_0^{(|A|)}(A)| \leq |\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))|$

9.6.3 Bemerkung

Das Ergebnis über die Kardinalität der Menge aller uniformen Ultrafilter war natürlich schon bekannt. Der Zugang über extrem dichte Teilmengen, insbesondere Lemma 9.6.1 und Satz 9.6.2, sind aber neu.

9.6.4 Anzahl aller untereinander nicht homöomorphen Topologien

Auf einer unendlichen Menge X gibt es also genau $\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$-viele, untereinander nicht homöomorphe, Topologien. **Beweis:** Sei $\mathscr{T}$ die Menge aller Topologien auf X. Wir zeigen zuerst $|\mathscr{T}| = |\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))|$. Dies folgt daraus, dass jeder Filter um die leere Menge erweitert eine Topologie ist und die Anzahl derer kennen wir obigem Satz. Auf $\mathscr{T}$ führen wir dann durch (X,τ) ist homöomorph zu (X,σ), für $\tau,\sigma \in \mathscr{T}$ eine Äquivalenzrelation ein. Aus jeder Klasse wählen wir uns nun ein Repräsentanten und fassen diese zu einem Vertretersystem $(\tau_i)_{i\in I}$ zusammen. Für jede einzelne Klasse $\mathscr{T}_i$ gilt $|\mathscr{T}_i| \leq |X^X|$ (offensichtlich). Nun gilt aber $|\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))| = |\mathscr{T}| = |\bigcup_{i\in I}\mathscr{T}_i| \leq sup(|I|,|X^X|)$. Da $|X^X| = |\mathscr{P}(X)|$, folgt somit $|I| = |\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))|$.

9.6.5 Korollar

Für jede unendliche Menge X existiert eine Familie $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(X)$, mit $|\mathscr{C}| = |\mathscr{P}(X)|$ und der Eigenschaft, dass $|C_1 \cap \ldots \cap C_m \cap (X \setminus C_{m+1}) \cap \ldots \cap (X \setminus C_n)| = |X|$ für paarweise verschiedene Elemente $C_1,\ldots,C_m,C_{m+1},\ldots,C_n$ aus $\mathscr{C}$ mit $0 \leq m \leq n$ gilt.

Beweis: $\{0,1\}^{\mathscr{P}(X)}$ enthält eine extrem dichte Teilmenge Y mit $|X| = |Y|$. Für $K \in \mathscr{P}(X)$ setze $U_K^i := \prod_{L\in\mathscr{P}} O_L$, wobei $O_L = \{0,1\}$ für $L \neq K$ und $O_K = \{i\}$. Mit anderen Worten: U_K^i ist eine typische Subbasismenge der Produkttopologie. Setze dann $\mathscr{C}' := \{Y \cap U_K^1 \mid K \in \mathscr{P}(X)\} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Für paarweise verschiedene $K_1,\ldots,K_n \in \mathscr{P}(X)$ mit $0 \leq m \leq n$ gilt dann: $(Y \cap U_{K_1}^1) \cap \ldots \cap (Y \cap U_{K_m}^1) \cap [Y \setminus (Y \cap U_{K_{m+1}}^1)] \cap \ldots \cap [Y \setminus (Y \cap U_{K_n}^1)] = Y \cap U_{K_1}^{i_1} \cap \ldots \cap U_{K_n}^{i_n}$, wobei $i_k = 1$ für $k \leq m$ und $i_k = 0$ für $m < k \leq n$. Letztere Menge hat aber Kardinalität $|Y|$, da diese extrem dicht in $\{0,1\}^{\mathscr{P}(X)}$ liegt. Für ein bijektives $f : Y \to X$ findet sich unser gesuchtes $\mathscr{C}$ dann als $\{f(C') \mid C' \in \mathscr{C}'\}$.

10 Boolsche Verbände und Topologie

"Eine Lüge ist bereits dreimal um die Erde gelaufen, bevor sich die Wahrheit die Schuhe anzieht."
Mark Twain

10.1 Grundlegendes

Topologische Methoden kommen in Gebieten, die auf den ersten Blick nichts mit Topologie zu tun haben, erstaunlich oft zur Anwendung. Ein Beispiel ist die Theorie Boolscher Verbände.

10.1.1 Definition

partielle Ordnung Eine Relation $\leq$ auf einer Menge X heißt partielle Ordnung, falls gilt:
1) $\leq$ ist reflexiv ($x \leq x$)
2) $\leq$ ist transitiv ($x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$)
3) $\leq$ ist antisymmetrisch ($x \leq y$ und $y \leq x \rightarrow x = y$)
Falls $\leq$ zudem auch noch vollständig ist (also immer $x \leq y$ oder $y \leq x$ oder$x = y$), so heißt $\leq$ eine totale Ordnung. Total geordnete Teilmengen einer partiellen Ordnung werden zuweilen auch Kette genannt.

10.1.2 Definition

Verband Eine Menge X zusammen mit einer partiellen Ordnung $\leq$ heißt ein Verband, falls es zu je zwei Elementen $x, y \in X$ zwei Elemente $i, s \in X$ gibt mit:
1) $x \leq s$ und $y \leq s$
2) falls auch $x \leq u$ und $y \leq u$ für ein $u \in X$, so gilt $s \leq u$.
3) $i \leq x$ und $i \leq y$
4) falls auch $w \leq x$ und $w \leq y$ für ein $w \in X$, so gilt $w \leq i$.
Das Element s wird mit $x \vee y$ bezeichnet und auch Supremum genannt und das Element i wird mit $x \wedge y$ bezeichnet und auch Infimum genannt.
Zu je zwei Elementen existiert also das Supremum und Infimum (eindeutig bestimmt).

10.1.3 Lemma

In einem Verband gilt:
V1 $x \wedge y = y \wedge x$ und $x \vee y = y \vee x$
V2 $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ und $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
V3 $(x \wedge y) \vee y = y = (x \vee y) \wedge y$ für alle x, y, z

Beweis: 1) ist klar!

2) Es gilt $x \leq (x \vee y) \vee z$, $y \leq (x \vee y) \vee z$ und $z \leq (x \vee y) \vee z$, also auch $y \vee z \leq (x \vee y) \vee z$ und zusammen also auch $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. Die andere Ungleichung beweist man analog. Ebenso beweist man die zweite Gleichung.

3) Wir haben $(x \wedge y) \vee y \leq y$ (klar). Falls auch noch $(x \wedge y) \vee y \leq z$, dann auf jeden Fall auch $y \leq z$. Also ist $(x \wedge y) \vee y = y$. Vollkommen analog beweist sich die zweite Gleichung.

10.1.4 Bemerkung

Offensichtlich hat in einem Verband auch jede endliche Menge ein Supremum und Infimum. Und es gilt $inf\{x_1, ...x_n\} = x_1 \wedge ... \wedge x_n$ bzw. $sup\{x_1, ...x_n\} = x_1 \vee ... \vee x_n$.
Hat die ganze Menge sogar ein Supremum oder Infimum, so ist dies auch eindeutig bestimmt. Denn währen sowohl x, als auch y ein Supremum, dann währe $y \leq x \vee y \leq x$ und analog $x \leq y$, also $x = y$. Der Beweis der Eindeutigkeit des Infimum läuft wieder analog.
Falls in einem Verband das Supremum existiert, so bezeichnen wir es mit 1. Entsprechend bezeichnen wir das Infimum mit 0.

10.1.5 Definition

komplementierbar Ein Verband heißt komplementierbar, wenn er ein Supremum 1, ein Infimum 0 hat. Und wenn zu jedem Element x ein Element y existiert, derart, dass $x \vee y = 1$ und $x \wedge y = 0$ gelten (das Komplement) (V4). Offensichtlich gilt $1 \wedge x = x$, $1 \vee x = 1$, $0 \vee x = x$ und $0 \wedge x = 0$ für jedes x.
Er heißt distributiv, falls beide Distributivgesetze gelten (V5). Also $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ und $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.
Man rechnet übrigens leicht nach, dass bereits eins der Distributivgesetze ausreicht um das andere zu beweisen.

10.1.6 Lemma

In einem distributiven komplementierbaren Verband sind die Komplemente eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $x \vee y = 1$ und $x \wedge z = 0$. Dann haben wir $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z) = 1 \wedge (y \vee z) = y \vee z$. Aus Symmetriegründen gilt auch $z = y \vee z$.

10.1.7 Definition

Boolscher Verband Ein distributiver komplementierbarer Verband heißt von nun an Boolscher Verband oder Boolsche Algebra.

10.1.8 Bemerkung

Wir bezeichnen das Komplement von x mit x^*. Man sieht dann sofort $(x^*)^* = x$. Aus der Eindeutigkeit der Komplemente folgt ferner $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$ und $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$ (die de Morganschen Regeln).

10.1.9 Bemerkung

Dualitätsprinzip In V1 - V5 können wir $\wedge$ und $\vee$, 1 und 0 vertauschen und so die Aussagen in einander überführen. Falls wir also eine Aussage haben in der $\wedge$ und $\vee$, 1 und 0, $\leq$ und $\geq$, Ideal und Filter vorkommen und diese paarweise miteinander vertauschen, erhalten wir eine Aussage vom gleichen Wahrheitswert.

10.1.10 Lemma

In einem Boolschen Verband gilt: $x \wedge y^* = 0 \Leftrightarrow x \leq y$.

Beweis: Falls $x \wedge y^* = 0$, dann gilt: $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y^*) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) = x \wedge y$, also $x \leq y$. Falls $x \leq y$, dann gilt $x = x \wedge y$ und es folgt: $x \wedge y^* = x \wedge y \wedge y^* = x \wedge 0 = 0$.

10.1.11 Definition

Teilverband Eine nichtleere Teilmenge X' eines Boolschen Verbandes X heißt Teilverband, falls für $x, y \in X'$ auch $x \wedge y, x \vee y x^* \in X'$. Offensichtlich umfasst jeder Teilverband $\{0, 1\}$, welcher selber somit der kleinste Teilverband ist.

10.1.12 Definition

Erzeugnis Sei X ein Boolscher Verband und $A \subseteq X$. Das Erzeugnis von A ist wie folgt definiert: $\langle A \rangle := \bigcap\{Y \subseteq X \mid A \subseteq Y$ und Y ist ein Teilverband $\}$. Setze $\alpha := \{a_1^{i_1} \wedge ... \wedge a_n^{i_n} \mid a_k \in A,\ i_k \in \{1, *\}\}$, Dann gilt $\langle A \rangle = \{b_1^{j_1} \vee ... \vee b_m^{j_m} \mid b_k \in \alpha,\ j_k \in \{1, *\}\}$, wobei wir $x^1 = x$ setzen. Falls A also endlich ist, so auch $\langle A \rangle$. Der Nachweis bleibt als Übung.

10.2 Filter und Ultrafilter

Ein Beispiel für Verbände sind die Potenzmengenverbände. Und in denen haben wir einen interessanten Begriff definiert: Filter. Diese kann man auch in allgemeinen Boolschen Verbänden definieren.

10.2.1 Definition

Filter, Ideal
Eine nichtleere echte Teilmenge φ von einem Boolschen Verband X heißt Filter falls:

1) $x, y \in \varphi \ \rightarrow \ x \wedge y \in \varphi$ für alle x, y.
2) Wenn $x \in \varphi$ und $x \leq y$, dann auch $y \in \varphi$.
Eine nichtleere echte Teilmenge $\mathscr{I}$ von einem Verband X heißt Ideal falls:
1) $x, y \in \mathscr{I} \ \rightarrow \ x \vee y \in \mathscr{I}$ für alle $x, y \in \mathscr{I}$
2) Wenn $y \in \mathscr{I}$ und $x \leq y$, dann auch $x \in \mathscr{I}$.

10.2.2 Definition

endliche Schnitt Eigenschaft (eSE) Eine nichtleere Teilmenge Y eines Boolschen Verbandes habe die eSE wenn das Infimum jeder endlichen Teilmenge von Y ungleich 0 ist.

10.2.3 Lemma

A habe die eSE. Dann hat $A \cup \{y\}$ oder $A \cup \{y^*\}$ die eSE.

Beweis: Denn angenommen $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge y = 0 = b_1 \wedge \ldots \wedge b_m \wedge y^*$, dann folgt auch $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \ldots \wedge b_m \wedge y = 0 = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n b_1 \wedge \ldots \wedge b_m \wedge y^*$, also folgt aus $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \ldots \wedge b_m \leq (y^*)^* = y$ und $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \ldots \wedge b_m \leq y^*$ also $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \ldots \wedge b_m \leq y^* \wedge y = 0 \ \Rightarrow$ Widerspruch.

10.2.4 Bemerkung

Für eine Teilmenge A eines Verbandes X bezeichne $A^0 := \{x \in X \mid \exists a \in A \text{ mit } a \leq x\}$. Und $A^c := \{inf\{E\} \mid E \subseteq A \text{ und } E \text{ ist endlich }\}$.

10.2.5 Definition

Basis Subbasis eines Filters Wenn φ ein Filter ist und $\mathscr{B}^0 = \varphi$, so heißt $\mathscr{B}$ Basis von φ. Wenn für eine Teilmenge $\mathscr{S}$ gilt: $\mathscr{S}^c$ ist eine Basis von φ, so heißt $\mathscr{S}$ Subbasis von φ.

10.2.6 Lemma

Für jede Teilmenge A eines Boolschen Verbandes X gilt: Jeder Filter, welcher A umfasst, umfasst auch $(A^c)^0$. Außerdem ist $(A^c)^0$ ein Filter genau dann, wenn A die eSE hat.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung ist offensichtlich.
Falls $(A^c)^0$ ein Filter ist, dann hat A die eSE (genauso offensichtlich). Nehmen wir an A habe die eSE. Wir müssen nun zeigen, dass $(A^c)^0$ ein Filter ist. Sicherlich ist $0 \notin (A^c)^0$. Also schon mal $\emptyset \neq A^0 \subsetneq X$. Seien $x, y \in (A^c)^0$. Dann gibt es $a, b \in A^c$ mit $a \leq x$ und $b \leq y$, also $a = a \wedge x$ und $b = b \wedge y$. Dann aber auch $a \wedge b = a \wedge x \wedge b \wedge y = a \wedge b \wedge x \wedge y$, was soviel bedeutet wie $a \wedge b \leq x \wedge y$. Und wegen $a \wedge b \in A^c$ ($a = inf\{x_1, \ldots x_n\} = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ und $b = inf\{y_1, \ldots y_m\} =$

$y_1 \wedge ... \wedge y_m$, also $inf\{x_1,...x_n,y_1,...y_m\} = x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge y_1 \wedge ... \wedge y_m = a \wedge b$. Somit ist auch $a \wedge b \in A^c$.) folgt dann $x \wedge y \in (A^c)^0$.
Falls $x \in (A^c)^0$ und $x \leq y$, dann gibt es $a \in A^c$ mit $a \leq x$. Also auch $a \leq y$ und somit $y \in (A^c)^0$.

10.2.7 Definition

Ultrafilter Ein Filter φ in einem Boolschen Verband heißt Ultrafilter, wenn er bezüglich der Inklusion maximal ist. Das heißt wenn $\varphi \subseteq \phi$ ist, für einen Filter ϕ, dann ist $\varphi = \phi$.

10.2.8 Lemma

Sei φ ein Filter in dem Boolschen Verband X. Dann ist äquivalent:
1) φ ist ein Ultrafilter.
2) Für jedes $x \in X$ gilt $x \in \varphi$ oder $x^* \in \varphi$.
3) Für alle $x,y \in X$ gilt: $x \vee y \in \varphi \;\Rightarrow\; x \in \varphi$ oder $y \in \varphi$.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) Sei $x \in X$ beliebig. Da φ die eSE hat, hat auch $\varphi \cup \{x\}$ oder $\varphi \cup \{x^*\}$ die eSE. Also o.B.d.A. $\varphi \cup \{x\}$ habe die eSE. Also ist $((\varphi \cup \{x\})^c)^0$ ein Filter, welcher φ umfasst. Da letzterer aber ein Ultrafilter ist, gilt $((\varphi \cup \{x\})^c)^0 = \varphi$ und somit $x \in \varphi$.
2) $\Rightarrow$ 3) Annahme es gibt $x,y \in X$ mit $x \vee y \in \varphi$ aber $x \notin \varphi$ und $y \notin \varphi$. Dann ist aber $x^* \in \varphi$ und $y^* \in \varphi$, also auch $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^* \in \varphi \;\Rightarrow\;$ Widerspruch.
3) $\Rightarrow$ 2) Für jedes $x \in X$ gilt $x \vee x^* = 1 \in \varphi$, also $x \in \varphi$ oder $x^* \in \varphi$.
2) $\Rightarrow$ 1) Offensichtlich ist ein Filter mit dieser Eigenschaft bereits maximal.

10.2.9 Ultrafiltersatz (Ultrafilter Theorem $\Rightarrow$ UFT)

Jede Teilmenge eines Boolschen Verbandes X mit der eSE kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.

Beweis: Da jede derartige Teilmenge zu einem Filter erweitert werden kann, genügt es also zu zeigen, dass jeder Filter in einem Ultrafilter liegt.
Sei also φ ein Filter. Betrachte $\Phi := \{\psi \subseteq X \mid \psi \text{ ist ein Filter, und } \varphi \subseteq \psi\}$.
Wir führen auf Φ als natürliche Ordnung die Inklusion ein und zeigen: Jede Kette aus Φ hat eine obere Schranke in Φ. Sei Ψ eine Kette aus Φ. Setze dann $\psi := \bigcup \Psi$. Sicherlich gilt $\phi \subseteq \psi$. Zu zeigen bleibt also noch, dass es sich bei ψ um einen Filter handelt. Falls $x,y \in \psi$, so gibt es $\sigma, \tau \in \Psi$ mit $x \in \sigma$ und $y \in \tau$. Da Ψ eine Kette ist folgt o.B.d.A. $\sigma \subseteq \tau$, also auch $y \in \tau$. Dann ist aber auch $x \wedge y \in \tau \subseteq \psi$. Die zweite Bedingung überprüft man ebenso. Wir haben also eine obere Schranke für Ψ in Φ gefunden. Das Zornsche Lemma garantiert uns also ein maximales Element ψ in Φ. Offensichtlich muss ψ dann ein Ultrafilter sein.

10.2.10 Lemma

Content Detector Sei X ein Boolscher Verband φ ein Filter auf X und A eine Teilmenge von X mit der Eigenschaft: Das Supremum jeder endlichen Teilmenge von A liegt in A. Dann gilt: $\varphi \cap A \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\;$ für jeden Ultrafilter ψ, welcher φ umfasst gilt $\psi \cap A \neq \emptyset$.

Beweis: $'' \Rightarrow ''$ ist klar!
$'' \Leftarrow ''$ Nehmen wir mal an an für jeden Ultrafilter ψ, welcher φ umfasst gilt $\psi \cap A \neq \emptyset$, aber $\varphi \cap A = \emptyset$. Das heißt: $\forall x \in \varphi \, \forall a \in A$ gilt $x \nleq a$. Also: $\forall x \in \varphi \, \forall a \in A$ gilt $x \wedge a^* \neq 0$. Wenn nun aber das Supremum jeder endlichen Teilmenge von A bereits in A liegt, so liegt Das Infimum jeder endlichen Teilmenge von $A^* := \{a^* \mid a \in A\}$ bereits in A^*. Insgesamt bedeutet dies, dass $\varphi \cup A^*$ die eSE hat. Darum gibt es einen Ultrafilter ψ der $\varphi \cup A^*$ umfasst. Offensichtlich umfasst dieser dann auch φ. Nach Voraussetzung gibt es ein $a \in A \cap \psi$. Da ψ aber auch a^* umfasst, ist dann auch $0 = a \wedge a^* \in \psi \;\Rightarrow\;$ Widerspruch.

10.2.11 Korollar

Jeder Filter in einem Boolschen Verband ist der Durchschitt aller ihn enthaltenen Ultrafilter.

10.3 Verbandhommomorphismen und Quotientenverbände

Wir untersuchen Abbildungen zwischen Verbänden und ”Quotienten” von Verbänden.

10.3.1 Definition

Homomorphismus Eine Abbildung f zwischen zwei Boolschen Verbänden $f : X \to Y$ heißt Homomorphismus, falls:
1) Für alle $x, y \in X$ gilt $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
2) Für alle $x, y \in X$ gilt $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.
3) Für alle $x \in X$ gilt $f(x^*) = f(x)^*$.
Ist f sogar bijektiv, so heißt f ein Isomorphismus (in Symbolen: $X \simeq Y$).
Das Supremum wird sowohl in X als auch in Y mit 1 bezeichnet. Ebenso das Infimum mit 0.

10.3.2 Lemma

Für einen Homomorphismus $f : X \to Y$ gilt:
1) $x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y)$

2) $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$
3) Für ein Teilverband X' von X ist $f(X')$ ein Teilverband von Y

Beweis: Trivial.

10.3.3 Lemma

Sei φ ein Filter im Boolschen Verband X.
1) Durch $x \sim y \Rightarrow \exists p \in \varphi$ mit $x \wedge p = y \wedge p$ wird auf X eine Äquivalenzrelation definiert.
2) Wenn $x \sim x'$ und $y \sim y'$, dann auch
a) $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ und $x \vee y \sim x' \vee y'$
b) $x^* \sim x'^*$.
3) Für x, y setze $x \odot y := (x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y)$. Dann gilt:
a) $x \sim y \Leftrightarrow x \odot y \in \varphi$.
b) $x \odot y = 1 \Leftrightarrow x = y$
4) Bezeichne $[x]$ die Äquivalenzklasse von x, so bildet $X/\varphi := \{[x] \mid x \in X\}$ vermöge $[x] \wedge [y] = [x \wedge y], [x] \vee [y] = [x \vee y]$ und $[x]^* = [x^*]$ einen weiteren Boolschen Verband - den Quotientenverband (modulo φ). Außerdem gilt $[x] = [y] \Leftrightarrow x \odot y \in \varphi$. Im speziellen also $[x] = [1] = 1 \Leftrightarrow x \odot 1 = x \in \varphi$.

Beweis: **1)** ist trivial.
2) a) ist trivial.
2) b) $x \wedge p = x' \wedge p$ impliziert $x^* \vee p^* = x'^* \vee p^*$. Mit $p \wedge (x^* \vee p^*) = P \wedge (x'^* \vee p^*)$ folgt dann $p \wedge x^* = p \wedge x'^*$.
3) a) Sei $x \sim y$, also $x \wedge p = y \wedge p$. Aus dem Beweis von 2b) folgt $x^* \wedge p = y^* \wedge p$. Also gilt: $(x \vee y^*) \wedge p = (x \wedge p) \vee (y^* \wedge p) = (x \wedge p) \vee (x^* \wedge p) = (x \vee x^*) \wedge p = p \in \varphi \Rightarrow x \vee y^* \in \varphi$. Analog sieht man $x^* \vee y \in \varphi$. Also auch $x \odot y \in \varphi$.
Sei $x \odot y \in \varphi$. Setzt man $p := x \odot y = (x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) = (x^* \wedge y^*) \vee (x \wedge y)$, so kann man nachrechnen $x \wedge p = y \wedge p$, also $x \sim y$.
3) b) Falls $x = y$, dann offensichtlich $x \odot y = 1$.
Sei $x \odot y = 1$. Dann muss $x \vee y^* = 1$ und $x^* \vee y = 1$ sein. Also durch komplementieren der zweiten Gl. $x \wedge y^* = 0$. Die Eindeutigkeit der Komplemente liefert dann $x = y$.
4) Folgt unmittelbar aus 1) bis 3).

10.3.4 Lemma

Sei $f : X \to Y$ Ein Homomorphisms zwischen zwei Boolschen Verbänden. Dann ist $\varphi_f := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ ein Filter und $f(X) \simeq X/\varphi_f$.

Beweis: Das es sich bei φ_f um einen Filter handelt, rechnet man direkt nach.
Definiere $g : X/\varphi_f \to f(X)$ durch $[x] \mapsto f(x)$. Falls $[x] = [y]$, so $x \odot y \in \varphi_f$, also $1 = f(x \odot y) = f(x) \odot f(y)$ und damit $f(x) = f(y)$. g ist also wohldefiniert. Das es sich bei g um einen Homomorphismus handelt ist klar, bleibt noch die Bijektivität zu zeigen. Sei $z \in f(X)$, dann ist $z = f(x) = g([x])$ für ein $x \in X$. Falls $g([x]) = g([y])$, dann ist auch $f(x) = f(y)$. Also gilt $f(x^* \vee y) = f(x)^* \vee f(y) = 1 = f(x) \vee f(y)^* = f(x \vee y^*)$, woraus $x^* \vee y, x \vee y^* \in \varphi_f$ folgt. Dann aber auch $(x^* \vee y) \wedge (x \vee y^*) = x \odot y \in \varphi_f$, und deshalb gilt $[x] = [y]$. Also ist g auch injektiv.

10.3.5 Bemerkung

Wir beobachten $g([x]) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \varphi_f$, also $\varphi_g = \{[1]\}$. Folgendes Lemma stellt dies nochmal klar heraus.

10.3.6 Lemma

Ein Homomorphismus $f : X \to Y$ zwischen zwei Boolschen Verbänden ist genau dann injektiv, wenn $\varphi_f = \{1\}$.

Beweis: Sei $\varphi_f = \{1\}$. Falls $f(x) = f(y)$, dann (wie eben) auch $x \odot y \in \varphi_f$, also $x \odot y = 1$ und somit $x = y$. Falls f injektiv ist, dann klarerweise $\varphi_f = \{1\}$.

10.3.7 Lemma

In einem Boolschen Verband X ist äquivalent:
1) φ ist ein Ultrafilter.
2) $X/\varphi \simeq \{0,1\}$.

Beweis: Falls φ ein Ultrafilter ist, so prüfe man bitte nach, dass $f : X/\varphi \to \{0,1\}$ definiert durch $[x] \mapsto 1$, falls $x \in \varphi$ und $[x] \mapsto 0$, falls $x \notin \varphi$, ein Isomorphismus ist.
Sei andererseits $X/\varphi \simeq \{0,1\}$. Dann ist $[x] \neq [x^*]$, also $[x] = 1$ und $[x^*] = 0$ oder umgekehrt. Und demnach $x \in \varphi$ oder $x^* \in \varphi$.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer kleinen Anwendung des Ultrafiltersatzes, einem Lemma von Rasiowa, Sikorski und Tarski, welches Anwendung in der Logik hat (beispielsweise Gödels Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik).

10.3.8 Lemma

Sei X ein Boolscher Verband, $X \ni x \neq 0$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X, die alle ein Infimum besitzen, Also $a_n := inf(A_n)$. Es gibt dann einen Ultrafilter ψ in X, mit $h(a_n) = inf\{h(a) \mid a \in A_n\}$, wobei $h : X \to X/\psi \simeq \{0,1\}$ den kanonischen Homomorphismus bezeichnet ($h(x) = [x]$).

Beweis: Wir definieren rekursiv eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \in A_n$, so dass $\{x, a_0 \vee b_0^*, \ldots, a_n \vee b_n^*\}$ die eSE hat. Sei $m \in \mathbb{N}$ und für $n < m$ seien entsprechende b_n bereits gefunden. Wir definieren dann $y := x \wedge (a_0 \vee b_0^*) \wedge \ldots \wedge (a_{m-1} \vee b_{m-1}^*)$, falls $m > 0$ und $y := x$, falls $m = 0$. In jedem Fall ist $y \neq 0$!
Nehmen wir mal an $y \wedge (a_m \vee b^*) = 0$, für jedes $b \in A_m$. Dann also $y \wedge a_m = 0$ und $y \wedge b^* = 0$ für jedes $b \in A_m$. Das heißt aber $y \leq b$ für jedes $b \in A_m$, also $y \leq a_m$. Dann gilt $y = y \wedge a_m = 0$ im Widerspruch zu Voraussetzung. Es muss also ein $b =: b_m \in A_m$ geben, mit $y \wedge (a_m \vee b_m^*) \neq 0$. Die entsprechende Folge der $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich also konstruieren. Wenn $\{x, a_0 \vee b_0^*, \ldots, a_n \vee b_n^*\}$ die eSE für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat, dann hat also auch $Y := \{x, a_0 \vee b_0^*, \ldots, a_n \vee b_n^*, \ldots\}$ die eSE und es gibt einen Ultrafilter ψ auf X mit $Y \subseteq \psi$. Betrachten wir $h : X \to X/\psi$. Es gilt $h(a_n) \vee h(b_n)^* = h(a_n \vee b_n^*) = 1$, denn $a_n \vee b_n^* \in \psi$. Also $h(a_n) \geq h(b_n)$ und demnach $inf\{h(b) \mid b \in A_n\} \leq h(a_n)$. Andererseits gilt $a_n = inf(A_n)$, also $a_n \leq b$, für alle $b \in A_n$ und somit $h(a_n) \leq h(b)$, für jedes $b \in A_n$. Wir bekommen $h(a_n) \leq inf\{h(b) \mid b \in A_n\}$. Zusammen ergibt dies dann $h(a_n) = inf\{h(a) \mid a \in A_n\}$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$).

10.4 Topologische Formulierungen des Ultrafiltersatzes (UFT)

10.4.1 Definition

Spektrum Das Spektrum eines Boolschen Verbandes X ist die Menge aller Homomorphismen $f : X \to \{0,1\}$ und wird mit $Spek(X)$ bezeichnet. $Spek(X)$ steht offenbar in natürlicher Bijektion zu $\Phi := \{\varphi \subseteq X \mid \varphi \text{ ist ein Ultrafilter }\}$.

10.4.2 Lemma

Sei X ein Boolscher Verband und $0 < x, y \in X$ zwei verschiedene Elemente. Dann gibt es ein Ultrafilter φ auf X, welcher genau eines der beiden Elemente enthält.

Beweis: Da $x \neq y$ gilt also **nicht**: $x \wedge y^* = 0$ und $x^* \wedge y = 0$. Das hieße sonst ja $x \leq y$ und $y \leq x$. Also z.B. $x \wedge y^* \neq 0$. Dann hat $\{x, y^*\}$ aber die eSE und kann somit zu einem Ultrafilter erweitert werden, der dann natürlich nicht y enthält.

10.4.3 Satz

Sei X ein Boolscher Verband. Folgende Behauptungen sind äquivalent:
a) UFT
b) Jeder Boolsche Verband hat einen Ultrafilter.
c) $Spek(X) \neq \emptyset$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) ist klar! Zu zeigen ist dann nur noch b) $\Rightarrow$ a).

Sei φ ein beliebiger Filter in dem Boolschen Verband X und ψ ein Ultrafilter in X/φ. Ferner bezeichne $f : X \to X/\phi$ den kanonischen Homomorphismus. Die Behauptung ist nun, dass $f^{-1}(\psi)$ ein Oberultrafilter von φ ist. Wenn $x \in \varphi$, dann $f(x) = [x] = [1] \in \psi$, also $x \in f^{-1}(\psi)$. Das $f^{-1}(\psi)$ ein Filter ist, bestätigt eine kleine Rechnung. Exemplarisch sei noch gezeigt, dass $f^{-1}(\psi)$ ein Ultrafilter ist. Sei $x \vee y \in f^{-1}(\psi)$, also $[x \vee y] = [x] \vee [y] \in \psi$, woraus folgt $[x] \in \psi$ oder $[y] \in \psi$ und somit $x \in f^{-1}(\psi)$ oder $y \in f^{-1}(\psi)$.

Wir haben bereits gesehen, dass der Satz von Tychonoff äquivalent zu Auswahlaxiom ist (auf Basis von ZF). Wir haben aus dem Auswahlaxiom auch den Ultrafiltersatz abgeleitet. Interessanterweise ist dieser nun echt schwächer als das Auseahlaxiom (werden wir nicht beweisen), aber wieder äquivalent dazu, das dass Produkt kompakter Hausdorf-Räume ein kompakter Hausdorf-Raum ist. Dieses und ein ähnliches Resultat werden wir hier zeigen.

10.4.4 Satz

Die folgenden Behauptungen sind äquivalent.

a) Der Ultrafiltersatz (UFT)

b)Ein Produkt $X = \prod_{i \in I} X_i$ topologischer Räume $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ ist genau dann ein kompakter Hausdorff-Raum, wenn jeder Faktor ein kompakter Hausdorff-Raum ist.

c) $\{0,1\}^I$ ist kompakt in der Produktopologie für jede Menge I, wobei $\{0,1\}$ mit der Diskreten Topologie versehen wird.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) wie beim Satz von Tychonoff. An der Stelle, an der man das Auswahlaxiom brauchte, muss man nun nicht mehr auswählen sondern nimmt den eindeutigen Punkt gegen den $pr_i(\varphi)$ konvergiert (Hausdorff-Raum). Der Rest ist klar.

b) $\Rightarrow$ c) Klar!

c) $\Rightarrow$ a) Wir zeigen: für jeden Verband X ist $Spek(X) \neq \emptyset$.

Für endliches $A \subseteq X$ setze $C_A := \{f \in \{0,1\}^X \mid f_{|\langle A \rangle} \in Spek(\langle A \rangle)\}$. Man verifiziere bitte, dass alle C_A abgeschlossen in $\{0,1\}^X$ sind (man zeige die Komplemente sind offen und beachte dabei, dass $\langle A \rangle$ auch endlich ist).

Falls $A_1, ..., A_n$ endliche Teilmengen darstellen, so ist auch $\langle \bigcup_{k=1}^n A_k \rangle$ endlich und es gibt somit ein nicht triviales Element f aus $Spek(\langle \bigcup_{k=1}^n A_k \rangle)$. Dieses kann man (indem man auf $X \setminus \langle \bigcup_{k=1}^n A_k \rangle$ Nullen zuweist) auf ganz X ausdehnen und somit haben wir ein Element in $\bigcap_{k=1}^n C_{A_k}$. Also gilt $Spek(X) = \bigcap_{A \subseteq X} C_A \neq \emptyset$ (Wenn $\bigcap_{A \subseteq X} C_A = \emptyset$, so gäbe es endlich viele

$A_1,...,A_n$ mit $\bigcap_{k=1}^n C_{A_k} = \emptyset$ im Widerspruch dazu, dass diese nach dem eben gezeigten gerade einen nicht leeren Schnitt haben. Wir setzen schließlich voraus, dass $\{0,1\}^X$ kompakt ist.).

10.4.5 Satz

Die folgenden beiden Bedingungen sind äquivalent:
a) Der Ultrafiltersatz (UFT).
b) **(Stone, Čech)** Für jeden topologischen Raum (X,τ) existiert ein kompakter Hausdorff-Raum $(\beta X,\sigma)$ und eine stetige Abbildung $h : X \to \beta X$, so dass für jeden kompakten Hausdorff-Raum (K,ρ) und jede stetige Abbildung $f : X \to K$ eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\overline{f} : \beta X \to X$ existiert, mit $\overline{f} \circ h = f$. Falls auch γX mit einem h' dieselben Eigenschaften hat, so sind γX und βX bereits homöomorph.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) Haben wir schon bewiesen (Satz 4.6.4).
b) $\Rightarrow$ a) Es reicht wenn wir zeigen, dass der Produktraum $X := \prod_{i\in I} X_i$ einer Familie $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ kompakter Hausdorff-Räume wieder ein kompakter Hausdorff-Raum ist. Nach Voraussetzung existiert für (X_j,τ_j) und $pr_j : X \to X_j$ genau eine stetige Abbildung $\overline{pr}_j : \beta X \to X_j$ mit $\overline{pr}_j \circ h = pr_j$. Definiere $g : \beta X \to X$ durch $g(x) := (\overline{pr}_j(x))_{j\in I}$. Dann gilt für $(x_i)_{i\in I} \in X$
$g \circ h((x_i)_{i\in I}) = (\overline{pr}_j(h((x_i)_{i\in I})))_{j\in I} = (pr_j((x_i)_{i\in I}))_{j\in I} = (x_j)_{j\in I}$, also $g \circ h = id_X$.
Wendet man die Voraussetzung nun auf X und βX an, so erhält man: Es gibt genau eine stetige Abbildung $\overline{f} : \beta X \to \beta X$ mit $\overline{f} \circ h = h$. Offensichtlich tun dies sowohl $id_{\beta X}$, als auch $h \circ g$. Folglich ist $h : X \to \beta X$ ein Homöomorphismus und X demzufolge ein kompakter T_2-Raum.

10.5 Boolscher Raum, charakteristischer Verband und Stone Raum

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass jeder Boolsche Verband zu einem Teilverband eines Potenzmengenverbandes isomorph ist.

10.5.1 Definition

Boolscher Raum, charakteristische Verband, Stone Raum
Kompakte Hausdorffräume mit einer Basis aus zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen heißen Boolsche Räume. Wenn (X,τ) ein Boolscher Raum ist, so wird $C(X) := \{O \subseteq X \mid O \text{ ist offen und abgeschlossen } \}$ der charakteristische Verband von X genannt ($C(X) \subseteq P(X)$ wird mit $\cap,\cup$ ein Teilverband des Potenmengenverbandes! Falls nicht klar $\Rightarrow$ Übungsaufgabe!).
Sei X ein Boolscher Verband. Dann bezeichne $\Phi[X] := \{\varphi \subseteq X \mid \varphi \text{ ist ein Ultrafilter}\}$, ferne sei für ein $x \in X$ $u(x) := \{\varphi \in \Phi[X] \mid x \in \varphi\}$ (also ist $u : X \to \mathscr{P}(Phi[X])$ eine Abbildung). Das System $u[X] := \{u(x) \mid x \in X\}$ ist abgeschlossen gegenüber endlichen Durchschnitten

(falls nicht klar $\Rightarrow$ Übungsaufgabe), ist also eine Basis der Topologie $\tau := top\,(u[X])$. Unter dem Stone Raum des Bolschen Verbandes X verstehen wir nun $(\Phi[X], \tau)$.

10.5.2 Lemma

Wenn (X, τ) ein Boolscher Raum ist und $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ sowohl ein Teilverband der Potenzmenge, als auch eine Basis von τ, so gilt $\mathscr{A} = C(X)$.

Beweis: $A \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A$: offen. Da $\mathscr{A}$ ein Teilverband ist, ist also auch $X \setminus A \in \mathscr{A}$ und somit ist auch $X \setminus A$ offen, A also abgeschlossen, ergo $A \in C(X)$.
Sei jetzt $A \in C(X)$, also A sowohl offen, als auch abgeschlossen. Dann gibt es eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen aus $\mathscr{A}$ mit $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Da X ein kompakter Raum ist, ist A als abgeschlossene Menge auch kompakt. Somit gibt es also $i_1, \ldots i_n$ mit $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k} \in \mathscr{A}$ ($\mathscr{A}$ ist als Teilverband vorausgesetzt worden). Also tatsächlich $\mathscr{A} = C(X)$.

10.5.3 Satz

a) Ein Boolscher Verband X ist isomorph zur charakteristischen Algebra seines Stone Raumes, also $X \simeq C(\Phi[X])$.

b) Ein Boolscher Raum (X, τ) ist homöomorph zum Stone Raum seiner charakteristischen Algebra, also $X \cong \Phi[C(X)]$.

Beweis: Seien $\varphi, \psi \in \Phi[X]$ mit $\varphi \neq \psi$. Dann gibt es ein $x \in \varphi \setminus \psi$, also $x^* \in \psi$, so dass folgt: $u(x) \cap u(x^*) = \emptyset$, aber $\varphi \in u(x)$ und $\psi \in u(x^*)$. Je zwei verschiedene Elemente aus $\Phi[X]$ lassen sich also durch disjunkte offene Mengen trennen.

Es gelten folgende Rechenregeln: $u(x) \cap u(y) = u(x \wedge y)$, $u(x) \cup u(y) = u(x \vee y)$, $u(x^*) = \Phi[X] \setminus u(x)$ und $u(0) = \emptyset$ bzw. $u(1) = \Phi[X]$.

$\{u(x) \mid x \in X\}$ ist also ein Teilverband des Potenzmengenverbandes $\mathscr{P}(\Phi[X])$ und $u : X \to \mathscr{P}(\Phi[X])$ ein entsprechender isomorphismus ist. Außerdem sieht man damit, dass $\{u(x) \mid x \in X\}$ eine Basis aus offenen und abgeschlossenen Mengen ist. Wir zeigen nun noch: $\Phi[X]$ ist mit dieser Topologie auch kompakt. Sei $(u(x))_{x \in A}$ eine Überdeckung von $\Phi[X]$, für eine geeignete Teilmenge A von X. Gibt es keine endliche Teilüberdeckung, so ist für jede endliche Teilmenge A' von A dann $\Phi[X] \setminus \bigcup_{x \in A'} u(x) = \Phi[X] \setminus u(\bigvee_{x \in A'} x) = u(\bigwedge_{x \in A'} x^*) \neq \emptyset$, also $\bigwedge_{x \in A'} x^* \neq 0$. Dann hat $A^* := \{a^* \mid a \in A\}$ die eSE und kann zu eine Ultrafilter φ auf X erweitert werden. Nun gibt es aber auch ein $x \in A$ mit $\varphi \in u(x)$, also $x \in \varphi$. Dies steht aber im Widerspruch zu $x^* \in A^* \subseteq \varphi$. Zu jeder Überdeckung gibt es somit eine endliche Teilüberdeckung. Lemma 10.5.2 liefert somit $\{u(x) \mid x \in X\} = C(\Phi[X])$. Teil a) ist damit bewiesen.

b) Wir zeigen die Abbildung $f : X \to \Phi[C(X)]$ definiert durch $f(x) := \{O \in C(X) \mid x \in O\}$ ist ein wohldefinierter Homöomorphismus. Als erstes bemerken wir, dass tatsächlich $\{O \in C(X) \mid x \in O\} \in \Phi[C(X)]$ (falls nicht klar $\Rightarrow$ Übungsaufgabe).

Injektivität: Wenn $x \neq y$, dann gibt es disjunkte $U,V \in C(X)$ mit $x \in U$ und $y \in V$. Also offensichtlich $f(x) \neq f(y)$.

Surjektivität: Wenn φ ein Ultrafilter in $C(X)$ ist, dann ist φ ein System abgeschlossener Mengen mit der eSE. Nun ist X kompakt, also gibt es ein $x \in \bigcap_{P \in \varphi} P$. Das heißt $\varphi \subseteq \dot{X} \cap C(X)$. Auf der anderen Seite hat $(\dot{x} \cap C(X)) \cup \varphi$ offensichtlich die eSE und φ ist ein Ultrafilter. Also $\dot{x} \cap C(X) \subseteq \varphi$ und damit $\varphi = \dot{x} \cap C(X) = f(x)$.

Zeigen wir nun, dass f offen ist. Sei $O \in C(X)$ (Nachweis reicht auf einer Basis). $f(O) = \{f(x) \mid x \in O\} = \{\{U \in C(X) \mid x \in U\} \mid x \in O\} = \{\varphi \in \Phi[C(X)] \mid O \in \varphi\} = u(O)$, welches per Konstruktion offen ist. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : \Phi[C(X)] \to X$ ist also eine stetige Bijektion zwischen kompakten Hausdorf-Räumen und somit bereits ein Homöomorphismus.

10.5.4 Korollar

Jeder Boolsche Verband ist zu einem Teilverband eines Potenzmengenverbandes isomorph.

10.6 Atome, atomlose Boolsche Verbände, Cantorsches Diskontinuum

In diesem Abschnitt schauen wir uns endliche Boolsche Verbände an und zeigen, dass Abzählbar unendliche, atomlose Boolsche Verbände alle untereinander Isomorph sind.

10.6.1 Definition

Atome Ein Element x eines Verband X heißt Atom, wenn $0 \neq x$ und $\neg\exists y \in X$ mit $0 < y < x$. Ein Verband heißt atomlos, wenn er keine Atome hat.

10.6.2 Lemma

Sei X ein Boolscher Verband. Dann ist äquivalent:

1) a ist ein Atom.

2) $\dot{a} := \{b \in X \mid a \leq b\}$ ist ein Ultrafilter.

3) Es gibt genau einen Ultrafilter ψ auf X mit $a \in \psi$.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2): $\dot{a}$ ist offensichtlich ein Ultrafilter. Sei $a \neq y \in X$ und $y \notin \dot{a}$ und $y^* \notin \dot{a}$, also $a \nleq y$ und $a \nleq y^*$. Dann muss aber $a \wedge y = 0 = a \wedge y^*$ gelten. Dann aber $0 = 0 \vee 0 = (a \wedge y) \vee (a \wedge y^*) = a \wedge (y \vee y^*) = a$ - ein Widerspruch.

2) $Rightarrow$ 3): Es gibt einen Ultrafilter, nämlich $\dot{a}$. Jeder Ultrafilter der a enthält, enthält zwangsläufig auch $\dot{a}$, kann aber auch nicht größer sein, da dieser eben ein Ultrafilter ist.

3) $\Rightarrow$ 1): Wenn $0 < y < a$, dann existiert ein Ultrafilter ψ, der genau eines der Elemente y, a enthält. ψ kann also NICHT y enthalten! Nun kann aber $\dot{y}$ zu einem Ultrafilter ϕ erweitert werden, der aber ebenfalls a enthält. Es gilt $\psi \neq \phi$ - ein Widerspruch.

10.6.3 Lemma

Ein Boolscher Verband X ist genau dann atomlos, wenn zu je zwei $x, y \in X$ mit $x < y$ ein $z \in X$ existiert mit $x < z < y$, man sagt auch X liegt dicht in sich selbst.

Beweis: Jeder dicht in sich selbst liegende Boolsche Verband ist offensichtlich atomlos. Für die andere Richtung bemerken wir zuerst, dass diese zur charakteristischen Algebra ihres Stone Raum isomorph sind. Dort lässt es sich dann einfach beweisen, denn es handelt sich um einen Boolschen Raum ohne isolierte Punkte (Lemma 10.6.2). Seien U, V zwei sowohl offene, als auch abgeschlossene Mengen in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit $U \subseteq V$, aber $U \neq V$. Dann ist auch $W := V \setminus U$ offen und abgeschlossen und natürlich nicht leer. W muss aber auch unendlich sein. Für zwei $x, y \in W$ mit $x \neq y$ gibt es offen/abgeschlossene und disjunkte Mengen P, Q mit $x \in P$ und $y \in Q$. Dann ist aber $Z := U \cup (W \cap P)$ ebenfalls offen und abgeschlossen und es gilt: $U \subseteq Z \subseteq V$, mit $U \neq Z \neq V$.

10.6.4 Lemma

Ein endlicher Boolscher Verband X hat Atome und ist isomorph zu $\mathscr{P}(A)$, wenn A die Menge seiner Atome ist. Insbesondere hat er also $2^{|A|}$ Elemente.

Beweis: Der Verband ist endlich, also existieren klarerweise Atome! Sei ψ ein Ultrafilter auf X. Dann ist $a_\psi := \bigwedge_{x \in \psi} x \in \psi$, und da ψ ein Ultrafilter ist, muss a ein Atom sein! Man sieht also, dass Atome und Ultrafilter sich einander entsprechen. Der Stone Raum $\Phi[X] = \{\dot{a} \mid a \in A\}$ ist demnach endlich und es gilt $u(a) = \{\dot{a}\}$, für jedes $a \in A$ (Bezeichnungen entstammen dem Beweis zu Satz 10.5.3). Der Stone Raum besitzt somit die diskrete Topologie ($\{u(a) \mid a \in A\}$ ist eine Basis!) und deshalb ist $C(\Phi[X]) = \mathscr{P}(\Phi[X])$. Nun sind aber X und $C(\Phi[X])$ isomorph.

10.6.5 Definition

Cantorsches Diskontinuum Der Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, wobei wir auf $\{0,1\}$ die diskrete Topologie betrachten und $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der gewöhnlichen Produkttopologie versehen, heißt Cantorsches Diskontinuum.

10.6.6 Satz

Ein Boolscher Raum X, ohne isolierte Punkte und mit einer abzählbaren Basis $\mathscr{B}$, ist homöomorph zum Cantorschen Diskontinuum.

Beweis: Sei $\sigma := \{(U,V) \mid U,V \in \mathscr{B}$ mit $U \cap V = \emptyset$. Dann ist σ abzählbar, also $\sigma = \{(U_n,V_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, für eine geeignete Aufzählung. Wir konstruieren nun rekursiv für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $f : \{0,...,k\} \to \{0,1\}$ (also $f \in \{0,1\}^{\{0,...,k\}}$) eine nichtleere, offene und abgeschlossene Menge $X_{f(0)...f(k)}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $X = X_0 \cup X_1$ mit $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ und dann weiter $X_{f(0)...f(k)} = X_{f(0)...f(k)0} \cup X_{f(0)...f(k)1}$ mit $X_{f(0)...f(k)0} \cap X_{f(0)...f(k)1} = \emptyset$.

2) Falls $U := U_k \cap X_{f(0)...f(k)} \neq \emptyset \neq V_k \cap X_{f(0)...f(k)} =: V$, dann $U \subseteq X_{f(0)...f(k)0}$ und $V \subseteq X_{f(0)...f(k)1}$.

Das die Konstruktion möglich ist, sollte klar sein (man beachte, dass die U_n und V_n sowohl offen, als auch abgeschlossen sind). Für jedes $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ setze nun $X_f := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{f(0)...f(n)}$. Als Schnitt über eine Familie abgeschlossener Mengen mit der eSE in einem kompakten Raum gilt $X_f \neq \emptyset$. Für jedes solches f ist X_f sogar einelementig. Wären $a \neq b \in X_f$, dann gäbe es disjunkte Umgebungen $U_a, V_b \in \mathscr{B}$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $(U_a,V_b) = (U_n,V_n)$. Also $a \in U = U_a \cap X_{f(0)...f(n)}$ und $b \in V = V_b \cap X_{f(0)...f(n)}$. Aus der Eigenschaft 2) folgt $U \subseteq X_{f(0)...f(n)0}$ bzw. $V \subseteq X_{f(0)...f(n)1}$ im Widerspruch zu $a,b \in X_f \subseteq X_{f(0)...f(n+1)}$.

Das heißt $X_f = \{x_f\}$, für eindeutiges $x_f \in X$. Die Abbildung $g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to X$, definiert durch $f \mapsto x_f$ ist also injektiv. Surjektiv ist sie nach Konstruktion auch. Um zu zeigen, dass es ein Homöomorphismus ist, brauchen wir (da es sich um kompakte Hausdorff-Räume handelt) nur zeigen, dass sie offen ist. Da sie bijektiv ist, reicht es die Offenheit auf der standard Subbasis $\{\{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid f(k) = i\} \mid i \in \{0,1\},\ k \in \mathbb{N}\}$ nachzuweisen. Nun ist aber $g(\{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid f(k) = i\}) = \bigcup_{f\in\{0,1\}^{\{0,...,k-1\}}} X_{f(0)...f(k-1)i}$ und die letztere Menge ist offen.

10.6.7 Korollar

Abzählbar unendliche, atomlose Boolsche Verbände sind alle untereinander Isomorph.

Beweis: Seien X und Y zwei solche. Dann sind die zugehörigen Stone Räume homöomorph (folgt aus Satz 10.6.6, da sowohl $\Phi[X]$, als auch $\Phi[Y]$ Boolsche Räume, ohne isolierte Punkte mit einer abzählbaren Basis sind) und somit die charakteristischen Algebren isomorph. Letztere sind aber isomorph zu X bzw. Y.

10.6.8 Bemerkung

Wieviele Ultrafilter hat eigentlich so ein Boolscher Verband? Für Potenzmengenverbände haben wir diese Frage vollständig beantwortet. Abschließend wollen wir uns nun zumindest für abzählbare, atomlose Boolsche Verbände X die Anzahl aller Ultrafilter überlegen. Hier reicht es nämlich, aufgrund des eben gezeigten, sich auf die charakteristische Algebra des Cantorschen Diskontinuum zu beschränken. Für ein beliebiges $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist $\psi := \{O \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid O$ ist offen und abgeschlossen und $f \in O\}$ ein Ultrafilter in $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. Da der Raum T_2 ist, bekommen wir für verschiedene f demzufolge auch verschiedene Ultrafilter. Eine untere Grenze ist also $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$. Andererseits ist jeder Ultrafilter eines abzählbaren Boolschen Verbands X ein Element aus $\mathscr{P}(X)$. Nach oben haben wir also die Grenze $|\mathscr{P}(X)| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$. Es gibt also genau $\mathscr{P}(X)$ - viele Ultrafilter auf X.

11 Fixpunktsätze

"Sie sagen, der Terrorismus muss bekämpft werden und produzieren ihn selber! Sie sagen, Atomwaffen müssen bekämpft werden und haben sie selber! Sie sagen, Diktaturen müssen bekämpft werden und sind selber eine! Sie sagen, Demokratie muss verbreitet werden und bauen sie bei sich ab! Sie sagen, sie wollen Frieden und verbreiten aber Krieg! Sie sagen, sie kämpfen für Menschenrechte und foltern ohne Reue! An ihren Früchten werdet ihr sie erkennen!!!"

Freeman (http://alles-schallundrauch.blogspot.com/)

11.1 Fixpunkte und Ultrafilter

Eine weitere, sehr interessante Charakterisierung der Ultrafilter:

11.1.1 Lemma

Sei $f : X \to \mathscr{P}(X)$ eine Mengenwertige Abbildung mit $x \notin f(x)$ und $|f(x)| \leq k$ für alle $x \in X$ und festes $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Zerlegung $X = X_1 \cup ... \cup X_{2k+1}$ von X in $2k+1$ disjunkte Mengen X_i mit $X_i \cap \bigcup\{f(x) \mid x \in X_i\} = \emptyset$ für alle $i \in \{1,...,2k+1\}$.

Beweis: Beweisen wir zuerst den Fall, dass X endlich. Dies beweisen wir per Induktion nach $n = |X|$. Für $n \leq 2k+1$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $n > 2k+1$ und die Aussage für Mengen X' mit $|X'| < n$ bewiesen. Setze $P := \{(x,y) \in X \times X \mid y \in f(x)\}$. Für jedes $y \in X$ setzen wir außerdem $A_y := \{x \in X \mid y \in f(x)\}$. Zählen wir nun die Elemente von P auf zwei Weisen, so erhalten wir $\sum_{y \in X} |A_y| = |P| = \sum_{x \in X} |f(x)| \leq k \cdot |X|$. Folglich existiert ein $x' \in X$ mit $|A_{x'}| \leq k$. Nun setzen wir $X' := X \setminus \{x'\}$ und definieren $g : X' \to \mathscr{P}(X')$ durch $g(x) := f(x) \setminus \{x'\}$. Sei $X' = X'_1 \cup ... \cup X'_{2k+1}$ eine Zerlegung entsprechend der Induktionsvoraussetzung, mit $X'_i \cap \bigcup\{f(x) \mid x \in X'_i\} = \emptyset$ für alle $i \in \{1,...,2k+1\}$. Wegen $|f(x')| \leq k$ gibt es paarweise verschiedene $i_1,...,i_{k+1} \in \{1,...,2k+1\}$ mit $X'_{i_l} \cap f(x') = \emptyset$. Wegen $|A_{x'}| \leq k$ gibt es unter diesen ein i_l mit $A_{x'} \cap X'_{i_l} = \emptyset$ Wir setzen nun $X_i := \begin{cases} X'_i & \text{für } i \neq i_l \\ X'_i \cup \{x'\} & \text{für } i = i_l \end{cases}$ und haben damit die gesuchte Zerlegung gefunden. Sei nun X unendlich. Für jedes endliche $A \subseteq X$ definieren wir eine Abbildung $\phi(f,A) := A \cup \bigcup_{a \in A} f(a) \to \mathscr{P}(A \cup \bigcup_{a \in A} f(a))$ durch

$$\phi(f,A)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ \emptyset & \text{für } x \in A \setminus \bigcup_{a \in A} f(a) \end{cases}$$

Wir versehen $\{1,...,2k+1\}$ mit der diskreten Topologie und $Z := \{1,...,2k+1\}^X$ mit der Produkttopologie und nennen $g \in Z$ gut für $\phi(f,A)$, falls

$$g^{-1}(i) \cap (A \cup \bigcup_{a \in A} f(a)) \cap \bigcup\{\phi(f,A)(x) \mid x \in g^{-1}(i) \cap (A \cup \bigcup_{a \in A} f(a))\} = \emptyset$$

ist, für jedes $i \in \{1,...,2k+1\}$. Für jedes endliche $A \subseteq X$ setzen wir nun $G_A := \{g \in Z \mid g$ ist gut für $\phi(f,A)\}$. Jedes G_A ist in Z abgeschlossen und nicht leer wegen dem bereits bewiesenen endlichen Fall. Außerdem gilt offensichtlich $G_{A_1 \cup \ldots \cup A_m} \subseteq G_{A_1} \cap \ldots \cap G_{A_m}$ und aus der Kompaktheit von Z (Satz von Tychonoff) folgt die Existenz eines $g \in \bigcap \{G_A \mid A : \text{endlich} \subseteq X\}$. Dann ist $X_i := g^{-1}(i)$, $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$ die gesuchte Zerlegung.

11.1.2 Bemerkung

Man beachte, dass wir den Satz von Tychonoff nur für den Fall kompakter Hausdorffräume gebraucht haben. Diese Version ist aber äquivalent zum Ultrafiltersatz (siehe Satz 10.4.4) und damit echt schwächer als das volle Auswahlaxiom (welches normalerweise zum Beweis verwendet wird)!

11.1.3 Korollar (4-Mengen Zerlegungslemma)

Sei X eine Menge und $f : X \to X$ eine Abbildung. Dann gibt es eine Zerlegung X_0, X_1, X_2, X_3 von X mit $f(x) = x$ für alle $x \in X_0$ und $f(X_i) \cap X_i = \emptyset$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

Beweis: Wir setzen $X_0 := \{x \in X \mid f(x) = x\}$. Falls $X \setminus X_0 = \emptyset$, sind wir fertig. Andernfalls sei $x' \in X \setminus X_0$ und wir definieren eine Abbildung $g : X \to \mathscr{P}(X)$ durch

$$g(x) := \begin{cases} \{f(x)\} & \text{für } x \in X \setminus X_0 \\ \{x'\} & \text{für } x \in X_0 \end{cases}$$

Lemma 11.1.1 liefert uns eine entsprechende Zerlegung X_1', X_2' und X_3' von X. Wir setzen nun noch $X_i := X_i' \setminus X_0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und haben zusammen mit X_0 dann die gesuchte Zerlegung von X gefunden.

11.1.4 Satz

Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge und φ ein Filter auf X. Dann ist äquivalent:
1) φ ist ein Ultrafilter.
2) $\forall f \in X^X$ gilt: ($F_f := \{x \in X \mid f(x) = x\} \in \varphi$) oder ($\exists Q \in \varphi$ mit $Q \cap f(Q) = \emptyset$).

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) Das Zerlegungslemma liefert uns $X = F \cup X_1 \cup_2 \cup X_3$ (siehe oben). Da $X \in \varphi$, folgt aus Korollar 11.1.3, dass bereits eine der an der Zerlegung beteiligten Mengen im Filter liegen muss.

2) $\Rightarrow$ 1) Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ und $a \in A$ fest gewählt. Betrachte die Abbildung $f : X \to X$, definiert durch $f|A = id_A$ und $f(X \setminus A) \subseteq \{a\}$. Wir haben also $F_f = A$. Falls nun $F_f \in \varphi$, so offensichtlich $A \in \varphi$. Die Existenz solch eines Q hingegen liefert $X \setminus A \in \varphi$ (denn $Q \subseteq X \setminus A$). Nach Lemma 3.2.3 haben wir also einen Ultrafilter.

11.1.5 Korollar

Wenn $f : X \to X$ eine Abbildung ist und es einen Ultrafilter ψ auf X mit $f(\psi) \subseteq \psi$ gibt (Definition 3.2.4), dann ist $F := \{x \in X \mid f(x) = x\} \in \psi$. Aus $f(\psi) \subseteq \psi$ folgt übrigens sofort $f(\psi) = \psi$, denn Bildfilter von Ultrafiltern sind wieder Ultrafilter.

11.1.6 Lemma

Sei X eine unendliche Menge und seien ϕ, ψ zwei Ultrafilter auf X und $f, g : X \to X$ zwei Abbildungen mit $f(\psi) = \phi$ und $g(\phi) = \psi$ (im Sinne der Definition eines Bildfilters, Definition 3.2.4). Dann gibt es eine Bijektion $h : X \to X$ mit $h(\psi) = \phi$ (und dann natürlich auch sofort $h^{-1}(\phi) = \psi$).

Beweis: Es gilt $f \circ g(\phi) = \phi$ und $g \circ f(\psi) = \psi$. Entsprechend Korollar 11.1.3 sei X zerlegt als $X = F \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ und $X = G \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$ mit $F = \{x \in X \mid f \circ g(x) = x\}$ und $G = \{x \in X \mid g \circ f(x) = x\}$. Dann $\exists!\, Y \in \{F, A_1, A_2, A_3\}$ mit $Y \in \phi$. Falls $A_i \in \phi$ folgt wegen $f \circ g(\phi) = \phi$ dann $f \circ g(A_i) \in \phi$, im Widerspruch zu $f \circ g(A_i) \cap A_i = \emptyset$. Also $F \in \phi$ und analog $G \in \psi$. Aus $f \circ g(F) = F$ folgt $g \circ f(g(F)) = g(F)$, also $g(F) \subseteq G$ (andernfalls sei $x \in g(F) \cap B_i$, also $\exists\, z \in F$ mit $x = g(z) = g(f \circ g(z)) = g \circ f(x) \notin B_i$ - Widerspruch). Analog auch wieder $f(G) \subseteq F$. Dann gilt aber auch $F = f(g(F)) \subseteq f(G) \subseteq F$, also $f(G) = F$ und analog $g(F) = G$. Dies bedeutet $f|G : G \to F$ ist bijektiv (denn $g|F : F \to G$ ist die Inverse).

1. Fall G ist endlich. Dann ist auch F endlich und es gibt $x \in G$ und $y \in F$, mit $\psi = \dot{x}$ und $\phi = \dot{y}$. Eine beliebige Bijektion $h : X \to X$ mit $h(x) = y$ erfüllt dann $h(\psi) = \phi$.

2. Fall G ist unendlich. Sei $k : G \to G \times \{1,2\}$ bijektiv. $G_1 := k^{-1}(1)$ und $G_2 := k^{-1}(2)$ erfüllen dann $G = G_1 \cup G_2$ mit $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $|G| = |G_1| = |G_2|$. Da ψ ein Ultrafilter ist, gilt o.B.d.A. $G_1 \in \psi$. Nun gilt in jedem Fall $|X \setminus G_1| = |X| = |X \setminus f(G_1)|$ (in jedem Fall heißt, egal ob $|G| < |X|$ oder $|G| = |X|$). Es gibt also eine Bijekion $i : X \setminus G_1 \to X \setminus f(G_1)$. Wir definieren dann $h : X \to X$ durch $h(x) := \begin{cases} i(x) & \text{falls } x \in X \setminus G_1 \\ f(x) & \text{falls } x \in G_1 \end{cases}$. Ist nun $Q \in \psi$, so ist $Q \cap G_1 \in \psi$ und $h(Q \cap G_1) = f(Q \cap G_1) \in \phi$. Wegen $h(Q \cap G_1) \subseteq h(Q)$ ist offenbar auch $h(Q) \in \phi$. Also $h(\psi) \subseteq \phi$. Da mit ψ auch $h(\psi)$ ein Ultrafilter ist, gilt $h(\psi) = \phi$.

11.1.7 Lemma

Sei φ ein Filter auf X, ψ ein Ultrafilter auf Y und $f : X \to Y$ eine Abbildung mit $f(\varphi) \subseteq \psi$ (Definition 3.2.4). Dann gibt es einen Ultrafilter ϕ auf X mit $\varphi \subseteq \phi$ und $f(\varphi) = \psi$.

Beweis: Seien $P_1, \ldots, P_n \in \varphi$ und $Q_1, \ldots, Q_m \in \psi$. Dann ist $f(P_1 \cap \ldots \cap P_n) \in f(\varphi) \subseteq \psi$, also $f(P_1 \cap \ldots \cap P_n) \cap Q_1 \cap \ldots \cap Q_m \neq \emptyset$. Dann ist auch $P_1 \cap \ldots \cap P_n \cap f^{-1}(Q_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(Q_m) =$

$P_1 \cap \ldots \cap P_n \cap f^{-1}(Q_1 \cap \ldots \cap Q_m) \neq \emptyset$. Das zeigt, dass $\sigma := \varphi \cup \{f^{-1}(Q) \mid Q \in \psi\}$ die endliche Schnitt Eigenschaft hat. Es gibt somit einen Ultrafilter ϕ mit $\varphi \subseteq \sigma \subseteq \phi$. Da dann $f(\phi)$ ein Ultrafilter ist und $\psi \subseteq f(\phi)$ gilt, muss bereits $\psi = f(\phi)$ gelten.

11.2 Fixpunktsatz von Banach

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des klassischen Fixpunktsatzes von Banach (den wohl jeder aus dem zweiten Semester kennt). Der Satz geht über die bloße Existenz- und Eindeutigkeitsaussage hinaus, da der Beweis auch gleichzeitig ein praktisches Verfahren ist, den Fixpunkt numerisch zu approximieren (eine Abschätzung des Fehlers wird ebenfalls gegeben).

11.2.1 Fixpunktsatz von Banach

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine stetige Kontraktion (d.h. $\exists 0 \leq q < 1 \forall x,y \in X : d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y)$), dann hat f genau einen Fixpunkt x^*. Bilden wir ferner für beliebiges $x \in X$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 = x$ und $x_{n+1} = f(x_n)$, so konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x^* und es gilt die Abschätzung:

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1).$$

Beweis: Sei $x \in X$ beliebig gewählt. Wir bilden die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 = x$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ und rechnen durch iterierte Anwendung der Dreiecksungleichung und Kontraktionseigenschaft $d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq q^n d(x_0, x_1) + \ldots + q^{n+k-1} d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) \frac{q^n - q^{n+k}}{1-q} \to \infty$ für $n \to \infty$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge und konvergiert somit gegen ein x^*. Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen $d(x^*, f(x^*)) < 2\varepsilon$. Und da ε beliebig war, muss dann bereits $d(x^*, f(x^*)) = 0$, also $x^* = f(x^*)$ gelten. Zu ε gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x^*) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. $d(x^*, f(x^*)) \leq d(x^*, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, f(x^*)) < \varepsilon + q d(x_N, x^*) < 2\varepsilon$.

Gibt es einen Fixpunkt y, d.h. $f(y) = y$, mit $x^* \neq y$, so gilt $d(x^*, y) = d(f(x^*), f(y)) \leq q d(x^*, y) < d(x^*, y)$, was ein Widerspruch ist. Also $x^* = y$.

Die Abschätzung sieht man so: Oben hatten wir bereits gezeigt $d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{q^n - q^{n+k}}{1-q} d(x_0, x_1)$. Aus $|d(x_n, x_{n+k}) - d(x_n, x^*| \leq d(x^*, x_{n+k})$ folgt $d(x_n, x_{n+k}) \to d(x_n, x^*)$, für $k \to \infty$.

Also $d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$.

11.3 Fixpunktsatz von Brouwer

"Gott existiert, weil die Mathematik widerspruchsfrei ist, und der Teufel existiert, weil wir das nicht beweisen können."

Andre Weil

Kommen wir zum Fixpunktsatz von Brouwer. Dieser lässt sich zwar leichter formulieren, als der von Banach, ist aber unvergleichlich schwerer zu beweisen! In seiner klassischen Form besagt jener: Jede stetige Abbildung der n dimensionalen Einheitskugel $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ in sich, hat (mindestens) einen Fixpunkt: $f : D^n \to D^n$ stetig $\Rightarrow\ \exists x \in D^n$, mit $f(x) = x$. Um diesen Satz (und seine Verallgemeinerung) vernünftig zu beweisen, führen wir eine ganze Reihe von Begriffen und Bezeichnungen ein. Grundlegende Begriffe aus (in der Regel) dem ersten Semester Lineare Algebra, wie Vektorraum, Linearkombination, linear unabhängig, ... setzen wir von nun an voraus. Eine Teilmenge A eines Vektorraums X heißt konvex, wenn für $x, y \in A$ auch $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} \subseteq A$. Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ definieren wir die konvexe Hülle als $convex(Y) := \{\sum_{i=1}^{k} t_i x_i \mid x_i \in X \text{ und } t_i \in [0,1] \text{ mit } \sum_{i=1}^{k} t_i = 1\}$. Als kleine Übung überlassen wir dem Leser, dass $convex(X)$ die kleinste konvexe Menge K ist mit $X \subseteq K$. Eine kleine Sache noch: Mit 0 bezeichnen wir sowohl die Körper-Null, als auch die Vektorraum-Null. Aus dem jeweiligen Zusammenhang sollte klar hervorgehen, welche jeweils gemeint ist.

11.3.1 Definition

Erzeugnis Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $A \subseteq V$. Das Erzeugnis $\langle A \rangle$ ist dann definiert als $\{\sum_{i=1}^{m} k_i v_i \mid k_i \in K \text{ und } v_i \in A\}$, also als die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus A.

11.3.2 Lemma

Für $m+1$ Punkte $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ ist äquivalent:
1) $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists i \in \{0, \dots, m\} \setminus \{0\} \text{ mit } z = a_i - a_0\}$ ist linear unabhängig
2) $\forall s_0, \dots, s_m \in \mathbb{R}\, [(\sum_{i=0}^{m} s_i a_i = 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{m} s_i = 0) \Rightarrow s_0 = \dots = s_m = 0]$

Beweis: Der bleibt als leichte Übung.

11.3.3 Definition

affin unabhängig, Simplex, baryzentrische Koordinaten Mittelpunkt (barycenter) Punkte $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ mit einer der äquivalenten Eigenschaften aus Lemma 11.3.2 nennt mann affin unabhängig. Seien $m+1$ affin unabhängige Punkte $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ gegeben. $a_0 \dots a_m := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^{m} s_i a_i, \text{ mit } \sum_{i=0}^{m} s_i = 1 \text{ und } s_0, \dots, s_m \leq 0\}$ heißt m dimensionales Simplex. Die a_i nennen wir auch die Ecken des Simplex. Eine Seite von S ist ein Simplex der Form $a_{i_0} \dots a_{i_k}$, wobei $i_0, \dots, i_k \in \{0, \dots, m\}$. Für $x = \sum_{i=0}^{m} s_i a_i \in a_0 \dots a_m$, mit $\sum_{i=0}^{m} s_i = 1$ und $s_0, \dots, s_m \leq 0\}$ sind die baryzentrischen Koordinaten (eindeutig nach Lemma 11.3.2) definiert als $\lambda_i(x) := s_i$, $i = 0, \dots, m$. Der Mittelpunkt von S ist definiert als $b(S) := (m+1)^{-1} \sum_{i=0}^{m} a_i$.

11.3.4 Lemma

Sei $S = a_0a_1...a_m$ ein m dimensionales Simplex, mit den affin unabhängigen $a_0,...,a_m \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
a) Jedes $x \in S$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=0}^m s_i a_i$, mit $\sum_{i=0}^m s_i = 1$ und $s_0,...,s_m \leq 0$.
b) S ist eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$
c) Die baryzentrischen Koordinaten-Abbildungen $\lambda_i : S \to [0,1]$ sind stetig.
d) Je zwei m dimensionale Simplizes sind homöomorph.

Beweis: a) Sei $x = \sum_{i=0}^m s_i a_i = \sum_{i=0}^m t_i a_i$, mit $\sum_{i=0}^m s_i = 1$ und $s_0,...,s_m \leq 0\}$ und entsprechend mit den t_i. Dann ist $0 = \sum_{i=0}^m (s_i - t_i)a_i$, mit $\sum_{i=0}^m (s_i - t_i) = 0$, also nach Lemma 11.3.2 $s_i = t_i$.
b) Wir betrachten $A_m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^m x_i \leq 1\} = 0e_1...e_m$, wobei $e_i = (0,...,0,1,0,...,0)$ eine 1 an der i-ten Stelle hat. A ist abgeschlossen (siehe Definition 2.4.1: Folgen aus A, die konvergieren, tun dies bereits in A) und da A offensichtlich beschränkt ist, ist A auch kompakt. Wir zeigen A und S sind homöomorph. Dazu definiere $f : A \to S$ durch $x = s_0 0 + s_1 e_1 + ... + s_m e_m \mapsto s_0 a_0 + ... + s_m a_m$. f ist offensichtlich bijektiv und stetig (zeigt sich am leichtesten mittels Folgenkonvergenz und Lemma 2.3.3). Da A_m kompakt und S ein T_2-Raum ist, muss f bereits ein Homöomorphismus sein (Satz 4.1.13). Also ist auch S kompakt (und damit abgeschlossen und beschränkt).
c) Seien λ_i^* die baryzentrischen Koordinaten-Abbildungen von A_m, die sind in diesem Fall nichts anderes als die gewöhnlichen Projektionen, also stetig. Die baryzentrischen Koordinaten-Abbildungen λ_i von S schreiben sich dann einfach als $\lambda_i = \lambda_i^* \circ f^{-1}$, sind also auch stetig.
d) Folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden.

11.3.5 Definition

simpliziale Unterteilung eines Simplex Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Simplex. Eine Familie $\mathscr{S}$ von Simplizes heißt simpliziale Unterteilung, wenn:
1) $\mathscr{S}$ ist eine Überdeckung von S.
2) Für $S_1, S_2 \in \mathscr{S}$ ist $S_1 \cap S_2$ entweder leer, oder eine gemeinsame Seite von S_1 und S_2.
3) Jede Seite eines jeden $S' \in \mathscr{S}$ ist wieder in $\mathscr{S}$.

11.3.6 Satz

Sei $S = a_0...a_m$ ein m dimensionales Simplex.
1) Für jede fallende Folge $S_0 \supset ... \supset S_k$ von Seiten des Simplex S, sind die Punkte $b(S_0),...,b(S_m)$ affin unsbhängig.
2) Die Menge $\mathscr{S}$ aller Simplizes der Form $b(S_0)...b(S_k)$ bildet eine simpliziale Unterteilung von S.

3) Jedes $m-1$ dimensionale Simplex $T \in \mathscr{S}$ ist die Seite von genau einem, bzw. zwei Simplizes aus $\mathscr{S}$, abhängig davon, ob T in einer $m-1$ dimensionalen Seite von S enthalten ist.

Beweis: 1) Jede Fallende Folge lässt sich zu einer fallenden Folge der Form $S_0 \supset ... \supset S_m$, mit $S_0 = a_{i_0}...a_{i_m}, ..., S_m = a_{i_m}$ ergänzen, wobei $(i_0, ..., i_m)$ eine geeignete Permutation von $(0, ..., m)$ ist und es reicht dann offensichtlich aus zu zeigen, dass $b(S_0), ..., b(S_k)$ affin unabhängig sind. Betrachten wir dazu $\mu_0 b(S_0) + ... + \mu_m b(S_m)$. Mit der Definition der Mittelpunkte wird dies zu $\frac{\mu_0}{m+1}\sum_{k=0}^{m} a_{i_k} + ... + \mu_m a_{i_m} = \frac{\mu_0}{m+1} a_{i_0} + (\frac{\mu_0}{m+1} + \frac{\mu_1}{m}) a_{i_1} + ... + (\frac{\mu_0}{m+1} + ... + \mu_m) a_{i_m} = \delta_0 a_{i_0} + ... + \delta_m a_{i_m}$ (1). Es gilt dann $\delta_0 + ... + \delta_m = \mu_0 + ... + \mu_m$. Falls also $\mu_0 + ... + \mu_m = 0$, so folgt sofort $\delta_0 = ... = \delta_m = 0$ (da die a affin unabhängig sind). Damit haben wir dann aber auch induktiv $\mu_0 = ... = \mu_m = 0$.
2) Wir zeigen als erstes $b(S_0)...b(S_m) = \{x \in S \mid \lambda_{i_0}(x) \leq ... \leq \lambda_{i_m}(x)\}$ für eine Folge $S_0 \supset ... \supset S_m$, mit $S_0 = a_{i_0}...a_{i_m}$. $\subseteq$ ist klar nach Gleichung (1). Für die andere Richtung nehmen wir uns ein $x \in S$ mit $\lambda_{i_0}(x) \leq ... \leq \lambda_{i_m}(x)$. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir aus $x = \lambda_{i_0}(x) a_{i_0} + ... + \lambda_{i_m}(x) a_{i_m} = \frac{\mu_0}{m+1} a_{i_0} + (\frac{\mu_0}{m+1} + \frac{\mu_1}{m}) a_{i_1} + ... + (\frac{\mu_0}{m+1} + ... + \mu_m) a_{i_m}$ sofort $\mu_0 = (m+1)\lambda_{i_0}(x)$ und allgemein $\mu_k = \lambda_{i_k}(x) - \lambda_{i_{k-1}}(x)$. Damit erhalten wir $x = \mu_0 b(S_0) + ... + \mu_m b(S_m)$ und $\sum_{k=0}^{m} \mu_k = \sum_{k=0}^{m} \lambda_{i_k} = 1$ mit $\mu_k \geq 0$. Also $x \in b(S_0)...b(S_m)$. Für eine geeignete Permutation ist aber jedes $x \in S$ in einer Menge der Form $\{x \in S \mid \lambda_{i_0}(x) \leq ... \leq \lambda_{i_m}(x)\}$. Also ist $\mathscr{S}$ eine Überdeckung von S. Punkt 3) aus Definition 11.3.5 ist klar nach Konstruktion. Bleibt noch Punkt 2). Eine Seite S' eines Elementes aus $\mathscr{S}$ ist letztendlich eine Seite von $\{x \in S \mid \lambda_{i_0}(x) \leq ... \leq \lambda_{i_m}(x)\}$ für eine geeignete Permutation. S' hat dann aber die Form
$\{x \in S \mid \lambda_{i_0}(x) \leq ... \leq \lambda_{i_m}(x)$ und $\{0, ..., m\} = \biguplus_{p=1}^{q} I_p$, mit $\lambda_i(x) = \lambda_j(x)$ für $i, j \in I_p\}$ (*), für eine Zerlegung $\{0, ..., m\} = \biguplus_{p=1}^{q} I_p$. Das das so ist, sieht man am besten an Gleichung (1). Jede auf diese Weise definierte Menge ist natürlich auch eine Seite. Und der Schnitt zweier solcher Seiten ist nun entweder leer, oder wieder eine solche Menge der Form (*) (wobei sich die definierenden Bedingungen natürlich in Abhängigkeit der gegebenen Seiten verändern können). Damit ist gezeigt, dass $\mathscr{S}$ eine simpliziale Unterteilung ist.
3) Sei $T = b(S_0)...b(S_{m-1})$ ein $m-1$ dimensionales Simplex aus $\mathscr{S}$. Wir unterscheiden zwei Fälle (man beachte T ist genau dann in einer $m-1$ dimensionalen Seite von S enthalten, wenn $S_0 \neq S$):
1. Fall $S_0 \neq S$. Dann gibt es genau ein m dimensionales Simplex $S' \in \mathscr{S}$, von dem es eine Seite ist. Nämlich $S' = b(S)b(S_0)...b(S_m)$.
2. Fall $S_0 = S$. Betrachten wir den Simplex $S_0...S_{m-1}$, so stellen wir fest, dass entweder S_{m-1} ein 1 dimensionales Simplex ist (also von der Form ab, oder an einer Stelle j mit $0 > j \leq m-1$ zwei Ecken von S_{j-1} zu S_j entfernt wurden. In beiden Fällen sieht man, dass es genau zwei m dimensionale Simplizes gibt, von denen T eine Seite ist.

11.3.7 Lemma

Sei $\mathscr{S}$ eine simpliziale Unterteilung eines Simplex S. Für jedes $T \in \mathscr{S}$ sei $\mathscr{S}_T$ eine simpliziale Unterteilung von T. Dann ist auch $\mathscr{P} := \bigcup_{T \in \mathscr{S}} \mathscr{S}_T$ eine simpliziale Unterteilung von S.

Beweis: Wir müssen zeigen:
1) $\mathscr{P}$ ist eine Überdeckung von S.
2) Für $S_1, S_2 \in \mathscr{P}$ ist $S_1 \cap S_2$ entweder leer, oder eine gemeinsame Seite von S_1 und S_2.
3) Jede Seite eines jeden $S' \in \mathscr{P}$ ist wieder in $\mathscr{P}$.
1) und 3) sind trivial, bleibt somit noch 2). Seien dazu $S_1, S_2 \in \mathscr{P}$, mit $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Dann ist $S_1 \in \mathscr{S}_{T_1}$ und $S_2 \in \mathscr{S}_{T_2}$ für geeignete $T_1, T_2 \in \mathscr{S}$. Nun ist $T' := T_1 \cap T_2$ eine gemeinsame Seite von T_1 und T_2 und somit $T' \in \mathscr{S}_{T_1} \cap \mathscr{S}_{T_2}$. Man sieht unmittelbar $S_1 \cap S_2 = (S_1 \cap T') \cap (S_2 \cap T')$ und $S_1 \cap T'$ ist eine gemeinsame Seite von S_1 und T', bzw. $S_2 \cap T'$ ist eine gemeinsame Seite von S_2 und T'. Also $S_1 \cap T', S_2 \cap T' \in \mathscr{S}_{T'}$. Daraus und aus der Tatsache, dass es sich bei $\mathscr{S}_{T'}$ um eine simpliziale Unterteilung handelt, folgt, dass $S_1 \cap S_2$ eine gemeinsame Seite von $S_1 \cap T'$ und $S_2 \cap T'$ ist! Wir hatten bereits weiter oben erkannt, dass $S_1 \cap T'$ eine Seite von S_1 und $S_2 \cap T'$ eine Seite von S_2 ist. Also ist $S_1 \cap S_2$ eine gemeinsame Seite von S_1 und S_2.

11.3.8 Definition

l-te baryzentrische Unterteilung Die simpliziale Unterteilung aus Satz 11.3.6 nenne wir die 1-te bayzentrische Unterteilung. Die l-te baryzentrische Unterteilung eines Simplex definieren wir nun induktiv. Sei dazu $\mathscr{S}_l$ die l-te baryzentrische Unterteilung von S. für jedes $S' \in \mathscr{S}_l$ sei $\mathscr{S}_{S'}$ die baryzentrische Unterteilung nach Satz 11.3.6. Dann setzen wir $\mathscr{S}_{l+1} := \bigcup_{S' \in \mathscr{S}_l} \mathscr{S}_{S'}$. Dass es sich bei $\mathscr{S}_{l+1}$ wieder um eine simpliziale Unterteilung handelt, folgt aus Lemma 11.3.7.

11.3.9 Definition

Maschenweite einer simplizialen Unterteilung Sei $\mathscr{S}$ eine simpliziale Unterteilung des Simplex S. Die Maschenweite von $\mathscr{S}$ ist dann definiert als $sup\{D(T) \mid T \in \mathscr{S}\}$, wobei $D(T) := sup\{|x-y| \mid x, y \in T\}$ der Durchmesser von T ist.

11.3.10 Lemma

Sei $S = a_0 ... a_m \subseteq \mathscr{R}^n$ ein Simplex, $x \in S$, $y \in \mathscr{R}^n$. Dann ist $|x-y| \leq \max\{|a_i - y| \mid 0 \leq i \leq m\}$.

Beweis: Sei $x = \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i$, mit $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ und $\lambda_i \geq 0$. Also $|x-y| = |\sum_{i=0}^m \lambda_i a_i - \sum_{i=0}^m \lambda_i y| = |\sum_{i=0}^m \lambda_i (a_i - y)| \leq \sum_{i=0}^m \lambda_i |a_i - y| \leq max_{i \leq m} |a_i - y| \sum_{i=0}^m \lambda_i = max_{i \leq m} |a_i - y|$.

11.3.11 Lemma

Der Durchmesser eines Simplex $a_0 ... a_m$ ist gleich $max_{i,j \leq m} |a_i - a_j|$.

Beweis: Seien $x, y \in a_0 ... a_m$. Dann folgt aus vorigem Lemma $|x - y| \leq max_{i \leq m} |a_i - y|$. Nochmalige Anwendung des Lemmas führt auf $max_{i \leq m} |a_i - y| \leq max_{i,j \leq m} |a_i - a_j|$.

11.3.12 Lemma

Die Maschenweite der baryzentrischen Unterteilung eines Simplex $S = a_0 ... a_m$ ist nicht größer als $\frac{m}{m+1} D(S)$, wobei $D(S) = sup\{|x - y| \mid x, y \in S\}$.

Beweis: Betrachten wir dazu einen typischen Simplex $T = b(S_0) ... b(S_l)$, mit $S_0 = a_{i_0} ... a_{i_l}$ bis $S_l = a_{i_l}$, aus der baryzentrischen Unterteilung. Es reicht, nach vorigem Lemma, den Abstand $|b(S_j) - b(S_k)|$, mit $j < k \leq m$, für zwei Eckpunkte aus T entsprechend abzuschätzen. $b(S_j) = \frac{1}{j+1}(a_{i_0} + ... + a_{i_j})$ und $b(S_k) = \frac{1}{k+1}(a_{i_0} + ... + a_{i_k})$. Also folgt aus Lemma 11.3.10 $|b(S_j) - b(S_k)| \leq |a_{i_l} - b(S_k)|$, für ein gewisses $l \leq j < k$. Nun ist $|b(S_k) - a_{i_l}| = |\frac{1}{k+1}(a_{i_0} + ... + a_{i_k}) - a_{i_l}| = \frac{1}{k+1} |\sum_{p=0}^{k} (a_{i_p} - a_{i_l})| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^{k} |a_{i_p} - a_{i_l}| \leq \frac{k}{k+1} D(S) \leq \frac{m}{m+1} D(S)$ (man beachte $|a_{i_l} - a_{i_l}| = 0$).

11.3.13 Korollar

Für jedes Simplex S und jedes $\varepsilon \geq 0$ gibt es eine Zahl l, so dass die Maschenweite der l-ten baryzentrischen Unterteilung von S kleiner als ε ist.

Beweis: Folgt durch wiederholte Anwendung von Lemma 11.3.12. Wenn nämlich m die Dimension von S ist, so wird die alte Maschenweite nach jeder Anwendung des Lemmas mit dem Faktor $\frac{m}{m+1}$ multipliziert. Die l-te baryzentrische Unterteilung von S hat also eine Maschenweite von $(\frac{m}{m+1})^l D(S)$ und $(\frac{m}{m+1})^l$ wird mit zunehmendem l beliebig klein.

11.3.14 Lemma

Sperners Lemma Sei $S = a_0 ... a_m$ ein m dimensionaler Simplex und V die Menge aller Ecken von Simplizes aus der l-ten baryzentrischen Unterteilung $\mathscr{S}$ von S. Sei weiter $h : V \to \{0, ..., m\}$ eine Funktion mit der Eigenschaft: $h(v) \in \{i_0, ..., i_k\}$, wenn $v \in a_{i_0} ... a_{i_k}$. Dann ist die Anzahl von Simplizes aus $\mathscr{S}_l$, auf denen h alle Werte von 0 bis m annimmt ungerade (also insbesondere $\neq 0$).

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion nach m. Für $m = 0$ ist die Behauptung trivialerweise richtig.
$m-1 \to m$: Seien also $S = a_0...a_m$, $\mathscr{S}$ und h gegeben. Wir setzen $\mathscr{S}' := \{T \in \mathscr{S} \mid T$ ist $m-1$ dimensional und $h(V \cap T) = \{0,...,m-1\}\}$, also die Menge aller $m-1$ dimensionalen Simplizes T aus $\mathscr{S}$, auf deren Ecken h alle Werte von 0 bis $m-1$ annimmt. Die einzige $m-1$ dimensionale Seite von S, die Simplizes aus $\mathscr{S}'$ enthält (als Teilmenge) ist $a_0...a_{m-1}$ (folgt aus der Voraussetzung an h). Und die Anzahl derer, mit a bezeichnet, ist ungerade. Dies folgt aus der Induktionsvoraussetzung, denn $T \in \mathscr{S} \mid T \subseteq a_0...a_{m-1}\}$ ist die l-te baryzentrische Unterteilung von $a_0...a_{m-1}$.
Sei $\{T \in \mathscr{S} \mid T$ ist m dimensional$\} = \{T_1,...,T_t\}$. Für jedes $j \le t$ sei b_j die Anzahl der Seiten von T_j, die zu $\mathscr{S}'$ gehören und $N_j := h(V \cap T_j)$ ist die Menge aller Werte die h auf den Ecken von T_j annimmt. Man macht sich nun unmittelbar folgendes klar:
1) $N_j = \{0,...,m\} \Rightarrow b_j = 1$,
2) $N_j = \{0,...,m-1\} \Rightarrow b_j = 2$,
3) $\{0,...,m-1\} \nsubseteq N_j \Rightarrow b_j = 0$.
Bezeichnen wir noch mit c die Anzahl aller Simplizes aus $\mathscr{S}_l$, auf denen h alle Werte von 0 bis m annimmt, so gilt $c - (b_1 + ... + b_t) = -\sum_{j \in J'} b_j$, wobei $J' := \{j \le m \mid N_j = \{0,...,m-1\}\}$, was aber gerade ist.
Wir zeigen nun, dass auch $a - (b_1 + ... + b_t)$ gerade ist, woraus dann folgt, dass c ungerade ist! Aus Teil 3 von Satz 11.3.6 folgt jedenfalls, dass jedes Simplex T aus $\mathscr{S}'$ in einem oder zwei der T_j als Seite enthalten ist, abhängig davon, ob T in einer $m-1$ dimensionalen Seite von S enthalten ist. Nun gibt es aber nur eine $m-1$ dimensionale Seite von S die Simplizes aus $\mathscr{S}'$ enthält und die Anzahl derer ist a. In der Summe $b_1 + ... + b_t$ werden also die Simplizes, die auch durch a gezählt werden, EINFACH gezählt und alle anderen DOPPELT. Die Differenz $a - (b_1 + ... + b_t)$ ist also ebenfalls gerade und damit, wie schon erwähnt, c ungerade!

11.3.15 Lemma

Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz Sei $S = a_0...a_m$ ein m dimensionales Simplex und $(F_i)_{i=0}^m$ eine Folge abgeschlossener Mengen, mit $a_{i_0}...a_{i_k} \subseteq F_{i_0} \cup ... \cup F_{i_k}$, für jede Seite $a_{i_0}...a_{i_k}$, dann ist $F_0 \cap ... \cap F_m \neq \emptyset$.

Beweis: Angenommen $F_0 \cap ... \cap F_m = \emptyset$. Die Familie $(U_i)_{i=0}^m$, mit $U_i = S \setminus F_i$ ist eine offene Überdeckung von S (in der Teilraumtopologie). Mit der Kompaktheit von S folgt aus Lemma 4.5.22 die Existenz eines $\varepsilon > 0$, derart dass jede Teilmenge von S mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ bereits in einem der U_i enthalten ist (also disjunkt zu einem der F_i). Aus Korollar 11.3.13 folgern wir, dass es eine Zahl l gibt, so dass die Maschenweite der l-ten baryzentrischen Unterteilung $\mathscr{S}$ von S kleiner als ε ist. V bezeichne im Folgenden die Menge aller Ecken von Simplizes aus $\mathscr{S}$. FÜr jedes $v \in V$ betracheten wir den den Durchschnitt aller Seiten von S, die v enthalten. Herauskommt wieder eine Seite $a_{i_0}...a_{i_k}$ von S. Aus den Voraussetzungen an $(F_i)_{i=0}^m$ folgt, dass es ein ein $j \le k$ gibt, mit $v \in F_{i_j}$. Durch $h(v) := j$ definieren wir nun eine Funktion, die den Bedingungen in Sperners Lemma (Lemma 11.3.14) genügt. Es gibt also ein m dimensionales Simplex $T = v_0...v_m \in \mathscr{S}$, mit $h(v_i) = i$ (bei geeigneter Nummerierung). Das bedeutet aber $v_i \in F_i$ und somit $T \cap F_i \neq \emptyset$ für $i = 0,...,m$, obwohl der Durchmesser von T kleiner als ε ist - Widerspruch!

11.3.16 Fixpunktsatz von Brouwer

Jede stetige (Selbst)Abbildung $f : T \to T$ eines m dimensionalen Simplex $T = a_0...a_m$ hat einen Fixpunkt.

Beweis: Für $i = 0,...,m$ definieren wir $F_i := x \in T \mid \lambda_i(f(x)) \leq \lambda_i(x)\}$ (zur Erinnerung: λ_i sind die baryzentrischen Koordinaten). Die λ_i und das f sind stetig, die F_i demzufolge abgeschlossen (der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus F_i ist wieder in F_i). Wir zeigen, dass die Familie $(F_i)_{i=0}^m$ den Voraussetzungen an Lemma 11.3.15 genügt. Sei dazu $a_{i_0}...a_{i_k}$ eine Seite von T und $x \in a_{i_0}...a_{i_k}$. Es gilt dann $\lambda_{i_0}(x) + ... + \lambda_{i_k}(x) = 1 = \lambda_0(f(x)) + ... + \lambda_m(f(x))$, also $\lambda_{i_0}(f(x)) + ... + \lambda_{i_k}(f(x)) \leq \lambda_{i_0}(x) + ... + \lambda_{i_k}(x)$. Es muss also ein $j \leq k$ geben, mit $\lambda_{i_j}(f(x)) \leq \lambda_{i_j}(x)$. Das heißt aber $x \in F_{i_j}$ und insgesamt also $a_{i_0}...a_{i_k} \subseteq F_{i_0} \cup ... \cup F_{i_k}$. Lemma 11.3.15 liefert also ein $x \in F_0 \cap ... \cap F_m$, also $\lambda_0(f(x)) \leq \lambda_0(x), ..., \lambda_m(f(x)) \leq \lambda_m(x)$. Nun gilt aber $\lambda_0(f(x)) + ... + \lambda_m(f(x)) = 1 = \lambda_0(x), ..., \lambda_m(x)$ und alle Summanden sind ≥ 0. Es muss also $\lambda_0(f(x)) = \lambda_0(x), ..., \lambda_m(f(x)) = \lambda_m(x)$ gelten und somit $f(x) = x$!

11.3.17 Bemerkung

Wir werden den Fixpunktsatz von Brouwer nun verallgemeinern. Dazu benötigen wir weitere Erkenntnisse über gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

11.3.18 Lemma

Seien X, Y zwei topologische Räume und $A \subseteq X$ bzw $B \subseteq Y$. Wir sagen dann, dass (X, A) homöomorph zu (Y, B) ist, wenn es ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt mit $f(A) = B$.
a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ und A konvex, dann ist $K_{x,A} := \{tx + (1-t)a \mid a \in A^\circ \text{ und } t \in [0,1)\}$ offen (und auch konvex). $K_{x,A}$ nennt man den offenen Kegel über A mit Spitze x (obwohl x nicht unbedingt zu $K_{x,A}$ gehören muss).
b) Sei nun $X \subseteq \mathbb{R}^n$, X: kompakt, konvex und $X^\circ \neq \emptyset$, dann ist $(X, \partial X)$ homöomorph zu (D^n, S^{n-1}).

Beweis: a) Es ist $K_{x,A} = \bigcup_{t\in[0,1)} f_t(A^\circ)$ - und somit offen, wobei $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der durch $f_t(u) := tx + (1-t)u$ definierte Homöomorphismus ist.
b) O.B.d.A. ist $D^n \subseteq X$ (warum). Definiere dann $r : \partial X \to S^{n-1}$ durch $r(x) := \|x\|^{-1}x$. Die Stetigkeit ist klar. Um zu zeigen, dass r surjektiv ist, nehmen wir uns ein $x \in S^{n-1}$ und setzen $s := sup\{t \mid t \geq 1 \text{ und } tx \in X\}$. s ist dann $sx \in \partial X$ (sonst: 1.Fall $sx \in (\mathbb{R}^n \setminus X)^\circ$, dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $K(sx, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$. Aber $\|sx - (s - \varepsilon/2)x\| = \varepsilon/2$, also $(s - \varepsilon/2)x \in K(sx, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$ -

Widerspruch! und im 2.Fall wäre $sx \in X^\circ$, also $K(sx,\varepsilon) \subseteq X$ und den Widerspruch führt man analog mit $s+\varepsilon/2$.). Also ist $sx \in \partial X$ und $r(sx) = x$.
Um Injektivität zu zeigen, nehmen wir $r(x) = r(y)$ für $x, y \partial X$ an. Also $\|y\|x = \|x\|y$. Falls $x \neq y$, so o.B.d.A.$\|y\| < \|x\|$. Es gilt dann $K_{x,D^n} \subseteq X$, da X konvex ist. Nun ist aber K_{x,D^n} offen und $y \in K_{x,D^n}$. Also $y \in X^\circ$ - Widerspruch zu $y \in \partial X$.
Also ist $r : \partial X \to S^{n-1}$ stetig und bijektiv, und demzufolge nach Satz 4.1.13 bereits ein Homöomorphismus.
Wir definieren nun $g : D^n \to X$ durch $g(0) = 0$ und $g(y) := \|y\| r^{-1}(\|y\|^{-1}y)$. Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für $y \in D^n$ ist $r^{-1}(\|y\|^{-1}y) \in \partial X$, $\|y\| \leq 1$ und X ist konvex mit $0 \in X$. g ist auch stetig, denn $y_n \to 0 \Rightarrow \|y\| \to 0 \Rightarrow \|g(y)\| \to 0$ ($r^{-1}(\|y\|^{-1}y)$ ist beschränkt). Zu zeigen bleibt wieder Bijektivität, damit man Satz 4.1.13 anwenden kann. Für $x \in \partial D^n = S^{n-1}$ gilt außerdem $g(x) = r^{-1}(x)$ und der Beweis wäre damit dann beendet.
Surjektivität: Sei $x \in X$ (o.B.d.A. $x \neq 0$). Also $x/\|x\| \in S^{n-1}$. Also gibt es genau ein $y \in \partial X$ mit $r(y) = x/\|x\|$. Aber $r(y) = y/\|y\|$, also $y = \frac{\|y\|}{\|x\|x}x$ und somit ($y \in \partial X \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$!) $g(x/\|y\|) = x$ (die leichte Rechnung dazu, bleibt dem Leser überlassen).
Injektivität: $g(x) = g(y) \Rightarrow \|x\| r^{-1}(x/\|x\|) = \|y\| r^{-1}(y/\|y\|)$. Falls $\|x\| = \|y\|$, dann $x = y$, denn r ist bijektiv. Also o.B.d.A. $\|x\| < \|y\|$ und somit $0 \leq \|x\|/\|y\| =: \lambda < 1$. Falls $\lambda = 0$, dann $x = 0$ und somit auch $y = 0$ - Widerspruch. Also $0 < \lambda < 1$. Das bedeutet für $z := r^{-1}(y/\|y\|) \in \partial X$ dann aber $\lambda^{-1}z = r^{-1}(x/\|x\|) \in \partial X$, mit $1 < \lambda^{-1}$. Wir betrachten wieder den offenen Kegel $K_{\lambda^{-1}z,D^n} \subseteq X$. Es ist dann nämlich $z = \lambda\lambda^{-1}z + (1-\lambda)0 \in K_{\lambda^{-1}z,D^n}$ und somit $z \in X^\circ$ - Widerspruch!

11.3.19 Lemma

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex und $Y := \langle K \rangle$ der von K aufgespannte Unterraum. Dann ist $K^\circ \neq \emptyset$, als offener Kern in der Teilraumtopologie von Y.

Beweis: Sei $\{b_1, ..., b_m\} \subseteq K$ eine Basis von Y ($m \leq n$). Wir betrachten nun den Simplex $S := 0b_1...b_m = \{\sum_{i=1}^m \beta_i b_i \mid \beta_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^m \beta_i \leq 1\}$. Mit $b := \frac{1}{m+1}(b_1 + ... + b_m)$ gilt dann nämlich $S = \{b + \sum_{i=1}^m (\beta_i - \frac{1}{m+1})b_i \mid \beta_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^m \beta_i \leq 1\} = \{b + \sum_{i=1}^m \gamma_i b_i \mid \gamma_i \geq -\frac{1}{m+1}$ und $\sum_{i=1}^m \gamma_i \leq \frac{1}{m+1}\}$. Dann gilt aber $V := \{b + \sum_{i=1}^m \gamma_i b_i \mid |\gamma_i| < \frac{1}{m(m+1)}\} \subseteq S$ und V ist offen und nicht leer, denn $V = f(U)$, wobei $f : \mathbb{R}^m \to Y$ definiert durch $f(x_1, ..., x_m) := b + \sum_{i=1}^m x_i b_i$ ein Homöomorphismus ist und $U := \{(x_1, ..., x_m) \mid |x_i| < \frac{1}{m(m+1)}\}$ offen ist.

11.3.20 Korollar

a) Für ein m dimensionales Simplex $S \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt $S^\circ \neq \emptyset$ (offener Kern in $\mathbb{R}^m$).
b) Jede kompakte und konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $K^\circ \neq \emptyset$ ist zu einem m dimensionalen Simplex $S \subseteq \mathbb{R}^m$ homöomorph.

Beweis: Folgt aus Lemma 11.3.18 und 11.3.19.

11.3.21 Verallgemeinerter Fixpunktsatz von Brouwer

Sei $\emptyset \neq K$ eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann hat jede stetige Abbildung $f : K \to K$ einen Fixpunkt.

Beweis: Wir betrachten $Y := \langle K \rangle$ und einen geeigneten Homöomorphismus $g : Y \to \mathbb{R}^m$, der zugleich ein Isomorphismus ist (Basisvektoren werden einander zugeordnet). $g(K)$ ist also kompakt und konvex $\subseteq \mathbb{R}^m$, mit $g(K)^\circ \neq \emptyset$. Es gibt also ein m dimensionales Simplex $S \subseteq \mathbb{R}^m$ und einen Homöomorphismus $h : S \to g(K)$. Die Abbildung $h^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \circ h$ hat einen Fixpunkt, $h^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \circ h(x) = x$ und somit $f(g^{-1}(h(x))) = g^{-1}(h(x))$. Die Abbildung f hat also auch einen Fixpunkt!

11.4 Topologische Vektorräume

Um den Brouwerschen Fixpunktsatz auf allgemeinere Räume übertragen zu können, brauchen wir einige Hilfsmittel aus der Theorie topologischer Vektorräume. Diese sind hier zusammen getragen.

11.4.1 Definition

topologischer Vektorraum: Ein topologischer Vektorraum ist ein topologischer Raum (X, τ), der zusätzlich eine Vektorraumstruktur hat, derart dass die Addition und skalare Multiplikation stetig sind. Präziser:
$+ : X \times X \to X$ ist stetig und
$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ ist stetig.
Wir beschränken uns auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Die Stetigkeit von $+$ bedeutet also: Zu $x + y \in W \in \tau$ gibt es $U, V \in \tau$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U + V \subseteq W$. Die Stetigkeit von $\cdot$ bedeutet: Zu $kx \in W \in \tau$ gibt es U: offen in $\mathbb{K}$, $V \in \tau$ mit $k \in U$, $x \in V$ und $U \cdot V \subseteq W$.
Für ein festes $y \in X$ bzw $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sind die Abbildungen ϕ_y bzw ψ_k definiert durch $\phi_y(x) := x + y$ und $\psi_k(x) := kx$ Homöomorphismen. Das heißt also jede offene Menge U ist von der Gestalt $U = x + V$, wobei $0 \in V \in \tau$. Man kann sich für die meisten Aussagen also auf offene Mengen, die die 0 enthalten beschränken. Wir führen noch zwei abkürzende Schreibweisen ein: $\dot{x} := \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ und $\mathscr{U}(x) := \{A \subseteq X \mid A \text{ ist Umgebung von } x\}$. Die Menge aller offener Mengen welche x enthalten, schreibt sich dann einfach als $\dot{x} \cap \tau$.
Wir nennen eine Teilmenge A von X balanciert, wenn $kA \subseteq A$ ist, für jedes $k \in \mathbb{K}$ mit $|k| \leq 1$.
Der Raum X heißt lokal konvex, wenn die 0 eine Umgebungsbasis aus offenen, konvexen Mengen hat.

11.4.2 Lemma

Sei (X,τ) ein topologischer Vektorraum, und $W \in \mathscr{U}(0)$. Dann gibt es ein symmetrisches $U \in \dot{x} \cap \tau$ mit $U+U \subseteq W$.

Beweis: Übung.

11.4.3 Lemma

Sei X ein topologischer Vektorraum, $K, C \subseteq X$, K: kompakt, C: abgeschlossen und $K \cap C = \emptyset$, dann gibt es $V \in \dot{0} \cap \tau$ mit $(K+V) \cap (C+V) = \emptyset$.

Beweis: Alles ist klar, wenn $K = \emptyset$, also $K \neq \emptyset$. Wähle ein $x \in K$ und $U \in \dot{x} \cap \tau$ mit $U \cap C = \emptyset$. Dann ist $U - x \in \dot{0} \cap \tau$, also gibt es $V_x \in \dot{0} \cap \tau$ mit $V_x = -V_x$ (symmetrisch) und $V_x + V_x + V_x + V_x \subseteq U - x$. Nun gilt $V_x + V_x + V_x \subseteq V_x + V_x + V_x + V_x$ und somit $x + V_x + V_x + V_x \subseteq U$, also insbesondere $(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset$. Dann aber auch $(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset$ (sonst $y \in x + V_x + V_x$ und $y \in C + V_x = C - V_x$, also $y = x + v_1 + v_2 = c - v_3$ und dann $(x + V_x + V_x + V_x) \cap C \neq \emptyset$). Nun ist $(x + V_x)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K, also $K \subseteq (x_1 + V_{x_1}) \cup \ldots \cup (x_n + V_{x_n})$ für endlich viele x. Setze $V := V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Dann ist $K + V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i})$. Aber $(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (C + V_{x_i}) = \emptyset$, also auch $(K+V) \cap (C+V) = \emptyset$.
Bemerkung: Wenn der Topologische Vektorraum also ein T_1-Raum ist, so ist er bereits ein Hausdorff-Raum (T_2).

11.4.4 Lemma

a) Jede Umgebung der 0 enthält eine offene balancierte Umgebung der 0.
b) Jede konvexe Umgebung der 0 enthält eine offene konvexe balancierte Umgebung der 0.

Beweis: a) Sei $V \in \mathscr{U}(0)$. Da die skalare Multiplikation stetig ist, ist $\phi := \{W \in \dot{0} \cap \tau \mid \forall t\, (|t| \leq 1 \Rightarrow tW \subseteq V)\} \neq \emptyset$. Dann ist $V^* := \bigcup \phi$ die gewünschte Menge.
b) Sei $U \in \mathscr{U}(0)$ konvex. Setze $A := \bigcap_{|a|=1} aU$. Wir wählen uns ein balanciertes $W \in \mathscr{U}(0)$ mit $W \subseteq U$. Mit $|a| = 1$ folgt $W = aW \subseteq aU$, also $W \subseteq A$. Mit U ist auch aU konvex, damit auch A und dann auch A° (Wenn Y konvex ist, so ist es auch Y°. Es gilt $tY^\circ + (1-t)Y^\circ \subseteq Y$. Da die erste Menge aber offen ist gilt auch $\subseteq Y^\circ$.).
Bleibt noch zu zeigen, dass A° balanciert ist. Sei dazu $|t| \leq 1 \;\Rightarrow\; t = rb$ mit $0 \leq r \leq 1$ und $|b| = 1$. Dann ist
$tA = rbA = \bigcap_{|a|=1} rbaU = \bigcap_{|a|=1} raU \subseteq \bigcap_{|a|=1} aU = A$, da auch aU konvex ist mit $0 \in aU$. A ist also balanciert und damit auch A° (Wenn Y balanciert ist, so ist es auch Y°. Denn $\psi_a(x) := ax$ ist ein Homöomorphismus, also $\psi(Y^\circ) = (\psi(Y))^\circ$. Damit gilt $tY^\circ = \psi_t(Y^\circ) =$

$(\psi_t(Y))^\circ = (tY)^\circ \subseteq Y^\circ$.).
A° ist also die gesuchte Menge.

11.4.5 Lemma

a) Sei X ein topologischer Vektorraum, X ein T_1-Raum und $f : \mathbb{K}^n \to X$ linear. Dann ist f stetig.
b) Sei Y ein n-dimensionaler Teilraum von X, dann ist jeder Isomorphismus $f : \mathbb{K}^n \to Y$ ein Homöomorphismus.
c) Das Y aus b) ist abgeschlossen.

Beweis: a) Für $j = 1,...,n$ sei $P_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ die natürliche Projektion, $e_1,...,e_n$ die standard Basis von $\mathbb{K}^n$. Ferner bezeichne ϕ die Addition und ψ die skalare Multiplikation (in X). Dann folgt $f(z) = \sum_{i=1}^n \psi(p_i(z), f(e_i))$. Und da ϕ bzw ψ stetig sind, ist es auch f.
b) Sei $S := \{z \in \mathbb{K}^n \mid \|z\| = 1\}$, $B := \{z \in \mathbb{K}^n \mid \|z\| \leq 1\}$ und $K := f(S)$. Dann ist K kompakt und $0 \notin K$. Also gibt es $V \in \dot{0} \cap \tau$, V: balanciert, mit $V \cap K = \emptyset$. Setze $E := f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y) \ \Rightarrow \ E \cap S = \emptyset$. Dann ist aber $0 \in E$, außerdem ist E balanciert und somit wegweise zusammenhängend. Zusammen ergibt dies $E \subseteq B$. $f^{-1} : Y \to \mathbb{K}^n$ ist aber von der Form $f^{-1} = (f_1^{-1},...,f_n^{-1})$, für lineare $f_i : Y \to \mathbb{K}$. $U := V \cap Y$ ist eine offene Umgebung der 0 in Y und f_i^{-1} ist auf U beschränkt ($E \subseteq B$), d.h. $|f_i^{-1}(u)| \leq z \geq 0$ für alle $u \in U$. Dann ist f_i^{-1} aber auch stetig (aufgrund der Linearität, reicht es diese auf der 0 nachzuweisen: Wenn $\varepsilon > 0$, so folgt für $u \in (\varepsilon/z)U$ sofort $|f_i^{-1}(u)| < \varepsilon$.) Mit den f_i^{-1} ist dann aber auch f^{-1} stetig. Das f stetig ist, wissen wir bereits und bijektiv ist es ja sowieso schon.
c) Seien f und V wie aus b). Wir wählen uns ein $y \in \overline{Y}$. Es gibt dann ein $t > 0$, so dass $y \in tV$. Nun ist $Y \cap tV \subseteq f(tB) \subseteq f(\overline{tB})$ und tB ist kompakt, also auch $f(\overline{tB})$. Damit ist $f(\overline{tB})$ aber auch abgeschlossen und somit $y \in \overline{Y \cap t} \subseteq f(\overline{tB}) \subseteq Y$. Das heißt: Y ist abgeschlossen.

11.4.6 Definition

Fréchet Raum, total beschränkt Ein Fréchet Raum ist ein topologischer Vektorraum, dessen Topologie durch eine vollständige invariante Metrik erzeugt wird. Invariant heißt dabei $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ (für alle x,y,z). Aus den metrischen Räumen kennen wir bereits das Konzept der totalen Beschränktheit. Eine Teilmenge E eines metrischen Raumes X heißt total beschränkt, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ endliche viele Punkte aus X gibt, so dass die Kugeln mit Radius ε um diese Punkte bereits ganz E überdecken. Diese Konzept kann man auch für beliebige topologische Vektorräume formulieren. Eine Teilmenge $E \subseteq X$ heißt dann total beschränkt, wenn es zu jeder Umgebung U der 0 eine endliche Teilmenge $F \subseteq X$ gibt mit $E \subseteq F + U$.

11.4.7 Lemma

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in convex(E)$. Dann liegt x bereits in der konvexen Hülle von höchstens $n+1$ Punkten aus E.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass wenn $k > n$ und $x = \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i$ eine konvexe Kombination von $k+1$ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ ist, x dann bereits eine konvexe Kombination von k dieser Vektoren ist. Wir betrachten dazu die lineare Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, definiert durch $\gamma(a_1, \ldots, a_{k+1}) = (\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1} a_i)$. Wegen $dim(ker(\gamma)) + dim(im(\gamma)) = k+1$ und $dim(im(\gamma)) \leq n+1$ gilt $dim(ker(\gamma)) \geq 1$. Also gibt es $(a_1, \ldots, a_{k+1})$ mit (mindestens) einem $a_i \neq 0$ und $\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i = 0$, bzw. $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 0$. Wir setzen nun $\lambda := min\{t_i/|a_i| \mid a_i \neq 0\}$ und $c_i := t_i - \lambda a_i$ (für alle i). Dann gilt $\sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i = x$, $\sum_{i=1}^{k+1} c_i = 1$ und $c_i \geq 0$ (für alle i). Aber mindestens eines der c_i ist 0! Damit ist die Aussage bewiesen.

11.4.8 Lemma

a) Seien $A_1, \ldots, A_n$ kompakte konvexe Mengen in einem topologischen Vektorraum, dann ist auch $convex(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ kompakt.
b) Wenn X ein lokalkonvexer topologischer Vektoraum ist und $E \subseteq X$ total beschränkt, dann ist auch $convex(E)$ total beschränkt.
c) Wenn X ein Fréchet Raum ist und $K \subseteq X$ kompakt, dann ist auch $\overline{convex(K)}$ kompakt.
d) Wenn $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, dann auch $convex(K)$.

Beweis: Sei $S := \{(s_1, \ldots, s_n) \mid s_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n s_i = 1\}$. Setze $A := A_1 \times \ldots \times A_n$ und definiere $f : S \times A \to X$ durch $f(s,a) := \sum_{i=1}^n s_i a_i$. Damit definieren wir nun $K := f(S \times A)$. K ist dann kompakt, außerdem $K \subseteq convex(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$. Das auch die umgekehrte Inklusion gilt sieht man folgendermaßen:
Als erstes halten wir fest, dass $A_i \subseteq K$ gilt (für alle i). Und nun zeigen wir noch, dass K auch konvex ist. Seien dazu (s,a) und (t,b) aus $S \times A$ und $\alpha + \beta = 1$ mit $\alpha, \beta \geq 1$. Dann rechnet man einfach nach, dass $\alpha f(s,a) + \beta f(t,b) = f(u,c)$ ist, wobei $u = \alpha s + \beta t$ und die Komponenten von c so aussehen $c_i = (\alpha s_i a_i + \beta t_i b_i)/(\alpha s_i + \beta t_i)$. Damit ist a) bewiesen.
b) Sei U eine beliebige Umgebung der 0 in X. Wähle dann eine konvexe Umgebung V der 0 in X mit $V + V \subseteq U$. Nach Voraussetzung an E gibt es dann eine endliche Teilmenge $F \subseteq X$ mit $E \subseteq F + V$. Also auch $E \subseteq convex(F) + V$. Die letzte Menge ist aber konvex (als Summe zweier konvexer Mengen). und damit also auch $convex(E) \subseteq convex(F) + V$. Nun folgt aber aus a), dass $convex(F)$ eine kompakte Menge ist. Also gibt es eine endliche Menge $F_1 \subseteq X$ mit $convex(F) \subseteq F_1 + V$. Insgesamt bekommen wir $convex(E) \subseteq F_1 + V + V \subseteq F_1 + U$. und damit ist $convex(E)$ total beschränkt (da U beliebig gewählt wurde).
c) Abschlüsse total beschränkter Mengen in metrischen Räumen sind wieder total beschränkt und demzufolge in vollständigen metrischen Räumen sogar kompakt. Insbesondere sind aber kompakte Mengen total beschränkt, also nach b) auch deren konvexe Hüllen. Und da der Raum

vollständig ist, sind diese wiederum kompakt.
d) Sei $S := \{(s_1, ..., s_{n+1}) \mid s_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{n+1} s_i = 1\}$ und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Definieren wir die Abbildung $\lambda : S \times K^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ durch $\lambda(s, x_1, ..., x_{n+1}) := \sum_{i=1}^{n+1} s_i x_i$, so stellen wir mit Hilfe des vorigen Lemmas fest, dass $convex(K) = \lambda(S \times K^{n+1})$. Da λ stetig ist, folgern wir, dass $convex(K)$ kompakt ist.

11.5 Fixpunktsatz von Schauder-Tychonoff und Leray-Schauder Prinzip

Kommen wir nun zum spektakulären Fixpunktsatz von Schauder-Tychonoff. Dazu führen wir einige wichtige Konzepte aus der Theorie der Fixpunkte ein. Für eine Umfassende Darstellung verweise ich auf (Andrzej Granas / James Dugundji: Fixed Point Theory).

11.5.1 Definition

kompakten Abbildung Unter einer kompakten Abbildung $f : X \to Y$, für zwei top. Räume, verstehen wir eine stetige Abbildung, derart dass $f(X)$ in einer kompakten Teilmenge von Y enthalten ist. Für eine Abbildung $S : X \to \mathscr{P}(Y)$ definieren wir $S^{-1} : Y \to \mathscr{P}(X)$ und $S^* : Y \to \mathscr{P}(X)$ durch $S^{-1}(y) := \{x \in X \mid y \in S(x)\}$ und $S^*(y) := X \setminus S^{-1}(y)$. Mit einem Fixpunkt einer solchen mengenwertigen Funktion $S : X \to \mathscr{P}(X)$, meinen wir ein $x \in X$ mit $x \in S(x)$.
Im Folgenden seien X, Y Teilmengen topologischer Vektorräume und $S : X \to \mathscr{P}(Y)$ eine mengenwertige Funktion.
Wenn Y konvex ist und die Abbildung S nicht leere konvexe Werte annimmt und $S^{-1}(y)$ offen ist für jedes $y \in Y$, dann heißt S eine $\mathbb{F}$-Abbildung ($\mathbb{F}$ von Ky Fan).
Wenn X konvex ist und die Abbildung S offene Werte annimmt und $S^{-1}(y)$ nicht leere konvexe Mengen sind (für jedes $y \in Y$), dann heißt S eine $\mathbb{F}^*$-Abbildung.
Die Menge aller solcher $\mathbb{F}$-Abbildungen bzw $\mathbb{F}^*$-Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathbb{F}(X, Y)$ und mit $\mathbb{F}^*(X, Y)$. Um vertrauter mit der Notation zu werden, empfehle ich folgende Übung: $S \in \mathbb{F}^*(X, Y) \Leftrightarrow S^{-1} \in \mathbb{F}(Y, X)$.

11.5.2 Satz

Fan-Browder (nicht Brouwer) Sei X eine kompakte, konvexe Teilmenge eines top. Vektorraumes und $T \in \mathbb{F}(X, X)$, oder $T \in \mathbb{F}^*(X, X)$. Dann hat T einen Fixpunkt (im oben beschriebenen Sinn).

Beweis: Es genügt den Fall $T \in \mathbb{F}(X, X)$ zu betrachten (Warum?). Na gut; als nächstes stellen wir fest, dass $T^*(y) = X \setminus T^{-1}(y)$ kompakt ist (für jedes $y \in Y$). Außerdem gilt $\bigcap_{y \in Y} T^*(y) = X \setminus \bigcup_{y \in Y} T^{-1}(y) = \emptyset$. Wegen der Kompaktheit muss es also $y_1, ..., y_n \in Y$ geben mit $T^*(y_1) \cap ... \cap T^*(y_n) = \emptyset$. Sei $L := \langle y_1, ..., y_n \rangle$ der von den y_i aufgespannte endliche Unterraum und sei $C := convex(y_1, ..., y_n)$. Wir haben also $dim(L) := m \leq n$ und somit ist L isomorph und homöomorph zu $\mathbb{R}^m$. Insbesondere ist C auch kompakt. Sei nun d eine Metrik auf L, welche die Topologie erzeugt. Nun ist $L \cap T^*(y_i)$ abgeschlossen in L. Also $d(y, L \cap T^*(y_i)) = 0 \Leftrightarrow y \in L \cap T^*(y_i)$. Da $\bigcap_{i=1}^n (L \cap T^*(y_i)) = \emptyset$, folgt $\lambda(y) := \sum_{i=1}^n d(y, L \cap T^*(y_i)) > 0$ für alle $y \in C$. Die Funktion $f : C \to C$ definiert durch $f(c) := (\lambda(c))^{-1} \sum_{i=1}^n d(c, L \cap T^*(y_i)) y_i$ ist stetig (Warum?). Das heißt, es gibt ein $c_0 \in C$ mit $f(c_0) = c_0$ (folgt aus dem verallgemeinerten Fixpunktsatz von Brouwer). Setze $I := \{i \in \{1, ..., n\} \mid d(c_0, L \cap T^*(y_i)) > 0\}$. Nun ist $c_0 \in convex(\{y_i \mid i \in I\}) \setminus \bigcup_{i \in I} T^*(y_i)$. Angenommen $c_0 \notin T(c_0)$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $y_{i_0} \notin T(c_0)$, denn $T(c_0)$ ist konvex. Dann ist aber $c_0 \notin T^{-1}(y_{i_0})$, also $c_0 \in T^*(y_{i_0})$, was ein Widerspruch ist! Das heißt, es gilt bereits $c_0 \in T(c_0)$. Wir haben also einen Fixpunkt gefunden.

11.5.3 Lemma

Sei X eine Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraums Z. Sei außerdem $\mathscr{V}$ die Menge aller konvexen, symmettrischen und offenen Umgebungen der 0 in Z und $f : X \to X$ eine kompakte Abbildung (bzgl. der Teilraumtopologie). Wenn für jedes $U \in \mathscr{V}$ ein $x \in X$ existiert, mit $f(x) - x \in U$, dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis: Nehmen wir das Gegenteil an, d.h. $\forall x \in X : f(x) \neq x$. Dann gibt es für jedes x ein V_x und W_x aus $\mathscr{V}$ mit 1) $(x + V_x) \cap (\overline{f(x) + W_x}) = \emptyset$ und 2) $f((x + V_x) \cap X) \subseteq \overline{f(x) + W_x}$. Aufgrund der Kompaktheit der Abbildung, ist $\overline{f(X)}$ kompakt in X. Es gibt also $x_1, ..., x_k \in \overline{f(X)} \subseteq X$ mit $\overline{f(X)} \subseteq \bigcup_{i=1}^k (x_i + \frac{1}{2} V_{x_i})$. Setze nun $U := \bigcap_{i=1}^k \frac{1}{2} V_{x_i}$. Wenn also $x \in X$, dann $f(x) \in x_i + \frac{1}{2} V_{x_i}$ für ein i. Dann kann aber x nicht in $x_i + V_{x_i}$ sein, denn sonst wäre ja $f(x) \in x_i + W_{x_i}$, also $(x_i + V_{x_i}) \cap (f(x_i) + W_{x_i}) \neq \emptyset$. Nun ist $f(x) + \frac{1}{2} V_{x_i} \subseteq x_i + \frac{1}{2} V_{x_i} + \frac{1}{2} V_{x_i} \subseteq x_i + V_{x_i}$ und somit $x \notin f(x) + \frac{1}{2} V_{x_i}$. Dann aber auch $x \notin f(x) + U$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

11.5.4 Lemma

Sei $\emptyset \neq C$ eine kompakte konvexe Teilmenge eines lokal konvexen top. Vektorraums X, U eine offene symmetrische konvexe Umgebung der 0 und $f : C \to X$ eine stetige Abbildung, mit $f(C) \subseteq C + U$. Dann gibt es ein $x \in C$ mit $f(x) - x \in U$.

Beweis: Wir definieren $T : C \to \mathscr{P}(C)$ durch $T(x) := \{y \in C \mid y \in f(x) + U\} = C \cap (f(x) + U)$. Nun ist letztere Menge nicht leer (Warum?) und konvex und außerdem ist $T^{-1}(x) = \{y \in C \mid x \in T(y)\} = \{y \in C \mid x \in f(y) + U\} = \{y \in C \mid f(y) \in x + U\} = f^{-1}(x + U)$ (wegen der Symmetrie). $f^{-1}(x + U)$ ist aber offen und somit $T \in \mathbb{F}(C, C)$. Das heißt es gibt ein $x \in C$ mit $x \in T(x)$ und somit $x \in f(x) + U$.

11.5.5 Fixpunktsatz von Schauder-Tychonoff (1. Variante)

Sei $\emptyset \neq C$ eine konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen top. Vektorraumes X, außerdem sei X ein T_1-Raum und $f : C \to C$ eine kompakte Abbildung. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis: Sei V eine beliebige offene, konvexe und symmetrische Umgebung der 0 und $\overline{f(C)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(x_i + V)$ (Kompaktheit!) mit $x_i \in C$. Wenn $K := convex(x_1, ..., x_k)$ bezeichnet, dann gilt offensichtlich $f(K) \subseteq \overline{f(C)} \subseteq K + V$ und K ist kompakt und konvex. Nach dem vorigen Lemma gibt es also ein $x \in K$ mit $f(x) - x \in V$. Da V eine beliebige offene, konvexe und symmetrische Umgebung der 0 war, folgt aus dem anderen Lemma die Existenz eines $p \in C$ mit $f(p) = p$.

11.5.6 Fixpunktsatz von Schauder-Tychonoff (2. Variante)

Sei (X, τ) ein lokal konvexer topologischer Vektorraum, (X, τ) außerdem T_1, $\emptyset \neq C \subseteq X$, C: kompakt und konvex und $f : C \to C$ stetig. Dann gibt es ein $p \in C$ mit $f(p) = p$.

Beweis: Wenn C sogar kompakt ist, dann ist die Abbildung offensichtlich kompakt und hat somit einen Fixpunkt.

11.5.7 Definition

vollstetig Seien X ein metrischer und Y ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt vollstetig, wenn für jede beschränkte Teilmenge $A \subseteq X$ der Abschluß des Bildes kompakt ist (also $\overline{f(A)}$ ist kompakt).

11.5.8 Fixpunktsatz von Schauder-Tychonoff für normierte Räume

Sei C eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines normierten Raumes X und $f : C \to C$ vollstetig. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis: Offensichtlich ist die Abbildung f kompakt!

Zur Auflockerung mal ne klitzekleine Anwendung, die die Wirkungsweise von Fixpunktprinzipien ganz gut verdeutlicht.

11.5.9 Beispiel

Es gibt eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung $f(x) = \int_0^1 sin(x + f^2(t))\,dt$ erfüllt. (Hinweis: Man verwende die Menge $\{T(f) \mid f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig }\}$, wobei $T(f)(x) := \int_0^1 sin(x + f^2(t))\,dt$, den Satz von Arzela-Ascoli und einen Fixpunktsatz.)

Ein tiefliegendes Prinzip zur "Gewinnung" von Fixpunkten ist das Leray-Schauder Prinzip. Das Interessante ist hierbei, dass Objekte, deren Existenz man (noch) nicht nachgewiesen hat, gewissen Ungleichungen genügen müssen, woraus dann die Existenz von Fixpunkten folgt.

11.5.10 Leray-Schauder Prinzip

Sei X ein normierter Vektorraum, und $f : X \to X$ eine kompakte, oder vollstetige Abbildung. Dann hat f einen Fixpunkt, falls eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist.

a) $\exists r > 0 \forall t \in [0,1) \forall x (x = tf(x) \Rightarrow \|x\| \leq r)$,

b) $\exists r > 0 \forall x (\|x\| = r \Rightarrow \|f(x)\| \leq r)$,

c) $\exists r > 0 \forall x (\|x\| = r \Rightarrow \forall \lambda > 1 : \lambda x \neq f(x))$,

Beweis: Es gelte a). Sei $M := \{x \in X \mid \|x\| \leq 2r\}$ und $S : M \to M$ definiert durch $S(x) := f(x)$, falls $\|f(x)\| \leq 2r$ und $S(x) := 2r\|f(x)\|^{-1}f(x)$ für $\|f(x)\| \geq 2r$. M ist konvex (klar) und S ist stetig (folgt aus der Stetigkeit der Norm und dem Klebelemma, siehe Mini-Skript). Wir zeigen nun, dass S auch kompakt ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass jede Folge aus $\overline{S(M)}$ (der Abschluss in M) eine konvergente Teilfolge hat (diese konvergiert dann bereits in $\overline{S(M)}$), denn dann ist $\overline{S(M)}$ kompakt (X ist ein metrischer Raum). Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M. Wir betrachten zwei Fälle. 1. Fall: Es gibt eine Teilfolge (x'_n) mit $\|f(x'_n)\| \leq 2r$ (für alle n), dann ist $S(x'_n) = f(x'_n)$ und die Kompaktheit bzw. Vollstetigkeit von f erledigt den Rest. 2. Fall: Es gibt keine solche Teilfolge. Dann gibt es zu jeder Teilfolge ein Folgenelement x_k mit $\|f(x_k)\| > 2r$. Wählt man die Teilfolgen geschickt, so kann man sich auf diese Weise eine Teilfolge (x'_n) konstruieren, so dass $\|f(x'_n)\| > 2r$ ist, für alle n. Wieder nutzen wir die Kompaktheit bzw. Vollstetigkeit von f und verschaffen uns eine Teilfolge (der Teilfolge) (x''_n) mit $f(x''_n) \to y \in X$ (für $n \to \infty$). Das heißt aber $\|f(x''_n)\|^{-1} \to \|y\|^{-1}$. Das bedeutet aber $S(x''_n) = 2r\|f(x''_n)\|^{-1}f(x''_n) \to 2r\|y\|^{-1}y \in M$ (für $n \to \infty$). Da S als kompakt erkannt ist liefert uns der Fixpunktsatz von Schauder-Tychonoff (2. Variante) nun ein $x \in M$ mit $S(x) = x$. Wenn $\|f(x)\| > 2r$ wäre, dann ist $x = S(x) = tf(x)$, mit $t := 2r\|f(x)\|^{-1} < 1$. Aus der Voraussetzung folgt dann $\|x\| \leq r$ im Widerspruch zu $\|x\| = \|S(x)\| = 2r$. Also ist $\|f(x)\| \leq 2r$ und damit $x = S(x) = f(x)$.

b) impliziert c), also setzen wir nun c) voraus. Setzen wir dazu $K := \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$. Dann definieren wir eine Abbildung $h : X \to K$ durch $h(x) = x$, für $x \in K$ und $h(x) = r\|x\|^{-1}x$ für $x \notin K$. Die Abbildung h ist stetig (folgt leicht aus dem Klebelemma). Nun ist auch die Einschränkung $f_{|K}$ von f auf K stetig und kompakt bzw vollstetig und demzufolge, ist es auch die Nacheinanderausführung $h \circ f_{|K}$ (also kompakt bzw. vollstetig). Das heißt es gibt es einen Punkt $x \in K$ mit $h \circ f_{|K}(x) = x$, da K offensichtlich konvex, beschränkt und abgeschlossen ist. Wir zeigen noch, dass $f(x)$ auch in K liegt. Wenn nicht, dann ist $\|f(x)\| > r$. Nun ist $x = h(x) = h(f(x)) = r\|f(x)\|^{-1}f(x)$, also $\|x\| = r$ und $f(x) = \lambda x$, wobei $\lambda = \|f(x)\|r^{-1} > 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung! Also ist $f(x) \in K$ und deshalb $x = h(x) = h(f(x)) = f(x)$.

12 Lokal-endliche Systeme und Metrisierbarkeit

"Die absurdeste 9/11 Verschwörungstheorie von allen, ist die offizielle Story der US-Regierung, dass ein kranker Bin Laden aus einer Höhle in Afghanistan mit seinen 19 Amateuren, die beste und teuerste Luftwaffe der Welt ausschaltete und Amerika angegriffen hat."

Freeman (http://alles-schallundrauch.blogspot.com/)

12.1 Lokal-endliche Systeme und parakompakte Räume

In diesem Abschnitt geben wir eine Einführung in die Theorie lokal-endlicher Systeme und parakompakter Räume. Letztere werden sich als eine höchst interessante und wichtige (für viele Bereiche der Mathematik; insbesondere die höhere Analysis) gemeinsame Verallgemeinerung kompakter topologischer Räume und metrischer Räume herausstellen.

12.1.1 Definition

parakompakt Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Ein System $(S_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X heißt Punkt-endlich, wenn für jedes $x\in X$ die Menge $\{i \mid x\in S_i\}$ endlich ist.
Das System $(S_i)_{i\in I}$ heißt lokal-endlich, wenn für jedes $x\in X$ ein $U\in\tau$ existiert mit $x\in U$derart, dass die Menge $\{i \mid U\cap S_i\neq\emptyset\}$ endlich ist. $\mathscr{S}$ heißt σ-lokal-endlich, wenn $\mathscr{S}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{S}_n$ ist und die $\mathscr{S}_n$ lokal-endlich sind.
$(T_j)_{j\in J}$ heißt eine Verfeinerung (oder einfach feiner) von $(S_i)_{i\in I}$, falls $\forall\, j\in J\;\exists\, i\in I$ mit $T_j\subseteq S_i$.
Der topologischer Raum (X,τ) heißt parakompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche und offene, Verfeinerungs-Überdeckung hat.

12.1.2 Lemma

Sei (X,τ) ein top. R. und $(A_i)_{i\in I}$ ein lokal-endliches System. Dann ist auch $(\overline{A_i})_{i\in I}$ lokal-endlich und es gilt: $\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$. Insbesondere ist also die Vereinigung eines lokal-endlichen Systems abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

Beweis: Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine lokal endliche Familie. Sei weiter $x\in\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$. Also $x\in\overline{A_i}$ für ein gewisses $i\in I$. Offensichtlich gilt dann $x\in\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}$.
Sei nun $x\in\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}$. Dann existiert ein $U\in\tau$ mit $x\in U$ und $\{i\in I \mid U\cap A_i\neq\emptyset\}=\{i_1,\ldots,i_n\}$.
Sei nun $V:=\bigcap_{k=1}^{n}V_{i_k}$, dann folgt $\forall U\in\tau$ mit $x\in U$: $\emptyset\neq(V\cap U)\cap\bigcup_{i\in I}A_i=(V\cap U)\cap\bigcup_{k=1}^{n}A_{i_k}$. Also $x\in\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_{i_k}}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_{i_k}}\subseteq\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$

12.1.3 Lemma

(1) Sei (X,τ) parakompakt und ein T_2-Raum, dann ist (X,τ) ein T_3-Raum.

(2) Sei (X,τ) ein T_3-Raum mit der Eigenschaft: Zu jeder offenen Überdeckung σ von X gibt es eine offene Verfeinerungsüberdeckung ξ mit $\overline{\bigcup \xi'} = \bigcup_{V\in\xi'} \overline{V}$ für alle $\xi' \subseteq \xi$. Dann ist (X,τ) ein T_4-Raum.

(3) Sei (X,τ) parakompakt und ein T_3-Raum, dann ist (X,τ) ein T_4-Raum.

Beweis: (1) Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X und $b \in X\setminus A$, dann gibt es zu jedem $a \in A$ ein $U_a \in \dot{a}\cap\tau$ und $V_a \in \dot{b}\cap\tau$, mit $U_a \cap V_a = \emptyset$. Es gibt dann eine lokal endliche, offene Verfeinerung $(W_i)_{i\in I}$ von $(U_a)_{a\in A}$, denn A als abgeschlossener Teilraum ist natürlich auch parakompakt. Jedes W_i ist in einem U_{a_i} enthalten und zu b gibt es ein $V' \in \dot{b}\cap\tau$, so dass $J := \{i \in I \mid V' \cap W_i \neq \emptyset\}$ endlich ist. $U_b := \bigcup_{i\in I} W_i$ und $V_b := V' \cap \bigcap_{i\in J} V_{a_i}$ sind dann offene, disjunkte Umgebungen von A bzw b.

(2) Seien A,B disjunkte und abgeschlossene Teilmengen von X. Zu jedem $b \in B$ gibt es dann offene und disjunkte Mengen U_b, V_b mit $A \subseteq U_b$ und $b \in V_b$. Dann ist $\sigma := \{V_b \mid b \in B\} \cup \{X\setminus B\}$ eine offene Überdeckung von X. Sei ξ eine entsprechende Verfeinerungsüberdeckung. Setze $\xi' := \{V \in \xi \mid V \cap B \neq \emptyset\}$. Dann gilt $A \cap \overline{V} = \emptyset$ für alle $V \in \xi'$ (denn zu $V \in \xi'$ gibt es ein $b \in B$ mit $V \in V_b \subseteq X \setminus U_b$), also $\emptyset = A \cap \bigcup_{V\in\xi'} \overline{V} = A \cap \overline{\bigcup \xi'}$. Setzen wir nun noch $U := X \setminus \overline{\bigcup \xi'}$ und $W := \bigcup \xi'$, so haben damit unsere disjunkten offenen Umgebungen von A und B gefunden.

(3) Da jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung besitzt, folgt die Aussage sofort aus (2) und Lemma 12.1.2.

12.1.4 Bemerkung

Viele Räume sind parakompakt. Beispielsweise alle kompakten Räume (klar), aber auch alle metrischen Räume (siehe weiter unten) und auch gutartige Lindelöf-Räume, wie wir als nächstes sehen.

12.1.5 Satz

Sei (X,τ) ein Lindelöf-Raum und zusätzlich T_3. Dann ist X parakompakt und damit insbesondere auch T_4.

Beweis: Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Zu $x \in X$ wählen wir ein $i_x \in I$ und ein $U_x \in \tau$ mit $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq O_{i_x}$ (dies geht, da der Raum T_3 ist). Sei nun $(U_{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Teilüberdeckung von $(U_x)_{x\in X}$ (die $x_0,\ldots$ sind entsprechend abzählbar viele Punkte aus X). Für $n \in \mathbb{N}$ setze $W_n := O_{i_{x_n}} \setminus \bigcup_{k<n} \overline{U_{x_k}}$, natürlich $W_0 = O_{i_{x_0}}$. Die W_n, $n \in \mathbb{N}$ bilden somit eine offene Verfeinerungsüberdeckung der $(O_i)_{i\in I}$ und sind (als Mengensystem) aber auch lokal endlich. Denn für jedes $x \in X$ können wir ein minimales $N_x \in \mathbb{N}$ wählen mit $x \in U_{x_{N_x}}$ und somit $U_{x_{N_x}} \cap W_n = \emptyset$, für $N_x < n$.

12.1.6 Lemma

Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $C(X,\tau) \leq m$ (Souslin Zahl), für eine unendliche Kardinalzahl m. Außerdem sei $\gamma \subseteq \tau$ lokal-endlich. Dann ist $|\gamma| \leq m$.

Beweis: O.B.d.A. ist γ unendlich und $\emptyset \notin \gamma$. Dann gibt es für jedes $x \in X$ ein $O_x \in \dot{x} \cap \tau$, so dass $\gamma_x := \{g \in \gamma \mid g \cap O_x \neq \emptyset\}$ endlich ist. Wir bilden $Z := \{(x_\alpha)_{\alpha<\delta} \mid \forall \beta < \delta : x_\beta \in \bigcup(\gamma \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} \gamma_{x_\alpha}),\ \delta : \text{Ordinalzahl}\}$. Offensichtlich ist $Z \neq \emptyset$ und wir können Z partiell ordnen: $(x_\alpha)_{\alpha<\delta_1} \leq (y_\alpha)_{\alpha<\delta_2} \;:\Leftrightarrow\; \delta_1 \leq \delta_2$ und $\forall \alpha < \delta_1 : x_\alpha = y_\alpha$. Man rechnet leicht nach, dass Ketten aus Z eine obere in Z gelegene Schranke haben und demzufolge maximale Elemente in Z existieren (Lemma von Zorn). Sei $(x_\alpha)_{\alpha<\delta}$ ein solches. Es gilt dann $\gamma = \bigcup_{\alpha<\delta} \gamma_{x_\alpha}$ (Beweis!).

Für jedes x_β, mit $\beta < \delta \,\exists g_\beta \in \gamma \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} \gamma_{x_\alpha}$ mit $x_\beta \in g_\beta$. Für jedes $\beta < \delta$ setze dann $O_\beta := g_\beta \cap [\bigcap_{g \in \gamma \setminus \gamma_{x_\beta}} (X \setminus \overline{g})]$. Es gilt $x_\beta \in O_\beta \in \tau$. Man rechnet unmittelbar nach, dass die O_α, $\alpha < \delta$ paarweise disjunkt sind und deshalb $\delta \leq C(X,\tau) \leq m$ gilt. Dann ist aber auch $|\gamma| = |\bigcup_{\alpha<\delta} \gamma_{x_\alpha}| \leq C(X,\tau)$, da $\delta \leq C(X,\tau)$ und alle $|\gamma_{x_\alpha}| \leq C(X,\tau)$.

12.1.7 Korollar

Wenn die Souslin-Zahl eines parakompakten Raumes abzählbar ist, dann ist er ein Lindelöf-Raum (beispielsweise ist die Souslin-Zahl eines separablen Raums abzählbar).

12.1.8 Satz

Sei (X,τ) ein T_4-Raum und $\gamma = \{g_\alpha \mid \alpha < \Omega\}$ eine Punkt-endliche offene Überdeckung von X (γ wird durch die ordinale Abzählung $\{g_\alpha \mid \alpha < \Omega\}$ wohlgeordnet). Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ mit $X = \bigcup_{\alpha<\Omega} U_\alpha$ und $\overline{U_\alpha} \subseteq g_\alpha$ $(\forall \alpha < \Omega)$.

Beweis: Sei $\gamma = \{g_\alpha \mid \alpha < \Omega\}$. Wir zeigen die Existenz einer Folge $(U_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ offener Mengen, welche für alle $\alpha < \Omega$ folgende Eigenschaft hat:
1) $\overline{U_\alpha} \subseteq g_\alpha$ und 2) $X = (\bigcup_{\delta\leq\alpha} U_\delta) \cup (\bigcup_{\alpha<\delta} g_\delta)$ $(*)$
Der Induktionstart erfolgt bei 0. Für $g_0 \in \gamma$ definieren wir $A_0 := X \setminus \bigcup_{g \in \gamma\setminus\{g_0\}} g \subseteq g_0$. Dann gibt es ein offenes U_0 mit $A_0 \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq g_0$. U_0 hat demnach die Eigenschaft $(*)$.
Seien nun für alle $\beta < \alpha$ U_β definiert, mit 1) $\overline{U_\beta} \subseteq g_\beta$ und 2) $X = (\bigcup_{\delta\leq\beta} U_\delta) \cup (\bigcup_{\beta<\delta} g_\delta)$, so setze $A_\alpha := X \setminus [(\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta) \cup (\bigcup_{\alpha<\delta} g_\delta)]$.
Wir zeigen: $X = (\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta) \cup (\bigcup_{\alpha\leq\delta} g_\delta)$. Die eine Inklusion ist klar. Für die andere sei $x \in X$. Dann ist $\{g \in \gamma \mid x \in g\} = \{g_{\delta_1}, \ldots, g_{\delta_n}\}$ mit $\delta_i < \delta_j$ für $i < j$. Falls $\alpha \leq \delta_n$, dann $x \in \bigcup_{\alpha\leq\delta} g_\delta$. Falls hingegen $\delta_n < \alpha$, so ist $x \in (\bigcup_{\delta\leq\delta_n} U_\delta) \cup (\bigcup_{\delta_n<\delta} g_\delta)$ und demnach $x \in \bigcup_{\delta\leq\delta_n} U_\delta \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$.

Wir erhalten somit $A_\alpha \subseteq g_\alpha$ und da A_α abgeschlossen ist gibt es ein offenes U_α mit $A_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq g_\alpha$ und somit auch $X = (\bigcup_{\beta \le \alpha} U_\beta) \cup (\bigcup_{\alpha < \delta} g_\delta)$. Damit ist $(*)$ gezeigt!
Wir wählen nun für $x \in X$ das minimale $\alpha < \Omega$ mit $x \in g_\alpha$. Dann folgt $x \in (\bigcup_{\delta \le \alpha} U_\delta) \cup (\bigcup_{\alpha < \delta} g_\delta)$, also $x \in \bigcup_{\delta \le \alpha} U_\delta$, insgesamt also $X = \bigcup_{\alpha < \Omega} U_\alpha$.

12.1.9 Definition

lokal dominant: Eine Teilmenge $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ eines topologischen Raumes (X,τ) heißt lokal dominant, wenn zu jedem $x \in X$ ein $O \in \dot{x} \cap \tau$ existiert, so dass $\{A \in \alpha \mid O \not\subseteq A\}$ endlich ist. Offensichtlich gilt: α ist lokal dominant $\Leftrightarrow$ $\{X \setminus A \mid A \in \alpha\}$ ist lokal-endlich.

12.1.10 Definition

Filter vom Typ P: Ein Filter ψ in einem topologischen Raum (X,τ) ist vom Typ P, wenn jede lokal dominante Teilfamilie $\alpha \subseteq \psi$, bestehend aus abgeschlossenen Mengen einen konvergenten Oberfilter hat. Der Filter ψ braucht keinen konvergenten Oberfilter haben.

Kompakte Räume konnten wir elegant mittels Filterkonvergenz beschreiben. Eine ähnliche solche Beschreibung gibt es auch für parakompakte Räume:

12.1.11 Satz

(X,τ) ist parakompakt g.d.w. jeder Filter vom Typ P einen konvergenten Oberfilter hat.

Beweis: Sei X parakompakt. Annahme es existiert ein Filter ϕ vom Typ P, welcher keinen konvergenten Oberfilter hat. Setze $\mathscr{U} := \{X \setminus \overline{P} \mid P \in \phi\}$. Dann ist $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von X (Sei $x \in X$. Annahme: Für alle $P \in \phi$ gilt $x \in \overline{P}$, dann gilt $\forall O \in \dot{x} \cap \tau \forall P \in \phi : P \cap O \neq \emptyset$. Also existiert ein filterψ mit $(\dot{x} \cap \tau) \cup \phi \subseteq \psi$ und somit $\psi \to x$; Widerspruch!).
Nun existiert eine lokal endliche Verfeinerungs-Überdeckung $\mathscr{V}$ von $\mathscr{U}$. Dann ist $\alpha := \{X \setminus V \mid V \in \mathscr{V}\}$ lokal dominant und $\alpha \subseteq \phi$. Also gibt es einen konvergenten Filter ψ mit $\alpha \subseteq \psi$. Sagen wir $\psi \to x$ für ein gewisses $x \in X$. Also $x \in \bigcap_{S \in \psi} \overline{S} \subseteq \bigcap_{V \in \mathscr{V}} (X \setminus V) = X \setminus \bigcup_{V \in \mathscr{V}} V = \emptyset$, Widerspruch!
Sei andererseits $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung. Falls $\mathscr{U}$ eine endliche Teilüberdeckung hat, sind wir fertig. Andernfalls setze $\alpha := \{X \setminus \bigcup_{V \in \mathscr{V}} V \mid \mathscr{V} \subseteq \mathscr{U},\ \mathscr{V} : \text{endlich}\}$. Jeder Filter ψ mit $\alpha \subseteq \psi$ ist nicht konvergent! Also ist der von α erzeugte Filter ϕ NICHT vom Typ P. Und deshalb gibt es eine lokal dominante Teilfamilie $\beta \subseteq \phi$ aus abgeschlossenen Mengen, welche keinen konvergenten Oberfilter hat.
Für $F \in \beta$ wähle ein endliches $\mathscr{U}(F) \subseteq \mathscr{U}$, mit $X \setminus \bigcup_{A \in \mathscr{U}(F)} A \subseteq F$, also $X \setminus F \subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{U}(F)} A$. Setze nun noch $\mathscr{H}(F) := \{A \cap (X \setminus F) \mid A \in \mathscr{U}(F)\}$ und schlussendlich $\mathscr{R} := \bigcup_{F \in \beta} \mathscr{H}(F)$.
Zu zeigen bleibt: $\mathscr{R}$ ist eine lokal endliche offene Verfeinerungs-Überdeckung von $\mathscr{U}$.
Sei $x \in X$. Da β keinen konvergenten Oberfilter hat, gibt es ein $O \in \dot{x} \cap \tau$ und $F_1, \ldots, F_n \in \beta$ mit $O \cap F_1 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$, also $x \in X \setminus F_i \subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{U}(F_i)} A$ für ein gewisses $i \in \{i_1, \ldots, i_n\}$. Dann gibt es aber auch ein $A \in \mathscr{U}(F_i)$ mit $x \in A \cap (X \setminus F_i)$. Dass die Elemente aus $\mathscr{R}$ offen sind und $\mathscr{R}$ eine

Verfeinerung von $\mathscr{U}$ ist, ist trivial. $\mathscr{R}$ ist auch lokal endlich. Denn $x \in X$ bedeutet $\exists V_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $\delta := \{F \in \beta \mid V_x \cap (X \setminus F) \neq \emptyset\} = \{F \in \beta \mid V_x \not\subseteq F\}$ ist endlich. Aus $\{O \in \mathscr{R} \mid O \cap V_x \neq \emptyset\} \subseteq \bigcup_{F \in \delta} \mathscr{H}(F)$ folgern wir dann, dass auch $\mathscr{R}$ lokal endlich ist.

12.1.12 Lemma

Sei $f : X \to Y$ stetig und ϕ ein Filter vom Typ P (in X). Dann ist $f(\phi)$ ein Filter vom Typ P auf Y.

Beweis: Übung. Hinweis: Sei $\beta \subseteq f(\phi)$ eine lokal dominante Familie aus abgeschlossenen Mengen. Dann ist auch $\alpha := \{f^{-1}(B) \mid B \in \beta\}$ lokal dominant bestehend aus abgeschlossenen Mengen. Dann gibt es einen Filter ...

12.1.13 Satz

Sei (Y, σ) parakompakt, $f : X \to Y$ stetig und abgeschlossen (Bilder abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen) und zusätzlich mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(y)$ kompakt ist $\forall y \in Y$ (in X). Dann ist auch (X, τ) parakompakt.

Beweis: Sei ϕ ein Filter vom Typ P auf X. Dann ist der Bildfilter auch vom Typ P und daher besitzt er einen konvergenten Oberfilter (gegen ein Element y). Das heißt $\forall V \in \dot{y} \cap \sigma \forall P \in \phi$: $f(P) \cap V \neq \emptyset$ $(*)$.
Annahme $\bigcap_{P \in \phi} \overline{P} = \emptyset$, dann gibt es $P_1, ... P_n \in \phi$ mit $\overline{P_1} \cap ... \cap \overline{P_n} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ ($f^{-1}(y)$ ist kompakt!). Nun ist $P := \overline{P_1} \cap ... \cap \overline{P_n} \in \phi$ und abgeschlossen, also folgt aus $(*)$ $y \in \overline{f(P)} = f(P)$ und damit $P \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$; Widerspruch. Also $\bigcap_{P \in \phi} \overline{P} \neq \emptyset$ und somit gibt es einen konvergenten Oberfilter.

12.1.14 Korollar

Sei X kompakt und Y parakompakt, dann ist $X \times Y$ parakompakt.

Beweis: Betrachte $\pi : X \times Y \to Y$ definiert durch $\pi(x, y) := y$ und wende Satz 12.1.13 an.

12.1.15 Bemerkung

Das Produkt zweier Parakompakter Räume muss nicht parakompakt sein, wie Beispiel 12.1.17 zeigt.

12.1.16 Beispiel: Sorgenfrey-Linie

Wir betrachten die reellen Zahlen mit der durch $\mathscr{B} := \{[a,b) \mid a \leq b\}$ erzeugten Topologie τ, also $(\mathbb{R},\tau)$ mit $\tau := top(\mathscr{B})$. Hier ist $\mathscr{B}$ bereits eine Basis von τ. $(\mathbb{R},\tau)$ heißt dann Sorgenfrey-Linie (oder Gerade). $\mathscr{B}$ ist eine Basis aus offenen und zugleich auch abgeschlossenen Mengen - hieraus folgt sofort T_3. Außerdem ist $\tau_{\mathbb{R}} \subseteq \tau$ und damit die Sorgenfrey-Linie auch ein T_1-Raum; sie ist sogar ein T_4-Raum. Um letzteres zu beweisen, holen wir ein wenig weiter aus. Wir zeigen nämlich $(\mathbb{R},\tau)$ ist ein Lindelöf-Raum. Dann ist sie nämlich auch parakompakt (Satz 12.1.5). Da sie auch T_2 ist, ist sie dann auch T_4 (Lemma 12.1.3). Zeigen wir also $(\mathbb{R},\tau)$ ist Lindelöf.

Sei dazu O_i, $i \in I$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$. Jedes O_i ist eine Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{B}$. Wir können also gleich von einer Überdeckung der Form $[a_i,b_i)$, $i \in I$ ausgehen. Die Idee ist nun, eine abzählbare Verfeinerungsüberdeckung σ zu finden. Dann wählen wir einfach für jedes Element O aus σ eines der $[a_i,b_i)$, welches O enthält und die entsprechenden $[a_i,b_i)$ bilden dann die abzählbare Teilüberdeckung. Also: Zu jedem $i \in I$ und jedem $x \in (a_i,b_i)$ finden wir ein (p,q), mit $p,q \in \mathbb{Q}$ und $x \in (p,q) \subseteq [a_i,b_i)$. Problematisch sind noch die a_j, die in keinem (a_i,b_i) enthalten sind. Seien a_j, $j \in J$ alle diese a. Dann sind $[a_j,b_j)$, $j \in J$ paarweise disjunkte Intervalle (o.B.d.A. alle nicht leer). Von denen kann es aber höchsten abzählbar viele geben (denn jedes von ihnen enthält rationale Zahlen). Unser σ bilden wir nun aus all den (p,q) und zusätzlich den (höchstens) abzählbar vielen $[a_j,b_j)$, $j \in J$. Damit ist σ abzählbar und klarerweise eine Verfeinerungsüberdeckung.

12.1.17 Beispiel: Sorgenfrey-Ebene

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ versehen mit der Produkttopologie $\tau \times \tau$ der Sorgenfrey-Linie heißt dann Sorgenfrey-Ebene. Die Sorgenfrey-Ebene ist nun nicht T_4 und damit, da sie trotzdem T_2 ist, auch nicht parakompakt. Um das zu beweisen, verwenden wir Lemma 3.1.9. Wir bemerken dann zuerst, dass sie separabel ist (sie also eine abzählbare dichte Teilmenge enthält z.B. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$). Außerdem ist $A := \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ein abgeschlossener (ist ja schon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik abgeschlossen) und diskreter Teilraum ($\{(x,-x)\} = A \cap ([x,x+1) \times [-x,-x+1))$ und $[x,x+1) \times [-x,-x+1)$ ist offen in der Sorgenfrey-Ebene). Nun gilt $|A| \geq |\mathscr{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})|$, also ist die Sorgenfrey-Ebene nicht T_4.

12.2 Parakompakte Räume und Parakompaktheit metrischer Räume

Jeder metrische Raum ist parakompakt. Das vorrangige Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis dieser fundamentalen Eigenschaft metrischer Räume. Auf dem Weg dorthin werden uns einige höchst interessante Charakterisierungen parakompakter Räume begegnen (die nicht weniger wichtig sind).

12.2.1 Grundlegendes aus der Theorie der Überdeckungen

Für ein $\gamma \subseteq \mathscr{P}(X)$ und $A \subseteq X$ nennen wir $\gamma(A) := \bigcup\{B \in \gamma \mid B \cap A \neq \emptyset\}$ den (γ-)Stern von A. Für $A = \{x\}$ schreiben wir auch einfach $\gamma(x)$.

Wir nennen eine Familie $\gamma \subseteq \mathscr{P}(X)$ eine **Sternverfeinerung** von $\lambda \subseteq \mathscr{P}(X)$, wenn zu jedem $x \in X$ ein $B \in \lambda$ existiert, mit $\gamma(x) \subseteq B$ ($\{\gamma(x) \mid x \in X\}$ ist also eine Verfeinerung von λ). γ heißt starke Sternverfeinerung von λ, wenn es zu jedem $A \in \gamma$ ein $B \in \lambda$ gibt, mit $\gamma(A) \subseteq B$. Eine Folge $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ heißt (stark) sternmonoton, falls γ_{n+1} eine (starke)Sternverfeinerung von γ_n ist.

Für $\alpha, \beta \subseteq \mathscr{P}(X)$ schreiben wir zuweilen auch $\alpha < \beta$, wenn α eine Verfeinerung von β ist. Ist α eine Sternverfeinerung von β, so schreiben wir auch $\alpha <^* \beta$. Ist α sogar eine starke Sternverfeinerung von β, so schreiben wir auch $\alpha <^{**} \beta$.

Wir nennen eine Familie$\gamma \subseteq \mathscr{P}(X)$ **diskret**, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $U \in \dot{x} \cap \tau$ gibt, welches höchstens ein $g \in \gamma$ schneidet.

Allgemein vereinbaren wir folgendes: Haben wir für eine Familie $\gamma \subseteq \mathscr{P}(X)$ die Eigenschaft XYZ definiert, dann heißt σ-XYZ, dass sich γ schreiben lässt, also $\gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$, wobei die γ_n die Eigenschaft XYZ haben.

Sei $\xi \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ und $A \subseteq X$. Unter dem **ξ-Kern** von A verstehen wir $\langle A\rangle_\xi := \{x \in A \mid \exists \gamma \in \xi \text{ mit } \emptyset \neq \gamma(x) \subseteq A\}$. Wir nennen eine Menge A **ξ-perfekt**, wenn $A = \langle A\rangle_\xi$.

12.2.2 Lemma

Seien $\gamma, \gamma', \gamma'', \lambda \subseteq \mathscr{P}(X)$.

a) Sei γ eine Sternverfeinerung von λ. Dann gilt für jedes $A \subseteq X: \ \gamma(\gamma(A)) \subseteq \lambda(A)$.

b) Sei γ eine Sternverfeinerung von γ' und γ' sei eine Sternferfeinerung von γ''. Dann ist γ eine starke Sternverfeinerung von γ''.

c) Sei (X,τ) ein top. Raum und γ eine offene Überdeckung von X, also $\gamma \subseteq \tau$ und $X = \bigcup \gamma$. Dann gilt $\overline{\gamma(A)} \subseteq \gamma(\gamma(A))$, für jedes $A \subseteq X$.

Beweis: a) Sei $x \in \gamma(\gamma(A))$. Dann gibt es ein $g \in \gamma$ mit $x \in g$ und $g \cap \gamma(A) \neq \emptyset$. Sei $y \in g \cap \gamma(A)$. Dann gibt es ein $g' \in \gamma$ mit $y \in g'$ und $g' \cap A \neq \emptyset$. Nun ist $\gamma(y) \subseteq L$, für ein gewisses $L \in \lambda$ und $g \cup g' \subseteq \gamma(y)$. Also $L \cap A \neq \emptyset$ und somit $x \in g \cup g' \subseteq \gamma(y) \subseteq L \subseteq \lambda(A)$.

b) Sei $g \in \gamma$ und $x \in g$. Nun existiert ein $g'' \in \gamma''$ mit $\gamma'(x) \subseteq g''$. Dann folgt $\gamma(g) \subseteq \gamma(\gamma(x)) \subseteq \gamma'(x) \subseteq g''$.

c) Sei $x \in \overline{\gamma(A)}$. Dann gibt es ein $g \in \gamma$ mit $x \in g$. Dann gilt aber $g \cap \gamma(A) \neq \emptyset$. Also $x \in g \subseteq \gamma(\gamma(A))$.

12.2.3 Lemma

a) Sei $\xi \subseteq \mathscr{P}(\tau)$ für einen top. Raum (X,τ). Dann ist jede ξ-perfekte Menge offen.

b) Sei $\xi = \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Stern-monotone Folge von offenen Überdeckungen von X.

Dann ist der ξ-Kern $\langle U\rangle_\xi$ einer beliebigen Teilmenge U von X eine offene ξ-perfekte Menge.
c) Sei λ eine offene Überdeckung und $\xi = \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine sternmonotone Folge mit $\gamma_n \subseteq \tau$ und $\forall x \in X \exists O_x \in \dot{x} \cap \tau \exists n \in \mathbb{N} \exists U \in \lambda$ mit $\emptyset \neq \gamma_n(O_x) \subseteq U$. Dann existiert eine offene Verfeinerungsüberdeckung σ von λ bestehend aus ξ-perfekten Mengen.

Beweis: a) ist trivial. b) Es bleibt $\langle\langle U\rangle_\xi\rangle_\xi = \langle U\rangle_\xi$ zu zeigen. Offensichtlich $\langle\langle U\rangle_\xi\rangle_\xi \subseteq \langle U\rangle_\xi$. Sei also $x \in \langle U\rangle_\xi$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in \gamma_n(x) \subseteq U$. Sei $y \in \gamma_{n+1}(x)$. Dann gilt $\gamma_{n+1}(y) \subseteq \gamma_{n+1}(\gamma_{n+1}(x)) \subseteq \gamma_n(x) \subseteq U$. Also $\gamma_{n+1}(x) \subseteq \langle U\rangle_\xi$ und somit $x \in \langle\langle U\rangle_\xi\rangle_\xi$. Die Offenheit folgt aus a).
c) Setze $\sigma := \{\langle U\rangle_\xi \mid U \in \lambda\}$.

12.2.4 Lemma

Sei $\xi := \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ stark stern-monoton, wobei alle γ_n offene Überdeckungen sind. Sei weiter γ eine Überdeckung von ξ-perfekten Mengen, und $\leq$ Wohlordnung auf γ. Für $U \in \gamma$ setze $t(U) := U \setminus \bigcup\{V \in \gamma \mid V < U\}$, $t_n(U) := \{x \in t(U) \mid \gamma_n(x) \subseteq U\}$ und $O_n(U) := \gamma_{n+1}(t_n(U))$. Dann gilt:
a) $\{t(U) \mid U \in \gamma\}$ ist eine Überdeckung von X.
b) $\{t_n(U) \mid U \in \gamma,\ n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Überdeckung von X.
c) Kein Element aus γ_n schneidet zwei verschiedene Elemente aus $\{t_n(U) \mid U \in \gamma_n\}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.
d) Kein Element aus γ_{n+1} schneidet zwei verschiedene Elemente aus $\{t_n(U) \mid U \in \gamma\}$.
e) $\{O_n(U) \mid U \in \gamma,\ n \in \mathbb{N}\}$ ist eine offene, σ-diskrete Verfeinerungsüberdeckung von γ.

Beweis: a) Sei $x \in X$ und $U \in \gamma$ minimal bzgl. $\leq$, mit $x \in U$. Dann offensichtlich $x \in t(U)$.
b) Sei $x \in X$. Dann $x \in t(U)$. für $U \in \gamma$. Also $x \in U = \langle U\rangle_\xi$. Dan heißt $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_n(x) \subseteq U$. Also $x \in t_n(U)$.
c) Sei $W \in \gamma_n$ mit $W \cap t_n(U) \neq \emptyset \neq W \cap t_n(V)$, für $U, V \in \gamma$. Sei $x \in W \cap t_n(U)$ und $y \in W \cap t_n(V)$. Dann aber auch $W \subseteq \gamma_n(x) \subseteq U$ und $W \subseteq \gamma_n(y) \subseteq V$. Falls $U \neq V$, dann o.B.d.A. $U < V$ und somit $y \in t(V) \subseteq V \setminus U \subseteq V \setminus W$ - Widerspruch.
d) Sei $W \in \gamma_{n+1}$ mit $W \cap O_n(U) \neq \emptyset \neq W \cap O_n(V)$, für $U, V \in \gamma$. Folglich gibt es $P, Q \in \gamma_{n+1}$ mit $P \cap t_n(U) \neq \emptyset \neq Q \cap t_n(V)$ und $P \cap W \neq \emptyset \neq Q \cap W$. Nun existiert $R \in \gamma_n$ mit $\gamma_{n+1}(W) \subseteq R$. Dann aber $P, Q \subseteq R$ und somit $R \cap t_n(U) \neq \emptyset \neq R \cap t_n(V)$ und aus c) folgt $U = V$.
e) Es gilt $O_n(U) \subseteq U$, denn wenn $P \in \gamma_{n+1}$ mit $P \cap t_n(U) \neq \emptyset$, gibt es $a \in P \cap t_n(U)$. Es gibt aber auch $Q \in \gamma_n$ mit $\gamma_{n+1}(P) \subseteq Q$. Also $a \in Q$ und somit $P \subseteq \gamma_{n+1}(P) \subseteq Q \subseteq \gamma_n(a) \subseteq U$. $\{O_n(U) \mid U \in \gamma,\ n \in \mathbb{N}\}$ ist also eine offene Verfeinerungsüberdeckung von γ. Aus d) folgt ferner σ-diskret.

12.2.5 Satz

Sei $\xi = \{\gamma_n \mid n \in N\}$ sternmonoton und jedes γ_n eine offene Überdeckung von X. Weiter sei λ eine offene Überdeckung von X mit der Eigenschaft $\forall x \in X\, \exists O_x \in \dot{x} \cap \tau\, \exists P \in \lambda\, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\emptyset \neq \gamma_n(O_x) \subseteq P$. Dann hat λ eine σ-diskrete offene Verfeinerungsüberdeckung.

Beweis: Sei $\xi' := \{\gamma_k \mid k = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist ξ' stark sternmonoton. Weiterhin gilt: $\forall x \in X\, \exists O_x \in \dot{x} \cap \tau\, \exists P \in \lambda\, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\emptyset \neq \gamma_{2n}(O_x) \subseteq P$. Sei δ eine offene Verfeinerungsüberdeckung von λ bestehend aus ξ'-perfekten Mengen. Wählen wir auf δ eine beliebige Wohlordnung und wenden das vorige Lemma an, so erhalten wir eine σ-diskrete offene Verfeinerungsüberdeckung von δ, die dann offensichtlich auch λ verfeinert.

12.2.6 Lemma

Jede offene Überdeckung eines metrisierbaren Raumes (X,d) besitzt eine σ-diskrete (insbesondere also σ-lokal-endlich), offene Verfeinerungsüberdeckung. (X,d) besitzt sogar eine σ-diskrete Basis $\mathscr{B}$.

Beweis: Sei λ eine offene Überdeckung von X. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze $\gamma_n := \{K(x, 2^{-n}) \mid x \in X\}$ und dann $\xi := \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Offensichtlich ist ξ dann sternmonoton und alle Voraussetzungen vom vorigen Satz sind erfüllt.

Für den zweiten Teil der Behauptung wenden wir den ersten (eben bewiesenen) Teil auf die Überdeckungen γ_n an. Es gibt nämlich zu γ_n eine σ-diskrete Verfeinerungsüberdeckung $\mathscr{B}_n = \bigcup\{\delta^n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (die δ^n_k sind diskret). Da $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ ist $\mathscr{B} := \bigcup\{\delta^n_k \mid (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{B}_n$ dann die gesuchte σ-diskrete Basis.

12.2.7 Lemma

Jede σ-lokal-endliche offenen Überdeckung eines topologischen Raums (X,τ) hat eine lokal-endliche (nicht notwendig offene) Verfeinerungsüberdeckung.

Beweis: Sei $\gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n$ eine offene Überdeckung von X, mit lokal-endlichen γ_n. Für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ wähle ein $O_{xn} \in \dot{x} \cap \tau$, so dass $\{g \in \gamma_n \mid g \cap O_{xn} \neq \emptyset\}$ endlich ist. Für jedes n setze $W_n := \bigcup(\bigcup_{k \leq n} \gamma_k)$, $\lambda_0 := \gamma_0$ und $\lambda_n := \{g \setminus W_{n-1} \mid g \in \gamma_n\}$. Schließlich bilden wir $\lambda := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$. Dann ist λ die gesuchte lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung.

Überseckungseigenschaft: Sei $x \in X$. Wähle n minimal mit $x \in \bigcup \gamma_n$. Dann gibt es ein $g \in \gamma_n$ mit $x \in g \setminus W_{n-1}$. Das λ eine Verfeinerung von γ ist, ist klar!

Zu zeigen bleibt, dass λ lokal-endlich ist. Sei $x \in X$ und n minimal mit $x \in \bigcup \gamma_n$. Dann gibt es ein $g \in \gamma_n$ mit $x \in g$. Setze $V_x := (\bigcap_{k \leq n} O_{xk}) \cap g \in \dot{x} \cap \tau$. Dann ist $\{A \in \lambda \mid A \cap V_x \neq \emptyset\}$ endlich!

12.2.8 Lemma

Wenn (X, τ) ein T_3-Raum ist, und jede offene Überdeckung eine lokal-endliche (nicht notwendig offene) Verfeinerungsüberdeckung hat, dann hat jede offene Überdeckung auch eine lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen.

Beweis: Sei wieder $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung. Für $x \in X$ sei $U_x \in \mathscr{U} \cap \dot{x}$. Nun ist X ein T_3-Raum, also $\exists W_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq U_x$. Da $(W_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung ist $\exists$ lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung $(O_k)_{k \in K}$. Natürlich ist auch $(\overline{O_k})_{k \in K}$ eine Überdeckung. Nun gilt aber allgemein für beliebiges $V \in \tau$: $V \cap O \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; V \cap \overline{O} \neq \emptyset$. Also ist auch $(\overline{O_k})_{k \in K}$ lokal-endlich. Außerdem haben wir $\forall k \in K \; \exists x \in X$ mit $O_k \subseteq W_x$, also $\overline{O_k} \subseteq \overline{W_x} \subseteq U_x$. und damit ist $(\overline{O_k})_{k \in K}$ eine lokal-endliche Verfeinerung aus abgeschlossenen Mengen.

12.2.9 Lemma

Wenn jede offene Überdeckung eines topologischen Raums (X, τ) eine lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen hat, dann ist X parakompakt.

Beweis: Sei $\sigma \subseteq \tau$ eine Überdeckung und α eine lokal-endlich Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen. Für jedes $x \in X$ gibt es ein $O_x \in \dot{x} \cap \tau$, welches nur endlich viele A aus α schneidet. Nun ist auch $(O_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung, zu der es wieder eine lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung β aus abgeschlossenen Mengen gibt. Zu jedem $A \in \alpha$ wählen wir ein $U_A \in \sigma$ mit $A \subseteq U_A$ und bilden $V_A := U_A \cap (X \setminus \bigcup\{B \in \beta \mid B \cap A = \emptyset\})$ und $\delta := \{V_A \mid A \in \alpha\}$. Offensichtlich ist δ eine Verfeinerungsüberdeckung von σ. Die V_A sind auch offen, denn βist lokal-endlich. Zu zeigen bleibt noch, dass δ lokal endlich ist. Sei $x \in X$. Dann gibt es ein $W_x \in \dot{x} \cap \tau$, so dass $\beta_x := \{B \in \beta \mid B \cap W_x \neq \emptyset\}$ endlich ist. Jedes $B \in \beta_x$ schneidet nur endlich viele $A \in \alpha$. Seien dies jeweils α_B^x. Dann ist $\alpha_x := \bigcup_{B \in \beta_x} \alpha_B^x$ endlich. Wir zeigen nun $W_x \cap V_A = \emptyset$ für $A \in \alpha \setminus \alpha_x$. Nun gilt $W_x \subseteq \bigcup_{B \in \beta_x} B$ und wenn $A \in \alpha \setminus \alpha_x$, dann folgt für jedes $B \in \beta_x :\; A \cap B = \emptyset$. Also $\beta_x \subseteq \{B \in \beta \mid A \cap B = \emptyset\}$ für $A \in \alpha \setminus \alpha_x$. Nun gilt aber $W_x \cap V_A \subseteq W_x \setminus \bigcup\{B \in \beta \mid A \cap B = \emptyset\} \subseteq W_x \setminus \bigcup_{B \in \beta_x} B = \emptyset$.

12.2.10 Korollar

Ein T_3 Raum (X, τ), in dem es zu jeder offenen Überdeckung eine σ-lokal-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung gibt, ist parakompakt.

Aus diesem Korollar folgt z.B. unmittelbar die Parakompaktheit von Lindelöf-Räumen, die zusätzlich T_3 sind (was wir weiter oben bereits elementar bewiesen haben). Aber es folgt auch sofort (mit Lemma 12.2.6) eines der wohl wichtigsten (und mit am häufigsten zitierten) Ergebnisse in und außerhalb der Mengentheoretischen Topologie:

12.2.11 Satz von Stone

Jeder metrisierbare Raum ist parakompakt!

12.2.12 Korollar

Sei (X,τ) ein lokal kompakter Hausdorfraum, der die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen ist. Dann ist X parakompakt.

Beweis: Sei $\sigma \subseteq \tau$ eine offene Überdeckung von $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, wobei die A_i kompakt sind. Für $i \in \mathbb{N}$ gibt es σ_i: endlich $\subseteq \sigma$, mit $A_i \subseteq \bigcup \sigma_i$. Dann ist $\sigma^* := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i$ eine abzählbare Teilüberdeckung (X ist also Lindelöf). Da X auch regulär ist, folgt aus Korollar 12.2.10 und der Tatsache, dass abzählbare Systeme auch σ-lokal-endlich sind, dass X parakompakt ist.

12.2.13 Satz

Sei (X,τ) ein parakompakter Raum und α eine lokal-endliche Familie abgeschlossener Mengen. Dann gibt es eine lokal-endliche Familie offener Mengen σ, die von α verfeinert wird.

Beweis: Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $V_x \in \dot{x} \cap \tau$, welches nur endlich viele Elemente aus α nicht leer schneidet. Zu $\{V_x \;\; x \in X\}$ gibt es eine lokal-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung γ. Für jedes $x \in X$ bilden wir dann $g_x := V_x \cap [\bigcap(\gamma \cap \dot{x})]$ und für jedes $A \in \alpha$ bilden wir $WA := \bigcup_{x\in A} g_x$. Offensichtlich gilt $A \subseteq W_A \in \tau$. Wir müssen noch zeigen, dass $\sigma := \{W_A \mid A \in \alpha\}$ lokal-endlich ist. Nun ist γ jedenfalls lokal-endlich. Es gibt also ein $U_x \in \dot{x} \cap \tau$, welches höchstens endlich viele Elemente aus γ nicht leer schneidet. Zeigen wir, dass U_x auch höchstens endlich viele Elemente aus σ trifft. Nehmen wir also - um einen Widerspruch abzuleiten - an, dass es ein $x \in X$ gibt, so dass U_x unendlich viele Elemente aus σ schneidet. Wir wählen ein $A_0 \in \alpha$ mit $U_x \cap W_{A_0} \neq \emptyset$. Sei dann $y_0 \in A_0$ mit $g_{y_0} \cap U_x \neq \emptyset$. Sind $A_0, \ldots, A_n \in \alpha$ und $y_i \in A_i$, für $i = 0, \ldots, n$ gewählt. Dann gibt es somit höchstens endlich viele $A \in \alpha$, das mit einem der g_{y_k} für $k = 0, \ldots, n$ einen nicht leeren Schnitt hat. Nach Voraussetzung finden wir also in jedem Fall ein $A_{n+1} \in \alpha$ mit $U_x \cap W_{A_{n+1}} \neq \emptyset$ und $g_{y_k} \cap A_{n+1} = \emptyset$, für $k = 0, \ldots, 1$. Sei dann $y_{n+1} \in A_{n+1}$ mit $U_x \cap g_{y_{n+1}} \neq \emptyset$. Für $k < l$ folgt aus $g_{y_l} \cap A_l \neq \emptyset = g_{y_k} \cap A_l$ und der Tatsache, dass die A_i paarweise verschieden sind unmittelbar $g_{y_k} \neq g_{y_l}$. Da U_x jedes der g_{y_n}, für $n \in \mathbb{N}$ nicht leer schneidet, folgt aus der Konstruktion der g_{y_n}, dass U_x bereits unendlich viele Elemente aus γ nicht leer schneidet - ein Widerspruch.

12.3 Ist doch alles voll normal!

Mit Sternverfeinerungen hatten wir bereits im letzten Abschnitt zu tun. Hier stellen wir Räume mit der Eigenschaft, dass jede offene Überdeckung eine Sternverfeinerung hat, an die Spitze der Untersuchungen. Es wird sich herausstellen, dass dies just die parakompakten Hausdorff-Raume sind.

12.3.1 Definition

voll normal Ein topologischer Raum (X,τ) heißt voll-T_4 oder auch stern-T_4 (bzw. voll normal oder stern normal, falls X zusätzlich T_1 ist), wenn jede offene Überdeckung eine Sternverfeinerungsüberdeckung hat.

Wir nennen ihn collectionwise T_4 (bzw. collectionwise normal, in Verbindung mit T_1)[12], wenn es zu jeder diskreten Familie α, bestehend aus abgeschlossenen Mengen eine Familie σ offener paarweise disjunkter Mengen gibt, mit der Eigenschafft: Immer wenn $A,B \in \alpha$, $A \neq B$ und $A \in V \in \sigma$, $B \in W \in \sigma$, dann $V \neq W$.

12.3.2 Lemma

Sei (X,τ) collectionwise T_4 und α eine diskrete Familie bestehend aus abgeschlossenen Mengen. Dann lässt sich das σ aus der Definition sogar diskret wählen.

Beweis: Sei α eine diskrete Familie, bestehend aus abgeschlossenen Mengen und $\mathscr{U} = \{U_A \mid A \in \alpha\}$ eine Familie paarweise disjunkter offener Mengen, welche von α verfeiniert wird. Dann ist $F := \bigcup_{A\in\alpha} A$ abgeschlossen und $F \subseteq \bigcup_{A\in\alpha} U_A \in \tau$. Da der Raum natürlich T_4 ist, gibt es ein $W \in \tau$ mit $F \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq \bigcup_{A\in\alpha} U_A$. Für $A \in \alpha$ setze dann $V_A := U_A \cap W$ und $\mathscr{V} := \{V_A \mid A \in \alpha\}$ ist diskret mit $F_A \subseteq V_A \subseteq U_A$.

12.3.3 Lemma

Sei (X,τ) collectionwise T_4 und α diskret, bestehend aus abgeschlossenen Mengen und $\sigma \subseteq \tau$ mit $\alpha < \sigma$. Dann gibt es ein diskretes $\xi \subseteq \tau$ mit $\alpha < \xi < \sigma$.

Beweis: Sei $\eta \subseteq \tau$ diskret mit: Immer wenn $A,B \in \alpha$, $A \neq B$ und $A \in V \in \eta$, $B \in W \in \eta$, dann $V \neq W$. Für jedes $A \in \alpha$ sei $T_A \in \eta$ mit $A \subseteq T_A$ und $V_A \in \sigma$ mit $A \subseteq V_A$. Setze $\xi := \{T_A \cap V_A \mid A \in \alpha\}$. Ist nun $x \in X$, so gibt es ein $W_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $|\{T \in \eta \mid T \cap W_x \neq \emptyset\}| \leq 1$. Offensichtlich gilt dann $|\{T \in \xi \mid T \cap W_x \neq \emptyset\}| \leq 1$.

[12] Ich ziehe die englische Bezeichnung einer holprigen deutschen Übersetzung vor.

12.3.4 Lemma

Sei (X, τ) voll-T_4 und $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ diskret. Dann gibt es eine diskrete Familie $\sigma \subseteq \tau$, welche von α verfeinert wird (mit $A, B \in \alpha$, $A \neq B$ und $A \in V \in \sigma$, $B \in W \in \sigma$, dann $V \neq W$). Insbesondere gelten die Implikationen voll $T_4 \Rightarrow$ collectionwise $T_4 \Rightarrow T_4$ (die zweite Implikation ist trivial).

Beweis: $\forall x \in X \exists O_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $|\{A \in \alpha \mid A \cap O_x \neq \emptyset\}| \leq 1$. Die offene Überdeckung $\{O_x \mid x \in X\}$ hat eine offene Sternverfeinerungsüberdeckung λ. Wir wählen dann eine offene Sternverfeinerungsüberdeckung γ. Für jedes $A \in \alpha$ setzen wir $V_A := \bigcup\{g \in \gamma \mid g \cap A \neq \emptyset\}$ und $\sigma := \{V_A \mid A \in \alpha\}$. Offensichtlich ist α eine Verfeinerung von σ. Zeigen wir, dass σ diskret ist. Sei dazu $x \in X$. Es gibt dann ein $g_x \in \gamma$ mit $x \in g_x$. Angenommen $g_x \cap V_A \neq \emptyset \neq g_x \cap V_B$, für $A \neq B$. Dann gibt es $g_1, g_2 \in \gamma$ mit $g_x \cap g_1 \neq \emptyset \neq g_x \cap g_2$ und $g_1 \cap A \neq \emptyset \neq g_2 \cap B$. Nun ist $\gamma(g_x) \subseteq O_z$, für ein gewisses $z \in X$ (γ ist eine starke Sternverfeinerung von $\{O_x \mid x \in X\}$). Nun gilt $O_z \cap A = \emptyset$ oder $O_z \cap B = \emptyset$. Aber $g_1 \cup g_2 \subseteq \gamma(g_x)$ - Widerspruch!

12.3.5 Lemma

Für ein beliebiges $\delta \subseteq \mathscr{P}(X)$ führen wir folgende Bezeichnungen ein: $\delta^+(x) := \bigcap\{D \in \delta \mid x \in D\}$, $\delta^-(x) := X \setminus \bigcup\{\overline{D} \mid D \in \delta \text{ und } x \notin \overline{D}\}$, $\delta^0(x) := \delta^+(x) \cap \delta^-(x)$ und $\langle\delta\rangle := \{\delta^0(x) \mid x \in X\}$.

Nun zum Lemma: Seien λ und γ lokal-endliche offene Überdeckungen von X und $\{\overline{L} \mid L \in \lambda\}$ eine Verfeinerung von γ. Dann ist $\{\langle\delta\rangle(V) \mid V \in \lambda\}$ eine offene Verfeinerungsüberdeckung von γ, wobei $\delta := \lambda \cup \gamma$. Insbesondere ist $\xi := \langle\delta\rangle$ auch eine Sternverfeinerung von γ. Zur Bezeichnung siehe auch Definition 12.2.1.

Beweis: Zunächst einmal ist auch δ eine lokal-endliche Überdeckung, $\delta^+(x)$ eine offene x enthaltende Menge (nur endlich viele offene Mengen sind am Schnitt beteiligt) und $x \in \delta^-(x)$. Aufgrund der lokalen Endlichkeit von δ ist ferner $\delta^-(x) = X \setminus \overline{\{D \in \delta \mid x \notin \overline{D}\}}$ offen und somit auch $\delta^0(x)$ eine offene und x enthaltende Menge. $\{\langle\delta\rangle(V) \mid V \in \lambda\}$ ist somit eine offene Überdeckung von X. Zu zeigen bleibt, dass es eine Verfeinerung von γ ist.

Sei $V \in \lambda$ und $x \in X$ mit $\delta^0(x) \cap V \neq \emptyset$. Es gibt dann ein $g \in \gamma$ mit $\overline{V} \subseteq g$. Nehmen wir mal an $\delta^0(x) \nsubseteq g$. Nun ist $\delta^0(x) \subseteq \delta^+(x) \subseteq \gamma^+(x)$, also ist $x \notin g$ (andernfalls $\gamma^+(x) \subseteq g$). Dann ist $x \in X \setminus \overline{V}$. Nun ist aber $x \in \delta^0(x) \subseteq \delta^-(x) \subseteq \lambda^-(x) \subseteq X \setminus \overline{V}$ - ein Widerspruch. Also gilt $\delta^0(x) \subseteq g$ und insgesamt $\langle\delta\rangle(V) \subseteq g$. Wie behauptet ist also $\{\langle\delta\rangle(V) \mid V \in \lambda\}$ eine offene Verfeinerungsüberdeckung von γ.

12.3.6 Lemma

Ein topologischer Raum ist genau dann parakompakt und T_3, wenn er T_3 und voll T_4 ist. Insbesondere sind parakompakte T_3-Räume also auch collectionwise T_4.

Beweis: Wir zeigen zuerst: Parakompakt und T_3 impliziert voll T_4: Sei dazu σ eine offene Überdeckung von X und γ eine zugehörige lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung. Wir wählen zu jedem $x \in X$ eine offene Menge O_x und ein $g_x \in \gamma$ mit $x \in O_x \subseteq \overline{O_x} \subseteq g_x$. Sei λ eine lokal-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung von $\{O_x \mid x \in X$. Dann erfüllen λ und γ alle Voraussetzungen des vorigen Lemmas und es gibt somit eine Sternverfeinerung ξ von γ, die natürlich auch eine Sternverfeinerung von σ ist.

Setzen wir nun voraus, dass der Raum voll T_4 ist. Sei λ eine beliebige offene Überdeckung. Wir definieren dann eine Folge $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ offener Überdeckungen, mit: γ_0 ist eine Sternverfeinerungsüberdeckung von λ und γ_{n+1} ist eine Sternverfeinerungsüberdeckung von γ_n. Dann sind alle Voraussetzungen von Satz 12.2.5 erfüllt (man beachte Lemma 12.2.2) und es gibt somit eine σ-diskrete offene Verfeinerungsüberdeckung (also auch σ-lokal-endlich) von λ. Da der Raum auch T_3 ist, ist der Beweis mit einem Verweis auf Korollar 12.2.10 beendet!

12.3.7 Lemma

Sei (X, τ) ein top. Raum, ξ eine offene Überdeckung von X und $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge offener Überdeckungen von X mit der Eigenschaft: $\forall x \in X \, \exists O_x \in \dot{x} \cap \tau \, \exists U_x \in \xi \, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_n(O_x) \subseteq U_x$. Dann existiert eine Sternverfeinerungsüberdeckung δ von ξ.

Beweis: Für jedes n bilde $X_n := \{x \in X \mid \exists O_x \in \dot{x} \cap \tau \, \exists U_x \in \xi \, \exists k \leq n \text{ mit } \gamma_k(O_x) \subseteq U_x\}$. Offensichtlich ist X_n dann offen und es gilt $X_n \subseteq X_{n+1}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$), bzw. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Wir können außerdem o.B.d.A. voraussetzen, dass γ_{k+1} immer eine Verfeinerung von γ_k ist (Warum?). Wir definieren dann $\delta_n := \{X_n \cap B \mid B \in \gamma_n\}$ und $\delta := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$. Das δ eine offene Überdeckung von X ist, ist klar. Zeigen wir, dass es auch eine Sternverfeinerung von ξ ist: Sei $x \in X$. Wir wählen dazu ein minimales $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in X_n$, also $\gamma_n(O_x) \subseteq U_x$, für geeignete O_x bzw. Ux und betrachten nun $\delta(x)$. Sei also $y \in \delta(x)$, das heißt $y \in X_m \cap B$ und $x \in X_m \cap B$, für ein gewisses $B \in \gamma_m$. Dann ist $m \geq n$. Da γ_m eine Verfeinerung von γ_n ist und $B \cap O_x \neq \emptyset$ gilt, folgt $y \in B \subseteq \gamma_m(O_x) \subseteq \gamma_n(O_x) \subseteq U_x$. Insgesamt also $\delta(x) \subseteq U_x$.

12.3.8 Satz

Wenn zu jeder offenen Überdeckung ξ eines T_1-Raums eine Folge offener Überdeckungen $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existiert, so dass für jedes $x \in X$ ein $O_x \in \dot{x} \cap \tau$ existiert, ein $n \in \mathbb{N}$ existiert und ein $U \in \xi$ existiert mit $\gamma_n(O_x) \subseteq U$. Dann ist (X, τ) voll normal (also auch parakompakt). Die Umkehrung gilt auch.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Lemma 12.3.7. Für die Umkehrung konstruiere man zu einer offenen Überdeckung ξ eine Folge $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ offener Überdeckungen, wobei γ_0 eine Sternverfeinerung von ξ ist und γ_{k+1} eine Sternverfeinerung von γ_k ist. Mit dieser Folge verschafft man sich dann leicht eine Folge, die die geforderte Eigenschaft hat (Lemma 12.2.2).

12.4 Weitere Eigenschaften parakompakter Räume

Wir geben in diesem Abschnitt zwei weitere Charakterisierungen parakompakter Räume. Zum einen bekommen wir eine Verbindung zwischen Kompaktifizierungen eines top. Raumes X und der Eigenschaft des Raumes parakompakt zu sein. Zum anderen lernen wir eine tiefliegende Überdeckungseigenschaft kennen, die sich als äquivalent zur parakompaktheit erweist. Mit Hilfe der letzteren ist es uns dann möglich zu zeigen, dass die Eigenschaft Parakompakt in der Klasse der Hausdorff-Räume invariant unter stetigen und abgeschlossenen Abbildungen (das sind solche, deren Bilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind) ist!

12.4.1 Satz

Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Dann ist äquivalent:
1) (X,τ) ist parakompakt und T_2.
2) Es gibt eine Hausdorff-Kompaktifizierung cX von X, so dass $X \times cX$ normal ist.

Beweis: Sei ξ eine offene Überdeckung von X. Für $O \in \xi$ wählen wir je ein V_O offen in cX, mit $O = V_O \cap X$. Sei dann $\gamma := \{V_O \mid O \in \xi\}$. Es ist $Z := cX \setminus \bigcup_{V\in\gamma} V$ kompakt und abgeschlossen. Ebenso ist $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ abgeschlossen in cX. Nun ist $X \times cX$ normal, es gibt also ein stetiges $f : X \times cX \to [0,1]$ mit $f(\Delta) \subseteq \{0\}$ und $f(X \times Z) \subseteq \{1\}$, die beiden Mengen sind schließlich disjunkt. Für $x,y \in X$ definieren wir $d(x,y) := sup_{z\in cX}|f(x,z) - f(y,z)|$. d ist zwar nicht unbedingt eine Metrik, immerhin aber eine Pseudometrik, denn es gilt 1) $d(x,y) = d(y,x)$, 2) $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$ und 3) die Dreiecksungleichung ($|f(x,c) - f(z,c)| \leq |f(x,c) - f(y,c)| + |f(y,c) - f(z,c)| \leq sup_{a\in cX}|f(x,a) - f(y,a)| + sup|f(y,b) - f(z,b)|$, also auch $sup_{c\in cX}|f(x,c) - f(z,c)| \leq sup_{a\in cX}|f(x,a) - f(y,a)| + sup|f(y,b) - f(z,b)|$). Die durch τ_d auf X erzeugte Topologie ist allerdings nicht gleich der original Topologie τ, sondern im allgemeinen nur gröber, also $\tau_d \subseteq \tau$. Zeigen wir dies:

Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ betrachten wir die Kugel $K(x,\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$. Wir zeigen $K(x,\varepsilon) \in \tau$. Dazu betrachten wir $\mathscr{U} := \{[0,1] \cap (r - \varepsilon/3, r + \varepsilon/3) \mid r \in [0,1]\}$. Dann ist $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathscr{U}\}$ eine offene Überdeckung von $X \times cX$. Für (x,z) mit $z \in cX$ wählen wir je ein $U_z \in \mathscr{U}$ und $G_z \in \tau$ bzw. in cX offene H_z mit $(x,z) \in G_z \times H_z \subseteq f^{-1}(U_z)$. Dann ist $\delta := \{G_z \times H_z \mid z \in cX\}$ eine offen Überdeckung von $\{x\} \times cX$ und diese Menge ist kompakt. Es gibt also endlich viele $z_1,\ldots,z_n$ mit $\{x\} \times cX \subseteq G_{z_1} \times H_{z_1} \cup \ldots \cup G_{z_n} \times H_{z_n}$ und $x \in G_{z_k}$, für $k = 1,\ldots,n$. Es ist dann $x \in G := \bigcap_{k=1}^{n} G_{z_k} \in \tau$. Sei $y \in G$ und $z \in cX$ beliebig. Es ist dann $z \in H_{z_k}$, für ein gewisses $k \in \{1,\ldots,n\}$. Und wir bekommen $f(G \times H_{z_k}) \subseteq f(G_{z_k} \times H_{z_k}) \subseteq U$, für ein gewisses $U \in \mathscr{U}$. Dann ist aber $diam(f(G \times H_{z_k})) < (2/3)\varepsilon$, also $d(x,y) \leq (2/3)\varepsilon < \varepsilon$ und damit $x \in G \subseteq K(x,\varepsilon)$. Nun gibt es zu jedem $x' \in K(x,\varepsilon)$ ein ε' mit $x' \in K(x',\varepsilon') \subseteq K(x,\varepsilon)$

(Dreiecksungleichung). Zu diesem x' gibt es damit dann ein $G' \in \tau$ mit $x' \subseteq G' \subseteq K(x', \varepsilon')$. Die Kugel $K(x, \varepsilon)$ ist somit Element von τ.

Nun sind auch Pseudometrische Räume T_3 (ne leichte Übung) und Lemma 12.2.6 (mit exakt dem gleichen Beweis für Pseudometriken) zusammen mit Korollar 12.2.10 zeigt, dass (X, τ_d) parakompakt ist. Zu $\{K(x, 1/2) \mid x \in X\}$ bekommen wir also eine lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung $\alpha \subseteq \tau_d$. Nun ja, dann ist α aber auch lokal-endlich bezüglich τ.

Für $x \in X$ und $y \in K(x, 1/2)$ gilt $f(x,y) = |f(x,y) - f(y,y)| \leq d(x,y) < 1/2$, also $f(\{x\} \times K(x, 1/2)) \subseteq [0, 1/2)$. Somit $f(\{x\} \times \overline{K(x,1/2)}) = f(\overline{\{x\} \times K(x,1/2)}) \subseteq \overline{f(\{x\} \times K(x,1/2))} \subseteq \overline{[0,1/2)} = [0,1/2]$ (gemeint ist der Abschluss bezüglich τ). Aus $x \in X$ und $z \in \overline{K(x,1/2)}$ folgt also $f(x,z) \leq 1/2$. Für alle $A \in \alpha$ gilt demnach $\overline{A} \cap Z = \emptyset$. Nun ist jedes $\overline{A}$ kompakt (für $A \in \alpha$), es gibt also ein endliches $\gamma_A \subseteq \gamma$ mit $\overline{A} \subseteq \bigcup \gamma_A$. Wir sind fast fertig ... $\beta := \{A \cap g \mid g \in \gamma_A,\, A \in \alpha\}$ ist nun nämlich eine lokal-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung von ξ. Somit ist (X, τ) parakompakt.

12.4.2 Definition

cushioned Verfeinerung Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\xi \subseteq \mathscr{P}(X)$ bzw. $\nu \subseteq \mathscr{P}(X)$. Wir sagen ν ist eine cushioned Verfeinerung[13] von ξ, wenn es zu jedem $U \in \nu$ ein $T(U) \in \xi$ gibt (also eine Abbildung $T : \nu \to \xi$), so dass $\overline{\bigcup \nu'} \subseteq \bigcup_{U \in \nu'} T(U)$ für alle $\nu' \subseteq \nu$ gilt. Sind $\nu = \{U_a \mid a \in A\}$ und $\xi = \{V_a \mid a \in A\}$ durch A indiziert, so sprechen wir von einer indizierten cushioned Verfeinerung ν von ξ, wenn $\overline{\bigcup_{a \in A'} U_a} \subseteq \bigcup_{a \in A'} V_a$ ist, für jedes $A' \subseteq A$. Wir sprechen von einer σ-cushioned Verfeinerung ν von ξ, wenn $\nu = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \nu_n$ und jedes ν_n eine cushioned Verfeinerung von ξ ist. Sprechen wir von σ-cushioned Verfeinerungsüberdeckungen $\nu = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \nu_n$, so muss nur ν eine Überdeckung sein - keinesfalls die ν_n.

Wir können uns auf indizierte cushioned Verfeinerungen beschränken, denn es gilt:

Sei ν eine cushioned Verfeinerung von $\xi = \{V_a \mid a \in A\}$. Dann hat ξ auch eine indizierte cushioned Verfeinerung $\lambda = \{U_a \mid a \in A\}$.

Beweis: Für $a \in A$ setze $U_a := \bigcup \{U \in \nu \mid T(U) = V_a\}$ und weiter $\lambda := \{U_a \mid a \in A\}$.

Damit kommen wir zu einer sehr tiefliegenden Charakterisierung parakompakter T_1-Räume:

12.4.3 Satz

Ein T_1-Raum (X, τ) in dem es zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U}$ eine σ-cushioned Verfeinerungsüberdeckung gibt, ist parakompakt (insbesondere ist er also parakompakt, wenn er immer eine cushioned Verfeinerungsüberdeckung hat). Der Leser beachte insbesondere, dass die Verfeinerungsüberdeckung keinesfalls aus offenen oder abgeschlossenen Mengen bestehen muss!

Beweis: Im ersten Schritt zeigen wir, dass wir zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U}$ eine cushioned Verfeinerungsüberdeckung finden können. Dann zeigen wir - und das ist zur Abwechslung

[13] wir benutzen wieder die englische Bezeichnung

sehr einfach - dass (X,τ) auch T_4 ist, insbesondere also auch T_3. Im dritten (und aufwendigsten) Schritt zeigen wir, dass es zu jeder offene Überdeckung dann auch eine σ-lokal endliche offene Verfeinerungsüberdeckung gibt. Mit Korollar 12.2.10 schließen wir dann, dass (X,τ) parakompakt ist. Machen wir uns ans Werk:

1.Schritt: Sei ξ eine beliebige offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine σ-cushioned Verfeinerungsüberdeckung $\gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$, wobei die γ_n je eine cushioned Verfeinerung (allerdings nicht notwendig eine Überdeckung) von ξ sind. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es also eine Abbildung $T_n : \gamma_n \to \xi$, mit der Eigenschaft aus der Definition 12.4.2. Für jedes $x \in X$ setze nun $n(x) := min\{n \in \mathbb{N} \mid x \in \bigcup \gamma_n\}$. Für x sei $g(x) \in \gamma_{n(x)}$, mit $x \in g(x)$. Wir setzen dann $W(x) := [\bigcup \gamma_{n(x)}] \setminus \bigcup\{g \mid 0 \le n \le n(x),\ g \in \gamma_n \text{ und } x \notin T_n(g)\}$. Nun ist $x \notin \bigcup\{T_n(g) \mid 0 \le n \le n(x),\ g \in \gamma_n \text{ und } x \notin T_n(g)\} \supseteq \overline{\bigcup\{g \mid 0 \le n \le n(x),\ g \in \gamma_n,\ x \notin T_n(g)\}}$ und somit $W(x)$ eine (nicht notwendig offene) Umgebung von x.

Beweisen wir eine kleine Zwischenbehauptung: $y \notin T_{n(x)}(g(x))$ impliziert $x \notin W(y)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.Fall $n(x) \le n(y)$, dann $x \in g(x) \subseteq \bigcup\{g \mid 0 \le n \le n(y), g \in \gamma_n \text{ und } y \notin T_n(g)\}$ (man beachte $y \notin T_{n(x)}(g(x))$). Na ja, dann aber $x \notin W(y)$ (folgt ja gerade aus der Definition von $W(y)$).

2.Fall $n(y) < n(x)$, dann $x \notin \bigcup \gamma_{n(y)}$, also $x \notin W(y)$.

Für jedes $P \in \xi$ setzen wir nun $L(P) := \{x \in X \mid T_{n(x)}(g(x)) = P\}$ und dann $\lambda := \{L(P) \mid P \in \xi\}$. Da $x \in L(T_{n(x)}(g(x)))$, ist λ eine Überdeckung von X. Zeigen wir, dass es eine cushioned Verfeinerung von ξ ist. Für Jedes $L \in \lambda$ wählen wir ein $P \in \xi$ mit $L = L(P)$ und definieren $T(L) := P$ (wenn $L(P) = L(P')$, so $P = P'$). Sei nun $\xi' \subseteq \xi$ und $y \notin \bigcup \xi'$. Für jedes $P \in \xi'$ und für jeden Punkt $x \in L(P)$ erhalten wir dann $T_{n(x)}(g(x)) = P$. Also $y \notin T_{n(x)}(g(x))$ und mit Hilfe der Zwischebehauptung $x \notin W(y)$. Und somit insgesamt $L(P) \cap W(y) = \emptyset$, für alle $P \in \xi'$. Da $W(y)$ eine Umgebung von y ist, folgt weiter $y \notin \overline{\bigcup\{L(P) \mid P \in \xi'\}}$. Anders ausgedrückt bedeutet dies $\overline{\bigcup\{L(P) \mid P \in \xi'\}} \subseteq \bigcup \xi' = \bigcup\{T(L(P)) \mid P \in \xi'\}$. Die Überdeckung λ ist also eine cushioned Verfeinerungsüberdeckung von ξ.

2.Schritt: Seien A, B abgeschlossen und disjunkt. Dann ist $\{X \setminus A, X \setminus B\}$ eine offene Überdeckung von X, zu der es nach Schritt 1 eine cushioned Verfeinerungüberdeckung gibt. Wie wir bereits gesehen haben (siehe Definition 12.4.2) gibt es dann aber auch eine indizierte cushioned Verfeinerungsüberdeckung $\{V, V'\}$. Also $V \cup V' = X$ und $\overline{V} \subseteq X \setminus A$ bzw. $\overline{V'} \subseteq X \setminus B$. Dann folgt $A \subseteq X \setminus \overline{V}$ und $B \subseteq X \setminus \overline{V'}$, mit $(X \setminus \overline{V}) \cap (X \setminus \overline{V'}) = \emptyset$. Der Raum ist also T_4.

3.Schritt: Sei wieder $\xi = \{U_\alpha \mid \alpha < \beta\}$, mit $|\xi| = \beta$ eine beliebige offene (indizierte, $U_\alpha \neq U_{\alpha'}$ für $\alpha \neq \alpha'$) Überdeckung von X. Sei $\gamma_0 = \{g_{\alpha 0} \mid \alpha < \beta\}$ eine indizierte cushioned Verfeinerung von ξ. Für jdes $\alpha < \beta$ definieren wir $U_{\alpha 1} := U_\alpha \setminus \overline{\bigcup\{g_{\delta 0} \mid \delta < \alpha\}}$ und dann $\xi_1 := \{U_{\alpha 1} \mid \alpha < \beta\}$. Wir zeigen ξ_1 ist eine (offene) Überdeckung. Sei $x \in X$. Wähle α minimal, mit $x \in U_\alpha$. Dann ist $\overline{\bigcup\{g_{\delta 0} \mid \delta < \alpha\}} \subseteq \bigcup\{U_\delta \mid \delta < \alpha\} \not\ni x$, also $x \in U_{\alpha 1}$. Sei dann $\gamma_1 = \{g_{\alpha 1} \mid \alpha < \beta\}$ eine indizierte cushioned Verfeinerung von ξ_1 (und damit auch von ξ). Es gilt dann

1) $\overline{\bigcup\{g_{\delta 0} \mid \delta < \alpha\}} \cap g_{\alpha 1} = \emptyset$ und 2) $g_{\alpha 0} \cap \overline{\bigcup\{g_{\delta 1} \mid \delta > \alpha\}} = \emptyset$ (beides klar nach Konstruktion).

Seien für $0 \le k \le n$ kombinatorische cushioned Verfeinerungen $\gamma_k = \{g_{\alpha k} \mid \alpha < \beta\}$ von ξ gegeben, mit 1) $\overline{\bigcup\{g_{\delta k} \mid \delta < \alpha\}} \cap g_{\alpha k+1} = \emptyset$ und 2) $g_{\alpha k} \cap \overline{\bigcup\{g_{\delta k+1} \mid \delta > \alpha\}} = \emptyset$, für $0 \le k < n$. Definiere dann $U_{\alpha n+1} := U_\alpha \setminus \overline{\bigcup\{g_{\delta n} \mid \delta < \alpha\}}$ und dann $\xi_{n+1} := \{U_{\alpha n+1} \mid \alpha < \beta\}$. Dann ist natürlich auch $\xi_{\alpha n+1}$ eine offene Überdeckung von X. Wir können dann somit eine indizierte cushioned Verfeinerung $\gamma_{n+1} = \{g_{\alpha n+1} \mid \alpha < \beta\}$ von ξ_{n+1} bilden. Insgesamt erhalten wir somit eine Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von indizierten cushioned Verfeinerungen von ξ, mit den Eigenschaften

1) $\overline{\bigcup\{g_{\delta n} \mid \delta < \alpha\}} \cap g_{\alpha n+1} = \emptyset$ und 2) $g_{\alpha n} \cap \overline{\bigcup\{g_{\delta n+1} \mid \delta > \alpha\}} = \emptyset$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha < \beta$ können wir nun $V_{\alpha n} := X \setminus \overline{\bigcup\{g_{\delta n} \mid \alpha \neq \delta < \beta\}}$ bilden und dann $\lambda := \{V_{\alpha n} \mid \alpha < \beta \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen wir, dass λ eine offene Überdeckung von X ist. Sei dazu $x \in X$. Sei $\nu_n := min\{\alpha < \beta \mid x \in g_{\alpha n}\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\nu_k := min\{\nu_0, \nu_1, ...\}$. Dann ist $x \in g_{\nu_k k}$, also $x \notin \overline{\bigcup\{g_{\delta k+1} \mid \delta > \nu_k\}}$. Außerdem ist $x \in g_{\nu_{k+2} k+2}$, also $x \notin \overline{\bigcup\{g_{\delta k+1} \| \delta < \nu_{k+2}\}}$ und damit erst recht $x \notin \overline{\bigcup\{g_{\delta k+1} \mid \delta < \nu_k\}}$. Insgesamt somit $x \in V_{\nu_k k+1}$.

Es gilt weiterhin 1) $V_{\alpha n} \subseteq U_\alpha$, für alle $\alpha < \beta$ und

2) $V_{\alpha n} \cap V_{\delta n} = \emptyset$, für $\alpha \neq \delta$ und $n \in \mathbb{N}$.

Zu 1) bemerken wir $V_{\alpha n} = X \setminus \overline{\bigcup\{g_{\delta n} \mid \alpha \neq \delta < \beta\}} \subseteq X \setminus \bigcup\{g_{\delta n} \mid \alpha \neq \delta\} \subseteq g_{\alpha n} \subseteq U_\alpha$ (da γ_n eine Überdeckung ist). Zu 2) bemerken wir, dass nach Konstruktion $V_{\delta n} \cap g_{\alpha n} = \emptyset$ gilt. Da $V_{\alpha n} \subseteq g_{\alpha n}$, folgt dann $V_{\alpha n} \cap V_{\delta n} = \emptyset$.

Sei nun $\eta = \{C_{\alpha n} \mid \alpha < \beta \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ eine indizierte cushioned Verfeinerung von λ. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt somit $\overline{\bigcup\{C_{\alpha n} \mid \alpha < \beta\}} \subseteq \bigcup\{V_{\alpha n} \mid \alpha < \beta\}$. Nun ist der Raum T_4, es gibt also offene Mengen W_n mit $\overline{\bigcup\{C_{\alpha n} \mid \alpha < \beta\}} \subseteq W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq \bigcup\{V_{\alpha n} \mid \alpha < \beta\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden wir dann $\chi_n := \{V_{\alpha n} \cap W_n \mid \alpha < \beta\}$.

Zeigen wir, dass jedes χ_n diskret, also insbesondere lokal-endlich ist. Sei dazu $x \in X$. 1.Fall $x \in \overline{W_n}$. Dann gibt es ein $\alpha < \beta$ mit $x \in V_{\alpha n}$. Also $\{V_{\delta n} \cap W_n \in \chi_n \mid V_{\alpha n} \cap (V_{\delta n} \cap W_n) \neq \emptyset\} = \{V_{\alpha n} \cap W_n\}$. 2.Fall $x \in X \setminus \overline{W_n}$. Dann ist $\{V_{\delta n} \cap W_n \in \chi_n \mid (X \setminus \overline{W_n}) \cap (V_{\delta n} \cap W_n) \neq \emptyset\} = \emptyset$.

Zeigen wir abschließend, dass $\chi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \chi_n$ eine Verfeinerungsüberdeckung von ξ ist. Nun ja, ist $x \in X$, so gibt es $\alpha' < \beta$ und $n \in \mathbb{N}$, mit $x \in C_{\alpha' n}$ (denn η ist eine Überdeckung von X). Also $x \in \overline{\bigcup\{C_{\alpha n} \mid \alpha < \beta\}} \subseteq W_n$ und somit $x \in V_{\alpha' n} \cap W_n \in \chi$. Sei andererseits $P \in \chi$, dann gibt es $\alpha < \beta$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $P = V_{\alpha n} \cap W_n$. Nun ist $P \subseteq V_{\alpha n} \subseteq U_\alpha \in \xi$. Damit haben wir gezeigt, dass χ eine σ-diskrete (also σ-lokal-endliche) offene Verfeinerungsüberdeckung von ξ ist. Da der Raum normal ist, folgt aus Korollar 12.2.10, dass er auch parakompakt ist.

12.4.4 Korollar

Sei X ein parakompakter T_2-Raum und $f : X \to Y$ eine stetige, abgeschlossene und surjektive Abbildung. Dann ist auch Y ein parakompakter T_2-Raum.

Beweis: X ist auch T_1. Sei $y \in Y$ und $x \in X$ mit $f(x) = y$. Da $\{x\}$ abgeschlossen ist, ist somit auch $\{y\}$ abgeschlossen (als Bild von $\{x\}$ unter f). Als parakompakter T_2-Raum ist X auch T_4. Zeigen wir das auch von Y. Seien A, U abgeschlossen bzw. offen in Y und $A \subseteq U$. Dann ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen, $f^{-1}(U)$ offen und $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(U)$. Es gibt also eine offene Menge V mit $f^{-1}(A) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq f^{-1}(U)$. Dann folgt $A \subseteq Y \setminus f(X \setminus V) \subseteq\subseteq f(V) \subseteq f(\overline{V}) \subseteq U$. Nun ist $W := Y \setminus f(X \setminus V)$ offen und $f(\overline{V})$ abgeschlossen und wir erhalten $A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.

Sei ξ eine offene Überdeckung von Y. Zu jedem $y \in Y$ wählen wir ein offenes W_y mit $y \in W_y \subseteq \overline{W_y} \subseteq V_y$. Sei dann $\xi' := \{W_y \mid y \in Y\}$. Sei $T_1 : \xi' \to \xi$ eine Abbildung mit $\overline{W} \subseteq T(W)$, für jedes $W \in \xi'$. Dann ist $\delta := \{f^{-1}(W) \mid V \in \xi'\}$ eine offene Überdeckung von X. Sei dann λ eine lokal-endliche offene Verfeinierungsüberdeckung von δ und $T_2 : \gamma := \{f(L) \mid L \in \lambda\} \to$

ξ' eine Abbildung mit $f(L) \subseteq T_2(f(L))$, für alle $L \in \lambda$. Wir zeigen, dass γ eine cushioned (nicht notwendige offene oder abgeschlossene) Verfeinerungsüberdeckung von ξ ist. Mit Hilfe des vorigen Satzes schließen wir dann, dass auch Y parakompakt ist. Für beliebiges $\lambda' \subseteq \lambda$ gilt nun (man beachte, dass die Abbildung f abgeschlossen ist und lokal-endliche Systeme Abschlusserhaltend sind):

$f(\overline{\bigcup_{L\in\lambda'} L}) = f(\bigcup_{L\in\lambda'} \overline{L}) = \bigcup_{L\in\lambda} f(\overline{L}) \subseteq \bigcup_{L\in\lambda'} \overline{f(L)} \subseteq \overline{\bigcup_{L\in\lambda'} f(L)} = \overline{f(\bigcup_{L\in\lambda'} L)} = f(\overline{\bigcup_{L\in\lambda'} L})$.

Bezeichnen wir mit T die abbildung $T_1 \circ T_2 : \gamma \to \xi$, so folgt für ein beliebiges $\lambda' \subseteq \lambda$ also $\overline{\bigcup_{L\in\lambda'} f(L)} = \bigcup_{L\in\lambda'} \overline{f(L)} \subseteq \bigcup_{L\in\lambda'} \overline{T_2(f(L))} \subseteq \bigcup_{L\in\lambda'} T_1 \circ T_2(f(L)) = \bigcup_{L\in\lambda'} T(f(L))$.

12.5 Metakompakte und stark parakompakte Räume

Wir verallgemeinern das Konzept parakompakter Räume nun dahingehend, dass wir nur noch Punkt-endliche offene Verfeinerungsüberdeckungen fordern. Im Anschluss daran untersuchen wir einen Begriff, der etwas stärkeren als Parakompaktheit ist.

12.5.1 Definition

metakompakt Ein top. Raum (X,τ) heißt metakompakt, wenn jede offene Überdeckung eine Punkt-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung hat.

Jeder parakompakte Raum ist also beispielsweise metakompakt. Für die Formulierung des nächsten Satzes führen wir zwei extra Begriffe ein.

12.5.2 Definition

Ein top. R. (X,τ) heißt metakompakt von Ordnung κ, für eine unendliche Kardinalzahl κ, wenn jede offene Überdeckung σ eine offene Verfeinerungsüberdeckung ξ hat derart, dass für jedes $x \in X$ gilt: $|\dot{x} \cap \xi| \leq \kappa$. Ein metakompakter Raum ist also metakompakt von Ordnung κ, für jedes unendliche κ (die Umkehrung muss nicht gelten)!

Ein Raum (X,τ) nennen wir κ-kompakt, wenn jede offene Überdeckung σ mit $|\sigma| \leq \kappa$ eine endliche Teilüberdeckung hat (für eine unendliche Kardinalzahl κ). Für $\kappa = |\mathbb{N}|$ nennen wir den Raum auch abzählbar kompakt (siehe auch Definition 4.5.16).

12.5.3 Satz

Sei (X,τ) metakompakt von Ordnung κ und zusätzlich κ-kompakt (für eine unendliche Kardinalzahl κ), dann ist (X,τ) bereits kompakt!

Beweis: Sei ξ eine offene Überdeckung von X und σ eine offene Verfeinerungsüberdeckung von ξ derart, dass für jedes $x \in X$ gilt: $|\dot{x} \cap \sigma| \leq \kappa$. Falls σ eine Teilüberdeckung σ' mit $|\sigma'| \leq \kappa$ hat, so hat σ' (und damit auch ξ, denn σ ist eine Verfeinerung), wegen der κ-Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung. Nehmen wir mal an, dass σ keine Teilüberdeckung σ' von Kardinalität $\leq \kappa$ hat.

Wir wählen dann $x_0 \in X =: X_0$ und $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k\leq n} \sigma(x_k) =: X_{n+1}$. Nach Voraussetzung an σ ist $\bigcup_{k\leq n} \sigma(x_k) \neq X$, denn $|\bigcup_{k\leq n}(\dot{x_k} \cap \sigma)| \leq \kappa$! Wir bilden dann weiter $Y_n := \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$. Die Y_n sind dann abgeschlossen und es gilt $Y_{n+1} \subseteq Y_n$. Insbesondere haben also endlich viele einen nicht leeren Schnitt. Da X κ-kompakt ist, insbesondere also abzählbar kompakt, gilt somit auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n \neq \emptyset$ (andernfalls hätte man durch Übergang zu Komplementen eine abzählbare offene Überdeckung, also auch eine endliche Teilüberdeckung). Sei $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Dann ist $x \in V$, für ein gewisses $V \in \sigma$ und es gibt dann auch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in V$ (da $x \in Y_0$). Dann ist aber $x \in X_{n+1} = X \setminus \bigcup_{k\leq n} \sigma(x_k) \subseteq X \setminus V$ - ein Widerspruch!

12.5.4 Korollar

Ein abzählbar kompakter und zusätzlich metakompakter (oder auch parakompakter) topologischer Raum ist bereits kompakt.

Wie auch schon bei der Kompaktheit und Parakompaktheit geben wir nun eine Charakterisierung metakompakter Räume durch Filterkonvergenz. Dazu noch zwei kleine Definitionen.

12.5.5 Definition

Punkt dominant: Eine Teilmenge $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ eines topologischen Raumes (X, τ) heißt Punkt dominant, wenn zu jedem $x \in X$ die Menge $\{A \in \alpha \mid x \notin A\}$ endlich ist. Offensichtlich gilt: α ist Punkt dominant $\Leftrightarrow$ $\{X \setminus A \mid A \in \alpha\}$ ist Punkt-endlich.

12.5.6 Definition

Filter vom Typ M: Ein Filter ψ in einem topologischen Raum (X, τ) ist vom Typ M, wenn jede Punkt dominante Teilfamilie $\alpha \subseteq \psi$, bestehend aus abgeschlossenen Mengen einen konvergenten Oberfilter hat. Der Filter ψ braucht keinen konvergenten Oberfilter haben.

12.5.7 Satz

(X, τ) ist metakompakt g.d.w. jeder Filter vom Typ M einen konvergenten Oberfilter hat.

Beweis: Sei X metakompakt. Annahme es existiert ein Filter ϕ vom Typ M, welcher keinen konvergenten Oberfilter hat. Setze $\mathscr{U} := \{X \setminus \overline{P} \mid P \in \phi\}$. Dann ist $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von X (Sei $x \in X$. Annahme: Für alle $P \in \phi$ gilt $x \in \overline{P}$, dann gilt $\forall O \in \dot{x} \cap \tau \forall P \in \phi \,:\, P \cap O \neq \emptyset$. Also existiert ein filterψ mit $(\dot{x} \cap \tau) \cup \phi \subseteq \psi$ und somit $\psi \to x$; Widerspruch!).
Nun existiert eine Punkt-endliche Verfeinerungs-Überdeckung $\mathscr{V}$ von $\mathscr{U}$. Dann ist $\alpha := \{X \setminus V \mid V \in \mathscr{V}\}$ Punkt dominant und $\alpha \subseteq \phi$. Also gibt es einen konvergenten Filter ψ mit $\alpha \subseteq \psi$. Sagen wir $\psi \to x$ für ein gewisses $x \in X$. Also $x \in \bigcap_{S\in\psi} \overline{S} \subseteq \bigcap_{V\in\mathscr{V}}(X \setminus V) = X \setminus \bigcup_{V\in\mathscr{V}} V = \emptyset$ - Widerspruch!

Sei andererseits $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung. Falls $\mathscr{U}$ eine endliche Teilüberdeckung hat, sind wir fertig. Andernfalls setze $\alpha := \{X \setminus \bigcup_{V \in \mathscr{V}} V \mid \mathscr{V} \subseteq \mathscr{U},\ \mathscr{V} : \text{endlich}\ \}$. Jeder Filter ψ mit $\alpha \subseteq \psi$ ist nicht konvergent! Also ist der von α erzeugte Filter ϕ NICHT vom Typ M. Und deshalb gibt es eine Punkt dominante Teilfamilie $\beta \subseteq \phi$ aus abgeschlossenen Mengen, welche keinen konvergenten Oberfilter hat.
Für $F \in \beta$ wähle ein endliches $\mathscr{U}(F) \subseteq \mathscr{U}$, mit $X \setminus \bigcup_{A \in \mathscr{U}(F)} A \subseteq F$, also $X \setminus F \subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{U}(F)} A$. Setze nun noch $\mathscr{H}(F) := \{A \cap (X \setminus F) \mid A \in \mathscr{U}(F)\}$ und schlussendlich $\mathscr{R} := \bigcup_{F \in \beta} \mathscr{H}(F)$. Zu zeigen bleibt: $\mathscr{R}$ ist eine Punkt-endliche offene Verfeinerungs-Überdeckung von $\mathscr{U}$.
Sei $x \in X$. Da β keinen konvergenten Oberfilter hat, gibt es ein $O \in \dot{x} \cap \tau$ und $F_1, ..., F_n \in \beta$ mit $O \cap F_1 \cap ... \cap F_n = \emptyset$, also $x \in X \setminus F_i \subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{U}(F_i)} A$ für ein gewisses $i \in \{i_1, ..., i_n\}$. Dann gibt es aber auch ein $A \in \mathscr{U}(F_i)$ mit $x \in A \cap (X \setminus F_i)$. Dass die Elemente aus $\mathscr{R}$ offen sind und $\mathscr{R}$ eine Verfeinerung von $\mathscr{U}$ ist, ist trivial. $\mathscr{R}$ ist auch Punkt-endlich. Denn $x \in X$ bedeutet $\delta := \{F \in \beta \mid x \in X \setminus F\} = \{F \in \beta \mid x \notin F\}$ ist endlich. Aus $\{O \in \mathscr{R} \mid x \in O\} \subseteq \bigcup_{F \in \delta} \mathscr{H}(F)$ folgern wir dann, dass auch $\mathscr{R}$ Punkt-endlich ist.

12.5.8 Lemma

Sei $f : X \to Y$ stetig und ϕ ein Filter vom Typ M (in X). Dann ist $f(\phi)$ ein Filter vom Typ M auf Y.

Beweis: Sei $\beta \subseteq f(\phi)$ eine Punkt dominante Familie aus abgeschlossenen Mengen. Dann ist $\alpha := \{f^{-1}(B) \mid B \in \beta\}$ eine ebenfalls Punkt dominant Teilmenge von ϕ. Es gibt dann einen konvergenten Filter ψ mit $\alpha \subseteq \psi$. Na ja, dann ist eben $f(\psi)$ ein konvergenter Filter auf Y mit $\beta \subseteq f(\psi)$.

12.5.9 Satz

Sei (Y, σ) metakompakt, $f : X \to Y$ stetig und abgeschlossen (Bilder abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen) und zusätzlich mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(y)$ kompakt ist $\forall y \in Y$ (in X). Dann ist auch (X, τ) metakompakt.

Beweis: Sei ϕ ein Filter vom Typ M auf X. Dann ist der Bildfilter auch vom Typ M und daher besitzt er einen konvergenten Oberfilter (gegen ein Element y). Das heißt $\forall V \in \dot{y} \cap \sigma \forall P \in \phi\ :\ f(P) \cap V \neq \emptyset\ (*)$.
Annahme $\bigcap_{P \in \phi} \overline{P} = \emptyset$, dann gibt es $P_1, ... P_n \in \phi$ mit $\overline{P_1} \cap ... \cap \overline{P_n} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ ($f^{-1}(y)$ ist kompakt!). Nun ist $P := \overline{P_1} \cap ... \cap \overline{P_n} \in \phi$ und abgeschlossen, also folgt aus $(*)$ $y \in \overline{f(P)} = f(P)$ und damit $P \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$; Widerspruch. Also $\bigcap_{P \in \phi} \overline{P} \neq \emptyset$ und somit gibt es einen konvergenten Oberfilter.

12.5.10 Korollar

Sei X kompakt und Y metakompakt, dann ist $X \times Y$ metakompakt.

Beweis: Betrachte $\pi : X \times Y \to Y$ definiert durch $\pi(x,y) := y$ und wende Satz 12.5.9 an.

12.5.11 Lemma

1. Sei γ eine Punkt-endliche offene Überdeckung eines topologischen Raums (X,τ). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $X_n := \{x \in X \mid |\dot{x} \cap \gamma| \leq n\}$ und für jedes $x \in X$ setzen wir $V_x := \bigcap \dot{x} \cap \gamma$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n \in \tau$ mit $X_n \subseteq U_n$; speziell sei $U_0 = \emptyset$. Dann ist jedes X_n in X abgeschlossen und zu $X_{n+1} \setminus U_n$ gibt es eine diskrete Familie α_{n+1} bestehend aus in X abgeschlossenen Mengen, welche $X_{n+1} \setminus U_n$ überdeckt und γ verfeinert.
2. Sei γ eine Punktendliche offene Überdeckung eines topologischen Raums (X,τ), der T_3 und collectionwise T_4 ist. Dann gibt es zu γ eine σ-diskrete offene Verfeinerungsüberdeckung.

Beweis: 1. Das X_n abgeschlossen ist, folgt aus $x \in X \setminus X_n \Rightarrow V_x \cap X_n = \emptyset$. Sei nun $n \geq 1$ und $X_{n-1} \subseteq U_{n-1} \in \tau$. Wir definieren $Y_n := X_n \setminus U_{n-1}$. Dann ist Y_n abgeschlossen und Teilmenge von $X_n \setminus X_{n-1}$. Nun setzen wir $\alpha_n := \{Y_n \cap V_x \mid x \in Y_n\}$. Jeder Punkt $x \in Y_n$ ist in genau n offenen Mengen aus γ enthalten. Und da V_x gerade der Schnitt all dieser Mengen ist, ist α_n eine Zerlegung von Y_n! Nun ist jedes $A \in \alpha_n$ offen in Y_n (Teilraumtopologie). Also ist auch $\bigcup\{B \in \alpha_n \mid B \neq A\}$ offen in Y_n und A als dessen Komplement also abgeschlossen. Demzufolge ist jedes Element aus α_n abgeschlossen in X! Das es sich bei α_n um eine Verfeinerung von γ handelt ist klar nach Konstruktion. Zeigen wir die Diskretheit: Für $x \in X \setminus Y_n$ ist $X \setminus Y_n \in \dot{x} \cap \tau$ und offensichtlich $|\{A \in \alpha_n \mid A \cap (X \setminus Y_n) \neq \emptyset\}| = 0$. Und für $x \in Y_n$ gilt eben $|\{A \in \alpha_n \mid A \cap V_x \neq \emptyset\}| = 1$ (folgt daraus, dass $\alpha_n = \{Y_n \cap V_x \mid x \in Y_n\}$ eine Zerlegung von Y_n ist). Damit ist alles bewiesen.

2. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus 1. und konstruieren rekursiv eine σ-diskrete offene Verfeinerungsüberdeckung von γ. Sei $\gamma_1 \subseteq \tau$ diskrete mit $\alpha_1 < \gamma_1 < \gamma$. Seien γ_1 bis γ_n bereits konstruiert, mit den Eigenschaften:

1. γ_k, $k = 1,\ldots,n$ ist diskret.
2. $\{A \setminus U_k \mid A \in \alpha_{k+1}\} < \gamma_{k+1} < \gamma$, $k = 1,\ldots,n-1$, wobei $U_k := \bigcup(\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_k)$ und α_{k+1} entsprechend 1. gewählt wurde.

Zu $X_{n+1} \setminus U_n$, wobei $U_n := \bigcup(\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n)$, betrachte das nach 1. existierende α_{n+1} und wähle $\gamma_{n+1} \subseteq \tau$ diskret mit $\{A \setminus U_n \mid A \in \alpha_{n+1}\} < \gamma_{n+1} < \gamma$. Offensichtlich ist dann $\bigcup\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ eine σ-diskrete offene Verfeinerungsüberdeckung von γ.

12.5.12 Satz

Ein Raum (X,τ) der metakompakt, T_3 und außerdem collectionwise T_4 ist, ist auch parakompakt. Zusammen mit Lemma 12.3.6 ergibt sich dann: Ein Raum ist genau dann parakompakt und T_3, wenn er metakompakt, T_3 und collectionwise T_4 ist.

Beweis: Sei $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung. Es gibt eine Punkt-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung γ von $\mathscr{U}$. Entsprechend dem vorigen Lemma gibt es eine σ-diskrete offene Verfeinerungsüberdeckung von γ, die natürlich auch $\mathscr{U}$ verfeinert. Da der Raum T_3 ist, folgt mit Korollar 12.2.10, dass er auch parakompakt ist.

12.5.13 Definition

Wir nennen $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ **sternendlich** bzw. **sternabzählbar**, wenn $\{A' \in \alpha \mid A \cap A' \neq \emptyset\}$ für alle $A \in \alpha$ endlich bzw. abzählbar ist und wir nennen $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ **dominant**, wenn $\{X \setminus A \mid A \in \alpha\}$ sternendlich ist. Wir nennen (X,τ) **stark parakompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung hat ($\forall \sigma \subseteq \tau$ mit $\bigcup \sigma = X \ \exists \xi \subseteq \tau$ mit $\xi < \sigma$ und ξ ist sternendlich). Wir nennen einen Filter ϕ einen SP Filter (oder vom Typ SP), wenn jede dominante Teilmenge $\alpha \subseteq \phi$, die aus abgeschlossenen Teilmengen von X besteht einen konvergenten Oberfilter ψ hat ($\forall \alpha \subseteq \phi$ mit $\{X \setminus A \mid A \in \alpha\} \subseteq \tau$ und α dominant $\exists$ Filter ψ und $\exists x \in X$ mit $\alpha \subseteq \psi \to x$).

Vollkommen analog zu Satz 12.1.11 beweist man leicht folgenden Satz:

12.5.14 Satz

(X,τ) ist stark parakompakt g.d.w. jeder Filter vom Typ SP einen konvergenten Oberfilter hat.

Auch die folgenden Sätze lassen sich genauso beweisen, wie wir das schon bei parakompakten und metakompakten Räumen getan haben.

12.5.15 Lemma

Sei $f : X \to Y$ stetig und ϕ ein Filter vom Typ SP (in X). Dann ist $f(\phi)$ ein Filter vom Typ SP auf Y.

12.5.16 Satz

Sei (Y,σ) stark parakompakt, $f : X \to Y$ stetig und abgeschlossen (Bilder abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen) und zusätzlich mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(y)$ kompakt ist $\forall y \in Y$ (in X). Dann ist auch (X,τ) stark parakompakt.

12.5.17 Korollar

Sei X kompakt und Y stark parakompakt, dann ist $X \times Y$ stark parakompakt.

12.5.18 Lemma

(a) Sei $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Mengen und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Mengen im topologischen Raum (X,τ) mit $F_n \subseteq V_n \subseteq F_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei λ_n endlich $\subseteq \tau$ mit $F_n \subseteq \bigcup \lambda_n$. Dann hat $\lambda := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$ eine abzählbare sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung.

(b) Sei $\lambda = \{U(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N}\} \subseteq \tau$ mit $\bigcup \lambda = X$ und $\overline{U(i,j)} \subseteq U(i,j+1)$ für alle $i,j \in \mathbb{N}$. Setze $U_i := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U(i,j)$. Dann hat $\gamma := \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung.

(c) Ist (X,τ) ein T_4-Raum, γ eine abzählbare offene Überdeckung und α eine abzählbare Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen (also $\alpha < \gamma$ und $\bigcup \alpha = X$), so gibt es eine abzählbare sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung ξ von γ.

Beweis: (a) Setze $\eta_0 := \lambda_0$, $\eta_1 := \lambda_1$ und $\eta_{n+2} := \{L \cap (V_{n+1} \setminus F_n) \mid L \in \lambda_{n+2}\}$. Dann ist $\eta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n$ die gesuchte abzählbare sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung von λ. Offenbar ist $(\bigcup \eta_{n+2}) \cap (\bigcup \eta_m) = \emptyset$ für $m \geq n+4$ und jedes η_n ist endlich. Folglich ist η sternendlich. Sei $x \in X$. 1.Fall $x \in F_0$, dann $x \in \bigcup \eta_0 \subseteq \bigcup \eta$. 2.Fall $x \notin F_0$. Dann sei k maximal mit $x \notin F_k$. Es folgt $x \in F_{k+1} \subseteq V_{k+1}$, also $x \in V_{k+1} \setminus F_k$. Es gibt aber auch ein $L \in \lambda_{k+2}$ mit $x \in L$. Insgesamt demnach $x \in L \cap (V_{k+1} \setminus F_k) \subseteq \bigcup \eta$. Damit ist η eine Überdeckung. Das η aus offenen Mengen besteht, abzählbar ist und λ verfeinert, ist klar.

(b) Setze $V_n := \bigcup_{i+j\leq n} U(i,j)$. Es folgt

$$\overline{V_n} = \bigcup_{i+j\leq n} \overline{U(i,j)} \subseteq \bigcup_{i+j\leq n} U(i,j+1) \subseteq \bigcup_{i+j\leq n+1} U(i,j) = V_{n+1}.$$

Aus (a) folgt, dass $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung ξ besitzt. Für jedes $T \in \xi$ sei $N(T)$ endlich $\subseteq \mathbb{N}$ mit $T \subseteq \bigcup_{i\in N(T)} U_i$. Dann ist $\eta := \{T \cap U_i \mid T \in \xi \text{ und } i \in N(T)\}$ eine abzählbare sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung von γ.

(c) Zu jedem $A \in \alpha$ wähle ein $g(A) \in \gamma$ mit $A \subseteq g(A)$. Für jedes $A \in \alpha$ gibt es dann eine Folge $(U(A,n))_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen mit $A \subseteq U(A,n) \subseteq \overline{U(A,n+1)} \subseteq g(A)$. Sei $\lambda := \{U(A,n) \mid A \in \alpha,\ n \in \mathbb{N}\}$. Aus (b) folgt, dass es zu $\gamma' := \{U_A \mid A \in \alpha\}$, wobei $U_A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U(A,n)$, eine abzählbare sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung ξ gibt. Da offenbar $\gamma' < \gamma$ gilt, ist ξ somit auch eine Verfeinerung von γ.

12.5.19 Lemma

Gegeben seien ein T_4-Raum (X,τ) und eine abzählbare offene Überdeckung σ. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.

(a) σ hat eine punktendliche offen Verfeinerungsüberdeckung.
(b) σ hat eine abzählbare Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen.
(c) σ hat eine abzählbare sternendliche offen Verfeinerungsüberdeckung.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b). Sei ξ eine (nicht notwendig abzählbare) punktendliche offene Verfeinerungsüberdeckung von σ. Für jedes $T \in \xi$ sei $f(T) \in \sigma$ mit $T \subseteq f(T)$. Dann setzen wir $U(S) := \bigcup\{T \in \xi \mid f(T) = S\}$ für jedes $S \in \sigma$. Offenbar ist $\eta := \{U(S) \mid S \in \sigma\}$ eine abzählbare offene Überdeckung, welche $U(S) \subseteq S$ für jedes $S \in \sigma$ erfüllt. Sei $x \in X$. Dann ist $\xi' := \{T \in \xi \mid x \in T\}$ endlich. Dann ist auch $\eta' := \{U \in \eta \mid x \in U\}$ endlich, denn zu jedem $U \in \eta'$ wählen wir ein $T(U) \in \xi'$ mit $U = U(f(T(U)))$ und die Abbildung $\phi : \eta' \to \xi'$, $U \mapsto T(U)$ ist injektiv. σ hat daher sogar eine abzählbare punktendliche offene Verfeinerungsüberdeckung η. Sei $\eta = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Aus Satz 12.1.8 folgt, dass es eine offene Überdeckung $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gibt, mit $\overline{V_n} \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist dann $\alpha := \{\overline{V_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Verfeinerungsüberdeckung von σ aus abgeschlossenen Mengen.

(b) $\Rightarrow$ (c) folgt unmittelbar aus Lemma 12.5.18 und (c) $\Rightarrow$ (a) ist trivial.

12.5.20 Lemma

Sei $\xi \subseteq \mathscr{P}(X)$ sternabzählbar. Auf ξ führen wir folgende Äquivalenzrelation ein: $T \sim T' :\Leftrightarrow \exists T_0,\dots,T_n \in \xi$ mit $T = T_0$, $T' = T_n$ und $T_k \cap T_{k+1} \neq \emptyset$ für alle $0 \le k < k+1 \le n$. Für $T \in \xi$ sei $[T] := \{T' \in \xi$ mit $T \sim T'\}$ die Äquivalenzklasse mit Repräsentant T. Die Behauptung ist, dass jede Äquivalenzklasse abzählbar ist und für verschiedene Äquivalenzklassen $[T],[T']$ gilt $(\bigcup[T]) \cap (\bigcup[T']) = \emptyset$. Ist τ eine Topologie auf X und ξ eine sternabzählbare offen Überdeckung, so ist jedes $\bigcup[T]$ offen und abgeschlossen. Außerdem ist ξ eine σ-diskrete offene Überdeckung.

Beweis: Das $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, ist klar. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ führen wir die folgende Relation ein. $T \sim_n T' :\Leftrightarrow \exists m \le n \exists T_0,\dots,T_m \in \xi$ mit $T = T_0$, $T' = T_m$ und $T_k \cap T_{k+1} \neq \emptyset$ für alle $0 \le k < k+1 \le m$. Außerdem sei $[T]_n := \{T' \in \xi \mid T \sim_n T'\}$. Da jedes $[T]_n$ abzählbar ist (Induktion nach n), ist auch $[T] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [T]_n$ abzählbar. Das $(\bigcup[T]) \cap (\bigcup[T']) = \emptyset$ für verschiedene Äquivalenzklassen gilt (natürlich gilt insbesondere $[T] \cap [T'] = \emptyset$), ist klar. Sei $[\xi] := \{[T] \mid T \in \xi\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Ist ξ nun eine offen Überdeckung, so ist $\{\bigcup[T] \mid T \in \xi\}$ offenbar eine Zerlegung von X in offene Mengen. Jedes $\bigcup[T]$ ist daher auch abgeschlossen (als Komplement der Vereinigung der Übrigen). Beachten wir, dass jedes $Q \in [\xi]$ abzählbar ist, sich also folgendermaßen schreiben lässt $Q = \{T_n^{(Q)} \mid n \in \mathbb{N}\}$, so sehen wir mit der Darstellung $\xi = \bigcup[\xi] = \bigcup\{Q \mid Q \in [\xi]\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n^{(Q)} \mid Q \in [\xi]\}$ und der Tatsache, dass offenbar jedes $\{T_n^{(Q)} \mid Q \in [\xi]\}$ diskret ist, dass ξ tatsächlich σ-diskret ist.

12.5.21 Satz

Für einen T_3-Raum (X, τ) sind äquivalent:
(a) (X, τ) ist stark parakompakt.
(b) Jede offene Überdeckung hat eine Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen, welche sowohl lokal endlich als auch sternendlich ist.
(c) Jede offene Überdeckung hat eine Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen, welche sowohl lokal endlich als auch sternabzählbar ist.
(d) Jede offene Überdeckung hat eine sternabzählbare offene Verfeinerungsüberdeckung.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b). Sei σ eine offene Überdeckung und ξ eine sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung. Da (X, τ) als parakompakter T_3-Raum auch T_4 ist, gibt es nach Satz 12.1.8 eine offene Überdeckung $\gamma := \{V_P \mid P \in \xi\}$ mit $\overline{V_P} \subseteq P$ für jedes $P \in \xi$. Damit ist γ ebenfalls sternendlich und somit auch lokal endlich. Insbesondere ist damit aber auch $\alpha := \{\overline{V_P} \mid P \in \xi\}$ lokal endlich und sternendlich.

(b) $\Rightarrow$ (c) ist trivial. Kommen wir zu (c) $\Rightarrow$ (d). Sei σ eine offene Überdeckung und α eine Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen, welche sowohl lokal endlich also auch sternabzählbar ist. Wir verwenden die Bezeichnung aus Lemma 12.5.20. Jedes $Q \in [\alpha]$ lässt sich schreiben als $Q = \{A_n^{(Q)} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Außerdem ist jedes $\bigcup Q$ offen und abgeschlossen, denn α ist lokal endlich (und damit auch Q bzw. $\bigcup\{Q' \in [\alpha] \mid Q' \neq Q\}$)! Für $Q \in \alpha$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $S(Q,n) \in \sigma$ mit $A_n^{(Q)} \subseteq S(Q,n)$. Dann ist $\xi := \{(\bigcup Q) \cap S(Q,n) \mid Q \in \alpha,\, n \in \mathbb{N}\}$ eine sternabzählbare offene Verfeinerungsüberdeckung von σ.

(d) $\Rightarrow$ (a). Aus Lemma 12.5.20 folgt, dass jede offene Überdeckung eine σ-diskrete offene Verfeinerungsüberdeckung besitzt. Mit Korollar 12.2.10 folgt, dass (X, τ) parakompakt ist. Als parakompakter T_3-Raum ist X auch T_4. Sei nun γ eine beliebige offene Überdeckung und ξ eine sternabzählbare offene Verfeinerungsüberdeckung. Für jedes $T \in \xi$ ist $\bigcup[T]$ ein offener und abgeschlossener Unterraum, der folglich auch parakompakt und T_4 ist. Demnach gibt es zur abzählbaren offenen Überdeckung $\xi_T := \{T' \cap (\bigcup[T]) \mid T' \in [T]\}$ von $[T]$ eine lokal endliche, insbesondere also punktendliche offene Verfeinerung. Nach Lemma 12.5.19 gibt es dann aber auch eine (abzählbare) sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung λ_T von ξ_T (in $[T]$), deren Elemente - und das ist wichtig - auch offen in X sind. Offenbar ist nun $\bigcup_{T\in\xi} \lambda_T$ eine sternendliche offene Verfeinerungsüberdeckung von ξ und damit auch von γ.

12.5.22 Korollar

Jeder reguläre Lindelöfsche T_3-Raum ist stark parakompakt und jeder zusammenhängende stark parakompakte T_3-Raum ist ein Lindelöf-Raum.

12.6 Wann ist $X \times [0,1]$ ein T_4-Raum?

In Satz 5.3.12 war eine der Voraussetzungen $X \times [0,1]$ ist ein T_4-Raum. In diesem Abschnitt wollen wir die Räume (X,τ) charakterisieren, für die eben dieses Produkt ein T_4-Raum ist. Was wir schon wissen ist folgendes: Ist (X,τ) parakompakt und T_2, so ist auch $X \times [0,1]$ parakompakt (da $[0,1]$ kompakt ist) und T_2, also auch T_4. Es geht aber besser ...

12.6.1 Definition

abzählbar parakompakt Ein topologischer Raum (X,τ) heißt abzählbar parakompakt, wenn jede abzählbare offene Überdeckung eine lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung hat.

Das nächste Lemma gibt einige einfacher zu handhabende Kriterien für abzählbare Parakompaktheit.

12.6.2 Lemma

Für einen topologischen Raum (X,τ) sind äquivalent:
1) (X,τ) ist abzählbar parakompakt.
2) Jede abzählbare offene Überdeckung hat eine abzählbare, lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung.
3) Zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $U_n \subseteq U_{n+1}$ ($U_n \uparrow X$), gibt es eine Folge abgeschlossener Mengen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $F_n \subseteq U_n$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ$.
4) Zu jeder Folge abgeschlossener Mengen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $F_{n+1} \subseteq F_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ ($F_n \downarrow \emptyset$), gibt es eine Folge offener Mengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $F_n \subseteq U_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} = \emptyset$.

Beweis: 2) $\Rightarrow$ 1) ist trivial. Beweisen wir 1) $\Rightarrow$ 2). Sei also σ eine abzählbare offene Überdeckung von X. Wähle eine (nicht notwendig abzählbare) offene Verfeinerung ξ. Zu $V \in \xi$ wähle $U_V \in \sigma$, mit $V \subseteq U_V$. Für jedes $U \in \sigma$ setze nun $W_U := \bigcup\{V \in \xi \mid U = U_V\}$. Die gesuchte abzählbare, offene, lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung ist dann $\{W_U \mid U \in \sigma\}$ (der Leser überzeuge sich davon).
1) $\Rightarrow$ 3) Sei also $U_n \uparrow X$. Sehen wir uns die Konstruktion aus 1) $\Rightarrow$ 2) noch einmal genau an, so stellen wir fest, dass es eine lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, mit $V_n \subseteq U_n$. Dann können wir $F_n := X \setminus \bigcup_{k>n} V_k \subseteq \bigcup_{k\leq n} V_k \subseteq U_n$ definieren. Es gilt

$F_n^\circ = X \setminus \overline{\bigcup_{k>n} V_k} = \bigcap_{k>n}(X \setminus \overline{V_k})$. Zu $x \in X\, \exists O_x \in \dot{x} \cap \tau$, so dass $\{k \in \mathbb{N} \mid V_k \cap O_x \neq \emptyset\}$ endlich ist. Wir können also l maximal mit $V_l \cap O_x \neq \emptyset$ wählen. Dann ist aber $x \in \bigcap_{k>l} X \setminus \overline{V_k} = F_l^\circ$. Also $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ$.
3) $\Leftrightarrow$ 4) ist klar (man gehe einfach zu den Komplementen über).
3) $\Rightarrow$ 1) Sei dazu $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung. Setze $U_n := \bigcup_{k\leq n} P_k$. Dann gibt es eine Folge abgeschlossener Mengen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $F_n \subseteq U_n$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ$. Wir setzen dann $V_n := X \setminus \bigcup_{k\leq n} F_k$. Die gesuchte lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung ist dann $\{V_n \cap P_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{P_0\}$.

12.6.3 Korollar

Ist (X, τ) ein T_4-Raum, so ist X genau dann abzählbar parakompakt, wenn zu jeder Folge abgeschlossener Mengen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $F_{n+1} \subseteq F_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, es eine Folge offener Mengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, mit $F_n \subseteq U_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$.

12.6.4 Satz

Für einen topologischen Raum (X, τ) ist äquivalent:
1) $X \times [0,1]$ ist ein T_4-Raum.
2) X ist ein T_4-Raum und abzählbar parakompakt.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) X ist ein T_4-Raum, da X homöomorph zum abgeschlossenen Teilraum $X \times \{0\}$ ist. Zeigen wir nun, dass er abzählbar parakompakt ist. Wir wenden Korollar 12.6.3 an. Sei also $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine entsprechende Folge. Wir bilden dann $A_n := F_n \times [2^{-n}, 1]$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Diese A ist nun abgeschlossen!. Denn für $(x,t) \in (X \times [0,1]) \setminus A$ gibt es zwei Fälle: 1. Fall $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, dann ist $X \setminus F_0$ offen und $(x,t) \in X \setminus F_0 \subseteq X \times [0,1] \setminus A$. 2. Fall $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Dann sei $m := max\{n \in \mathbb{N} \mid x \in F_n\}$. Nun ist $x \notin A_m$, also $t \in [0, 2^{-m})$. $W := (X \setminus F_{m+1}) \times [0, 2^{-m})$ ist dann offen, enthält (x,t) und ist disjunkt zu A. Denn falls $(y,s) \in W \cap A$, dann $(y,s) \in A_k$, $k \leq m$. Dann ist aber $s \in [2^{-k}, 1]$, also $2^{-k} \leq s$, im Widerspruch zu $s < 2^{-m}$.
A und $X \times \{0\}$ sind demnach abgeschlossen und disjunkt, also gibt es disjunkte und offene U, V mit $A \subseteq U$ und $X \times \{0\} \subseteq V$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := \{(x,t) \in U \mid t < 2^{-n}\} = U \cap (X \times [0, 2^{-n}))$. Bezeichnen wir mit $p : X \times [0,1] \to X$ die Projektion und setzen $V_n := p(U_n)$, so gilt $F_n \subseteq V_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \emptyset$.
2) $\Rightarrow$ 1) Sei X dazu T_4 und abzählbar parakompakt. Wir konstruieren nun zu zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen F, G entsprechende disjunkte Umgebungen. Dazu beschaffen wir uns eine geeignete Basis der Topologie auf $[0,1]$. Wir starten dazu mit einer abzählbaren Basis $\mathscr{B}'$ (z.B. die offenen, bzw. halboffenen Intervalle mit rationalen Eckpunkten) und setzen dann $\mathscr{B} := \{\bigcup_{k=1}^n B_k \mid B_k \in \mathscr{B}'\}$. Damit ist $\mathscr{B}$ also gegen endliche Vereinigungen abgeschlossen. Dies hat rein technische Hintergründe. Klar ist jedenfalls, dass auch $\mathscr{B}$ abzählbar ist. So, für $x \in X$ setzen wir nun $F_x := \{t \in [0,1] \mid (x,t) \in F\}$ und analog G_x. F_x und G_x sind dann abgeschlossen und disjunkt. $[0,1]$ ist ein T_4-Raum, also finden wir disjunkte offene Umgebungen

O_1, O_2 von F_x und G_x. Diese lassen sich als Vereinigung von Elementen aus unserer Basis $\mathscr{B}$ beschreiben, z.B. $O_1 = \bigcup_{B \in \mathscr{B}''} B$, für $\mathscr{B}'' \subseteq \mathscr{B}$. Also auch $F_x \subseteq \bigcup_{B \in \mathscr{B}''} B$. F_x ist kompakt, also gibt es bereits endlich viele $B_k \in \mathscr{B}''$ mit $F_x \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_k$. Aber $\bigcup_{k=1}^n B_k \in \mathscr{B}$. Es gibt also ein $B \in \mathscr{B}$ mit $F_x \subseteq \mathscr{B}$ und $G_x \cap \overline{B} = \emptyset$. Zu jedem $B \in \mathscr{B}$ bilden wir nun $U_B := \{x \in X \mid F_x \subseteq B$ und $\overline{B} \cap G_x = \emptyset\}$ und zeigen U_B ist offen. $U_B = \{x \in X \mid F_x \subseteq B\} \cap \{x \in X \mid G_x \subseteq [0,1] \setminus \overline{B}\}$ und es reicht somit zu zeigen, dass für offenes $O \subseteq [0,1]$ auch $\{x \in X \mid F_x \subseteq O\}$ offen ist. Dazu rechnen wir $X \setminus \{x \in X \mid F_x \subseteq O\} = p(q^{-1}([0,1] \setminus O) \cap F)$ und sehen, dass letztere Menge nach Satz 4.1.7 aber abgeschlossen ist. Nun ist $(U_B)_{B \in \mathscr{B}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X, es gibt also eine lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung $(V_B)_{B \in \mathscr{B}}$, mit $\overline{V_B} \subseteq U_B$. Wir setzen nun $V := \bigcup_{B \in \mathscr{B}} (V_B \times B)$ und zeigen $F \subseteq V$ und $\overline{V} \cap G = \emptyset$. Sei $(x,t) \in F$. Dann gibt es $B \in \mathscr{B}$, mit $x \in V_B \subseteq U_B$, also $F_x \subseteq B$ und damit $t \in B$. Das heißt aber $(x,t) \in V_B \times B$. Nehmen wir nun mal an es gibt ein $(x,t) \in \overline{V} \cap G$. Nun ist $(V_B \times B)_{B \in \mathscr{B}}$ ebenfalls lokal-endlich (ist nicht schwer) und damit dann $\overline{V} = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} \overline{V_B \times B}$. Also gibt es ein $B \in \mathscr{B}$ mit $(x,t) \in \overline{V_B} \times \overline{B} \subseteq U_B \times \overline{B}$. Aber $t \in G_x$ im Widerspruch zu $\overline{B} \cap G_x = \emptyset$, für $x \in U_B$.

12.7 Zerlegungen der Eins und Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen (3)

Wir kommen zu einer wichtigen Konstruktion auf parakompakten Räumen, nämlich zu den Zerlegungen der Eins. Anwendung haben diese beispielsweise in der Theorie der Mannigfaltigkeiten. Dort sind sie gewissermaßen eine Brücke zwischen lokalen und globalen Untersuchungen. Außerdem verallgemeinern wir (unter etwas stärkeren Voraussetzungen) den Fortsetzungssatz von Tietze (Satz 3.3.1).

12.7.1 Definition

Zerlegung der Eins Eine Familie $(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ von stetigen Abbildungen nennt man eine Zerlegung der Eins (oder Partition der Eins, bzw. Teilung der Eins), wenn für alle $x \in X$ gilt: $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.

$(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ nennt man lokal-endlich, wenn es für alle $x \in X$ eine offene Menge $x \in V$ gibt derart, dass die Menge $\{i \in I \mid f_i|V \not\equiv 0\}$ endlich ist.

Eine Familie $(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ von Abbildungen nennt man eine der offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ des Raumes X untergeordnete Zerlegung der Eins, wenn:

a) $(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ ist eine Zerlegung der Eins,

b) für alle $i \in I$ gilt $Tr(f_i) := \overline{\{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_i$.

12.7.2 Satz

Sei $(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ eine Zerlegung der Eins in einem topologischen Raum (X, τ). Dann gilt:

1) $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists O_x \in \tau$ mit $x \in O_x$ und $\{i \in I \mid \exists y \in O_x$ mit $f_i(y) \geq \varepsilon\}$ ist endlich.

2) $\mu : X \to (0,1]$ definiert durch $\mu(x) := sup\{f_i(x) \mid i \in I\} = max\{f_i(x) \mid i \in I\}$ ist stetig.

3) Es gibt eine lokal-endliche Zerlegung der Eins $(g_i)_{i\in I}$ mit $g_i^{-1}((0,1]) \subseteq f_i^{-1}((0,1])$, für alle $i \in I$.

Beweis: 1) Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Es gibt dann eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\sum_{i\in J} f_i(x) > 1-\varepsilon$. Setze $O_x := \{y \in X \mid \sum_{i\in J} f_i(y) > 1-\varepsilon\}$. O_x ist dann die gesuchte Menge. Man beachte dazu, dass $\sum_{i\in J} f_i$ stetig ist und wenn $f_i(y) > \varepsilon$ ist für $i \in I$, dann ist bereits $i \in J$ (sonst $\sum_{i\in J\cup\{i\}} f_i(y) > \varepsilon + 1 - \varepsilon$).
2) folgt aus 1).
3) Setze $\sigma_i(x) := max(0, 2f_i(x) - \mu(x))$. Dann ist σ stetig und $\sigma_i^{-1}((0,1]) \subseteq f_i^{-1}((0,1])$. Sei $y \in X$ und $\varepsilon := \mu(y)/4$. Nun gibt es eine offene Menge $O \ni y$ und ein endliches J mit $\mu(x) > 2\varepsilon$ und $f_i(x) < \varepsilon$ für $x \in O$ und $i \notin J$ (folgt aus 2) und 1)). Hieraus folgt $\sigma_i(x) = 0$ für $x \in O$, $i \in J$. Also ist $(\sigma_i)_{i\in I}$ lokal endlich. Es gilt aber $\mu(y) = f_k(y)$ für ein $k \in I$, also $\sigma_k(y) = f_k(y) = \mu(y) > 0$ und somit $\sum_{i\in I} \sigma_i(y) > 0$, für alle $y \in X$. $g_j(x) := \sigma_j(x)/\sum_{i\in I} \sigma_i(x)$ für $j \in J$ bildet dann die gesuchte Familie.

12.7.3 Satz

Sei $\mathscr{U}$ eine lokal-endliche offene Überdeckung eines T_4-Raumes. Dann gibt es eine lokal-endliche, der offenen Überdeckung $\mathscr{U}$ des Raumes X untergeordnete Zerlegung der Eins.

Beweis: Wir wählen entsprechend Satz 12.1.8 eine offene Überdeckung $\{V_U \mid U \in \mathscr{U}\}$ mit $\overline{V_U} \subseteq U$. Dann wählen wir weiter zu jedem $U \in \mathscr{U}$ ein offenes W_U mit $\overline{V_U} \subseteq W_U \subseteq \overline{W_U} \subseteq U$. Das Lemma von Urysohn verhilft uns nun zu stetigen Abbildungen $g_U : X \to [0,1]$ mit $g_U|\overline{V_U} \equiv 1$ und $g_U|W_U \equiv 0$. Damit sind wir fertig, denn $(g_V/\sum_{U\in\mathscr{U}} g_U)_{V\in\mathscr{U}}$ ist bereits die gesuchte Zerlegung.

12.7.4 Bemerkung

Jede offene Überdeckung eines parakompakten Hausdorff-Raumes besitzt also eine untergeordnete Zerlegung der Eins! Umgekehrt gilt für einen topologischen Raum (X,τ): Wenn jede offene Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins besitzt, dann ist er parakompakt (Beweis: Sei $(f_i : X \to [0,1])_{i\in I}$ eine der Überdeckung $\sigma \subseteq \tau$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Es gibt dann eine lokal-endliche Zerlegung der Eins $(g_i)_{i\in I}$ mit $g_i^{-1}((0,1]) \subseteq f_i^{-1}((0,1])$, für alle $i \in I$. Offensichtlich ist dann bereits $(g_i^{-1}((0,1]))_{i\in I}$ die gesuchte offene, lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung.)

Erinnern wir uns noch einmal an Satz 3.3.1. Dort ging es um die stetige Fortsetzbarkeit von reellen Funktionen, definiert auf einer abgeschlossenen Menge eines T_4-Raums. Im nächsten Satz verwenden wir Zerlegungen der Eins, um stetige Funktionen, definiert auf einer abgeschlossenen Menge eines metrischen Raums, mit Werten in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum, auf den ganzen Raum auszudehnen.

12.7.5 Satz von Dugundji

Sei (X,d) ein metrischer Raum und M abgeschlossen in X. Ferner sei $f : M \to Y$ stetig, wobei Y ein lokal konvexer topologischer Vektorraum ist. Dann gibt es eine stetige Abbildung $F : X \to convex(f(X))$ mit $F|M = f$.

Beweis: Für jedes $x \in X \setminus M$ wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $K(x,2\varepsilon) \subseteq X \setminus M$. Die Familie $(U_x)_{x \in X \setminus M}$ mit $U_x := K(x,\varepsilon)$ (durch diese Wahl von ε bekommt man die weiter unten benötigte EIgenschaft: $diam(U_x) \leq d(U_x,M)$) hat eine offene, lokal-endliche Verfeinerung $(P_i)_{i \in I}$ (es handelt sich um die Überdeckung einer Teilmenge eines metrischen Raums). Die Familie $(P_i)_{i \in I}$ hat demzufolge auch eine untergeordnete Zerlegung der Eins $(f_i)_{i \in I}$, insbesondere also mit folgenden Eigenschaften:
1) $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$, für alle $x \in X \setminus M$.
2) $f_i(x) = 0$, für $x \notin P_i$. Da es zu jedem $i \in I$ ein $x_i \in X \setminus M$ gibt, mit $P_i \subseteq U_{x_i}$, bedeutet dies sogar $f_i(x) = 0$, für $x \notin U_{x_i}$.
3) $\forall x \in X \setminus M\ \exists V_x \in \dot{x} \cap \tau$ derart, dass $\{i \in I \mid V_x \cap P_i \neq \emptyset\}$ endlich ist.
Für jedes $x \in X \setminus M$ wählen wir ein $m_x \in M$, mit $d(m_x,U_x) < 2d(M,U_x)$ und definieren für jedes $x \in X$: $F(x) := f(x)$, für $x \in M$ und $F(X) := \sum_{i \in I} f_i(x) f(m_{x_i})$, für $x \in X \setminus M$.
Offensichtlich ist dann $F(x) \in convex(f(M))$. Außerdem ist F auf M stetig (klar) und ebenso ist F auf $X \setminus M$ stetig (folgt aus der lokalen Endlichkeit). Zeigen müssen wir die Stetigkeit also nur noch auf $\overline{X \setminus M}$. Für $x_0 \in \partial M$ und $x \in X \setminus M$, mit $f_i(x) \neq 0$ gilt nach Konstruktion der f_i bereits $x \in U_{x_i}$. Wir erhalten $d(m_{x_i},x) \leq d(m_{x_i},U_{x_i}) + diam(U_{x_i}) \leq 3d(M,U_{x_i}) \leq 3d(x,x_0)$, also $d(m_{x_i},x_0) \leq d(x,x_0) + d(m_{x_i},x) \leq 4d(x,x_0)$. Das heißt also $f_i(x) = 0$, wenn $d(m_{x_i},x_0) > 4d(x,x_0)$. Sei nun V eine konvexe offene (und symmetrische) Umgebung der 0 in Y. Weiter wählen wir $\delta > 0$, so dass für $m \in M$, mit $d(x_0,m) < \delta$ bereits $f(m) - f(x_0) \in V$ gilt (Stetigkeit von f). Sei nun $x \in K(x_0,\delta/4)$ beliebig gewählt. Falls $x \in M$, dann sofort $F(x) - F(x_0) \in V$. Falls $x \in X \setminus M$, dann $F(x) - F(x_0) = \sum_{i \in I} f_i(x)(f(m_{x_i}) - f(x_0))$, wobei wenn $f_i(x) \neq 0$, dann $d(m_{x_i},x_0) \leq 4d(x_0,x) < \delta$ gilt und somit $f(m_{x_i}) - f(x_0) \in V$. Die Menge V ist aber konvex, also auch $\sum_{i \in I} f_i(x)(f(m_{x_i}) - f(x_0)) \in V$ (man beachte $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$). Insgesamt also $F(K(x_0,\delta/4)) \subseteq F(x_0) + V$ und F ist somit stetig!

12.8 Metrisierbarkeit

In diesem Abschnitt klären wir die Frage, wann ein topologischer Raum metrisierbar ist. Das heißt wir geben eine Bedingungen/Eigenschaften an, die ein top. R. erfüllen muss, damit es eine Metrik gibt, die dessen Topologie erzeugt (auf die gewöhnliche Art und Weise). Umgekehrt wird sich ergeben, dass jeder metrische Raum diese Eigenschaften bereits besitzt.

12.8.1 Lemma

Sei (X,τ) ein T_3-Raum mit einer σ-lokal-endlichen Basis $\mathscr{B} = \bigcup\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (die γ_n sind lokal-endlich). Dann lässt sich jede abgeschlossene Menge A als Schnitt von abzählbar vielen offenen Mengen schreiben: $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, mit $O_n \in \tau$. Man sagt auch kurz: Jede abgeschlossene Menge ist eine G_δ-Menge.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in A$ wähle ein $O_x^{(n)} \in \dot{x} \cap \tau$ mit $|\{B \in \gamma_n \mid O_x^{(n)} \cap B \neq \emptyset\}|$ minimal (dies geht, da γ_n lokal-endlich ist). Setze dann $O_n := \bigcup_{x\in A} O_x^{(n)}$. Offensichtlich $A \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Sei $y \in X \setminus A$. Dann gibt es ein $U \in \tau$ und ein $V \in \mathscr{B}$ mit $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ und $y \in V$ (die T_3 Eigenschaft). Sei $V \in \gamma_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann muss $O_n \cap V = \emptyset$ gelten! Sonst gibt es ein $x \in A$ mit $O_x^{(n)} \cap V \neq \emptyset$. Aber es ist auch $U \cap O_x^{(n)} \in \dot{x} \cap \tau$ und $|\{B \in \gamma_n \mid (O_x^{(n)} \cap U) \cap B \neq \emptyset\}| < |\{B \in \gamma_n \mid O_x^{(n)} \cap B \neq \emptyset\}|$ (denn $(O_x^{(n)} \cap U) \cap V = \emptyset$ und $O_x^{(n)} \cap V \neq \emptyset$) im Widerspruch Zur Wahl von $O_x^{(n)}$.

12.8.2 Lemma

Sei (X,τ) ein T_4-Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge. Dann gilt:

$$(\exists f : X \to [0,1] \text{ mit } f^{-1}(0) = A) \Leftrightarrow (A \text{ ist eine } G_\delta \text{ Menge.})$$

Beweis: Falls f stetig mit $f^{-1}(0) = A$, dann ist $A = f^{-1}(0) = f^{-1}(\bigcap_{n=1}^\infty(-1/n,1/n)) = \bigcap_{n=1}^\infty f^{-1}((-1/n,1/n))$. Also ist A eine G_δ Menge.

Sei umgekehrt A eine G_δ Menge. Also $A = \bigcap_{n=1}^\infty O_n$ mit O_n offen. Das Lemma von Urysohn garantiert für jedes n eine stetige Funktion $f_n : X \to [0,1]$ mit $f_n(A) = \{0\}$ und $f_n(X \setminus O_n) \subseteq \{1\}$. Setze nun $f := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} f_n$. f ist nun stetig (gleichmäßige Konvergenz) und es gilt $f^{-1}(0) = A$.

12.8.3 Metrisationssatz von Nagata und Smirnow

Ein top. Raum (X,τ) ist genau dann metrisierbar, wenn er T_1 und T_3 ist und eine σ-lokal-endliche Basis hat (er hat dann also sogar eine σ-diskrete Basis). Ein wichtiger Spezialfall ist der, wenn der Raum eine abzählbare Basis hat (die trivialerweise σ-lokal-endlich ist).

Beweis: Sei (X,τ) zuerst als metrisierbar vorausgesetzt. T_1 und T_3 ist dann klar und die Existenz einer σ-lokal-endlichen Basis folgt aus Lemma 12.2.6.

Für die andere Richtung sei (X,τ) nun als T_3-Raum mit σ-lokal-endlicher Basis vorausgesetzt. Offensichtlich hat dann jede offene Überdeckung eine σ-lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung, (X,τ) ist nach Korollar 12.2.10 also parakompakt.

Nun zur Konstruktion der Metrik. Sei $\mathscr{B} = \bigcup\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine σ-lokal-endliche Basis (mit lokal-endlichen γ_n). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $U \in \gamma_n$ ist $X \setminus U$ nach dem obigen Lemmas eine G_δ-Menge und es existiert eine stetige Abbildung $\varphi_{n,U} : X \to [0,1]$ mit $X \setminus U = \varphi_{n,U}^{-1}(0)$, also $U = \{x \in X \mid \varphi_{n,U}(x) > 0\}$. Da γ_n lokal-endlich ist, ist $\sum_{U\in\gamma_n} \varphi_{n,U}$ wohldefiniert und stetig! Dann ist aber auch

$$\psi_{n,V} := 2^{-n} \frac{\varphi_{n,V}}{1 + \sum_{U\in\gamma_n} \varphi_{n,U}}$$

für $V \in \gamma_n$ sinnvoll definiert und stetig. Es ist dann $0 \leq \psi_{n,V} < 2^{-n}$ und $V = \{x \in X \mid \psi_{n,V}(x) > 0\}$ und sogar $0 \leq \sum_{V\in\gamma_n} \psi_{n,V} < 2^{-n}$. Wir definieren nun $d(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{V\in\gamma_n} |\psi_{n,V}(x) - \psi_{n,V}(y)|)$. Symmetrie und Dreiecksungleichung sind unmittelbar klar. Und für $x \neq y$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $V \in \gamma_n$ mit $x \in V$ und $y \notin V$ (die T_1 Eigenschaft). Somit gilt $\psi_{n,V}(x) > 0 = \psi_{n,V}(y)$. Insgesamt also $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Bleibt noch zu zeigen, dass d die Ausgangstopologie induziert. Für $x \in X$ ist die Funktion $f_x : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_x(y) := d(x,y)$ stetig bezüglich τ. Sei dann O offen bzgl. d und $x \in O$. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ mit $K(x,\varepsilon) \subseteq O$. Setze $W := (f_x(x) - \varepsilon, f_x(x) + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann gibt es $U_x \in \tau$ mit $x \in U_x$ und $f_x(U_x) \subseteq W$. Es gilt nun $U_x \subseteq K(x,\varepsilon)$, denn $y \in U_x$ impliziert $f_x(y) \in W$, also $d(x,y) < \varepsilon$. Also ist O auch offen bzgl. τ.

Sei umgekehrt $x \in U \in \tau$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ und $V \in \gamma_n$ mit $x \in V \subseteq U$. Definiere $\delta := \psi_{n,V}(x)$ dann folgt für $y \in K(x,\delta)$: $|\psi_{n,V}(x) - \psi_{n,V}(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{W\in\gamma_k} |\psi_{k,W}(x) - \psi_{k,W}(y)| = d(x,y) < \delta = \psi_{n,V}(x)$ und damit $\psi_{n,V}(y) > 0$. Also $y \in V$ und somit $K(x,\delta) \subseteq U$. Das heißt U ist offen in der durch d induzierten Topologie.

12.8.4 Metrisationssatz von Smirnow

Ist ein parakompakter Raum Hausdorff-Raum (X,τ) nicht metrisierbar, so sind lokale Unzulänglichkeiten der Grund dafür. Präziser: Ist (X,τ) parakompakt und T_2, so ist er genau dann metrisierbar, wenn er lokal metrisierbar ist (zu jedem Punkt gibt es eine Umgebung, die als Teilraum aufgefasst metrisierbar ist).

Beweis: Jeder metrisierbare Raum ist ganz offensichtlich auch lokal metrisierbar (man nehme als Umgebung einfach ganz X). Zeigen wir die andere Richtung. Für jedes $x \in X$ wählen wir eine metrisierbare Umgebung U_x. Dann ist $\{U_x^\circ \mid x \in X\}$ eine offene Überdeckung, zu der es eine lokal-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung ξ gibt (Parakompaktheit). Jedes $V \in \xi$ besitzt (als Teilraum) eine σ-lokal-endliche Basis $\mathscr{B}_V = \{\delta_V^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$, mit lokal-endlichen $\delta_V^{(n)}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden wir $\delta_n := \bigcup_{V\in\xi} \delta_V^{(n)}$ und stellen fest, dass δ_n lokal-endlich ist. Dann ist $\mathscr{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$ eine σ-lokal-endliche Basis von (X,τ)! Als parakompakter T_2 Raum ist X zudem T_1 und T_3 und wir können den Metrisationssatz von von Nagata, Smirnow anwenden.

12.8.5 Lemma

Sei (X,τ) ein topologischer Raum und sei $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Menge offener Überdeckungen mit der Eigenschaft: $\forall x \in X \, \forall O_x \in \dot{x} \cap \tau \, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_n(x) \subseteq O_x$. Dann hat (X,τ) ein σ-diskretes abgeschlossenes Netzwerk (siehe Definition 2.1.13).

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass jede offene Überdeckung eine σ-diskrete abgeschlossene Verfeinerungsüberdeckung hat. Sei γ also eine offene Überdeckung. Sei dann $<$ eine (beliebige) Wohlordnung auf γ. Wir definieren für jedes $U \in \gamma$ und $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $t(U) := U \setminus \bigcup\{V \in \gamma \mid V < U\}$ und $t_n(U) := \{x \in t(U) \mid \gamma_n(x) \subseteq U\}$. Es ist dann $\delta := \{t_n(U) \mid U \in \gamma,\, n \in \mathbb{N}\}$ eine σ-diskrete abgeschlossene Verfeinerungsüberdeckung von γ.

(Beweis: Das δ eine Verfeinerung von γ ist, ist klar. Anhand der Gleichung $t_n(U) = X \setminus [\gamma_n(X \setminus U) \cup \bigcup_{V<U} V]$ sehen wir, dass jedes $t_n(U)$ abgeschlossen ist. Zeigen wir die Überdeckungseigenschaft. Sei $x \in X$. Wir wählen $U \in \gamma$ minimal (bzgl. $<$) mit $x \in U$. Dann ist $x \in t(U)$. Ferner gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_n(x) \subseteq U$. Also $x \in t_n(U)$ und δ ist somit eine Überdeckung. Ferner schneidet kein Element aus γ_n zwei verschiedene Elemente aus $\{t_n(U) \mid U \in \gamma_n\}$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$). Denn sei $W \in \gamma_n$ mit $W \cap t_n(U) \neq \emptyset \neq W \cap t_n(V)$, für $U, V \in \gamma$. Wir können dann $x \in W \cap t_n(U)$ und $y \in W \cap t_n(V)$ wählen. Nun ist aber auch $W \subseteq \gamma_n(x) \subseteq U$ und $W \subseteq \gamma_n(y) \subseteq V$. Falls $U \neq V$, dann o.B.d.A. $U < V$ und somit $y \in t(V) \subseteq V \setminus U \subseteq V \setminus W$ - Widerspruch. Da γ_n eine Überdeckung ist, ist $\{t_n(U) \mid U \in \gamma_n\}$ also diskret und δ somit σ-diskret.)

Wenn jede offene Überdeckung eine σ-diskrete abgeschlossene Verfeinerungsüberdeckung hat, dann hat also auch jedes der γ_n eine solche; bezeichnen wir diese jeweils mit ξ_n. Dann ist auch $\xi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$ eine σ-diskrete abgeschlossene Familie (zum einfachen Beweis sei angemerkt, dass eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist). Zeigen wir, dass ξ ein Netzwerk ist. Sei $x \in U \in \tau$. Es gibt dann ein n mit $\gamma_n(x) \subseteq U$. Nun ist ξ_n eine Verfeinerungsüberdeckung von γ_n und es gibt ein $T_x \in \xi_n$ mit $x \in T_x$. Zu T_x gibt es aber ein $G \in \gamma_n$ mit $T_x \subseteq G$. Da auch $x \in G$, folgt $x \in T_x \subseteq G \subseteq \gamma_n(x) \subseteq U$. Also $U = \bigcup_{x\in U} T_x$. Damit ist alles gezeigt.

12.8.6 Metrisationssatz von Bing

Ein top. Raum (X,τ) ist genau dann metrisierbar, wenn er collectionwise normal ist und es eine Familie $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ offener Überdeckungen mit der Eigenschaft $\forall x \in X \, \forall O_x \in \dot{x} \cap \tau \, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_n(x) \subseteq O_x$ gibt.

Beweis: Sei $\xi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$ ein σ-diskretes abgeschlossenes Netzwerk, mit diskreten ξ_n (voriges Lemma). Die ξ_n seien wieder so gewählt, dass sie eine Verfeinerung von γ_n sind. Zu ξ_n gibt es eine σ-diskrete offene Familie $\beta_n \subseteq \tau$, die von ξ_n verfeinert wird (collectionwise normal). Zu jedem $T \in \xi_n$ wählen wir nun ein $B_T \in \beta_n$ und ein $D_T \in \gamma_n$ mit $T \subseteq B_T$ und $T \subseteq G_T$. Die Familie $\alpha_n := \{B_T \cap G_T \mid T \in \xi_n$ ist dann eine σ-diskrete offene Verfeinerungsüberdeckung von γ_n. Dann ist aber auch $\alpha := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ eine σ-diskrete offene Familie. Zeigen wir, dass α eine Basis ist.

Sei $x \in U \in \tau$. Es gibt dann ein n mit $\gamma_n(x) \subseteq U$. Nun ist α_n eine Verfeinerungsüberdeckung von γ_n und es gibt ein $A_x \in \alpha_n$ mit $x \in A_x$. Zu A_x gibt es aber ein $G \in \gamma_n$ mit $A_x \subseteq G$. Da auch $x \in G$, folgt $x \in A_x \subseteq G \subseteq \gamma_n(x) \subseteq U$. Also $U = \bigcup_{x\in U} A_x$.

Der Raum hat also eine σ-diskrete Basis (also auch σ-lokal endlich) und ist T_1 und T_3 und somit metrisierbar!

Umgekehrt ist ein metrischer Raum natürlich collectionwise normal (Lemma 12.3.6) und das System $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}^{>0}\}$ mit $\gamma_n := \{K(x, 1/n) \mid x \in X\}$ hat die geforderte Eigenschaft, wie man leicht mit Hilfe der Dreiecksungleichung beweist.

12.8.7 Definition

Moore-Raum Einen Regulären Raum (d.h. T_1 und T_3), der eine Familie $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ offener Überdeckungen mit der Eigenschaft $\forall x \in X \,\forall O_x \in \dot{x} \cap \tau \,\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_n(x) \subseteq O_x$ besitzt, nennt man Moore-Raum. Den Metrisationssatz von Bing können wir also formulieren als: Jeder collectionwise normale Moore-Raum ist metrisierbar.

Leicht ergibt sich nun der klassische Metrisationssatz von Alexandroff-Urysohn (der historisch gesehen der erste war; 1923).

12.8.8 Metrisationssatz von Alexandroff und Urysohn

Metrisationssatz von Alexandroff-Urysohn Ein T_0-Raum (X, τ) ist genau dann metrisierbar, wenn es eine sternmonotone Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Überdeckungen von X gibt, mit der Eigenschaft: Zu jedem $x \in O \in \tau$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_n(x) \subseteq O$.

Beweis: Zeigen wir, dass X ein T_1-Raum ist. Sei $x \neq y$. O.B.d.A. gibt es dann ein $O \in \dot{x} \cap \tau$ mit $y \notin O$. Zu diesem x und O gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_n(x) \subseteq O$. Aus $y \notin \gamma_n(x)$ folgt $x \notin \gamma_n(y) =: U \in \dot{y} \cap \tau$.

Bilden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Überdeckung $\xi_n := \gamma_{2n}$, so erfüllt die Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung an Satz 12.3.8 (siehe dazu Lemma 12.2.2). Der Raum ist also voll normal und damit auch collectionswise normal. Der Metrisationssatz von Bing (Satz 12.8.6) erledigt dann den Rest.

13 Uniforme Räume

"Niemand ist mehr Sklave, als der sich für frei hält, ohne es zu sein."
Johann Wolfgang von Goethe

13.1 Grundlegendes

Die meisten kennen aus der Analysis den Begriff der gleichmäßig stetigen Abbildung. Eine Abbildung $f : X \to Y$, für metrische Räume (X,d) und (Y,d') heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x,x' \in X$ gilt: $d(x,x') < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(x')) < \varepsilon$. Im Gegensatz zur einfachen Stetigkeit können wir dieses Konzept nicht so einfach auf allgemeine topologische Räume Übertragen. In diesem Kapitel lernen wir nun eine Klasse topologischer Räume kennen ($T_{3\frac{1}{2}}$-Räume; wir kennen diese bereits aus dem Abschnitt über Kompaktifizierungen. Das es sich um diese Klasse handelt werden wir weiter unten beweisen.) in denen wir dieses Konzept doch entwickeln können.

13.1.1 Definition

Grundlegendes: Ein uniformer Raum ist ein geordnetes Paar $(X,\mathscr{U})$, wobei X eine Menge ist und $\mathscr{U}$ folgenden Bedingungen genügt:

1) $\mathscr{U}$ ist ein Filter auf $X \times X$.
2) $\forall V \in \mathscr{U}$ ist $\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq V$.
3) $\forall V \in \mathscr{U}$ ist $V^{-1} \in \mathscr{U}$.
4) $\forall V \in \mathscr{U}\ \exists U \in \mathscr{U}$ mit $U \circ U \subseteq V$.

Die Elemente aus $\mathscr{U}$ sind also Teilmengen von $X \times X$ und sind somit Relationen auf X (wir bezeichnen sie dementsprechend auch mit den üblichen Buchstaben $R,S,\ldots$). Wenn $V \subseteq X \times X$, so ist mit V^{-1} die inverse Relation $\{(y,x) \mid (x,y) \in V\}$ gemeint. Für $U \subseteq X \times X$ ist mit $U \circ U$ die Menge $\{(x,y) \mid \exists z \in X \text{ mit } (x,z),(z,y) \in U\}$ gemeint. $\mathscr{U}$ wird auch Uniformität genannt.

Für $V \circ V$ schreiben wir hin und wieder V^2 und allgemein $V^n := V \circ V^{n-1}$.

Für $A \subseteq X$ und $V \in \mathscr{U}$ definieren wir $V(A) := \{y \in X \mid \exists x \in A \text{ mit } (x,y) \in V\}$. Ist $A = \{x\}$, so schreiben wir auch einfach $V(x)$ statt $V(\{x\})$.

Elemente $V \in \mathscr{U}$ mit $V = V^{-1}$ nennen wir symmetrisch.

Wir nennen $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathscr{U}$, wenn $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}$ und $\forall V \in \mathscr{U}\ \exists B \in \mathscr{B}$ mit $B \subseteq V$.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei uniformen Räumen $(X,\mathscr{U})$ und $(Y,\mathscr{V})$ heißt uniform (oder auch gleichmäßig stetig), wenn es zu jedem $V \in \mathscr{V}$ ein $U \in \mathscr{U}$ gibt, mit $f \times f(U) \subseteq V$. Unter $f \times f$ ist die Abbildung $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ definiert durch $f \times f(x,y) := (f(x),f(y))$ zu verstehen.

Ist f bijektiv und sowohl f, als auch f^{-1} uniform, so sagen wir $(X,\mathscr{U})$ und $(Y,\mathscr{V})$ sind isomorph. f nennen wir dann einen Isomorphismus.

13.1.2 Lemma

$\{U \in \mathscr{U} \mid U = U^{-1}\}$ ist eine Basis von $\mathscr{U}$. Sei $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathscr{U}$, dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $\{U^n \mid U \in \mathscr{B}\}$ eine Basis von $\mathscr{U}$.

Beweis: Sei $U \in \mathscr{U}$. Dann ist auch $V := U \cap U^{-1} \in \mathscr{U} \subseteq U$ und es gilt (offensichtlich) $V^{-1} = V$. Beweisen wir die Zweite Behauptung:

Wir zeigen die Behauptung erst für $\{U^{2^n} \mid U \in \mathscr{B}\}$. Dies folgt nämlich leicht durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist alles klar. $n \to n+1$: Sei $U \in \mathscr{U}$. Es gibt dann ein $W \in \mathscr{U}$ mit $W \circ W \subseteq U$. Zu W gibt es aber (Induktionsvoraussetzung) ein $V \in \mathscr{B}$ mit $V^{2^n} \subseteq W$. Also $V^{2^{n+1}} = V^{2^n} \circ V^{2^n} \subseteq W \circ W \subseteq U$.

Offensichtlich gilt $U^n \subseteq U^{n+1}$ für alle $U \in \mathscr{U}$ und $n \in \mathbb{N}$. Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $U \in \mathscr{U}$ fest gewählt. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ mit $n < 2^m$. Dann gibt es ein $V \in \mathscr{B}$ mit $V^{2^m} \subseteq U$. Es folgt $V^n \subseteq V^{2^m} \subseteq U$. Damit ist alles gezeigt.

13.1.3 Lemma

Sei $(X, \mathscr{U})$ ein uniformer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathscr{U}$.

a) $\tau_{\mathscr{U}} := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists V \in \mathscr{U} \text{ mit } V(x) \subseteq O\}$ ist eine Topologie auf X, die durch die Uniformität erzeugte (oder induzierte).

b) Für $A \subseteq X$ ist $A^\circ = \{x \in A \mid \exists U \in \mathscr{B} \text{ mit } U(x) \subseteq A\}$. Gemeint ist natürlich der offene Kern bzgl. $\tau_{\mathscr{U}}$.

c) Zu jedem $O \in \dot{x} \cap \tau_{\mathscr{U}}$ gibt es ein $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B(x) \subseteq O$. Ferner gilt $x \in B(x)^\circ$ für alle $x \in X$ und alle $B \in \mathscr{B}$. Insbesondere ist somit $\{B(x) \mid B \in \mathscr{B}\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes $x \in X$.

d) Für $A \subseteq X$ ist $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathscr{B}} V(A)$.

e) $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ ist ein T_3-Raum.

f) Eine uniforme Abbildung $f : X \to Y$ zwischen den uniformen Räumen $(X, \mathscr{U})$ und $(Y, \mathscr{V})$ ist stetig bzgl. den induzierten Topologien $\tau_{\mathscr{U}}$ und $\tau_{\mathscr{V}}$.

Beweis: a) Offensichtlich $\emptyset$ und $X \in \tau_{\mathscr{U}}$. Seien $O, O' \in \tau_{\mathscr{U}}$ und $x \in O \cap O'$. Dann gibt es $U, V \in \mathscr{U}$ mit $U(x) \subseteq O$ und $V(x) \subseteq O'$. Dann ist aber auch $U \cap V \in \mathscr{U}$ und offensichtlich $(U \cap V)(x) \subseteq U(x) \cap V(x) \subseteq O \cap O'$. Also ist auch $O \cap O' \in \tau_{\mathscr{U}}$. Noch schneller sieht man, dass mit $\tau' \subseteq \tau_{\mathscr{U}}$ auch $\bigcup \tau' \in \tau_{\mathscr{U}}$ ist. Damit ist alles gezeigt.

b) Wir setzen zur Abkürzung $B := \{x \in A \mid \exists U \in \mathscr{U} \text{ mit } U(x) \subseteq A\}$. Sei $O \subseteq A$ mit $O \in \tau_{\mathscr{U}}$. Aus a) folgt unmittelbar $O \subseteq B$. Da $B \subseteq A$, reicht es also wenn wir zeigen, dass B offen ist. Sei $x \in B$. Dann gibt es ein $U \in \mathscr{U}$ mit $U(x) \subseteq A$. Zu U gibt es aber ein $V \in \mathscr{B}$ mit $V \circ V \subseteq U$. Es ist dann $V(x) \subseteq B$, denn $y \in V(x)$ impliziert $(x,y) \in V$ und $z \in V(y)$ impliziert $(y,z) \in V$, also $(x,z) \in V \circ V$ und damit $z \in V \circ V(x) \subseteq U(x) \subseteq A$. Schlussendlich somit $V(y) \subseteq A$.

c) Sei $O \in \dot{x} \cap \tau_{\mathscr{U}}$. Dann gibt es ein $V \in \mathscr{U}$ mit $V(x) \subseteq O$. Es gibt dann ein $B \in \mathscr{B}$ mit $B \subseteq V$. Also $B(x) \subseteq V(x) \subseteq O$. Für die letzte Aussage verwende man a) und beachte $B(x) \subseteq B(x)$.

d) Sei $x \in \overline{A}$. Annahme $x \notin \bigcap_{V \in \mathscr{B}} V(A)$. Es gibt also ein $V \in \mathscr{B}$ mit $x \notin V(A)$, also $\forall a \in A$ gilt $x \notin V(a)$. Nun gibt es aber ein symmetrisches $W \in \mathscr{U}$ mit $W \subseteq V$. Dan aber auch $x \notin W(a)$, für alle $a \in A$. Dies ist nun äquivalent zu $a \notin W(x)$, für alle $a \in A$. Also $W(x) \cap A = \emptyset$ - im Widerspruch zu $x \in \overline{A}$. Sei nun $x \in \bigcap_{V \in \mathscr{B}} V(A)$. Annahme $x \notin \overline{A}$. Dann $x \in X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$, es gibt also ein $V \in \mathscr{B}$ mit $V(x) \subseteq X \setminus A$. Dann gibt es aber auch ein symmetrisches $W \in \mathscr{U}$ und ein $U \in \mathscr{B}$ mit $U \subseteq W \subseteq V$. Also $x \in U(A) \subseteq W(A)$, es gibt also ein $a \in A$ mit $x \in W(a)$ oder dazu gleichwertig $a \in W(x)$. Dann ist aber auch $a \in V(x)$, im Widerspruch zu $V(x) \subseteq X \setminus A$.

e) Sei A abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Nun ist $A = \overline{A} = \bigcap_{V \in \mathscr{U}} V(A)$. Es gibt also ein $V \in \mathscr{U}$ mit $x \notin V(A)$. Zu V gibt es aber ein symmetrisches $W \in \mathscr{U}$ mit $W \circ W \subseteq V$. Angenommen es gibt ein $y \in W(A) \cap W(x)$ (an dieser Stelle beachte man, dass $W(A) = \bigcup_{a \in A} W(a)$ eine Umgebung von A ist, also $A \subseteq W(A)^{\circ}$). Dann gibt es ein $a \in A$ mit $(a,y) \in W$ und $(x,y) \in W$, also auch $(y,x) \in W$. Nun ist dann aber $(a,x) \in W \circ W \subseteq V$, also $x \in V(a) \subseteq V(A)$ - ein Widerspruch! Also sind $W(A)$ und $W(x)$ disjunkte Umgebungen von A bzw. x - der Raum ist also T_3.

f) Wir verwenden Satz 2.2.2. Sei $x \in X$ und O' offen in Y mit $f(x) \in O'$. Dann gibt es ein $V \in \mathscr{V}$ mit $V(f(x)) \subseteq O'$. Zu V gibt es dann ein $U \in \mathscr{U}$ mit $f \times f(U) \subseteq V$. Dann ist $x \in O := U(x)^{\circ}$ offen in X und es folgt $f(O) \subseteq f(U(x)) \subseteq V(f(x)) \subseteq O'$.

13.1.4 Bemerkung

Sprechen wir in Zukunft von irgendwelchen topologischen Eigenschaften (z.B. Trennungseigenschaften, Kompaktheit, Stetigkeit irgendwelcher Abbildungen, ...) uniformer Räume $(X_i, \mathscr{U}_i)_{i \in I}$, so beziehen wir uns (sofern nicht anders gesagt) auf die topologischen Räume $(X_i, \tau_{\mathscr{U}_i})_{i \in I}$.

13.1.5 Lemma

Für einen uniformen Raum $(X, \mathscr{U})$ sind äquivalent:
a) $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ ist ein T_0-Raum.
b) $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ ist ein T_1-Raum.
c) $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ ist ein T_2-Raum.
d) $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ ist regulär.
e) $\bigcap_{V \in \mathscr{U}} V = \Delta_X$.

Beweis: Da $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ in jedem Fall T_3 ist, folgt die Äquivalenz von a) bis d) aus Bemerkung 3.1.2. e) impliziert aber auch a), denn für $x \neq y$ ist $(x,y) \notin \Delta_X$, es gibt also ein $V \in \mathscr{U}$ mit $(x,y) \notin V$ und somit $y \notin V(x)$. Umgekehrt folgt e) ganz leicht aus b). Denn es gilt immer $\Delta_X \subseteq \bigcap_{V \in \mathscr{U}} V$ und falls $x \neq y$, dann gibt es ein $O \in \dot{x} \cap \tau_{\mathscr{U}}$ mit $y \notin O$. Es gibt dann aber auch ein $V \in \mathscr{U}$ mit $x \in V(x) \subseteq O$, also $y \notin V(x)$, was soviel wie $(x,y) \notin V$ bedeutet. Damit also $(x,y) \notin \bigcap_{V \in \mathscr{U}} V$.

13.2 Initialuniformität und Finaluniformität

Wie beschafft man sich auf einer Menge eine Uniformität die gewissen Bedingungen genügen soll? Zwei fundamentale Konstruktionen dazu lernen wir nun kennen. Wie schon bei der Initialtopologie bzw. Finaltopologie bekommen wir auch hier die Produktuniformität bzw. Quotientenuniformität als Spezialfälle.

13.2.1 Satz und Definition (Initialuniformität)

Sei X eine Menge und $(X_i, \mathscr{U}_i)_{i\in I}$ eine Familie uniformer Räume mit zugehörigen Abbildungen $f_i : X \to X_i,\ i \in I$. Die gröbste Uniformität $\mathscr{U}$ auf X, für die alle Abbildungen f_i uniform sind, nennen wir die Initialuniformität. Die Initialuniformität existiert immer, wird von der Subbasis $\mathscr{S} := \{(f_i \times f_i)^{-1}(U) \mid U \in \mathscr{U}_i,\ i \in I\}$ erzeugt und erfüllt die folgende universelle Eigenschaft:

Für alle uniformen Räume $(Y, \mathscr{V})$ und Abbildungen $f : Y \to X$ gilt:

f ist uniform genau dann, wenn alle Abbildungen $f_i \circ f : Y \to X_i$ uniform sind ($i \in I$).

Ferner ist $\mathscr{U}$ durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i\circ f"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Beweis: Man rechnet leicht nach, dass $\mathscr{S}$ die endliche Schnitteigenschaft hat und $\mathscr{B} := \{\bigcap \mathscr{S}' \mid \mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ und $\mathscr{S}'$ ist endlich $\}$ die Basis eines Filters $\mathscr{U}$ ist. Zu zeigen bleibt, dass es sich bei $\mathscr{U}$ um eine Uniformität handelt. Dies bleibt als leichte Übungsaufgabe. Unmittelbar aus der Konstruktion folgt, dass es sich bei $\mathscr{U}$ um die gröbste Uniformität handelt, so dass alle Abbildungen $f_i,\ i \in I$ uniform sind. Der Nachweis der universellen Eigenschaft und ebenso die Eindeutigkei, läuft genauso wie bei der Initialtopologie (man beachte, dass man sich wie bei der Stetigkeit, auch beim Nachweis der Uniformität gewisser Abbildungen, auf eine Subbasis beschränken kann).

13.2.2 Lemma

Sei $\mathscr{U}$ die Initialuniformität auf X bezüglich der uniformen Räume $(X_i, \mathscr{U}_i)_{i\in I}$ und zugehörigen Abbildungen $f_i : X \to X_i,\ i \in I$. Die Initialtopologie τ_{ini} auf X bezüglich den induzierten topologischen Räumen $(X_i, \tau_{\mathscr{U}_i})$ und Abbildungen $f_i,\ i \in I$ ist gleich der durch $\mathscr{U}$ induzierten Topologie $\tau_{\mathscr{U}}$.

Beweis: Zeigen wir zuerst $\tau_{ini} \subseteq \tau_{\mathscr{U}}$. Hierzu reicht es wenn wir zeigen, dass die Subbasis $\{f_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \tau_{\mathscr{U}_i}$ und $i \in I\}$ von τ_{ini} in $\tau_{\mathscr{U}}$ enthalten ist. Sei dazu $x \in f_i^{-1}(U_i)$, für $U_i \in \tau_{\mathscr{U}_i}$.

Dann gibt es ein $V \in \mathscr{U}_i$ mit $V(f_i(x)) \subseteq U_i$. Es folgt $(f_i \times f_i)^{-1}(V)(x) \subseteq f_i^{-1}(U_i)$. Das heißt $f_i^{-1}(U_i) \in \tau_{\mathscr{U}}$.

Kommen wir zu $\tau_{\mathscr{U}} \subseteq \tau_{ini}$. Sei $O \in \tau_{\mathscr{U}}$ und $x \in O$. Es gibt dann ein $V \in \mathscr{U}$ mit $V(x) \subseteq O$. Zu V gibt es $i_1, ..., i_n \in I$ und $U_{i_k} \in \mathscr{U}_{i_k}$, $k = 1, ..., n$ mit $\bigcap_{k=1}^n (f_{i_k} \times f_{i_k})^{-1}(U_{i_k}) \subseteq V$. Wieder kann man leicht nachrechnen, dass $x \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}(f_{i_k}(x))) \subseteq V(x)$ ist. Setzen wir noch $W_{i_k} := (U_{i_k}(f_{i_k}(x)))^\circ \in \dot{f_{i_k}}(x) \cap \tau_{\mathscr{U}_{i_k}}$, so erhalten wir $x \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(W_{i_k}) \subseteq O$, was nichts anderes als $O \in \tau_{ini}$ bedeutet.

13.2.3 Definition

Produktuniformität, Teilraumuniformität Genau wie die Produkttopologie definieren wir auch die Produktuniformität der uniformen Räume $(X_i, \mathscr{U}_i)_{i \in I}$ als die Initialuniformität $\mathscr{U}$ auf $X := \prod_{i \in I} X_i$ bezüglich der Projektionsabbildungen $p_i : X \to X_i$.

Ist $A \subseteq X$ und $(X, \mathscr{U})$ ein uniformer Raum, so definieren die Teilraumuniformität $\mathscr{U}_A$ auf A als die Initialuniformität auf A bzgl. $(E, \mathscr{U})$ und $i_A : A \to X$ definiert durch $i_A(a) := a$.

Bevor wir nun die Finaluniformität definieren erst noch ein paar Vorbemerkungen zu sogenannten halbuniformen Räumen.

13.2.4 Definition

Halbuniformer Raum $(X, \mathscr{H})$ heißt halbuniformer Raum und $\mathscr{H}$ entsprechend Halbuniformität, wenn:

1) $\mathscr{H}$ ist ein Filter auf $X \times X$.
2) $\forall U \in \mathscr{H}$ ist $\Delta_X \subseteq U$.
3) $\forall U \in \mathscr{H}$ ist $U^{-1} \in \mathscr{H}$.

Sei $(X, \mathscr{H})$ ein halbuniformer Raum. Wir setzen dann $\Phi_{\mathscr{H}} := \{\mathscr{U} \subseteq \mathscr{H} \mid \mathscr{U}$ ist Uniformität auf $X\}$. Bilden wir anschließend $\mathscr{S} := \bigcup_{\mathscr{U} \subseteq \Phi_{\mathscr{H}}} \mathscr{U}$ und $\mathscr{B} := \{\bigcap \mathscr{S}' \mid \mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ und $\mathscr{S}'$ ist endlich $\}$, so ist $\mathscr{B}$ die Basis einer Uniformität $\mathscr{U}^*$. Zeigen wir dies:

Das $\mathscr{B}$ eine Filterbasis ist, sollte klar sein. Ebenso leicht sieht man $\Delta_X \subseteq B$, für jedes $B \in \mathscr{B}$. Sei $B \in \mathscr{B}$, also $B = U_1 \cap ... \cap U_n$, für $U_1 \in \mathscr{U}_1 \in \Phi_{\mathscr{H}}$, ..., $U_n \in \mathscr{U}_n \in \Phi_{\mathscr{H}}$. Dann ist auch $U_k^{-1} \in \mathscr{U}_k \in \Phi_{\mathscr{H}}$, für $k = 1, ..., n$. Wir erhalten $B^{-1} = U_1^{-1} \cap ... \cap U_n^{-1} \in \mathscr{B}$. Ebenso folgt für dieses B, dass es $V_k \in \mathscr{U}_k$ gibt mit $V_k \circ V_k \subseteq U_k$ (für $k = 1, ..., n$). Für $B' := V_1 \cap ... V_n \in \mathscr{B}$ gilt dann $B' \circ B' \subseteq B$. Damit ist gezeigt, dass $\mathscr{U}^* := [\mathscr{B}] = \{U \subseteq X \times X \mid \exists B \in \mathscr{B}$ mit $B \subseteq U\}$ eine Uniformität auf X ist. Wir zeigen im Folgenden $\mathscr{U}^* \in \Phi_{\mathscr{H}}$.

Dazu bilden wir $\mathscr{U}^{**} := \{V \subseteq X \times X \mid \exists$ Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $V_n \in \mathscr{H}$, $V_0 \subseteq V$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $V_{n+1} \circ V_{n+1} \subseteq V_n\}$ und zeigen: $\mathscr{U}^* = \mathscr{U}^{**}$. Da offensichtlich $\mathscr{U}^{**} \subseteq \mathscr{H}$, folgt dann sofort $\mathscr{U}^* \in \Phi_{\mathscr{H}}$.

Es gilt $\emptyset \notin \mathscr{U}^{**}$ und $V \subseteq W$ mit $V \in \mathscr{U}^{**}$ impliziert $W \in \mathscr{U}^{**}$. Wenn $V, W \in \mathscr{U}^{**}$, dann gibt es entsprechende Folgen $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Offensichtlich erfüllt dann die Folge $(V_n \cap W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bedingung aus der Menge $\mathscr{U}^{**}$ bzüglich der Menge $V \cap W$ und dementsprechend ist $V \cap W \in \mathscr{U}^{**}$. Das $\Delta_X \subseteq U$ ist, für jedes $U \in \mathscr{U}^{**}$ ist wieder unmittelbar klar. Zu $U \in \mathscr{U}^{**}$ gibt es wieder eine entsprechende Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathscr{H}$, mit $U_0 \subseteq U$ und $U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n$. Dann ist $U_0^{-1} \subseteq U$ und $U_{n+1}^{-1} \circ U_{n+1}^{-1} \subseteq U_n^{-1}$ und somit $U^{-1} \in \mathscr{U}^{**}$. Das es zu jedem $U \in \mathscr{U}^{**}$

ein $V \in \mathscr{U}^{**}$ gibt mit $V \circ V \subseteq U$ folgt dann wieder unmittelbar aus der Definition von $\mathscr{U}^{**}$. Wir haben damit gezeigt, dass $\mathscr{U}^{**}$ eine Uniformität ist. Aus $\mathscr{U}^{**} \subseteq \mathscr{H}$ folgt dann $\mathscr{U}^{**} \subseteq \mathscr{U}^{*}$.

Für die andere Richtung nehmen wir uns ein $U \in \mathscr{U}^{*}$. Dazu gibt es dann $U_1,\ldots,U_n$ mit $U_k \in \mathscr{U}_k \in \Phi_{\mathscr{H}}$, für $k = 1,\ldots,n$ und $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteq U$. Für $k = 1,\ldots,n$ gibt es dann Folgen $(U_k^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{U}_k$ mit $U_k^{(i+1)} \circ U_k^{(i+1)} \subseteq U_k^{(i)}$ und $U_k^{(0)} = U_k$. Dann bekommen wir mit $V_i := U_1^{(i)} \cap \ldots \cap U_n^{(i)}$ eine Folge $(V_i)_{\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{H}$, welche $V_{i+1} \circ V_{i+1} \subseteq V_i$ und $V_0 \subseteq U$ erfüllt. Mit anderen Worten: $U \in \mathscr{U}^{**}$.

Wie bereits angekündigt erhalten wir somit $\mathscr{U}^{*} \in \Phi_{\mathscr{H}}$ und $\mathscr{U}^{*}$ ist demnach das eindeutig bestimmte maximale (bzgl. Inklusion) Element aus $\Phi_{\mathscr{H}}$. Wir schreiben auch $\mathscr{U}^{*} = sup\ \Phi_{\mathscr{H}}$.

13.2.5 Satz und Definition (Finaluniformität)

Sei X eine Menge und $(X_i,\mathscr{U}_i)_{i\in I}$ eine Familie uniformer Räume mit zugehörigen Abbildungen $f_i : X_i \to X,\ i \in I$. Die feinste Uniformität $\mathscr{U}$ auf X, für die alle Abbildungen f_i uniform sind, nennen wir die Finaluniformität. Die Finaluniformität existiert immer und erfüllt die folgende universelle Eigenschaft:

Für alle uniformen Räume $(Y,\mathscr{V})$ und Abbildungen $f : X \to Y$ gilt:

f ist uniform genau dann, wenn alle Abbildungen $f \circ f_i : X_i \to Y$ uniform sind ($i \in I$).

Ferner ist $\mathscr{U}$ durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f\circ f_i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Beweis: Sei $\mathscr{H} := \{V \subseteq X \times X \mid \Delta_X \subseteq V \text{ und } \forall i \in I \text{ gilt } (f_i \times f_i)^{-1}(V) \in \mathscr{U}_{i\in I}\}$. Man rechnet leicht nach, dass $\mathscr{H}$ eine Halbuniformität ist. Entsprechend der obigen Konstruktion bilden wir $\mathscr{U} := sup\ \Phi_{\mathscr{H}}$. Offensichtlich ist $\mathscr{U}$ dann bereits die Finaluniformität. Zeigen wir die universelle Eigenschaft:

Wenn $f : (X,\mathscr{U}) \to (Y,\mathscr{V})$ uniform ist, so ist auch für jedes $i \in I$ die Abbildung $f \circ f_i$ uniform. Sind andererseits alle $f \circ f_i$ uniform, für $i \in I$ und ist $V \in \mathscr{V}$, so gibt es eine Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{V}$, mit $V_{n+1} \circ V_{n+1} \subseteq V_n$ und $V_0 = V$. Für alle $i \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $((f \circ f_i) \times (f \circ f_i)^{-1}(V_n) \in \mathscr{U}_i$ und $((f \circ f_i) \times (f \circ f_i)^{-1}(V_n) = (f_i \times f_i)^{-1}((f \times f)^{-1}(V_n))$. Nach Definition von $\mathscr{H}$ folgt also $(f \times f)^{-1}(V_n) \in \mathscr{H}$. Wir haben also ein Folge $((f \times f)^{-1}(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{H}$ mit $(f \times f)^{-1}(V_{n+1}) \circ (f \times f)^{-1}(V_{n+1}) \subseteq (f \times f)^{-1}(V_n)$. Aus dem oben gezeigten folgt also $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathscr{U}$, die Abbildung f ist also uniform.

Betrachten wir eine andere Uniformität $\mathscr{U}'$ auf X, die auch die universelle Eigenschaft hat. Die $f_i : (X_i,\mathscr{U}_i) \to (X,\mathscr{U})$ sind uniform und es gilt $f_i : (X_i,\mathscr{U}_i) \to (X,\mathscr{U}) = id_X : (X,\mathscr{U}') \to (X,\mathscr{U}) \circ f_i : (X_i,\mathscr{U}_i) \to (X,\mathscr{U}')$. Aus der universellen Eigenschaft für das Paar $(X,\mathscr{U}')$ folgern wir also, dass $id_X : (X,\mathscr{U}') \to (X,\mathscr{U})$ uniform ist und somit $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ gilt. Hieraus folgt bereits unmittelbar, dass die $f_i : (X_i,\mathscr{U}_i) \to (X,\mathscr{U}')$ uniform sind.

Nun ist auch $f_i : (X_i, \mathscr{U}_i) \to (X, \mathscr{U}') = id_X : (X, \mathscr{U}) \to (X, \mathscr{U}') \circ f_i : (X_i, \mathscr{U}_i) \to (X, \mathscr{U})$. Aus der universellen Eigenschaft für das Paar $(X, \mathscr{U})$ folgern wir also, dass $id_X : (X, \mathscr{U}) \to (X, \mathscr{U}')$ uniform ist und somit auch $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}'$ gilt. Wir bekommen also $\mathscr{U}' = \mathscr{U}$ - die Eindeutigkeit.

13.2.6 Definition

Quotientenuniformität Sei $(X, \mathscr{U})$ ein uniformer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. $X/\sim$ bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/\sim$ die standard Projektion. Die Finaluniformität auf $X/\sim$ bezüglich π nennt man Quotientenuniformität.

13.2.7 Bemerkung

Eine zu Lemma 13.2.2 analoge Aussage ist falsch. Sei $\mathscr{U}$ die Finaluniformität auf X bezüglich der uniformen Räume $(X_i, \mathscr{U}_i)_{i \in I}$ und zugehörigen Abbildungen $f_i : X_i \to X$, $i \in I$. Die Finaltopologie τ_{fin} auf X bezüglich den induzierten topologischen Räumen $(X_i, \tau_{\mathscr{U}_i})$ und Abbildungen f_i, $i \in I$ ist nicht notwendig identisch mit der durch $\mathscr{U}$ induzierten Topologie $\tau_{\mathscr{U}}$, wie das folgende Beispiel lehrt.

13.2.8 Beispiel

Wir betrachten $X := [0,1]$ mit der durch die euklidische $d(x,y) := |x-y|$ Metrik erzeugten Uniformität $\mathscr{U}$. Auf X führen wir durch $x \sim y \;\Leftrightarrow\; \{x,y\} \subseteq [0,1/2)$ oder $\{x,y\} \subseteq [1/2,1]$ eine Äquivalenzrelation ein. Die durch die Quotientenuniformität auf $X/\sim$ erzeugte Topologie ist - wie wir bereits oben gesehen haben - in jedem Fall ein T_3-Raum. $X/\sim$ mit der Quotiententopologie bezüglich der durch $\mathscr{U}$ auf X induzierten Topologie und der Projektionsabbildung $\pi : X \to X/\sim$ hingegen ist - wie man leicht nachrechnet - homöomorph zu (Y, σ), wobei $Y = \{a,b\}$ eine zweielementige Menge ist und $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, Y\}$. Insbesondere ist diese Topologie nicht T_3.

13.3 Überdeckungsuniforme Räume

Bereits bei den topologischen Räumen hatten wir gesehen, dass sich der Begriff der Topologie auf mehrere Arten einführen lässt. Einerseits durch den Begriff der offenen Menge (Definition 2.1.1) andererseits durch den Abschluss-Operator (Bemerkung 2.1.10). Wir werden in diesem Abschnitt nun ein anderen Zugang zu den uniformen Räumen entwickeln, der sich einerseits als äquivalent erweisen wird, andererseits aber manchmal etwas handlicher ist.

13.3.1 Definition

Überdeckungsuniformer Raum, Überdeckungsuniformität Ein überdeckungsuniformer Raum ist ein geordnetes Paar (X, Γ), wobei X eine Menge ist und Γ folgenden Bedingungen genügt (für die Bezeichnungen siehe auch Definition 12.2.1):

1) Γ ist eine Menge von Überdeckungen von X.
2) $\forall \alpha, \beta \in \Gamma \exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \alpha$ und $\gamma < \beta$.
3) $\forall \alpha \in \Gamma \exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma <^* \alpha$.

4) Ist $\alpha \in \Gamma$ und β eine Überdeckung von X mit $\alpha < \beta$, so ist auch $\beta \in \Gamma$.

Γ nennen wir dann eine Überdeckungsuniformität. Die Elemente aus Γ müssen keineswegs offene Überdeckungen sein - von einer Topologie ist hier keine Rede!

Wir werden nun jedem überdeckungsuniformen Raum einen uniformen Raum zuordnen und umgekehrt. Diese Zuordnungen werden sich als zueinander invers erweisen.

13.3.2 Lemma

a) Sei (X,Γ) ein überdeckungsuniformer Raum. Zu jedem $\gamma \in \Gamma$ definieren wir $V_\gamma := \bigcup_{g\in\gamma} g \times g$ und setzen $\mathscr{B}_\Gamma := \{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Dann ist $\mathscr{U}_\Gamma := \{U \subseteq X \times X \mid \exists B \in \mathscr{B}_\Gamma \text{ mit } B \subseteq U\}$ eine Uniformität auf X.

b) Sei $(X,\mathscr{U})$ ein uniformer Raum. Zu jedem $U \in \mathscr{U}$ definieren wir $\gamma_U := \{U(x) \mid x \in X\}$ und setzen $\Gamma_{\mathscr{U}} := \{\gamma \mid \gamma \text{ ist eine Überdeckung von } X \text{ und } \exists U \in \mathscr{U} \text{ mit } \gamma_U < \gamma\}$. Dann ist $\Gamma_{\mathscr{U}}$ eine Überdeckungsuniformität auf X.

c) Es ist $\Gamma_{\mathscr{U}_\Gamma} = \Gamma$.

d) Es ist $\mathscr{U}_{\Gamma_{\mathscr{U}}} = \mathscr{U}$.

Beweis: a) Es ist $\Delta_X \subseteq V_\gamma$, für alle $\gamma \in \Gamma$. Für $\alpha, \beta \in \Gamma$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \alpha$ und $\gamma < \beta$. Damit gilt dann $V_\gamma \subseteq V_\alpha \cap V_\beta$. Offensichtlich gilt $V_\gamma^{-1} = V_\gamma$, für alle $\gamma \in \Gamma$. und zuletzt gibt es zu $\alpha \in \Gamma$ ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma <^* \alpha$. Damit folgt dann $V_\gamma \circ V_\gamma \subseteq V_\alpha$. Da $\mathscr{B}$ eine Filterbasis für $\mathscr{U}$ ist, ist $\mathscr{U}$ offensichtlich eine Uniformität.

b) Das $\Gamma_{\mathscr{U}}$ eine Menge von Überdeckungen von X ist, ist klar. Es gilt $\gamma_{U\cap V} < \gamma_U$ und $\gamma_{U\cap V} < \gamma_V$, für $U,V \in \mathscr{U}$. Wählen wir wieder $U \in \mathscr{U}$, so gibt es ein $V \in \mathscr{U}$ mit $V \circ V \subseteq U$ und $V^{-1} = V$. Man kann dann leicht nachrechnen, dass $\gamma_V <^* \gamma_U$ gilt. Und ist $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{U}}$ und α eine Überdeckung von X mit $\gamma < \alpha$, so folgt aus der Definition von $\Gamma_{\mathscr{U}}$ bereits $\alpha \in \Gamma_{\mathscr{U}}$. Damit ist $\Gamma_{\mathscr{U}}$ also eine Überdeckungsuniformität.

c) Sei $\gamma \in \Gamma$. Dann gibt es ein $\alpha \in \Gamma$ mit $\alpha <^* \gamma$. Es ist $V := \bigcup_{a\in\alpha} a \times a \in \mathscr{U}_\Gamma$ und $\{V(x) \mid x \in X\} < \gamma$. Also auch $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{U}_\Gamma}$, denn $\{V(x) \mid x \in X\} \in \Gamma_{\mathscr{U}_\Gamma}$. Sei andererseits $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{U}_\Gamma}$, Dann gibt es ein $V \in \mathscr{U}_\Gamma$ mit $\{V(x) \mid x \in X\} < \gamma$. Zu diesem V gibt es dann aber ein $\alpha \in \Gamma$ mit $\bigcup_{a\in\alpha} a \times a \subseteq V$. Man sieht nun leicht, dass $\alpha < \gamma$ gilt und somit $\gamma \in \Gamma$ folgt.

d) Sei $U \in \mathscr{U}$. Es gibt dann ein $V \in \mathscr{U}$ mit $V = V^{-1}$ und $V \circ V \subseteq U$. Nun ist $\gamma_V \in \Gamma_{\mathscr{U}}$ und $\bigcup_{x\in X} V(x) \times V(x) \subseteq U$, also $U \in \mathscr{U}_{\Gamma_{\mathscr{U}}}$. Andererseits gibt es für $U \in \mathscr{U}_{\Gamma_{\mathscr{U}}}$ ein $V \in \mathscr{U}$ mit $\bigcup_{x\in X} V(x) \times V(x) \subseteq U$. Da $V \subseteq \bigcup_{x\in X} V(x) \times V(x)$, folgt $U \in \mathscr{U}$.

13.3.3 Lemma

a) Sei (X,Γ) ein überdeckungsuniformer Raum. $\tau_\Gamma := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \, \exists \gamma \in \Gamma \text{ mit } \gamma(x) \subseteq O\}$ ist dann eine Topologie auf X.

b) Es ist $\tau_\Gamma = \tau_{\mathscr{U}_\Gamma}$, für einen überdeckungsuniformen Raum (X,Γ).

c) Es ist $\tau_{\mathscr{U}} = \tau_{\Gamma_{\mathscr{U}}}$, für einen uniformen Raum $(X,\mathscr{U})$.

Beweis: a) ist offensichtlich. **b)** Sei $O \in \tau_\Gamma$. Für jedes $x \in O$ gibt es ein $\gamma_x \in \Gamma$ mit $\gamma_x(x) \subseteq O$. Nun ist $V_x := \bigcup_{g \in \gamma_x} g \times g \in \mathscr{U}_\Gamma$ und $V_x(x) = \gamma_x(x) \subseteq O$. Also ist $O \in \tau_{\mathscr{U}_\Gamma}$. Sei nun $O \in \tau_{\mathscr{U}_\Gamma}$. Für $x \in O$ gibt es ein $V \in \mathscr{U}_\Gamma$ mit $V(x) \subseteq O$. Dann gibt es aber auch ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\bigcup_{g \in \gamma} g \times g \subseteq V$. Es ist dann $\gamma(x) = (\bigcup_{g \in \gamma} g \times g)(x) \subseteq V(x) \subseteq O$. Insgesamt also auch $O \in \tau_\Gamma$.

c) Sei $O \in \tau_{\mathscr{U}}$ und $x \in O$. Es gibt dann ein $V \in \mathscr{U}$ mit $V = V^{-1}$ und $(V \circ v)(x) \subseteq O$. Dann ist $\gamma_V \in \Gamma_{\mathscr{U}}$ und es gilt $\gamma_V(x) \subseteq O$. Andererseits folgern wir für ein $O \in \tau_{\Gamma_{\mathscr{U}}}$ und $x \in O$, dass es ein $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{U}}$ geben muss mit $\gamma(x) \subseteq O$. Dann gibt es ein $V \in \mathscr{U}$ mit $\gamma_V < \gamma$. Offensichtlich gilt dann $V(x) \subseteq O$. Also $O \in \tau_{\mathscr{U}}$.

13.3.4 Lemma

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und Γ eine Überdeckungsuniformität auf X mit $\tau_\Gamma = \tau$. Dann folgt $\forall \gamma \in \Gamma \exists \alpha \in \Gamma$ mit $\alpha < \gamma^\circ$. Unter γ° verstehen wir $\{g^\circ \mid g \in \gamma\}$. Es gilt also $\gamma^\circ \in \Gamma$.

Beweis: Für $\gamma \in \Gamma$ gibt es $\alpha, \beta \in \Gamma$ mit $\alpha <^* \beta <^* \gamma$. Zeigen wir, dass dann bereits $\alpha < \gamma^\circ$ gilt. Sei $a \in \alpha$. Es gibt dann ein $g \in \gamma$ mit $\alpha(a) \subseteq g$ (siehe Lemma 12.2.2). Nun ist $g^\circ = \{x \in g \mid \exists V \in \mathscr{U}_\Gamma \text{ mit } V(x) \subseteq g\} = \{x \in g \mid \exists \delta \in \Gamma \text{ mit } \delta(x) \subseteq g\}$. Aus $y \in a$ folgt $\alpha(y) \subseteq g$, also $y \in g^\circ$. Insgesamt also $a \subseteq g^\circ$.

13.3.5 Definition

Seien (X, Γ) und (Y, Γ') überdeckungsuniforme Räume. Wir nennen eine Abbildung $f : X \to Y$ überdeckungsuniform, wenn $\{f^{-1}(g') \mid g' \in \gamma'\} \in \Gamma$ ist, für jedes $\gamma' \in \Gamma'$.

Wie nicht anders zu erwarten gilt folgende Aussage:

13.3.6 Lemma

Seien X, Y zwei Mengen, $\mathscr{U}$ bzw. $\mathscr{U}'$ Uniformitäten und Γ bzw. Γ' Überdeckungsuniformitäten auf X bzw Y. Ferner sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) $f : (X, \mathscr{U}) \to (Y, \mathscr{U}')$ ist genau dann uniform, wenn $f : (X, \Gamma_{\mathscr{U}}) \to (Y, \Gamma_{\mathscr{U}'})$ überdeckungsuniform ist.

b) $f : (X, \Gamma) \to (Y, \Gamma')$ ist genau dann überdeckungsuniform, wenn $f : (X, \mathscr{U}_\Gamma) \to (Y, \mathscr{U}_{\Gamma'})$ uniform ist.

Beweis: Der Beweis bleibt - zur Abwechslung - als leicht Übungsaufgabe.

13.3.7 Definition

Initialüberdeckungsuniformität und Finalüberdeckungsuniformität Für zwei Überdeckungsuniformitäten Γ und Γ' auf X führen wir die Sprechweisen feiner und gröber ein. Γ heißt feiner als Γ' bzw. Γ' heißt gröber als Γ, wenn $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

a) Ist X eine Menge und $(X_i, \Gamma_i)_{i\in I}$ eine Familie überdeckungsuniformer Räume und $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ eine zugehörige Familie von Abbildungen, so gibt es eine gröbste Überdeckungsuniformität Γ auf X, bzgl derer alle f_i uniform sind.

Beschreiben kann man sie etwa so: Für $\alpha, \beta \subseteq \mathscr{P}(X)$ setzen wir $\alpha \wedge \beta := \{A \cap B \mid A \in \alpha,\ B \in \beta\}$. Für jedes $i \in I$ und $\gamma \in \Gamma_i$ setzen wir $f_i^{-1}(\gamma) := \{f_i^{-1}(g) \mid g \in \gamma\}$. Dann ist

$\Gamma = \{\gamma \subseteq \mathscr{P}(X) \mid \exists i_1, ..., i_n \in I,\ \gamma_1 \in \Gamma_{i_1}, ..., \gamma_n \in \Gamma_{i_n} \text{ mit } f_{i_1}^{-1}(\gamma_1) \wedge ... \wedge f_{i_n}^{-1}(\gamma_n) < \gamma\}$.

b) Ist X eine Menge und $(X_i, \Gamma_i)_{i\in I}$ eine Familie überdeckungsuniformer Räume und $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ eine zugehörige Familie von Abbildungen, so gibt es eine feinste Überdeckungsuniformität Γ auf X, bzgl derer alle f_i uniform sind.

Beweis: Auch der Beweis bleibt als Aufgabe.

13.3.8 Bemerkung

Teilraum-/Produkt-/Quotientenüberdeckungsuniformitäten sind dann auch entsprechend definiert.

13.4 Uniformisierbarkeit und Metrisierbarkeit

Wir geben nun Kriterien an (notwendige und hinreichende), die erfüllt sein müssen, damit es zu einem topologischer Raum (X, τ) eine Uniformität $\mathscr{U}$ oder eine Überdeckungsuniformität Γ gibt, mit $\tau = \tau_{\mathscr{U}}$ bzw. $\tau = \tau_\Gamma$. In diesem Fall nennen wir den topologischen Raum uniformisierbar bzw. überdeckungsuniformisierbar. Im Anschluss daran beschäftigen wir uns mit der Frage ob sich eine Uniformität/Überdeckungsuniformität durch eine Metrik gewinnen lässt.

13.4.1 Lemma

Sei (X, τ) ein kompakter Raum. Dann gibt es höchstens eine Uniformität $\mathscr{U}$ bzw. Überdeckungsuniformität Γ, mit $\tau = \tau_{\mathscr{U}}$ bzw. $\tau = \tau_\Gamma$.

Beweis: Es reicht die Aussage für Überdeckungsuniformitäten zu beweisen. Seien also Γ und Γ' zwei Überdeckungsuniformitäten mit $\tau_\Gamma = \tau = \tau_{\Gamma'}$. Wir zeigen $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Aus Symmetriegründen folgt dann $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und wir sind fertig. Sei also $\gamma' \in \Gamma'$. Aus Lemma 13.3.4 folgt $\gamma := \gamma'^{\circ} \in \Gamma'$. Zu jedem $x \in X$ wählen wir ein $O_x \in \dot{x} \cap \gamma$. Es gibt dann ein $\beta_x \in \Gamma$ mit $\beta_x(x) \subseteq O_x$. Zu β_x gibt es ein $\alpha_x \in \Gamma$ mit $\alpha_x <^* \beta_x$. Aus Lemma 12.2.2 folgt $\alpha_x(\alpha_x(x)) \subseteq \beta_x(x) \subseteq O_x$. Insbesondere gibt es somit ein $U_x \in \dot{x} \cap \alpha_x$ mit $\alpha_x(U_x) \subseteq O_x$. Nun ist (X, τ) kompakt, es gibt also endlich viele $x_1, ..., x_n \in X$ mit $X = U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$. Induktiv schließen wir, dass es ein $\alpha \in \Gamma$ geben muss mit $\alpha < \alpha_{x_1}$ und ... und $\alpha < \alpha_{x_n}$. Für beliebiges $x \in X$ gilt $x \in U_{x_k}$, für gewisses $k \in \{1, ..., n\}$ und damit $\alpha_{x_k}(U_{x_k}) \subseteq O_{x_k}$. Insbesondere also $\alpha(x) \subseteq O_{x_k}$. Wir haben somit $\alpha <^* \gamma$, denn $O_{x_k} \in \gamma$ und darum $\gamma \in \Gamma$. Dann ist aber auch γ' in Γ, denn es gilt $\gamma < \gamma'$.

13.4.2 Satz

Ein topologischer Raum (X,τ) ist genau dann uniformisierbar (das heißt es gibt eine Uniformität $\mathscr{U}$ auf X mit $\tau = \tau_{\mathscr{U}}$), wenn er ein $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist.

Beweis: Sei (X,τ) ein $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-Raum. Sei dann I die Menge aller stetigen Abbildungen $f : X \to [0,1]$, also $I := C(X,[0,1])$. Für jedes $f \in I$ sei $X_f := [0,1]$. Wir definieren dann $\mathscr{U}$ als die Initialuniformität auf X bezüglich den X_f, $f \in I$ (die X_f sind uniforme Räume, da sie metrisierbar sind). Wir müssen $\tau = \tau_{\mathscr{U}}$ zeigen. Bezeichnen wir mit τ_I die Initialtopologie auf X bezüglich den X_f mit den zugehörigen Abbildungen, so folgt aus Lemma 13.2.2 sofort $\tau_{\mathscr{U}} = \tau_I$. Da τ_I die gröbste Topologie auf X ist, für die die Abbildungen aus I stetig sind, haben wir schon $\tau_I \subseteq \tau$. Um die andere Inklusion zu beweisen, wählen wir ein $\emptyset \neq O \in \tau$. Sei $x \in O$ beliebig. Es gibt dann ein $f \in I$ mit $f(x) = 0$ und $f(X \setminus O) \subseteq \{1\}$. Es ist $U := f^{-1}([0,1/2)) \in \tau_I$ und es gilt $U \subseteq O$. Daraus folgt $O \in \tau_I$ (da $x \in O$ beliebig war). Der Raum ist also uniformisierbar.

Zeigen wir nun, dass jeder überdeckugsuniforme Raum (X,Γ) mit $\tau := \tau_\Gamma$ ein $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist. Dazu nehmen wir eine abgeschlossene Teilmenge A von X und ein $x \in X \setminus A$. Es gibt dann eine Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Γ, mit $\gamma_0(x) \subseteq X \setminus A$ und $\gamma_{n+1} <^* \gamma_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$). Wir definieren nun $R := \{k/2^n \mid n \in \mathbb{N}^{\neq 0}$ und $k = 1,\dots,2^n - 1\}$. Für jedes R definieren wir nun ein $U(r) \in \dot{x} \cap \tau$ mit $r < r' \Rightarrow \overline{U(r)} \subseteq U(r')$. Dazu definieren wir $U(1/2) := \gamma_1(x)$ und allgemein:

$U(k'/2^{n+1}) := U(k/2^n)$, für $k' = 2k$, $k > 0$

$U(k'/2^{n+1}) := \gamma_{n+1}(x)$, für $k' = 1$

$U(k'/2^{n+1}) := \gamma_{n+1}(U(k/2^n))$ für $k' = 2k+1$, $k > 0$.

Außerdem setzen wir noch $U(1) := X$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann $\gamma_n(U(k/2^n)) \subseteq U((k+1)/2^n)$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k < k+1 \leq 2^n - 1$. Der Beweis ist nicht schwer (er verwendet Lemma 12.2.2) und läuft durch Induktion über n. Ebenso beweist man $\gamma_{n+1}(\gamma_{n+1}(U(k/2^n))) \subseteq X \setminus A$.

Nun fällt es auch nicht schwer zu zeigen, dass gilt: $x \in U(k/2^n) \subseteq \overline{U(k/2^n)} \subseteq U((k+1)/2^n) \subseteq \overline{U((k+1)/2^n)} \subseteq X \setminus A$ (für alle $n \in \mathbb{N}^{n\neq 0}$ und $1 \leq k < k+1 \leq 2^n - 1$. Denn wir haben (man beachte wieder Lemma 12.2.2):

$x \in U(k/2^n) \subseteq \overline{U(k/2^n)} \subseteq \gamma_{n+1}(U(k/2^n)) \subseteq \gamma_{n+1}(\gamma_{n+1}(U(k/2^n))) \subseteq \gamma_n(U(k/2^n)) \subseteq U((k+1)/2^n)$.

Damit bekommen wir dann: $r, r' \in R$ und $r < r'$ impliziert:

$\overline{U(r)} \subseteq U(r') \subseteq X \setminus A$.

Wir definieren nun $f : X \to [0,1]$ durch $f(z) := inf\{r \in R \mid z \in U(r)\}$. Offensichtlich gilt dann $f(x) = 0$ und $f(A) \subseteq \{1\}$. Zeigen wir noch, dass f stetig ist. Wir betrachten dazu die Subbasis $\mathscr{S} := \{[0,t) \mid 0 < t \leq 1\} \cup \{(t,1] \mid 0 \leq t < 1\}$ von $[0,1]$. Es reicht dann zu zeigen, dass die Urbilder unter f von Mengen aus $\mathscr{S}$ wieder offen sind.

Sei $U = [0,t)$. Dann ist $f^{-1}(U) = \{z \in X \mid f(z) < t\} = \{z \in X \mid \exists r_z \in R$ mit $r_z < t$ und $z \in U(r_z)\}$. Für $z \in f^{-1}(U)$ ist offensichtlich $z \in U(r_z) \subseteq f^{-1}(U)$. Also ist $f^{-1}(U)$ offen in X.

Sei $U = (t,1]$. Dann ist $f^{-1}(U) = \{z \in X \mid t < f(z)\} = \{z \in X \mid \exists r \in R$ mit $t < r$ und $z \notin U(r)\}$. Ist $z \in f^{-1}(U)$, so gibt es also ein $r \in R$ mit $t < r$ und $z \notin U(r)$. Nun ist R dicht in

$[0,1]$, es gibt also ein $r' \in R$ mit $t < r' < r$ und damit $z \in V_z := X \setminus \overline{U(r')} \in \tau$. Offensichtlich gilt dann $V_z \subseteq f^{-1}(U)$. Also ist $f^{-1}(U)$ wieder offen in X. Damit ist der Beweis beendet.

13.4.3 Beispiel

Analog zur Frage der Uniformisierbarkeit eines topologischen Raumes stellt sich die Frage der Metrisierbarkeit eines uniformen Raumes. Dazu diese beiden Beispiele: Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für jedes $\varepsilon > 0$ bilden wir die Menge $U_\varepsilon := \{(x,y) \mid d(x,y) < \varepsilon\}$. Es gilt dann:

1) $\mathscr{B} := \{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist eine Filterbasis.
2) $\forall \varepsilon > 0$ ist $\Delta_X \subseteq U_\varepsilon$.
3) $\forall \varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon^{-1} = U_\varepsilon$.
4) $\forall \varepsilon > 0$ ist $U_{\varepsilon/2} \circ U_{\varepsilon/2} \subseteq U_\varepsilon$.

$\mathscr{U}_d := \{U \subseteq X \times X \mid \exists B \in \mathscr{B}$ mit $B \subseteq U\}$ ist somit eine Uniformität auf X.

Man sieht unmittelbar $U_\varepsilon(x) = K(x,\varepsilon)$, es gilt also $\tau_{\mathscr{U}_d} = \tau_d$. Jeder metrische Raum ist also auf natürliche Weise auch ein uniformer Raum, wobei die induzierten Topologien identisch sind.

Einen uniformen Raum $(X,\mathscr{U})$ nennen wir metrisierbar, wenn es eine Metrik d auf X gibt mit $\mathscr{U} = \mathscr{U}_d$.

Und nun das ganze mit Überdeckungsuniformen Räumen.

13.4.4 Beispiel

Einem metrischen Raum (X,d) können wir auch eine Überdeckungsuniformität zuordnen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir dazu einfach $\gamma_n := \{K(x,1/n) \mid x \in X\}$ (hierbei bedeutet $K(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$) und bilden dann $\Gamma_d := \{\gamma \mid \gamma$ ist eine Überdeckung von X und $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_n < \gamma\}$. Offensichtlich ist Γ_d eine Überdeckungsuniformität und es gilt $\tau_d = \tau_{\Gamma_d}$.

Wir nennen einen überdeckungsuniformen Raum (X,Γ) metrisierbar, wenn es eine Metrik d auf X gibt mit $\Gamma = \Gamma_d$.

In Zusammenhang mit Beispiel 13.4.3 sieht man sofort $\Gamma_{\mathscr{U}_d} = \Gamma_d$ und $\mathscr{U}_{\Gamma_d} = \mathscr{U}_d$. Wir geben nun sowohl für uniforme, als auch überdeckungsuniforme Räume ein Metrisierbarkeitskriterium, beweisen aber nur jenes für überdeckungsuniforme Räume. Dasjenige für uniforme Räume, folgt dann sofort.

13.4.5 Satz

a) Für einen uniformen Raum $(X,\mathscr{U})$ ist äquivalent:
1) $(X,\mathscr{U})$ ist metrisierbar.
2) $(X,\mathscr{U})$ ist ein T_1-Raum und $\mathscr{U}$ hat eine abzählbare Basis.

b) Für einen überdeckungsuniformen Raum (X,Γ) ist äquivalent:
1) (X,Γ) ist metrisierbar.

2) (X,Γ) ist ein T_1-Raum und es gibt eine abzählbare Menge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Überdeckungen mit $\forall\gamma\in\Gamma\,\exists n\in\mathbb{N}$ mit $\gamma_n<\gamma$.

Beweis: Beweisen wir also b). Ist (X,Γ) metrisierbar, so gibt es klarerweise die abzählbare Menge von Überdeckungen. Nehmen wir also an, wir haben eine abzählbare Menge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Überdeckungen mit $\forall\gamma\in\Gamma\,\exists n\in\mathbb{N}$ mit $\gamma_n<\gamma$. Wir betrachten den topologischen Raum (X,τ_Γ). Laut Lemma 13.3.4 sind auch $\delta_n:=\gamma_n^\circ\in\Gamma$. Dann ist $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber eine Folge offener (bzgl. τ_Γ) Überdeckungen von X, mit deren Hilfe man sich leicht auch eine sternmonotone Folge offener Überdeckungen, die die Voraussetzung des Metrisationssatz von Alexandroff-Urysohn (Satz 12.8.8) erfüllt, beschafft. (X,τ_Γ) ist also (als topologischer Raum) metrisierbar mit Metrik d. Offensichtlich induziert d bereits auch Γ. Der überdeckungsuniforme Raum (X,Γ) ist also metrisierbar.

13.4.6 Beispiel: Metrisierbarkeit topologischer Gruppen

Sei X eine Menge, die einerseits eine Topologie τ hat und gleichzeitig auch eine Gruppe mit Multiplikation $\cdot$ ist. Das bedeutet es gibt eine Abbildung (Multiplikation genannt) $\cdot : X\times X\to X$ hat, mit folgenden Eigenschaften (für $\cdot(x,y)$ schreiben wir einfach xy).

1) $\forall x,y,z\in X$ gilt $(xy)z=x(yz)$ (Assoziativität).

2) $\exists e\in X$, so dass $ex=x=xe$ ist $(\forall x\in X)$; das Einselement (ist dann eindeutig bestimmt).

3) $\forall x\in X\,\exists y\in X$ mit $xy=e=yx$. Das zu x gehörige y ist dann ebenfalls eindeutig bestimmt, wird mit x^{-1} bezeichnet und Inverses von x genannt.

Das Paar $(X,\cdot)$ wird dann Gruppe genannt. Sind nun zusätzlich die Operationen $\cdot : X\times X\to X$ und $i:X\to X$ definiert durch $i(x):=x^{-1}$ stetig bezüglich τ (und der entsprechenden Produkttopologie), so nennt man $(X,\tau,\cdot)$ eine topologische Gruppe.

Sei $x\in X$ fest gewählt. Dann sind die Abbildungen $y\mapsto x\cdot y$ und $y\mapsto y\cdot x$ und $y\mapsto y^{-1}$ Homöomorphismen (wenn nicht klar $\Rightarrow$ Übungsaufgabe). Für jedes $V\in\tau$ ist insbesondere $x\cdot V\in\tau$.

Wir werden nun jeder topologischen Gruppe $(X,\tau,\cdot)$ eine Uniformität zuordnen (besser Überdeckungsuniformität), welche dieselbe original Topologie τ induziert.

Sei dazu $\mathscr{B}_e\subseteq\dot{e}\cap\tau$ eine Umgbungsbasis des neutralen Elementes e. Für jedes $V\in\dot{e}\cap\tau$ bilden wir die offene Überdeckung $\gamma_V^-:=\{x\cdot V\mid x\in X\}$ und dann $\Gamma_-:=\{\gamma\mid\gamma\subseteq\mathscr{P}(X),\bigcup\gamma=X$ und $\exists V\in\mathscr{B}_e$ mit $\gamma_V^-<\gamma\}$. Zeigen wir, dass Γ_- eine Überdeckungsuniformität ist. Die Einzige Schwierigkeit ist dabei Punkt 3) in Definition 13.3.1. Sei $\gamma\in\Gamma_-$. Es gibt dann $V\in\mathscr{B}_e$ mit $\gamma_V^-<\gamma$. Es gibt dann ein $U'\in\dot{e}\cap\tau$ mit $U'\cdot U'\subseteq V$. Wir wählen dann ein $U\in\mathscr{B}_e$ mit $U\subseteq U'\cap U'^{-1}\in\dot{e}\cap\tau$. Es gilt dann nämlich $\gamma_U^-<^*\gamma_V^-$. Betrachten wir dazu $x\in X$. Sei $y\in X$ mit $x\in y\cdot U\in\gamma_U^-$. Es ist dann $x=yu$ und $y=xu^{-1}$. Für $z\in U$ folgt somit $yz=xu^{-1}z\in x\cdot(U^{-1}\cdot U)\subseteq x\cdot(U'\cdot U')\subseteq x\cdot V$. Insgesamt also $y\cdot U\subseteq x\cdot V$ und somit $\gamma_U^-(x)\subseteq x\cdot V\in\gamma_V^-$. Wir sehen also, dass Γ_- eine Überdeckungsuniformität ist. Offensichtlich gilt nun $\tau_{\Gamma_-}=\tau$.

Was bringt uns das? Beispielsweise ein notwendiges und hinreichendes Kriterium wann die Topologie τ einer topologischen Gruppe $(X,\tau,\cdot)$ durch eine Metrik induziert werden kann. Es gilt nämlich:

Die Topologie τ einer topologischen Gruppe $(X,\tau,\cdot)$ kann genau dann durch eine Metrik induziert werden, wenn (X,τ) ein T_1-Raum ist und e (das neutrale Element von X) eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Art und Weise wie $(X,\tau,\cdot)$ eine Überdeckungsuniformität zugeordnet wurde und Satz 13.4.5.

13.5 Vollständigkeit und Vervollständigungen

Ebenfalls motiviert durch die Analysis ist der Begriff der Vollständigkeit. Wie wir wissen ist $\mathbb{R}$ vollständig. Zur Erinnerung: Jede Cauchy-Folge aus $\mathbb{R}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ - im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$. Wir wollen versuchen das Konzept der Vollständigkeit, mit seinen vielen Anwendungen, auf allgemeinere Räume - sprich uniforme bzw. überdeckungsuniforme Räume - zu übertragen. Als erstes müssen wir dazu den Begriff der Cauchy-Folge zum Begriff des Cachy-Filters verallgemeinern.

13.5.1 Definition

Cauchy-Filter Sei $(X,\mathscr{U})$ ein uniformer Raum und φ ein Filter auf X. Wir nennen φ Cauchy-Filter bezüglich $\mathscr{U}$, wenn es zu jedem $U\in\mathscr{U}$ ein $P\in\varphi$ gibt, mit $P\times P\subseteq U$. Haben wir eine Überdeckungsuniformität Γ auf X, so nennen wir φ einen Cauchy-Filter bezüglich Γ, wenn $\gamma\cap\varphi\neq\emptyset$ für jedes $\gamma\in\Gamma$. Ausführlicher bedeutet dies $\forall\gamma\in\Gamma\,\exists P\in\varphi$ mit $P\in\gamma$. Als Übung versuche der Leser sich diese beiden Definitionen anhand seiner Kenntnisse über Cauchy-Folgen in metrischen Räumen sowie Beispiel 13.4.3 und Beispiel 13.4.4 selbständig zu motivieren.

13.5.2 Lemma

Sei X eine Menge, $\mathscr{U}$ eine Uniformität, Γ eine Überdeckungsuniformität und φ ein Filter auf X.

a) φ ist ein Cauchy -Filter bzgl. $\mathscr{U}$, genau dann wenn er es auch bzgl. $\Gamma_{\mathscr{U}}$ ist.

b) φ ist ein Cauchy -Filter bzgl. Γ, genau dann wenn er es auch bzgl. $\mathscr{U}_{\Gamma}$ ist.

Die Beiden Definitionen sind also kohärent und wir sprechen in Zukunft nur noch von Cauchy-Filtern, egal ob wir eine Uniformität oder Überdeckungsuniformität zugrunde liegen haben.

Beweis: a) Sei φ ein Cauchy -Filter bzgl. $\mathscr{U}$. Zu $\gamma\in\Gamma_{\mathscr{U}}$ gibt es ein $U\in\mathscr{U}$ mit $\gamma_U<\mathscr{U}$. Dann gibt es ein $P\in\varphi$ mit $P\times P\subseteq U$. Für $x\in P$ ist $P\subseteq P\times P(x)\subseteq U(x)\in\gamma_U$. Es gibt dann ein $g\in\gamma$ mit $U(x)\subseteq g$ und damit $g\in\gamma\cap\varphi$.

Sei φ ein Cauchy -Filter bzgl. $\Gamma_{\mathscr{U}}$. Für $U\in\mathscr{U}$ gibt es ein $V\in\mathscr{U}$ mit $V=V^{-1}$ und $V\circ V\subseteq U$. Es gibt dann ein $P\in\gamma_V\cap\varphi$, also $P=V(z)$, für ein gewisses $z\in X$. Damit gilt dann $P\times P\subseteq U$, denn $(x,y)\in P\times P$ impliziert $(x,z)\in V$ und $(z,y)\in V$, also $(x,y)\in U$.

b) Sei φ ein Cauchy -Filter bzgl. Γ. Für $U \in \mathscr{U}_\Gamma$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\bigcup_{g\in\gamma} g \times g \subseteq U$. nun gibt es aber ein $P \in \gamma \cap \varphi$. Offensichtlich gilt dann $P \times P \subseteq U$.

Sei φ ein Cauchy-Filter bzgl. $\mathscr{U}_\Gamma$. Für $\gamma' \in \Gamma$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma <^* \gamma'$. Es gibt dann ein $P \in \varphi$ mit $P \times P \subseteq U_\gamma = \bigcup_{g\in\gamma} g \times g$. Zu $x \in P$ gibt es ein $g' \in \gamma'$ mit $\gamma(x) \subseteq g'$. Es folgt $P \subseteq P \times P(x) \subseteq (\bigcup_{g\in\gamma} g \times g)(x) = \gamma(x) \subseteq g'$. Also $g' \in \varphi \cap \gamma$.

13.5.3 Lemma

Sei (X,Γ) ein überdeckungsuniformer Raum. Ein Filter φ konvergiert (bzgl. τ_Γ) genau dann gegen ein $x \in X$, wenn $\dot{x} \cap \varphi$ ein Cauchy Filter ist. Insbesondere sind bzgl. τ_Γ konvergente Filter bereits Cauchy-Filter.

Beweis: Sei φ (bzgl. τ_Γ) konvergent gegen $x \in X$. Sei weiter $\gamma' \in \Gamma$. Aus Lemma 13.3.4 folgt $\gamma := \gamma'^\circ \in \Gamma$. Es gibt dann ein $g \in \gamma$ mit $x \in g$. Offensichtlich gilt nun $g \in \dot{x} \cap \varphi$. Zu g gibt es ein $g' \in \gamma'$ mit $g \subseteq g'$ und es folgt $g' \in (\dot{x} \cap \varphi) \cap \gamma'$. Damit ist $\dot{x} \cap \varphi$ ein Cauchy-Filter. Insbesondere ist damit auch φ ein Cauchy-Filter, denn es gilt schließlich $\dot{x} \cap \varphi \subseteq \varphi$.

Sei umgekehrt $\dot{x} \cap \varphi$ ein Cauchy-Filter. Sei $O \in \dot{x} \cap \tau_\Gamma$. Es gibt dann ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(x) \subseteq O$. Es gibt dann auch ein $P \in (\dot{x} \cap \varphi) \cap \gamma$. Damit folgt $P \subseteq \gamma(x) \subseteq O$ und darum $O \in \varphi$. Der Filter φ konvergiert also gegen x.

13.5.4 Lemma

Sei (X,Γ) ein Überdeckungsuniformer Raum und ϕ und ψ Cauchy-Filter auf X, für die $\phi \cup \psi$ die endliche Schnitt Eigenschaft (eSE) hat. Dann ist auch $\phi \cap \psi$ ein Cauchy-Filter.

Beweis: Sei $\gamma \in \Gamma$. Es gibt dann ein $\gamma' \in \Gamma$ mit $\gamma' <^* \gamma$. Dann gibt es $g_1 \in \phi \cap \gamma'$ und $g_2 \in \psi \cap \gamma'$. Nach Voraussetzung gilt $g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$. Sei dann $x \in g_1 \cap g_2$. Es gibt nun ein $g \in \gamma$ mit $\gamma'(x) \subseteq g$. Also ist $g \in \phi \cap \gamma$ und $g \in \psi \cap \gamma$ (also Obermenge von g_1 und g_2) und somit $g \in (\phi \cap \psi) \cap \gamma$.

13.5.5 Lemma

Sei (X,Γ) ein Überdeckungsuniformer Raum und ψ ein Cauchy-Filter auf X. Gilt $x \in \bigcap_{P\in\psi} \overline{P}$, so konvergiert ψ gegen x (bzgl. τ_Γ).

Beweis: Da $x \in \bigcap_{P\in\psi} \overline{P}$, hat $(\dot{x} \cap \tau_\Gamma) \cup \psi$ die eSE. Nach Lemma 13.5.4 ist $\phi := (\dot{x} \cap \tau_\Gamma) \cap \psi$ ein Cauchy-Filter. Also ist auch $\dot{x} \cap \psi$ ein Cauchy-Filter (da $\phi \subseteq \dot{x} \cap \psi$). Lemma 13.5.3 sagt gerade, dass ψ dann gegen x konvergiert.

13.5.6 Definition

total beschränkt, vollständig Ein überdeckungsuniformer Raum (X,Γ) heißt total beschränkt, wenn für jedes $\gamma \in \Gamma$ eine endliche Teilüberdeckung $\gamma' \subseteq \gamma$ existiert. Er heißt vollständig, wenn jeder Cauchy-Filter auch konvergiert.

Nicht für jede offene Überdeckung soll eine endliche Teilüberdeckung existieren (das wäre Kompaktheit), sondern nur für solche aus Γ. Was fehlt nun total beschränkten Räumen zur Kompaktheit? Sie müssen vollständig sein.

13.5.7 Lemma

Ein überdeckungsuniformer Raum (X,Γ) ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist.

Beweis: Sei (X,Γ) kompakt. Offensichtlich ist er dann auch total beschränkt. Zeigen wir, dass er vollständig ist. Sei dazu φ ein Cauchy-Filter auf X. Dieser ist in einem Ultrafilter ψ enthalten, welcher gegen ein $x \in X$ konvergiert. Insbesondere bedeutet dies: $x \in \bigcap_{P\in\varphi} \overline{P}$. Aus Lemma 13.5.5 folgt, dass auch φ gegen x konvergiert. Der Raum ist also vollständig.

Sei (X,Γ) nun als vollständig und total beschränkt vorausgesetzt. Angenommen es gibt einen Ultrafilter φ auf X, der nicht konvergiert. Dann ist φ kein Cauchy-Filter. Das heißt es gibt ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \cap \varphi = \emptyset$. Nun gibt es ein endliches $\gamma' \subseteq \gamma$ mit $\bigcup_{g\in\gamma'} g = X \in \varphi$. Also muss es ein $g \in \gamma'$ geben mit $g \in \varphi$ - Widerspruch!

13.5.8 Lemma

Ist $f : (X,\Gamma) \to (Y,\Sigma)$ uniform und φ ein Cauchy-Filter auf X, so ist $f(\varphi)$ ein Cauchy-Filter auf Y.

Beweis: Sei $\sigma \in \Sigma$. Dann ist $\{f^{-1}(w) \mid w \in \sigma\} \in \Gamma$. Es gibt also ein $w \in \sigma$ mit $f^{-1}(w) \in \varphi$. Dann ist aber $w \in f(\varphi) \cap \sigma$. Damit ist alles gezeigt.

13.5.9 Lemma

Sei Γ die Initialüberdeckungsuniformität auf X bzgl. $(X_i,\Gamma_i)_{i\in I}$ und $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$. Sei weiter φ ein Filter auf X. Dann gilt: φ ist genau dann ein Cauchy-Filter auf X, wenn $f_i(\varphi)$ für jedes $i \in I$ ein Cauchy-Filter auf X_i ist.

Beweis: Sei φ ein Cauchy-Filter auf X. Dann ist offensichtlich für jedes $i \in I$ auch $f_i(\varphi)$ ein Cauchy-Filter auf X_i (denn die f_i sind uniform).

Seien andererseits alle $f_i(\varphi)$ Cauchy-Filter auf X_i. Wir wählen ein $\gamma \in \Gamma$. Dann gibt es $i_1, ..., i_n \in I$ mit $f_{i_1}^{-1}(\gamma_{i_1}) \wedge ... \wedge f_{i_n}^{-1}(\gamma_{i_n}) < \gamma$. Nun gibt es $P_{i_k} \in \varphi$ und ein $g_{i_k} \in \gamma_{i_k}$ mit $f_{i_k}(P_{i_k}) \subseteq g_{i_k}$ (denn $\gamma_{i_k} \cap f_{i_k}(\varphi) \neq \emptyset$). Mit $P := \bigcap_{k=1}^n P_{i_k} \in \varphi$ folgt $P \subseteq \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(g_{i_k}) \subseteq g$, für ein gewisses $g \in \gamma$. Also $g \in \gamma \cap \varphi$.

13.5.10 Lemma

a) Ist (X, Γ) vollständig und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist (A, Γ_A) auch vollständig.

b) Ist (X, Γ) ein T_0-Raum und $A \subseteq X$ als Teilraum volständig, so ist A in X abgeschlossen.

Beweis: a) Ist φ ein Cauchy-Filter auf A, so ist $\psi := \{P \subseteq X \mid \exists P' \in \varphi \text{ mit } P' \subseteq P\}$ ein Cauchy-Filter auf X. Dieser konvergiert dann gegen ein $x \in X$. Da A abgeschlossen ist und $A \in \psi$ ist, folgt $x \in A$. Damit konvergiert aber auch φ gegen $x \in A$.

b) Wäre A nicht abgeschlossen, so gäbe es ein $x \in \overline{A} \setminus A$. Dann gibt es aber einen Filter φ auf X mit $(\dot{x} \cap \tau_\Gamma) \cup \{A\} \subseteq \varphi$. Dieser Filter konvergiert somit gegen x und ist deshalb ein Cauchy-Filter auf X. Dann muss aber $\varphi_A := \{A \cap P \mid P \in \varphi\}$ ein Cauchy-Filter auf A sein (betrachten wir die Inklusion $i : A \to X$, so ist $i(\varphi_A) = \varphi$; Lemma 13.5.9 erledigt dann den rest). Das bedeutet es gibt ein $a \in A$ mit $\varphi_A \to a$. Also auch $\varphi \to a$. Da der Raum ein T_2-Raum ist (er ist T_0!), folgt $x = a \in A$ - ein Widerspruch.

13.5.11 Lemma

Seien (X, Γ) und (Y, Σ) überdeckungsuniforme Räume, $D \subseteq X$ mit $\overline{D} = X$ und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung (alles bzgl. den induzierten Topologien). Ist ferner $f|D$ uniform, so ist f auch uniform.

Beweis: Sei $\sigma' \in \Sigma$. Es gibt dann ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma <^{**} \sigma'$ (starke Sternverfeinerung; siehe Definition 12.2.1). Nun ist $(f|D)^{-1}(\sigma) \in \Gamma_D$, es gibt also ein $\beta \in \Gamma$ mit $\beta = \beta^\circ$ und $\beta_D = \{B \cap D \mid B \in \beta\} < (f|D)^{-1}(\sigma)$. Zeigen wir $\beta < f^{-1}(\sigma') = \{f^{-1}(S') \mid S' \in \sigma\}$. Sei dazu $B \in \beta$. Dann gibt es ein $S \in \sigma$ mit $B \cap D \subseteq f^{-1}(S) \cap D$. Sei $S' \in \sigma$ mit $\sigma(S) \subseteq S'$. Wir zeigen $B \subseteq f^{-1}(S')$. Angenommen es gibt ein $x \in B \setminus f^{-1}(S')$. Nun ist $\overline{S} \subseteq \sigma(S)$ und von oben wissen wir $\sigma(S) \subseteq S'$, also $x \in f^{-1}(Y \setminus \overline{S})$. Da f stetig ist, ist $B \cap f^{-1}(Y \setminus \overline{S})$ eine nichtleere offene Menge ($x \in B \cap f^{-1}(Y \setminus \overline{S})$ und $\beta = \beta^\circ$) und es gibt daher ein $d \in B \cap f^{-1}(Y \setminus \overline{S}) \cap D$. Also $d \in B \cap D \subseteq f^{-1}(S) \cap D$ und somit $d \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(Y \setminus \overline{S}) = \emptyset$ - ein Widerspruch.

13.5.12 Lemma

Seien (X, Γ) und (Y, Σ) überdeckungsuniforme Räume, $\overline{D} = X$, $f : D \to Y$ uniform und (Y, Σ) vollständig. Dann gibt es eine uniforme Abbildung $g : X \to Y$ mit $g|D = f$. ist (Y, Σ)

zudem den T_0-Raum, so ist die Abbildung eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $x \in X$. Dann hat $(\dot{x} \cap \tau) \cup \{D\}$ die eSE und somit ist $\varphi := \{P \subseteq D \mid \exists O \in \dot{x} \cap \tau$ mit $O \cap D \subseteq P\}$ ein Cauchy-Filter auf D. Dann ist aber $f(\varphi)$ ein Cauchy-Filter auf Y (dies bestätigt eine leichte Rechnung) und somit existiert ein $y_x \in Y$ mit $f(\varphi) \to y_x$. Lemma 3.3.7 erledigt dann den Rest.

13.5.13 Lemma

Seien (X,Γ) und (Y,Σ) überdeckungsuniforme vollständige Räume, die außerdem T_0 sind. Ist $D \subseteq X$ dicht in X und $E \subseteq Y$ dicht in Y und ist $f : D \to E$ eine bijektive Abbildung, für die sowohl f, als auch f^{-1} uniform sind, dann ist die nach dem vorigen Lemma existierende eindeutige Fortsetzung g eine Bijektion und sowohl g, als auch g^{-1} sind uniform.

Beweis: Aus dem vorigen Lemma folgt, dass es eine uniforme Abbildung $g : X \to Y$ mit $g|D = f$ und eine uniforme Abbildung $g' : Y \to X$ mit $g'|E = f^{-1}$ gibt. Dann ist $g' \circ g : X \to X$ ebenfalls uniform und es gilt $g' \circ g|D = f^{-1} \circ f = id_D$. Die Abbildung $g' \circ g$ ist also die eindeutige (!) uniforme Fortsetzung von id_D. Nun ist aber auch id_X eine solche uniforme Fortsetzung. Es gilt also $g' \circ g = id_D$. Analog bekommen wir $g \circ g' = id_Y$. Insgesamt sehen wir $g' = g^{-1}$.

13.5.14 Definition

minimale Cauchy-Filter Ein Cauchy-Filter φ in einem überdeckungsuniformen Raum (X,Γ) heißt minimal (bzgl. Inklusion), wenn es keinen Cauchy-Filter $\varphi' \neq \varphi$ mit $\varphi' \subseteq \varphi$ gibt.

13.5.15 Lemma

Sei (X,Γ) ein überdeckungsuniformer Raum und φ ein Filter auf X. Dann ist φ genau dann ein minimaler Cauchy-Filter, wenn $\forall P \in \varphi \exists P' \in \varphi \exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(P') \subseteq P$. Insbesondere erhalten wir, dass jeder Cauchy-Filter φ genau einen minimalen Cauchy-Filter φ_0 enthält, nämlich den von der Subbasis $\mathscr{S} := \{\gamma(P) \mid \gamma \in \Gamma \text{ und } P \in \varphi\}$ erzeugten. Tatsächlich ist $\mathscr{S}$ sogar eine Basis, wie der Beweis zeigen wird.

Beweis: Sei φ ein Cauchy-Filter. Wir setzen $\mathscr{S} := \{\gamma(P) \mid \gamma \in \Gamma \text{ und } P \in \varphi\}$ und $\mathscr{B} := \{\bigcap \mathscr{S}' \mid \mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S} \text{ und } \mathscr{S}' \text{ endlich }\}$. Setzen wir $\varphi_0 := \{P \subseteq X \mid \exists B \in \mathscr{B} \text{ mit } B \subseteq P\}$, so ist φ_0 offensichtlich ein Filter auf X mit Subbasis $\mathscr{S}$ und Basis $\mathscr{B}$. Zeigen wir, dass φ_0 ein Cauchy-Filter ist.

Sei dazu $\gamma \in \Gamma$. Es gibt dann ein $\gamma' \in \Gamma$ mit $\gamma' <^{**} \gamma$. Dann gibt es ein $P' \in \varphi \cap \gamma'$, zu dem es auch ein $g \in \gamma$ gibt mit $\gamma'(P') \subseteq g$. Damit haben wir dann $g \in \varphi_0 \cap \gamma$ und φ_0 ist als Cauchy-Filter erkannt. Zeigen wir noch die Minimalität:

Sei dazu φ' ein Cauchy-Filter mit $\varphi' \subseteq \varphi$. Für $\gamma \in \Gamma$ und $P \in \varphi$ existiert dann ein $P' \in \varphi' \cap \gamma$ und somit $P' \subseteq \gamma(P)$, also $\gamma(p) \in \varphi'$. Insgesamt also $\mathscr{S} \subseteq \varphi'$ und damit $\varphi_0 \subseteq \varphi'$.

Zeigen wir, dass $\mathscr{S}$ tatsächlich bereits eine Basis für φ_0 ist. Ist nämlich $P \in \varphi_0$, so gibt es $P_1, \ldots, P_n \in \varphi$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ mit $\gamma_1(P_1) \cap \ldots \cap \gamma_n(P_n) \subseteq P$. Wählen wir nun ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \gamma_k$, für $k = 1, \ldots, n$ und bilden $P' := P_1 \cap \ldots \cap P_n \in \varphi$, so gilt offensichtlich $\gamma(P') \subseteq P$.

Jeder Cauchy-Filter φ enthält also diesen eindeutig bestimmten minimalen Cauchy-Filter φ_0 mit Basis $\mathscr{S}$. Ist φ also selber bereits minimal, so gilt $\varphi = \varphi_0$ und φ erfüllt somit das Kriterium.

Erfüllt andererseits ein Cauchy-Filter φ das Kriterium, so ist er offensichtlich ein minimaler Cauchy-Filter (denn besagtes $\mathscr{S}$ ist nun eine Basis von φ und somit $\varphi = \varphi_0$).

13.5.16 Lemma

Ist (X, Γ) ein überdeckungsuniformer Raum, so ist $\varphi_x := \{P \subseteq X \mid \exists U \in \dot{x} \cap \tau_\Gamma \text{ mit } U \subseteq P\}$ für jedes $x \in X$ ein minimaler Cauchy-Filter (Umgebungsfilter sind also minimale Cauchy-Filter).

Beweis: Ist $P \in \varphi_x$, so gibt es ein $U \in \dot{x} \cap \tau_\Gamma$ mit $U \subseteq P$. Es gibt dann ein $\gamma' \in \Gamma$ mit $\gamma'(x) \subseteq U$. Dann gibt es aber auch ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma <^{*} \gamma'$. Setzen wir $P' := \gamma(x) \in \varphi_x$, so folgt $\gamma(P') \subseteq \gamma'(x) \subseteq U \subseteq P$. Aus dem vorigen Lemma folgt also, dass φ_x ein Cauchy-Filter ist.

13.5.17 Lemma

Ist φ ein minimaler Cauchy-Filter in dem überdeckungsuniformen Raum (X, Γ), so ist $\{P^\circ \mid P \in \varphi\}$ eine Basis für φ.

Beweis: Sei $P \in \varphi$. Dann gibt es ein $P' \in \varphi$ und ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(P') \subseteq P$. Da $P' \subseteq \gamma(P') \in \tau_\Gamma$, folgt sofort $P' \subseteq P^\circ$.

13.5.18 Lemma

Sei (X, Γ) ein überdeckungsuniformer Raum und D eine in X dichte Teilmenge. Ist jeder Cauchy-Filter φ auf X, mit $D \in \varphi$ konvergent, so konvergiert jeder Cauchy-Filter, der Raum ist also vollständig.

Beweis: Sei φ ein Cauchy-Filter. Wir betrachten den (eindeutig bestimmten) minimalen Cauchy-Filter $\varphi_0 \subseteq \varphi$. Da $\{P^\circ \mid P \in \varphi_0\}$ eine Basis von φ_0 ist, folgt, dass $\varphi_0 \cup \{D\}$ die endliche Schnitt Eigenschaft hat. Demzufolge ist $\{P \subseteq X \mid \exists P' \in \varphi_0 \cup \{D\} \text{ mit } P' \subseteq P\}$ ein Cauchy-Filter, der gegen ein $x \in X$ konvergiert. Insbesondere also $x \in \bigcap_{P \in \varphi_0} \overline{P}$. Aus Lemma 13.5.5 folgt, dass φ_0 gegen x konvergiert. Da $\varphi_0 \subseteq \varphi$, konvergiert also auch φ gegen x.

13.5.19 Bemerkung

Sei (X,Γ) ein überdeckungsuniformer Raum und ψ bzw. ϕ zwei Cauchy-Filter. Dann ist äquivalent:

1) Für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt $\gamma \cap \psi \cap \phi \neq \emptyset$.

2) $\psi \cap \phi$ ist ein Cauchy-Filter.

3) Es gibt ein minimalen Cauchy-Filter φ mit $\varphi \subseteq \psi \cap \phi$.

Durch $\psi \sim \phi \;\Leftrightarrow\; \psi \cap \phi$ ist ein Cauchy-Filter, bekommen wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Cauchy-Filter in (X,Γ).

Damit kommen wir nun zum Hauptsatz dieses Abschnitts. Die Menge aller minimalen Cauchy-Filter in (X,Γ) bezeichnen wir mit $\tilde{X}_\Gamma$. Im Folgenden werden wir nun $\tilde{X}_\Gamma$ eine Überdeckungsuniformität zuordnen, so dass dieser ein vollständiger Raum wird.

13.5.20 Satz über die Vervollständigung überdeckungsuniformer Räume

Sei (X,Γ) ein überdeckungsuniformer Raum. Für jedes $A \subseteq X$ setzen wir $\tilde{A} := \{\varphi \in \tilde{X}_\Gamma \mid A \in \varphi\}$ und für jedes $\gamma \in \Gamma$ setzen wir $\tilde{\gamma} := \{\tilde{g} \mid g \in \gamma\}$. Dann gilt:

a) $\tilde{\gamma}$ ist für jedes $\gamma \in \Gamma$ eine Überdeckung von $\tilde{X}_\Gamma$.

b) Ist $\gamma <^{**} \gamma'$, so ist $\tilde{\gamma} <^{**} \tilde{\gamma}'$.

c) Ist $\gamma < \gamma'$, so ist $\tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}'$.

d) $\tilde{\Gamma} := \{\alpha \mid \alpha \text{ ist Überdeckung von } \tilde{X}_\Gamma \text{ und } \exists\, \gamma \in \Gamma \text{ mit } \tilde{\gamma} < \alpha\}$ ist eine Überdeckungsuniformität auf $\tilde{X}_\Gamma$ und $(\tilde{X}_\Gamma, \tau_{\tilde{\Gamma}})$ ist ein T_0-Raum.

e) $h : X \to \tilde{X}_\Gamma$ definiert durch $h(x) := \varphi_x$, wobei $\varphi_x := \{P \subseteq X \mid \exists U \in \dot{x} \cap \tau_\Gamma \text{ mit } U \subseteq P\}$, ist wohldefiniert und es gilt $\overline{h(X)} = \tilde{X}_\Gamma$.

f) $h : X \to \tilde{X}_\Gamma$ ist uniform. Ist $\gamma = \gamma^\circ$, für ein $\gamma \in \Gamma$, so folgt $h^{-1}(\tilde{g}) = g$ und $h(g) = \tilde{g} \cap h(X)$, für jedes $g \in \gamma$.

g) Γ ist die Initialüberdeckungsuniformität auf X bzgl. $\tilde{X}_\Gamma$ mit der Abbildung $h : X \to \tilde{X}_\Gamma$.

h) $(\tilde{X}_\Gamma, \tilde{\Gamma})$ ist vollständig.

i) Sei (Y,Σ) ein weiterer vollständiger überdeckungsuniformer Raum, der T_0 ist und $f : X \to Y$ eine uniforme Abbildung. Dann gibt es genau eine uniforme Abbildung $g : \tilde{X}_\Gamma \to Y$ mit $g \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{X}_\Gamma \arrow[d, "\exists!g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Der Raum $(\tilde{X}_\Gamma, \tilde{\Gamma})$ ist durch diese universelle Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

j) Ist (X,τ_Γ) bereits ein T_0-Raum, so ist die Abbildung $h: X \to h(X)$ ein Isomorphismus. Gibt es einen überdeckungsuniformen Raum $(\tilde{Y},\tilde{\Sigma})$ mit einer Abbildung $h': X \to \tilde{Y}$, so dass $h': X \to h'(X)$ ein Isomorphismus ist, $\overline{h'(X)} = \tilde{Y}$ gilt und $(\tilde{Y},\tau_{\tilde{\Sigma}})$ ebenfalls ein T_0-raum ist, so sind $(\tilde{X}_\Gamma,\tilde{\Gamma})$ und $(\tilde{Y},\tilde{\Sigma})$ isomorph.

Beweis: a) Sei φ ein minimaler Cauchy-Filter auf X und $\gamma \in \Gamma$. Dann gibt es ein $g \in \gamma \cap \varphi$. Also offensichtlich $\varphi \in \tilde{g}$ und somit $\tilde{X}_\Gamma \subseteq \bigcup \tilde{\gamma}$.

b) Sei $\tilde{g} \in \tilde{\gamma}$. Dann gibt es ein $g' \in \gamma'$ mit $\gamma(g) \subseteq g'$. Zeigen wir, dass dann $\tilde{\gamma}(\tilde{g}) \subseteq \tilde{g'}$ gilt. Sei $\varphi \in \tilde{\gamma}(\tilde{g})$. Dann gibt es ein $h \in \gamma$ mit $\varphi \in \tilde{h}$ und $\tilde{h} \cap \tilde{g} \neq \emptyset$. Man überlegt sich leicht, dass dann auch $h \cap g \neq \emptyset$ gilt. Also $h \subseteq \gamma(g) \subseteq g'$. Dann ist $g' \in \varphi$ (denn $h \in \varphi$) und somit $\varphi \in \tilde{g'}$.

c) Sei $\tilde{g} \in \tilde{\gamma}$. Es gibt ein $g' \in \gamma'$ mit $g \subseteq g'$. Ist $\varphi \in \tilde{g}$, so ist $g \in \varphi$, also auch $g' \in \varphi$ und damit $\varphi \in \tilde{g'}$.

d) Das es sich um eine Überdeckungsuniformität handelt, folgt unmittelbar aus a), b) und c). Ist $\phi \neq \psi$, so o.B.d.A. $\exists P \in \phi \setminus \psi$. Dann gibt es ein $P' \in \phi$ und ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(P') \subseteq P$ (Lemma 13.5.15). Es folgt $\tilde{\gamma}(\tilde{P'}) \subseteq \tilde{P}$, also $\phi \in \tilde{P}^\circ$ und $\psi \notin \tilde{P}$. Der Raum ist also T_0.

e) Sei O offen in $\tilde{X}_\Gamma$ und $\phi \in O$. Es gibt dann ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\tilde{\gamma}(\phi) \subseteq O$. O.B.d.A. Sei $\gamma = \gamma^\circ$ (siehe dazu Lemma 13.3.4). Sei nun $x \in g \in \phi \cap \gamma$, dann ist $g \in \dot{x} \cap \tau_\Gamma \subseteq \varphi_x$ und somit $\varphi_x \in \tilde{g}$. Offensichtlich gilt $\tilde{g} \subseteq \tilde{\gamma}(\phi)$.

f) Sei $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, für ein $\gamma \in \Gamma$ gegeben. Ohne Einschränkung können wir voraussetzen, dass$\gamma = \gamma^\circ$ gilt. Für jedes $g \in \gamma$ folgt $h^{-1}(\tilde{g}) = \{x \in X \mid g \in h(x)\} = \{x \in X \mid \exists U \in \dot{x} \cap \tau_\Gamma \text{ mit } U \subseteq g\} = g$. Die Abbildung h ist also uniform.

Sei $\gamma = \gamma^\circ$ und $g \in \gamma$. Ist $\varphi_x \in h(g)$, so ist $\varphi_x = h(x)$, für $x \in g$. Also $g \in \varphi_x$ und damit $\varphi_x \in \tilde{g} \cap h(X)$. Ist andererseits $\varphi_x \in \tilde{g} \cap h(X)$, so ist $\varphi_x = h(x') = \varphi_{x'}$, für ein $x' \in X$. Es folgt $g \in \varphi_{x'}$, also $x' \in g$ und damit $\varphi_x = h(x') \in h(g)$.

g) Folgt unmittelbar aus f).

h) Sei Φ ein Cauchy-Filter auf $\tilde{X}_\Gamma$. Wir können annehmen, dass $D := h(X) \in \Phi$ (Lemma 13.5.18). Dann ist $\Phi_D := \{P \cap D \mid P \in \Phi\}$ ein Cauchy-Filter auf D. Nun ist $\Phi_D = h(\phi)$, wobei $\phi := \{P \subseteq X \mid \exists P' \in \Phi_D \text{ mit } h^{-1}(P') \subseteq P\}$. Aus Lemma 13.5.9 und g) folgt, dass ϕ ein Cauchy-Filter auf X ist. Sei dann $\varphi \subseteq \phi$ ein minimaler Cauchy-Filter. Wir zeigen nun $\varphi \in \bigcap_{P \in \Phi} \overline{P}$. Mit Lemma 13.5.5 folgt dann, dass Φ gegen $\varphi \in \tilde{X}_\Gamma$ konvergiert.

Sei also $O \in \dot{\varphi} \cap \tau_{\tilde{\Gamma}}$ und $P \in \Phi$. Es gibt dann ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma = \gamma^\circ$ und $\tilde{\gamma}(\varphi) \subseteq O$ (siehe Lemma 13.3.4). Es genügt also zu zeigen, dass $\tilde{\gamma}(\varphi) \cap P \neq \emptyset$ ist.

Sei $g \in \gamma \cap \varphi$. Dann ist $g \in \phi$, es gibt also ein $P' \in \Phi_D$ mit $h^{-1}(P') \subseteq g$. Setzen wir $P'' := P \cap P' \in \Phi_D$, so folgt $h^{-1}(P'') \subseteq g$. Sei nun $x \in h^{-1}(P'')$. Dann ist $h(x) \in P'' \cap \tilde{g}$, insbesondere also $\tilde{g} \cap P \neq \emptyset$ und somit $\emptyset \neq \tilde{g} \cap P \subseteq \tilde{\gamma}(\varphi) \cap P$.

i) Seien (Y,Σ) und $f: X \to Y$ entsprechend der Voraussetzung gewählt. Wir definieren die Abbildung $g': h(X) \to Y$ durch $g(h(x)) := f(x)$.

Zeigen wir die Wohldefiniertheit. Sei $h(x) = h(x')$, also $\varphi := \varphi_x = \varphi_{x'}$. Dann konvergiert φ offensichtlich gegen x und x'. Der Bildfilter $f(\varphi)$ ist auch ein Cauchy-Filter und somit sowohl gegen $f(x)$, als auch gegen $f(x')$ konvergent. Da (Y,τ_Σ) ein T_2-Raum ist, folgt $f(x) = f(x')$.

Zeigen wir nun, dass g' uniform ist. $\tilde{\Gamma}_D$ bezeichne hierfür die Teilraumüberdeckungsuniformität auf $D = h(X)$. Sei $\sigma \in \Sigma$. Dann gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma = \gamma^\circ$ und $\gamma < \{f^{-1}(s) \mid s \in \sigma\}$.

Nun ist $\{g'^{-1}(s) \mid s \in \sigma\} = \{h(f^{-1}(s)) \mid s \in \sigma\}$. Da $\{h(g) \mid g \in \gamma\} = \{\tilde{g} \cap h(X) \mid g \in \gamma\} \in \tilde{\Gamma}_D$, folgt also auch $\{g'^{-1}(s) \mid s \in \sigma\} \in \tilde{\Gamma}_D$. Damit ist gezeigt, dass $g' : D \to Y$ uniform ist.

Wir definieren dann $g : \tilde{X}_\Gamma \to Y$ als die nach Lemma 13.5.12 eindeutig bestimmte uniforme Fortsetzung von g' auf ganz $\tilde{X}_\Gamma$.

Zur Eindeutigkeit: Sei auch $(\tilde{Y}, \tilde{\sigma})$ ein überdeckungsuniformer Raum, der zusammen mit einer Abbildung $h' : X \to \tilde{Y}$ die universelle Eigenschaft hat. Dann gibt es uniforme Abbildungen $g : \tilde{Y} \to \tilde{X}_\Gamma$ und $g' : \tilde{X}_\gamma \to \tilde{Y}$ mit $g \circ h' = h$ und $g' \circ h = h'$. Es folgt $(g \circ g') \circ h = g \circ h' = h$ und $id_{\tilde{X}_\gamma} \circ h = h$. Die Eindeutigkeit erzwingt also $g \circ g' = id_{\tilde{X}_\Gamma}$ (man male sich entsprechende Diagramme). Analog bekommt man $g' \circ g = id_{\tilde{Y}}$. Damit sind $(\tilde{X}_\Gamma, \tilde{\gamma})$ und $(\tilde{Y}, \tilde{\Sigma})$ isomorph.

j) Das $h : X \to h(X)$ bijektiv ist, ist offensichtlich. Uniform ist $h : X \to h(X)$ sowieso und das auch $h^{-1} : h(X) \to X$ uniform ist, folgt unmittelbar aus f). Die Isomorphie von $(\tilde{X}_\Gamma, \tilde{\Gamma})$ und $(\tilde{Y}, \tilde{\Sigma})$ folgt dann aus Lemma 13.5.13.

13.6 Funktionenräume (2): Gleichmäßige Konvergenz

Wir geben hier eine Fortsetzung des Kapitels über Funktionenräume, wobei der Bildraum diesmal ein uniformer (genauer: überdeckungsuniformer) Raum ist. Beispielsweise erhalten wir in diesem Fall eine interessante Beschreibung der kompakt-offenen Topologie.

13.6.1 Definition

Überdeckungsuniforme Struktur der gleichmäßigen Konvergenz Sei X eine Menge und (Y, Σ) ein überdeckungsuniformer Raum. Wir betrachten die Menge $F := Y^X$ (Menge aller Abbildungen $f : X \to Y$) und bilden für $f \in F$ und $\sigma \in \Sigma$ folgende Mengensysteme: $\sigma_f := \{g \in F \mid \forall x \in X \text{ ist } g(x) \in \sigma(f(x))\}$, dann $\sigma_F := \{\sigma_f \mid f \in F\}$ und anschließend $\Sigma_F := \{\alpha \mid \alpha$ ist eine Überdeckung von F und $\exists \sigma \in \Sigma$ mit $\sigma_F < \alpha\}$. Das Paar (F, Σ_F) ist dann ebenfalls ein überdeckungsuniformer Raum.

Beweis: Offensichtlich ist jedes σ_F eine Überdeckung von F und $\sigma' < \sigma$ impliziert $\sigma'_F < \sigma_F$. Zu zeigen bleibt nur noch, dass $\sigma' <^* \sigma$ auch $\sigma'_F <^* \sigma_F$ impliziert. Sei also $\sigma' <^* \sigma$ und $f \in F$. Wir zeigen dazu einfach $\sigma'_F(f) \subseteq \sigma_f$. Dazu sei $g \in \sigma'_F(f)$. Es gibt dann ein $h \in F$ mit $g \in \sigma'_h$ und $f \in \sigma'_h$. Sei nun $x \in X$ beliebig. Dann gibt es ein $S \in \sigma$ mit $g(x), f(x) \in \sigma'(h(x)) \subseteq S$, also $g(x) \in \sigma(f(x))$. Da x beliebig gewählt war, folgt $g \in \sigma_f$.

Wir nennen Σ_F die überdeckungsuniforme Struktur der gleichmäßigen Konvergenz auf F.

13.6.2 Lemma

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und (Y, Σ) ein überdeckungsuniformer Raum. Wir betrachten dann (F, Σ_F) entsprechend Definition 13.6.1

a) Sei ϕ ein Filter auf X. Dann ist $A := \{f \in F \mid f(\phi) \text{ ist ein Cauchy-Filter}\}$ in F abgeschlossen.

b) Die Menge $c(X,Y) := \{f \in F \mid f : (X, \tau) \to (Y, \tau_\Sigma) \text{ ist stetig}\}$ ist in F abgeschlossen.

Beweis: a) Sei $f \in \overline{A}$. Zu zeigen ist dann, dass $f(\phi)$ ein Cauchy-Filter ist. Sei dazu $\sigma \in \Sigma$. Es gibt dann $\sigma', \sigma'' \in \Sigma$ mit $\sigma'' <^* \sigma' <^{**} \sigma$. Sei $g \in \sigma''_F(f) \cap A$. Es gibt dann ein $S' \in g(\phi) \cap \sigma'$. Sei dann $P' \in \phi$ mit $g(P') \subseteq S'$.

Dann gibt es ein $h \in F$ mit $g \in \sigma''_h$ und $f \in \sigma''_h$, also $g(x), f(x) \in \sigma''(h(x))$ für alle $x \in X$. Für $x \in P$ gilt aber auch $g(x) \in S'$ und es gibt $S^{(1)}_x, S^{(2)}_x \in \sigma''$ mit $g(x), h(x) \in S^{(1)}_x$ und $g(x), f(X) \in S^{(2)}_x$. Es folgt $S^{(1)}_x \subseteq \sigma''(S')$ und damit $S^{(2)}_x \subseteq \sigma''(\sigma''(S')) \subseteq \sigma'(S')$. Nun gibt es aber auch ein $S \in \sigma$ mit $\sigma'(S') \subseteq S$. Es folgt $f(P) \subseteq S$, also $S \in f(\phi) \cap \sigma$. Damit sehen wir, dass $f(\phi)$ ein Cauchy-Filter ist, also $f \in A$.

b) Wir setzen für diesen Beweis $A_x := \{f \in F \mid f \text{ ist stetig in } x\}$. Dann ist $\bigcap_{x \in X} A_x = c(X,Y)$ abgeschlossen, wenn wir zeigen, dass jedes A_x abgeschlossen ist. Für jedes $x \in X$ setzen wir $\phi_x := \{P \subseteq X \mid \exists U \in \dot{x} \cap \tau \text{ mit } U \subseteq P\}$ und zeigen $A_x = B_x := \{f \in F \mid f(\phi_x) \text{ ist ein Cauchy-Filter}\}$.

$A_x \subseteq B_x$ ist trivial. Zeigen wir also $B_x \subseteq A_x$. Sei dazu $f \in B_x$ und $O \in f(\dot{x}) \cap \tau_\Sigma$. Es gibt dann ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(f(x)) \subseteq O$. Sei $P \in \phi_x$ und $P' \in f(\phi_x) \cap \sigma$ mit $f(P) \subseteq P' \subseteq \sigma(f(x)) \subseteq O$. Da $f(x) \in f(P)$ folgt somit die Stetigkeit von f an der Stelle x und somit $f \in A_x$.

Jedes B_x ist nach a) abgeschlossen, also ist es auch $c(X,Y)$.

13.6.3 Definition

Überdeckungsuniforme Struktur der α-Konvergenz Sei X eine Menge, $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ und (Y,Σ) ein überdeckungsuniformer Raum. Wir betrachten wieder die Menge $F := Y^X$. Für jedes $A \in \alpha$ betrachten wir $(Y^A, \Sigma^{(A)})$, wobei $\Sigma^{(A)}$ die Überdeckungsuniforme Struktur auf Y^A im Sinne von Definition 13.6.1 ist. Ebenfalls für jedes $A \in \alpha$ definieren wir die Abbildung $H_A : F \to Y^A$ durch $H_A(f) := f|A$. Wir definieren dann $\Sigma^{(\alpha)}_F$ als die initial Überdeckungsuniformität auf F bezüglich $((Y^A, \Sigma^{(A)}), H_A)_{A \in \alpha}$ und nennen $\Sigma^{(\alpha)}_F$ die überdeckungsuniforme Struktur der α-Konvergenz (auf F).

13.6.4 Satz

Sei X eine Menge, $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ und (Y,Σ) ein vollständiger überdeckungsuniformer Raum. Dann ist $(F, \Sigma^{(\alpha)}_F)$ ebenfalls vollständig.

Beweis: Setze $B := \bigcup \alpha$. Sei Φ ein Cauchy-Filter in $(F, \Sigma^{(\alpha)}_F)$. Für jedes $x \in B$ und $P \in \Phi$ bilden wir $P_x := \{f(x) \mid f \in P\}$. und anschließend $\Phi_x := \{R \subseteq Y \mid \exists P \in \Phi \text{ mit } P_x \subseteq R\}$.

Zeigen wir, dass Φ_x ein Cauchy-Filter auf (Y,Σ) ist. Das Φ_x ein Filter ist, folgt jedenfalls schon aus $(P \cap P')_x \subseteq P_x \cap P'_x$.

Sei $\sigma' \in \Sigma$. Dann gibt es ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma <^* \sigma'$. Sei $A \in \alpha$ mit $x \in A$. Es ist $H_A^{-1}(\sigma_{Y^A}) := \{H_A^{-1}(\sigma_f) \mid f \in Y^A\} \in \Sigma^{(\alpha)}_F$, wobei $\sigma_f := \{g \in Y^A \mid \forall a \in A \text{ ist } g(a) \in \sigma(f(a))\}$ und $\sigma_{Y^A} := \{\sigma_f \mid f \in Y^A\}$. Also $H_A^{-1}(\sigma_{Y^A}) \cap \phi \neq \emptyset$. Sei $f \in Y^A$ mit $H_A^{-1}(\sigma_f) \in H_A^{-1}(\sigma_{Y^A}) \cap \phi$.

Es ist $P := H_A^{-1}(\sigma_f) = \{g \in Y^X \mid \forall a \in A \text{ ist } g(a) \in \sigma(f(a))\}$ und somit $P_x \subseteq \sigma(f(x))$. Sei dann $S' \in \sigma'$ mit $\sigma(f(x)) \subseteq S'$. Wir erhalten $S' \in \phi_x \cap \sigma'$.

Φ_x als Cauchy-Filter erkannt, ist somit konvergent gegen ein Element aus Y (man beachte, dass (Y,σ) vollständig ist). Bezeichnen wir dieses mit $h(x)$ und wählen wir für $x \in X \setminus B$ ein beliebiges $h(x)$, so haben wir damit eine Abbildung $h : X \to Y$ definiert.

Zeigen wir nun, dass Φ gegen $h \in F$ konvergiert. Dafür genügt es zu zeigen, dass $\xi''(h) \cap P \neq \emptyset$ ist, für jedes $\xi'' \in \Sigma_F^{(\alpha)}$ und $P \in \Phi$.

Also sei $\xi'' \in \Sigma_F^{(\alpha)}$ und $P \in \Phi$. Nun ist ξ'' von der Form $\xi'' = H_{A_1}^{-1}(\sigma''^{(1)}_{Y^{A_k}}) \wedge \ldots \wedge H_{A_n}^{-1}(\sigma''^{(n)}_{Y^{A_k}})$. Wir wählen dann $\sigma^{(k)}_{Y^{A_k}}, \sigma'^{(k)}_{Y^{A_k}} \in \Sigma$ mit $\sigma^{(k)}_{Y^{A_k}} <^* \sigma'^{(k)}_{Y^{A_k}} <^* \sigma''^{(k)}_{Y^{A_k}}$ und setzen $\xi := H_{A_1}^{-1}(\sigma^{(1)}_{Y^{A_1}}) \wedge \ldots \wedge H_{A_n}^{-1}(\sigma^{(n)}_{Y^{A_n}})$. Wir wählen nun ein $P' \in \Phi \cap \xi$, also $P' = H_{A_1}^{-1}(\sigma^{(1)}_{f_1}) \cap \ldots \cap H_{A_n}^{-1}(\sigma^{(n)}_{f_n})$, für gewisse $\sigma^{(k)}_{f_k} \in \sigma^{(k)}_{Y^{A_k}}$. Folglich ist $P' = \{g \in Y^X \mid \forall k = 1,\ldots,n \forall a \in A_k \text{ ist } g(a) \in \sigma^{(k)}(f_k(a))\}$. Da außerdem $P \cap P' \neq \emptyset$, gibt es ein $f \in P'$.

Sei nun $k \in \{1,\ldots,n\}$ und $x \in A_k$. Es gibt dann ein $P'' \in \Phi$ mit $P_x \subseteq \sigma(h(x))$, wobei $\sigma \in \Sigma$ so gewählt wurde, dass $\sigma < \sigma^{(1)},\ldots,\sigma^{(n)}$ gilt (man beachte, dass Φ_x gegen $h(x)$ konvergiert). Wir setzen nun $P''' := P \cap P' \cap P'' \in \Phi$. Demnach gilt auch $P_x''' \subseteq \sigma(h(x)) \subseteq \sigma^{(k)}(h(x))$. Für $g \in P'''$ folgt somit $g(x) \in \sigma(h(x)) \subseteq \sigma^{(k)}(h(x))$ und $g(x) \in \sigma(f_k(x))$. Da $f \in P'$ folgt auch $f(x) \in \sigma(f_k(x))$. Es gibt nun $S_1', S_2' \in \sigma'^{(k)}$ mit $\sigma(k)(f_k(x)) \subseteq S_1'$ und $\sigma(k)(h(x)) \subseteq S_2'$. Es gibt aber auch ein $S'' \in \sigma''^{(k)}$ mit $\sigma'^{(k)}(g(x)) \subseteq S''$. Also $f(x), g(x), h(x) \in S''$ und somit insbesondere $f(x) \in \sigma''^{(k)}(h(x))$.

Da $k \in \{1,\ldots,n\}$ und $x \in A_k$ beliebig waren, folgt $f \in H_{A_1}^{-1}(\sigma''^{(1)}_h) \cap \ldots \cap H_{A_n}^{-1}(\sigma''^{(n)}_h) \in \xi''$ und somit $f \in \xi''(h)$ und damit schließlich $f \in \xi''(h) \cap P$. Der Beweis ist damit beendet.

13.6.5 Satz

Sei (X,τ) ein topologischer Raum und (Y,Σ) ein überdeckungsuniformer Raum. Gilt $X = \bigcup_{A\in\alpha} A^\circ$ für $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$, so ist $c(X,Y) := \{f \in F \mid f : (X,\tau) \to (Y,\tau_\Sigma) \text{ ist stetig}\}$ in $(F, \tau_{\Sigma_F^{(\alpha)}})$ abgeschlossen.

Beweis: Offensichtlich gilt $f \in c(X,Y) \Leftrightarrow \forall A \in \alpha$ gilt $f|A \in c(A,Y)$. Also $c(X,Y) = \bigcap_{A\in\alpha} H_A^{-1}(c(A,Y))$. Da die Abbildungen $H_A, A \in \alpha$ stetig sind und $c(A,Y)$ in (Y^A, Σ_{Y^A}) abgeschlossen ist (Lemma 13.6.2) ist es der Schnitt dann auch.

13.6.6 Lemma

a) Sei X eine Menge, α eine Überdeckung von X und (Y,Σ) ein T_0-Raum (d.h. (Y,τ_Σ) ist T_0). Dann ist auch $(F, \Sigma_F^{(\alpha)})$ ein T_0-Raum.

Beweis: a) Sei $f \neq g$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Zu diesem x gibt es auch ein $A \in \alpha$ mit $x \in A$. Es gibt aber auch ein $\sigma \in \Sigma$ mit $g(x) \notin \sigma(f(x))$. Sei dann $\sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma' <^* \sigma$. Es folgt $\sigma'(\sigma'(f(x))) \subseteq \sigma(f(x))$, also $g \notin \sigma'_F(f)$. Nun ist aber $\sigma'' := \{H_A^{-1}(\mathscr{S}) \mid \mathscr{S} \in$

$\sigma'_F|A\} \in \Sigma_F^{(\alpha)}$ (hier bezeichnet $\sigma'_F|A$ die Einschränkung von σ'_F auf Y^A). Es folgt $g \notin \sigma''(f)$. Dementsprechend ist $(F, \tau_{\Sigma_F^{(\alpha)}})$ ein T_0-Raum.

13.6.7 Satz

Sei ϕ ein Filter und seien Γ_1 und Γ_2 zwei überdeckungsuniforme Strukturen auf der Menge X. Mit $^-$ sei der Abschluss bzgl. (X, τ_{Γ_2}) bezeichnet und für ein $\gamma \subseteq \mathscr{P}(X)$ bedeutet $\overline{\gamma} := \{\overline{g} \mid g \in \gamma\}$. Es gelte außerdem $\forall \gamma_2 \in \Gamma_2 \exists \gamma_1 \in \Gamma_1$ mit $\gamma_1 < \gamma_2$. Ferner existiere ein $\Gamma' \subseteq \Gamma_1$ mit (1) $\forall \gamma_1 \in \Gamma_1 \exists \gamma' \in \Gamma'$ mit $\gamma' < \gamma_1$ und (2) $\forall \gamma' \in \Gamma' \exists \gamma'' \in \Gamma'$ mit $\overline{\gamma''} < \gamma'$. Dann folgt:

$\phi \to_{\tau_{\Gamma_1}} x$ genau dann, wenn ϕ ein Cauchy-Filter bzgl. (X, Γ_1) ist und $x \in \bigcap_{P \in \phi} \overline{P}$.

Beweis: Gilt $\phi \to_{\tau_{\Gamma_1}} x$, so ist ϕ natürlich ein Cauchy-Filter bzgl. (X, Γ_1). Und aus $\forall \gamma_2 \in \Gamma_2 \exists \gamma_1 \in \Gamma_1$ mit $\gamma_1 < \gamma_2$ folgt natürlich $\tau_{\Gamma_2} \subseteq \tau_{\Gamma_1}$, also $x \in \bigcap_{P \in \phi} \overline{P}$.

Kommen wir zur Rückrichtung: Sei ϕ ein Cauchy-Filter bzgl. (X, Γ_1) und $x \in \bigcap_{P \in \phi} \overline{P}$. Sei dann $O \in \tau_{\Gamma_1} \cap \dot{x}$. Es gibt dann ein $\gamma' \in \Gamma'$ mit $\gamma'(x) \subseteq O$. Sei dann $\gamma \in \Gamma'$ mit $\overline{\gamma} < \gamma'$. Nun gibt es ein $P \in \phi \cap \gamma$. Es folgt $x \in \overline{P}$. Es gibt aber auch ein $P' \in \gamma'$ mit $\overline{P} \subseteq P'$. Also $P \subseteq P' \subseteq \gamma'(x) \subseteq O$ und damit $O \in \phi$. Insgesamt somit $\tau_{\Gamma_1} \cap \dot{x} \subseteq \phi$ (oder was das gleiche ist: $\phi \to_{\tau_{\Gamma_1}} x$).

13.6.8 Satz

Sei (Y, Σ) ein überdeckungsuniformer Raum und ϕ ein Filter auf X. Sei weiter $\alpha \subseteq \mathscr{P}(X)$ und $B := \bigcup \alpha$. Sei dann $\beta := \{\{b\} \mid b \in B\}$. Dann gilt mit $F := Y^X$:

$\phi \to_{\tau_{\Sigma_F^{(\alpha)}}} f$ genau dann, wenn ϕ ein Cauchy-Filter bzgl. $(F, \Sigma_F^{(\alpha)})$ ist und $f \in \bigcap_{P \in \phi} \overline{P}$ wobei der Abschluß in $(F, \tau_{\Sigma_F^{(\beta)}})$ gemeint ist.

Beweis: Für den Beweis bezeichnen wir mit $^-$ den Abschluß bzgl. $(F, \tau_{\Sigma_F^{(\beta)}})$ und auch bzgl. (Y, τ_σ) (aus dem Zusammenhang geht dann eindeutig hervor was gemeint ist). Schauen wir uns nochmal die allgemeine Konstruktion der initial Überdeckungsuniformität an, so sehen wir, dass ein typisches Element einer Überdeckung aus $\Sigma_F^{(\alpha)}$ die Form $H_{A_1}^{-1}(\sigma_{f_1}^{(1)}) \cap \ldots \cap H_{A_n}^{-1}(\sigma_{f_n}^{(n)})$ hat, wobei $\sigma_{f_k}^{(k)} := \{g \in Y^{A_k} \mid \forall a \in A_k \text{ ist } g(a) \in \sigma^{(k)}(f_k(a))\}$. Für $k = 1, \ldots, n$ sei $\xi^{(k)} \in \Sigma$ mit $\xi^{(k)} <^* \sigma^{(k)}$ gewählt. Mit Hilfe der Projektionen $h_a : Y^X \to Y$ definiert durch $h(g) := g(a)$ bekommen wir (man beachte, dass die von $\Sigma_F^{(\beta)}$ induzierte Topologie gerade die Initialtopologie auf Y^X bzgl. (Y, τ_Σ) und $(h_a)_{a \in B}$ ist und die h_a bzgl. $\tau_{\Sigma_F^{(\beta)}}$, τ_Σ stetig sind):

$\overline{\bigcap_{k=1}^n H_{A_k}^{-1}(\xi_{f_k}^{(k)})} \subseteq \bigcap_{k=1}^n \bigcap_{a \in A_k} \overline{h_a^{-1}(\xi^{(k)}(f_k(a)))} \subseteq \bigcap_{k=1}^n \bigcap_{a \in A_k} h_a^{-1}(\overline{\xi^{(k)}(f_k(a))}) \subseteq$
$\bigcap_{k=1}^n \bigcap_{a \in A_k} h_a^{-1}(\sigma^{(k)}(f_k(a))) \subseteq \bigcap_{k=1}^n H_{A_k}^{-1}(\sigma_{f_k}^{(k)})$, denn $\overline{\xi^{(k)}(f_k(a))} \subseteq \xi^{(k)}(\xi^{(k)}(f_k(a))) \subseteq$

$\sigma(f(a))$. Die Voraussetzungen von Satz 13.6.7 sind demnach erfüllt (mit $\Gamma_1 = \Gamma' = \Sigma_F^{(\alpha)}$ und $\Gamma_2 = \Sigma_F^{(\beta)}$; noch nicht gezeigt, aber fast offensichtlich: $\forall \gamma_2 \in \Gamma_2 \, \exists \gamma_1 \in \Gamma_1$ mit $\gamma_1 < \gamma_2$).

13.6.9 Satz

Sei (X,τ) ein topolgischer und (Y,Σ) ein überdeckungsuniformer Raum. Mit κ bezeichnen wir die kompakten Teilmengen von X. Dann stimmt auf $c(X,Y) := \{f \in F \mid f \text{ ist stetig}\} \subseteq F := Y^X$ die kompakt-offene Topologie mit der von $\tau_{\Sigma_F^\kappa}$ auf $c(X,Y)$ induzierten Topologie überein.

Beweis: Die von $\tau_{\Sigma_F^\kappa}$ auf $c(X,Y)$ induzierte Topologie bezeichnen wir mit τ'. Zeigen wir zuerst, dass jedes $S(K,U)$ offen bzgl. τ' ist (für in X kompaktes K und in (Y,τ_Σ) offenes U). Sei $f \in S(K,U)$. Dann ist $f(K)$ kompakt (denn f ist stetig) und $f(K) \subseteq U$. Zu jedem $y \in f(K)$ gibt es somit ein $\sigma_y \in \Sigma$ mit $\sigma_y(y) \subseteq U$. Für jedes $y \in f(K)$ sei $\sigma'_y <^* \sigma_y$. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1,...,x_n \in K$ mit $f(K) \subseteq \sigma'_{f(x_1)}(f(x_1)) \cup ... \cup \sigma'_{f(x_n)}(f(x_n))$ (zur präzisen Rechtfertigung braucht man Lemma 13.3.4). Sei $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma <^* \sigma'_{f(x_1)},...,\sigma'_{f(x_1)}$. Dann gilt $c(X,Y) \cap H_K^{-1}(\sigma_F)(f) \subseteq S(K,U)$. Zeigen wir dies. Sei $g \in c(X,Y) \cap H_K^{-1}(\sigma_F)(f)$. Es gibt dann ein $h \in F$ mit $g,f \in H_k^{-1}(\sigma_h)$. Sei $x \in K$. Dann folgt $f(x), g(x) \in \sigma(h(x))$. Es gibt ein $k \in \{1,...,n\}$ mit $f(x) \in \sigma'_{f(x_k)}(f(x_k))$. Es gibt aber auch ein $S' \in \sigma'_{f(x_k)}$ mit $\sigma(h(x)) \subseteq S'$ und ein $S'' \in \sigma'_{f(x_k)}$ mit $f(x_k), f(x) \in S''$. Es folgt $g(x) \in \sigma'_{f(x_k)}(\sigma'_{f(x_k)}(f(x_k))) \subseteq \sigma_{f(x_k)}(f(x_k)) \subseteq U$. Also $g(K) \subseteq U$ und somit $g \in S(K,U)$.

Zeigen wir nun, dass $\{S(K,U) \mid K: \text{kompakt}, U: \text{offen}\}$ eine Subbasis für τ' ist. Seien $K_1,...,K_n \in \kappa$. Sei $f \in c(X,Y)$ und O offen mit $f \in O$. Es gibt dann ein $\xi := H_{K_1}^{-1}(\sigma_F^{(1)}) \wedge ... \wedge H_{K_n}^{-1}(\sigma_F^{(n)}) \in \Sigma_F^{(\kappa)}$ mit $c(X,Y) \cap \xi(f) \subseteq O$. Gesucht sind nun $K'_1,...,K'_m \in \kappa$ und $U_1,...,U_m$ offen in Y mit $f \in \bigcap_{k=1}^m S(K'_k,U_k) \subseteq \xi(f)$. Seien $\sigma, \sigma'' \in \Sigma$ gewählt mit $\sigma'' = \{T^\circ \mid T \in \sigma''\}$ und $\sigma <^{**} \sigma'' < \sigma^{(1)},...,\sigma^{(n)}$. Es gibt dann $S_1^{(k)},...,S_{n_k}^{(k)} \in \sigma$ mit $f(K_k) \subseteq S_1^{(k)} \cup ... \cup S_{n_k}^{(k)}$, $k = 1,...,n$. Es gibt weiter $T_l^{(k)} \in \sigma''$ mit $\overline{S_l^{(k)}} \subseteq \sigma(S_l^{(k)}) \subseteq T_l^{(k)}$, $k = 1,...,n$, $l = 1,...,n_k$. Setze dann $K_l^{(k)} := f^{-1}(\overline{S_l^{(k)}}) \cap K_k$. Es folgt $f \in P := \bigcap_{k=1}^n \bigcap_{l=1}^{n_k} S(K_l^{(k)}, T_l^{(k)}) \subseteq \xi(f)$. Um dies einzusehen sei $g \in P$ (das $f \in P$ ist klar). Dann ist $g \in S := H_{K_1}^{-1}(\sigma_f^{(1)}) \cap ... \cap H_{K_n}^{-1}(\sigma_f^{(n)}) \in \xi$, denn $x \in K_k$ impliziert $x \in K_l^{(k)}$ für gewisses $1 \leq l \leq n_k$. Also $g(x) \in T_l^{(k)}$. Aber auch $f(x) \in T_l^{(k)}$ und außerdem gibt es ein $Q \in \sigma^{(k)}$ mit $T_l^{(k)} \subseteq Q$. Also $g(x) \in \sigma^{(k)}(f(x))$ und somit $g \in H_{K_k}^{-1}(\sigma_f^{(n)})$. Da auch $f \in S$ folgt $g \in \xi(f)$.

13.6.10 Korollar

Ist Y ein $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-Raum, so ist $c(X,Y)$, versehen mit der kompakt-offenen Topologie, auch ein $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

Beweis: Als $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist Y uniformisierbar. Aus Satz 13.6.9 folgt, dass dann auch $c(X,Y)$ uniformisierbar ist. Also ist $c(X,Y)$ ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

14 Einführung in die Nichtstandard Topologie

”I would like to point out a fact that was not explicitly mentioned by Professor Robinson, but seems quite important to me; namely that non-standard analysis frequently simplifies substantially the proofs, not only of elementary theorems, but also of deep results. This is true, e.g., also for the proof of the existence of invariant subspaces for compact operators, disregarding the improvement of the result; and it is true in an even higher degree in other cases. This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of non-standard analysis, namely the idea that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future.”

Kurt Gödel

In diesem Kapitel kommt es zu einigen Schwierigkeiten mit der Notation im Zusammenhang mit Abbildungen. Gewöhnlich verstehen wir für eine Abbildung $f : X \to Y$ unter $f(A)$ das Bild von A unter f, also $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$. Normalerweise führte dies nie zu Mißverständen, da für $A \subseteq X$ in der Regel nicht auch $A \in X$ gilt. In Zusammenhang mit z.B. Ordinalzahlen, oder den unten eingefürten Superstrukturen, stehen (und standen) wir vor der Situation, dass aber genau solche Effekte auftreten, dass also Abbildungen auf Mengen definiert sind $f : X \to Y$, für die es Teilmengen $A \subseteq X$ gibt mit $A \in X$. Der Leser ist also aufgefordert sich in jedem Fall zu überlegen, wie der entsprechende Ausdruck zu verstehen ist. In der Regel sollte es aber keine großen Schwierigkeiten geben.

14.1 Superstrukturen

Wie kann man das mengentheoretische Universum strukturieren? Eine Antwort gibt dieser Abschnitt.

14.1.1 Hierarchie der Mengen

Rekursiv für alle Ordinalzahlen definieren wir

$$V_0 := \emptyset\,,\ \ V_{\alpha+1} := \mathscr{P}(V_\alpha) \ \text{ und } \ V_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \ \text{ falls } \ \alpha \ \text{ eine Limesordinalzahl ist.}$$

Anschließend setzen wir

$$V := \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha.$$

V ist das mengentheoretische Universum (wie wir sogleich beweisen werden) und $(V_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ nennen wir die Hierarchie der Mengen.

14.1.2 Lemma

Für jede Ordinalzahl ist V_α eine transitive Menge. Und wenn $\alpha < \alpha'$, dann $V_\alpha \subseteq V_{\alpha'}$.

Beweis: Beweis durch Induktion. V_0, V_1 sind offensichtlich transitiv. Sei die Aussage für alle $\beta < \alpha$ bewiesen und $x \in V_\alpha$. Wenn α eine Limesordinalzahl ist, dann ist $x \in V_\beta$ für $\beta < \alpha$. Also $x \subseteq V_\beta \subseteq V_\alpha$. Falls α eine Nachfolgerordinalzahl ist, also $\alpha = \alpha' + 1$, dann ist $x \in V_\alpha = \mathscr{P}(V_{\alpha'})$, also $x \subseteq V_{\alpha'}$. Aus $y \in x$ folgt also $y \in V_{\alpha'}$ und damit (Induktion) $y \subseteq V_{\alpha'}$, also $y \in \mathscr{P}(V_{\alpha'})$. Insgesamt somit $x \subseteq \mathscr{P}(V_{\alpha'})$.

Die zweite Aussage beweist man mittels Induktion unter Verwendung der Transitivität.

14.1.3 Definition: Transitive Hülle

Sei x eine Menge. Setze $x_0 := x$, $x_{n+1} := \bigcup x_n$ und $TC(x) := \bigcup_{n<\omega} x_n$. Wir nennen $TC(x)$ die transitive Hülle von x. Offenbar ist $TC(x)$ transitiv und es gilt $x \subseteq TC(x)$ (der Beweis bleibt als einfache Aufgabe dem Leser überlassen)

14.1.4 Lemma

Jede nichtleere Klasse $\mathscr{C}$ hat ein $\in$ minimales Element (d.h. ein $z \in \mathscr{C}$ mit $z \cap \mathscr{C} = \emptyset$).

Beweis: Sei $z \in \mathscr{C}$ beliebig. Falls $z \cap \mathscr{C} = \emptyset$, dann sind wir fertig. Andernfalls sei $x = TC(z) \cap \mathscr{C}$. Da $x \neq \emptyset$ folgt aus dem Regularitäts-Axiom (Axiome der Mengenlehre), dass es ein $y \in x$ gibt, mit $y \cap x = \emptyset$. Dann folgt aber auch $y \cap \mathscr{C} = \emptyset$. Andernfalls sei $u \in y \cap \mathscr{C}$, dann aber $u \in TC(z)$, denn dieses ist transitiv. Es folgt $u \in y \cap x$ - Widerspruch.

14.1.5 Satz

Für jede Menge x gibt es ein $\alpha \in Ord$ mit $x \in V_\alpha$.

Beweis: Sei $\mathscr{C}$ die Klasse aller Mengen, welche in keinem V_α sind. Wenn $\mathscr{C} \neq \emptyset$, dann gibt es ein $\in$-minimales Element $x \in \mathscr{C}$. Für $z \in x$ gibt es aber ein $\alpha_z \in Ord$ mit $z \in V_{\alpha_z}$. Nun ist $\alpha := \bigcup_{z \in x} \alpha_z$ eine Ordinalzahl, mit $\alpha_z \leq \alpha$, also $V_{\alpha_z} \subseteq V_\alpha$ für $z \in x$. Somit haben wir $x \subseteq V_\alpha$ und damit $x \in V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$ - ein Widerspruch.

14.1.6 Definition: Rang

Sei x eine Menge. Dann heißt $R(x) := \inf\{\alpha \in Ord \mid x \in V_{\alpha+1}\}$ der Rang von x.

14.1.7 Lemma

Sei $x \in y$. Dann ist $R(x) < R(y)$.

Beweis: Annahme $R(y) \leq R(x)$. Dann folgt $y \in V_{R(y)+1} \subseteq V_{R(x)+1} = \mathscr{P}(V_{R(x)})$, also $x \in V_{R(x)}$. Falls $R(x)$ eine Limesordinalzahl ist, so $x \in V_{\beta+1}$ mit $\beta < R(x)$. Und wenn $R(x) = \beta + 1$, so $R(x) \leq \beta < R(x)$. Beides ist ein Widerspruch.

14.1.8 Definition: Superstruktur

Sei x eine Menge. Setze $V_0(x) := x$, $V_{n+1}(x) := V_n(x) \cup \mathscr{P}(V_n(x))$ und abschließend $V(x) := \bigcup_{n<\omega} V_n(x)$. Wir nennen $V(x)$ die Superstruktur über x.

14.1.9 Bemerkung

Alle sinnvollen und in endlich vielen Schritten über x konstruierbaren Objekte sind in $V(x)$ enthalten. Da wir über die Natur von x aber nichts wissen könnte es Elemente $y \in x$ geben, mit $y \cap V(x) \neq \emptyset$. Im weiteren Verlauf wird sich heraustellen, dass dies ein ungewünschter Effekt ist. Man kann diesen auf verschiedene Arten vermeiden. eine Möglichkeit ist es sich x als eine Menge von Urelementen vorzustellen, welche überhaupt keine $\in$-Beziehungen besitzen. Im Rahmen des axiomatischen Aufbaus der Mengenlehre führt dies zu Ungereimtheiten. Wir werden daher einen anderen Weg beschreiten um dieses Problem zu umgehen. Mit Hilfe des Rang-Begriffes werden wir uns nämlich Mengen von beliebiger Kardinalität verschaffen, welche dann die gewünschten Eigenschaften haben.

14.1.10 Definition: Basismenge

Wir nennen eine Menge X Basismenge, falls $\emptyset \notin X$ und $x \cap V(X) = \emptyset$ für alle $x \in X$ ist.

14.1.11 Lemma

Zu jeder (unendlichen) Menge A gibt es eine Basismenge X mit $|A| = |X|$.

Beweis: Sei $\alpha \geq \omega$ eine Kardinalzahl. Wähle eine Menge X mit $|A| = |X|$ und $\forall x, y(y \in x \in X) \Rightarrow R(y) = \alpha$. Das dies möglich ist, sollte klar sein. Dieses X ist dann bereits die gewünschte Basismenge. Wir zeigen zuerst: Die Elemente von $V_n(X)$ ($n < \omega$) haben Rang β, mit $\beta < n$ oder $\alpha < \beta \leq \alpha + n + 1$. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n.

$n = 0$, $z \in V_0(X) = X \Rightarrow \forall y \in z : R(y) = \alpha$, also $\alpha < R(z)$. Außerdem $z \subseteq V_{\alpha+1}$ und somit $z \in V_{\alpha+2}$. Wir bekommen $\alpha < R(z) = \alpha + 1$.

$n \to n+1$: Sei $z \in V_{n+1}(X) = V_n(X) \cup \mathscr{P}(V_n(X))$. Im ersten Fall ist $z \in V_n(X)$. Dann $R(z) < n < n+1$ oder $\alpha < R(z) \leq \alpha + n + 1 < \alpha + (n+1) + 1$. Im zweiten Fall ist $z \subseteq V_n(X)$. Das heißt $\forall y \in z$: $R(y) \leq \alpha + n + 1$, also $z \subseteq V_{\alpha+n+2}$ bzw. $z \in V_{\alpha+(n+1)+2}$ und somit $R(z) \leq \alpha + (n+1)+1$. Nun unterscheiden wir noch zwei weitere Fälle. 1. Fall $\exists y \in z$ mit $\alpha < R(y)$, dann auch $\alpha < R(z)$ oder 2. Fall $\forall y \in z$ gilt $R(y) < n$. Dann ist $z \subseteq V_n$, also $z \in V_{n+1}$ und damit $R(z) \leq n < n+1$. Der Beweis, dass die Elemente von $V_n(X)$ ($n < \omega$) einen Rang β, mit $\beta < n$ oder $\alpha < \beta \leq \alpha + n + 1$ haben, ist beendet.

Nehmen wir mal an wir haben ein $x \in X$ mit $x \cap V(X) \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $n < \omega$ und ein $z \in x \cap V_n(X)$. Nun, dann gilt aber $R(z) < n$ oder $\alpha < R(z) \leq \alpha + n + 1$. Beides steht aber im Widerspruch zur Wahl von X.

Wir kommen nun zu den grundlegenden Eigenschaften von $V(X)$. Dabei sei von nun an vorausgesetzt, dass es sich um eine Basismenge X handelt.

14.1.12 Lemma

$V_{n+1}(X) = X \cup \mathscr{P}(V_n(X))$ und $V_{n+1}(X) \setminus X = \mathscr{P}(V_n(X))$ für jede natürliche Zahl n.

Beweis: Durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. $n \to n+1$: $V_{n+2}(X) = V_{n+1}(X) \cup \mathscr{P}(V_{n+1}(X)) = X \cup \mathscr{P}(V_n(X)) \cup \mathscr{P}(V_{n+1})$. offensichtlich gilt $\mathscr{P}(V_n(X)) \subseteq \mathscr{P}(V_{n+1})$, woraus dann $V_{n+2}(X) = X \cup \mathscr{P}(V_{n+1})$ folgt. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der Eigenschaft von X eine Basismenge zu sein.

14.1.13 Lemma

Sei X eine Basismenge, $a \in V(X)$ und $a \in b \in V_n(X)$. Dann ist $n > 0$ und $a \in V_{n-1}(X)$.

Beweis: Übung.

14.1.14 Lemma

1) $x_1, \ldots, x_m \in V_n(X) \Rightarrow \{x_1, \ldots, x_m\} \in V_{n+1}(X) \setminus X$
2) $x_1, \ldots, x_m \in V_n(X) \Rightarrow (x_1, \ldots, x_m) \in V_{n+2(m-1)}(X) \setminus X$
3) $u \in V_n(X) \setminus X$ und $v \subseteq u$, dann $v \in V_n(X) \setminus X$.
4) $u, v \in V_n(X) \setminus X \Rightarrow u \times v \in V_{n+3}(X) \setminus X$
5) $u \in V_n(X) \setminus X \Rightarrow \mathscr{P}(u) \in V_n(X) \setminus X$

Beweis: Die Beweise sind alle einfach (Induktion, Basismenge, ...).

14.2 Ultrafilter und Ultraprodukte

Um später wichtige Eigenschaften unserer Nichtstandard Universen beweisen zu können, brauchen wir die Existenz gewisser Ultrafilter.

14.2.1 Definition: α-vollständig

Sei α eine unendliche Kardinalzahl. Ein Filter φ heißt α-vollständig, wenn für jede Familie $(X_\gamma)_{\gamma<\beta}$ von Elementen aus φ auch $\bigcap_{\gamma<\beta} X_\gamma \in \varphi$ ist, für jedes $\beta < \alpha$.

14.2.2 Lemma (äquivalente Formulierung von α-vollständig)

Ein Ultrafilter φ über einer Menge I ist genau dann α-vollständig, wenn für jede Zerlegung $\{X_\gamma \mid \gamma \in \beta\}$ von I in β Teile ($\beta < \alpha$) gilt, dass genau ein X_γ zu φ gehört.

Beweis: Nehmen wir zuerst an φ ist α-vollständig, und sei $\{X_\gamma \mid \gamma \in \beta \text{ und } X_\gamma \subseteq I\}$ eine Zerlegung von I in $\beta < \alpha$ Teile. Es kann also höchsten ein X_γ zu φ gehören. Falls überhaupt kein X_γ zu φ gehört, dann ist für jedes $\gamma \in \beta$ aber $I \setminus X_\gamma \in \varphi$, also aufgrund der α-Vollständigkeit dann auch $\emptyset = I \setminus \bigcup_{\gamma\in\beta} X_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\beta}(I \setminus X_\gamma) \in \varphi$. Offensichtlich ist dies ein Widerspruch.

Für die Rückrichtung nehmen wir mal an $\{X_\gamma \mid \gamma \in \beta\}$ ist eine Teilmenge von φ, von weniger als α Elementen. Wir definieren nun eine Funktion $f : I \to \beta \cup \{\beta\}$ durch

$$f(i) = \begin{cases} \beta & \text{falls } i \in \bigcap_{\gamma\in\beta} X_\gamma \\ \delta := \inf\{\delta' < \beta \mid i \notin X_{\delta'}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun ist $\{f^{-1}(\eta) \mid \eta \in \beta \cup \{\beta\}\}$ eine Zerlegung von I in weniger als α-Teile. Also gibt es ein $\eta \in \beta \cup \{\beta\}$ mit $f^{-1}(\eta) \in \varphi$. Man rechnet aber leicht nach, dass $f^{-1}(\eta) \cap X_\eta = \emptyset$ ist für $\eta \in \beta$. Also muss $f^{-1}(\beta) = \bigcap_{\gamma\in\beta} X_\gamma \in \varphi$ sein. Somit ist φ als α-vollständig erkannt.

14.2.3 Definition: α-gute Filter

Sei α eine Kardinalzahl und X eine Menge, dann bezeichnen wir mit $\mathscr{P}_\alpha(X) := \{A \subseteq X \mid |A| < \alpha\}$. Da wir die kleinste unendliche Kardinalzahl mit ω bezeichnen, schreibt sich also die Menge aller endlichen Teilmengen von X als $\mathscr{P}_\omega(X)$. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **monoton** (bzw. **antimonoton**) wenn $x \subseteq y \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$ (bzw. $x \subseteq y \Rightarrow f(y) \subseteq f(x)$). Weiterhin nennen wir f **additiv** (bzw. **antiadditiv**) wenn $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$ (bzw. $f(x \cup y) = f(x) \cap f(y)$) für alle $x, y \in X$ gilt. Für zwei Funktionen $f, g : X \to Y$ schreiben wir $f \leq g$, wenn $f(x) \subseteq g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Nun zur Haupt-Definition: Sei α wieder eine unendliche Kardinalzahl. Ein Ultrafilter φ auf einer Menge X heißt **α-gut**, wenn es für jede Kardinalzahl $\beta < \alpha$ und jede antimonotone Funktion $f : \mathscr{P}_\omega(\beta) \to \varphi$ eine antiadditive Funktion $g : \mathscr{P}_\omega(\beta) :\to \varphi$ gibt, mit $g \leq f$. Wenn φ ein α-guter Ultrafilter ist, und $\beta \leq \alpha$ eine ebenfalls unendliche Kardinalzahl ist, dann ist φ offensichtlich auch β-gut. Ein Filter heißt **abzählbar unvollständig**, wenn der Schnitt von abzählbar unendlich vielen Elementen leer ist.

Das Ziel, im Folgenden, ist der Beweis des fundamentalen Satzes:

Sei I eine nichtleere Menge von Kardinalität α (unendlich). Dann gibt es einen α^+-guten abzählbar unvollständigen Ultrafilter φ auf I. (Hier ist $\alpha^+ :=$ Nachfolgerkardinalzahl von α)

14.2.4 Lemma

Sei I eine (nichtleere) Menge. Dann ist äquivalent:

1. φ ist ein α^+-guter Ultrafilter auf I.
2. Zu jeder antimonotonen Funktion $f : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \varphi$ gibt es eine antiadditive Funktion $g : \mathscr{P}_\omega(\alpha) :\to \varphi$, mit $g \leq f$.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. folgt direkt aus der Definition.

2. $\Rightarrow$ 1.: Sei $\beta \leq \alpha$ und $f : \mathscr{P}_\omega(\beta) \to \varphi$ antimonoton. Definiere $f' : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \varphi$ durch $f'(x) := f(x \cap \beta)$ für $x \in \mathscr{P}_\omega(\alpha)$. Dann gibt es eine antiadditive Funktion $g' : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \varphi$ mit $g \leq f$. Die Einschränkung $g := g' | \mathscr{P}_\omega(\beta)$ ist das gesuchte g.

14.2.5 Lemma

Sei α eine Kardinalzahl und $(X_\beta)_{\beta<\alpha}$ eine Familie von Mengen mit $|X_\beta| = \alpha$ für alle $\beta < \alpha$. Dann $\exists$ eine Familie $(Y_\beta)_{\beta<\alpha}$ mit $Y_\beta \subseteq X_\alpha$, $Y_\beta \cap Y_{\beta'} = 0$ für $\beta \neq \beta'$ und $|Y_\beta| = \alpha$.

Beweis: Sei $h : \alpha \to \alpha \times \alpha$ bijektiv. Wir definieren uns

$$\mathscr{F} := \{f : \gamma \to \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \mid f : \text{ist injektiv}, \gamma \leq \alpha \text{ und } \forall \xi \in \gamma : (h(\xi) = (\xi', \xi'') \Rightarrow f(\xi) \in X_{\xi'})\}.$$

Unser $\mathscr{F}$ wird durch Inklusion partiell geordnet. Und wenn $(f_k)_{k\in K}$ eine Kette aus $\mathscr{F}$ ist, ist sofort klar, dass $\bigcup_{k\in K} f_k \in \mathscr{F}$ eine obere Schranke ist. Das Zornsche Lemma liefert uns also ein maximales $g \in \mathscr{F}$. Angenommen $\xi := dom(g) < \alpha$. Sei $h(\xi) = (\xi', \xi'')$, dann gibt es ein $x \in X_{\xi'} \setminus rg(g)$. Setze dann $g' := g \cup \{(\xi, x)\}$. Dann haben wir $g \subsetneq g' \in \mathscr{F}$, was ein Widerspruch ist. Also gilt $dom(g) = \alpha$. Man kann nun sofort nachrechnen, dass $(Y_\delta)_{\delta\in\alpha}$ mit $Y_\delta := \{g(\xi) \mid \xi \in h^{-1}(\{\delta\} \times \alpha)\}$ die gesuchte Familie ist.

14.2.6 Definition: Konsistent

Sei $\Pi \neq \emptyset$ eine Menge von Partitionen von α derart, dass jede Partition genau α Elemente hat. Sei Φ ein nicht trivialer Filter auf α. Das Paar (Π, Φ) heißt **konsistent** wenn für jedes $X \in \Phi$ und $X_1, ..., X_n$ - jedes X_i aus einer anderen Partition $P_i \in \Pi$ - gilt $X \cap X_1 \cap ... \cap X_n \neq 0$.

14.2.7 Lemma

Sei α eine unendliche Kardinalzahl.

1. Sei Φ ein uniformer Filter erzeugt von einer Teilmenge $\varphi \subseteq \Phi$ von Kardinalität $\leq \alpha$. Dann gibt es eine Menge Π von Partitionen von α, mit $|\Pi| = 2^\alpha$ und (Π, Φ) ist konsistent.

2. Wenn (Π, Φ) konsistent, Π unendlich und $J \subseteq \alpha$ ist, dann ist entweder $(\Pi, [\Phi \cup \{J\}])$ oder $(\Pi', [\Phi \cup \{\alpha \setminus J\}])$ konsistent, für ein koendliches $\Pi' \subseteq \Pi$. Hier bezeichnet $[\Phi \cup \{J\}]$ den von $\Phi \cup \{J\}$ erzeugten Filter (analog mit $[\Phi \cup \{\alpha \setminus J\}]$).

3. Angenommen (Π, Φ) ist konsistent, $p : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \Phi$ ist antimonoton und $P \in \Pi$. Dann gibt es eine Erweiterung Φ' von Φ und eine antiadditive Abbildung $q : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \Phi'$ derart, dass $q \leq p$ und $(\Pi \setminus \{P\}, \Phi')$ konsistent ist.

Beweis: 1. Sei $(J_\beta)_{\beta<\alpha}$ eine Auflistung aller endlichen Schnitte von Elementen aus φ. Da $|J_\beta| = \alpha$ für jedes $\beta < \alpha$ gilt (Φ ist ein uniformer Filter), gibt es gemäß 14.2.5 eine Familie $(I_\beta)_{\beta<\alpha}$ mit $|I_\beta| = \alpha$, $I_\beta \subseteq J_\beta$ und $I_\beta \cap I_{\beta'} = 0$ für alle $\beta \neq \beta'$.

Wir definieren $B := \{(s,r) \mid s \in \mathscr{P}_\omega(\alpha) \text{ und } r : \mathscr{P}(s) \to \alpha\}$. Es gilt dann $|B| = \alpha$. Sei $((s_\xi, r_\xi))_{\xi<\alpha}$ eine Aufzählung der Elemente aus B. Wir können diese Aufzählung nun so wählen, dass $B = \{(s_\xi, r_\xi) \mid \xi \in I_\beta\}$, für alle $\beta < \alpha$ gilt (eine Aufzählung mit Wiederholungen; dies geht, da die I_β disjunkt und gleichmächtig zu α sind). Für jedes $J \subseteq \alpha$ definieren wir

$$f_J : \alpha \to \alpha \quad \text{durch} \quad f_J(\xi) := \begin{cases} r_\xi(J \cap s_\xi) & \text{falls} \quad \xi \in \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta \\ f_J(\xi) = 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es gibt dann 2^α viele solcher Funktionen. (Beweis: $J_1 \neq J_2$ impliziert o.B.d.A. $\exists x \in J_1 \setminus J_2$. Sei dann $s := \{x\}$ und $r := \{(s,0),(0,1)\}$. Dann ist $(s,r) \in B$, also $(s,r) = (s_\xi, r_\xi)$ für ein $\xi \in I_\beta$. Dann ist $f_{J_1}(\xi) = 0$ und $f_{J_2}(\xi) = 1$.)

Seien nun $\beta, \gamma_1, \ldots \gamma_n \in \alpha$ und $J_1, \ldots, J_n$ verschiedene Teilmengen von α. Wir zeigen, dass es ein $\xi \in I_\beta$ gibt, mit $f_{J_i}(\xi) = \gamma_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Dazu wähle $x_{ij} \in J_i \setminus J_j$, wann immer das geht und setze $s := \{x_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n\}$. Also ist s eine endliche Teilmenge von α mit $s \cap J_i \neq s \cap J_j$ für $i \neq j$. Nun sei $r : \mathscr{P}(s) \to \alpha$ eine Abbildung mit $r(J_i \cap s) = \gamma_i$, für $1 \leq i \leq n$. Nun gibt es ein $\xi \in I_\beta$ mit $(s,r) = (s_\xi, r_\xi)$. Also $f_{J_i}(\xi) = r_\xi(J_i \cap s_\xi) = r(J_i \cap s) = \gamma_i$. Jedes f_J ist also insbesondere surjektiv. Setze

$$\Pi := \{\{f_J^{-1}(\gamma) \mid \gamma < \alpha\} \mid J \subseteq \alpha\}.$$

(Π, Φ) ist dann das gesuchte konsistente Paar. (Beweis: Sei $X \in \Phi$ und $X_1, \ldots, X_n$ - jedes X_i aus einer anderen Partition $P_i \in \Pi$ - gewählt, also $X_i = f_{J_i}^{-1}(\gamma_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$. Sei $\beta < \alpha$ mit $I_\beta \subseteq X$. Es gibt nun ein $\xi \in I_\beta$ mit $f_{J_i}(\xi) = \gamma_i$, also $\xi \in X \cap X_1 \cap \ldots \cap X_n$.)

2. Annahme $(\Pi, [F \cup \{J\}])$ ist nicht konsistent. Dann gibt es $X \in \Phi$, $X_i \in P_i \in \Pi$ - die P_i sind untereinander verschieden - mit $J \cap X \cap X_1 \cap \ldots \cap X_n = 0$ $(*)$. Sei dann $\Pi' := \Pi \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$

und $Y_j \in Q_j \in \Pi'$ für verschiedene $Q_j \in \Pi'$ und $1 \le j \le m$. Dann folgt

$$X \cap X_1 \cap \ldots \cap X_n \cap Y_1 \cap \ldots \cap Y_m \neq 0.$$

Mit $(*)$ ergibt dies $(\alpha \setminus J) \cap X \cap Y_1 \cap \ldots \cap Y_m \neq 0$. Also ist $(\Pi', [\Phi \cup \{\alpha \setminus J\}])$ konsistent.

3. Sei $(X_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine Aufzählung (ohne Wiederholung) von P und $(t_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine ebensolche von $\mathscr{P}_\omega(\alpha)$. Für jedes $\delta < \alpha$ definieren wir eine Funktion

$$q_\delta : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \mathscr{P}(\alpha) \;\text{ durch }\; q_\delta(s) := \begin{cases} p(t_\delta) \cap X_\delta & \text{falls } s \subseteq t_\delta \\ 0 & \text{falls } s \not\subseteq t_\delta \end{cases}.$$

Es gilt dann

$$0 \neq q_\delta(s) \subseteq p(t_\delta) \;\text{ falls }\; s \subseteq t_\delta \;\text{ und }\; q_\delta(s_1 \cup s_2) = q_\delta(s_1) \cap q_\delta(s_2)$$

denn $s_1 \cup s_2 \subseteq t_\delta \Leftrightarrow s_1 \subseteq t_\delta$ und $s_2 \subseteq t_\delta$. Nun definieren wir

$$q : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \mathscr{P}(\alpha) \;\text{ durch }\; q(s) := \bigcup_{\delta<\alpha} q_\delta(s) \;\; (\text{für alle } s \in \mathscr{P}_\omega(\alpha)).$$

Da p antimonoton ist folgt $q \le p$. Außerdem $q_\delta(s) \cap q_{\delta'}(s) = 0$ für $\delta \neq \delta'$. Folglich ist

$$q(s_1) \cap q(s_2) = (\bigcup_{\delta<\alpha} q_\delta(s_1)) \cap (\bigcup_{\delta<\alpha} q_\delta(s_2)) = \bigcup_{(\delta_1,\delta_2)\in\alpha^2} q_{\delta_1}(s_1) \cap q_{\delta_2}(s_2)$$

$$= \bigcup_{\delta<\alpha} q_\delta(s_1) \cap q_\delta(s_2) = \bigcup_{\delta<\alpha} q_\delta(s_1 \cup s_2) = q(s_1 \cup s_2).$$

Also ist q antiadditiv. Sei noch $\Phi' := [\Phi \cup q(\mathscr{P}_\omega(\alpha))]$, dann ist nämlich $(\Pi \setminus \{P\}, \Phi')$ unser gesuchtes konsistentes Paar. Und das sieht man so: Sei $X \in \Phi, s \in \mathscr{P}_\omega(\alpha), X_i \in P_i \in \Pi \setminus \{P\}$ mit $1 \le i \le n$ und verschiedenen P_i. Nun ist $s = t_\delta$ für ein $\delta < \alpha$ und wir haben $q(s) \supseteq q_\delta(s) = p(t_\delta) \cap X_\delta$ und $X \cap p(t_\delta) \cap X_\delta \cap X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq 0$, also $X \cap q(s) \cap X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq 0$.

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Paragraphen:

14.2.8 Existenzsatz über α-gute Ultrafilter

Sei I eine nichtleere Menge von Kardinalität α (unendlich). Dann gibt es einen α^+-guten, abzählbar unvollständigen Ultrafilter φ auf I (und somit auch einen α-guten).

Beweis: O.B.d.A. ist $I = \alpha$. Sei $(I_n)_{n<\omega}$ eine Folge von Teilmengen von α mit

$$I_{n+1} \subseteq I_n, \; \bigcap_{n<\omega} I_n = 0 \;\text{ und }\; |I_n| = \alpha.$$

(sei $h : \alpha \to \alpha \times \omega$: bijektiv und setze $I_n := h^{-1}(\alpha \times \{k < \omega \mid k \ge n\})$.)

Sei $F_0 = [\{I_n \mid n < \omega\}]$ der von $\{I_n \mid n < \omega\}$ erzeugte uniforme Filter auf α und sei Π_0 eine Menge von Partitionen von α mit $|\Pi| = 2^\alpha$ derart, dass (Π_0, F_0) konsistent ist (14.2.7). Wir konstruieren mittels transfiniter Induktion zwei Folgen $(\Pi_\xi)_{\xi<2^\alpha}$, $(F_\xi)_{\xi<2^\alpha}$ derart, dass

$$\Pi_\xi \subseteq \Pi_\eta \text{ und } F_\xi \supseteq F_\eta \text{ falls } \eta \leq \xi < 2^\alpha,$$

$$|\Pi_\xi| = 2^\alpha,\ |\Pi_\xi \setminus \Pi_{\xi+1}| < \omega,\ \Pi_\lambda = \bigcap_{\eta<\lambda} \Pi_\eta \text{ falls } \lambda \text{ limes Ordinalzahl und}$$

$$(\Pi_\xi, F_\xi) \text{ ist konsistent für jedes } \xi < 2^\alpha.$$

Sei $(p_\xi)_{\xi<2^\alpha}$ eine Aufzählung aller monotonen Funktionen $p_\xi : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \mathscr{P}(\alpha)$ und sei $(J_\xi)_{\xi<2^\alpha}$ eine Aufzählung von $\mathscr{P}(\alpha)$. Angenommen Π_η, F_η seien für $\eta < \xi < 2^\alpha$ bereits konstruiert (alle Induktionsvoraussetzungen erfüllend). Wenn ξ eine Limesordinalzahl ist, dann setzen wir einfach

$$\Pi_\xi := \bigcap_{\eta<\xi} \Pi_\eta \quad \text{und} \quad F_\xi := \bigcup_{\eta<\xi} F_\eta.$$

(Π_ξ, F_ξ) ist dann konsistent und $|\Pi_\xi| = 2^\alpha$.

$$\text{(Beachte } \Pi_\xi = \bigcap_{\eta<\xi} \Pi_\eta = \Pi_0 \setminus (\bigcup_{\eta<\xi} \Pi_\eta \setminus \Pi_{\eta+1}) \text{ und } |\bigcup_{\eta<\xi} \Pi_\eta \setminus \Pi_{\eta+1}| \leq |\xi| < 2^\alpha.)$$

Wenn $\xi = \lambda + 2n + 1$, λ eine Limes-Ordinalzahl, und $n < \omega$, dann sei η kleinstmöglich derart, dass sowohl $J := J_\eta \notin F_{\xi-1}$, als auch $\alpha \setminus J \notin F_{\xi-1}$ ist. Lemma 14.2.7 liefert Π_ξ, F_ξ mit

$$|\Pi_{\xi-1} \setminus \Pi_\xi| < \omega,\ |\Pi_\xi| = 2^\alpha,\ J \in F_\xi \text{ oder } \alpha \setminus J \in F_\xi \text{ und } (\Pi_\xi, f_\xi) \text{ konsistent.}$$

Wenn $\xi = \lambda + 2n + 2$, λ eine Limes-Ordinalzahl und $n < \omega$, dann sei $p := p_\eta : \mathscr{P}(\alpha) \to F_{\xi-1}$ das erste Element aus der Liste $(p_\xi)_{\xi<2^\alpha}$ welches uns noch nicht untergekommen ist. Wieder liefert Lemma 14.2.7 Π_ξ, F_ξ und ein antiadditives $q : \mathscr{P}(\alpha) \to F_\xi$ mit

$$|\Pi_{\xi-1} \setminus \Pi_\xi| \leq 1,\ |\Pi_\xi| = 2^\alpha,\ q \leq p,\ F_\xi = [F_{\xi-1} \cup q(\mathscr{P}(\alpha))] \text{ und } (\Pi_\xi, F_\xi) \text{ ist konsistent.}$$

Wir setzen noch $F := \bigcup_{\xi<2^\alpha} F_\xi$ haben damit unseren abzählbar unvollständigen α^+-guten Ultrafilter auf α.

F ist offensichtlich ein Filter und aus der Konstruktion folgt für jede Teilmenge J, dass entweder J oder $\alpha \setminus J$ in F ist. Und wenn $p : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to F$ eine antimonotone Funktion ist, dann läuft p bereits vollständig in ein F_ξ, und kann somit durch eine antiadditive Funktion verfeinert werden. Denn andernfalls sei $\{s_\xi \mid \xi < \alpha\}$ eine Aufzählung von $\mathscr{P}_\omega(\alpha)$ und wir bekämen ein unbeschränktes $g : \alpha \to 2^\alpha$ definiert durch $g(\xi) := \inf\{\beta < 2^\alpha \mid p(s_\xi) \in F_\xi\}$, was aber ein Widerspruch zu $\alpha < cf(2^\alpha)$ ist (Kofinalität).

14.2.9 Definition: Ultraprodukt

Sei φ ein Filter auf einer (nicht leeren) Menge I; ferner sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von (nicht leeren) Mengen A_i. Dann wird durch $f =_\varphi g :\Leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \varphi$ eine Äquivalenzrelation auf $\prod_{i\in I} A_i$ definiert. Die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen wird mit $\prod_\varphi A_i$

bezeichnet und heißt von nun an reduziertes Produkt, die Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $[f_\varphi]$. Im Falle das φ ein Ultrafilter ist, nennen wir $\prod_\varphi A_i$ das Ultraprodukt der A_i modulo φ. Das I ist indirekt in der Notation enthalten, denn es gilt $I = \bigcup \varphi$. Fall $A_i = A$ für alle $i \in I$ ist, dann nennt man $\prod_\varphi A = \prod_\varphi A_i$ eine Ultrapotenz von A modulo φ.

14.2.10 Lemma

Sei X eine Menge mit $R(X) = \beta$ und φ ein Filter auf I mit $R(I) = \gamma \geq \beta + \omega$. Dann ist $\prod_\varphi X$ eine Basismenge und alle Elemente in $\prod_\varphi X$ haben den gleichen (unendlichen) Rang.

Beweis: Wir zeigen alle Elemente $f \in \prod_{i\in I} X$ haben einen Rang von α, wobei α eine unendliche Ordinalzahl ist und verwenden dann Lemma 14.1.11 (bzw. dessen Beweis). Erster Fall γ ist eine Limesordinalzahl. Behauptung: $R(f) = \gamma$. Beweis dazu: $I \in V_{\gamma+1} = \mathscr{P}(V_\gamma)$, also $I \subseteq V_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} V_\delta$. Für $i \in I$ und $x \in X$ gibt es also ein $\delta < \gamma$ mit $i, x \in V_\delta$. Dann ist $(i,x) = \{\{i\},\{i,x\}\} \in V_{\delta+2}$, also $f \in \mathscr{P}(\bigcup_{\delta<\gamma} V_\delta) = V_{\gamma+1}$. Da auch $i \in \{i\} \in (i, f(i)) \in f$, für $i \in I$ gilt, ist $R(f) = \gamma$.

Zweiter Fall $\gamma = \gamma' + 1$. Dann wieder $I \in V_{\gamma+1}$, also $i \in I$ und $x \in X$ impliziert $i,x \in V_\gamma$ und damit $f \in V_{\gamma+3}$. Man sieht leicht, dass dann bereits $R(f) = \gamma + 2$ gilt. Dann haben aber auch die Elemente von Elementen in $\prod_\varphi X$ alle ein und denselben unendlichen Rang und der Beweis von Lemma 14.1.11 zeigt dann, dass $\prod_\varphi X$ eine Basismenge ist.

14.2.11 Lemma

Sei A eine Menge mit $|A| = \alpha$ und ϕ ein Ultrafilter. Dann ist die natürliche Einbettung $e : A \to \prod_\phi A$ eine surjektive Abbildung g.d.w. ϕ ein α^+-vollständiger Ultrafilter ist.

Beweis: Sei ϕ α^+-vollständig und $f_\phi \in \prod_\phi A$. Dann ist f eine Abbildung von $I (= \bigcup \phi)$ in A. Da $|A| = \alpha$, ist $\{f^{-1}(a) \mid a \in A\}$ eine Partition von I in weniger als α^+ Teile. Also gibt es ein $a \in A$ mit $f^{-1}(a) \in \phi$. Wenn g die konstante Abbildung $g : I \to \{a\}$ bezeichnet, so gilt also $f_\phi = g_\phi = e(a)$. also ist e surjektiv.

Wenn andererseits e surjektiv ist, dann sei X_η, $\eta < \beta$ eine Partition von I in $\beta < \alpha^+$ Teile. Wir müssen zeigen, dass eines der X_η zu ϕ gehört. Da $\beta \leq \alpha = |A|$ ist gibt es eine Injektion $g : \beta \to A$. Für $a \in B := \{g(\eta) \mid \eta \in \beta\}$ setze $X_a := X_{g^{-1}(a)}$ (wir haben einfach die Indizes umbenannt). Sei $f : I \to A$ definiert durch $f(i) = a$ g.d.w. $i \in X_a$ (man beachte das es sich um eine Partition handelt). Nun ist $f_\phi \in \prod_\phi A$, also $\exists a \in A$ mit $f_\phi = e(a)$. Das heißt $f^{-1}(a) \supseteq \{i \in I \mid f(i) = e(a)(i)\} \in \phi$, also auch $X_a = f^{-1}(a) \in \phi$. Daraus folgt dann die α^+-Vollständigkeit.

14.3 Konstruktion von Nichtstandard Universen

"Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die nicht Mathematik studiert haben."
Archimedes

14.3.1 Definition: Nichtstandard Universum (noch unvollstänig, siehe 14.5.1)

Ein **Nichtstandard Universum** ist ein Tripel $(V(X), V(Y), ^*)$ mit folgenden Eigenschaften.

1. X und Y sind unendliche Basismengen.
2. $^* : V(X) \to V(Y)$ ist eine Einbettung der Superstruktur über X in die Superstruktur über Y mit $^*X = Y$.Die Abbildung * heißt Nichtstandard Einbettung.
3. Für jedes unendliche $A \subseteq X$ ist $\{^*a \mid a \in A\}$ eine echte (!) Teilmenge von $^*A$.
4. Das Transfer-Prinzip (für die Formulierung siehe Satz 14.4.12).
5. $(V(X), V(Y), ^*)$ ist polysaturiert (siehe Definition 14.3.5 und Satz 14.3.6).

14.3.2 Bemerkung

Haben wir eine unendliche Menge X, so nehmen wir uns eine Basismenge X' mit $|X| = |X'|$. Wir identifizieren gewissermaßen X' mit X (und all den möglichen Strukturen auf X) und können also o.B.d.A. gleich von Anfang an annehmen, dass X eine Basismenge ist.

14.3.3 Existenz von Nichtstandard Universen (Konstruktion)

Zu jeder unendlichen Basismenge X gibt es ein Nichtstandard Universum $(V(X), V(Y), ^*)$.

Konstruktion: Sei X eine Basismenge und φ ein abzählbar unvollständiger Ultrafilter auf einer Menge I. Sei dann $Y := \prod_\varphi X$ die Ultrapotenz von X. Nach Lemma?? kann man I so wählen, dass auch Y eine Basismenge ist. Für $n < \omega$ sei

$$W_n := \{f \in V(X)^I \mid \{i \in I \mid f(i) \in V_n(X)\} \in \varphi\}.$$

Es gilt dann $W_n \subseteq W_{n+1}$ für alle $n < \omega$. Wir setzen nun noch $W := \bigcup_{n<\omega} W_n$. Für jedes $x \in V(X)$ sei $c(x) : I \to V(X)$ die konstante Abbildung $c(x)(i) = x$ für alle $i \in I$. Dann ist $c(V_n(X)) \subseteq W_n$ für alle $n < \omega$, also $c(V(X)) \subseteq W$ und somit $c : V(X) \to W$ eine Abbildung.

Wir definieren nun induktiv eine Folge $h_n : W_n \to V_n(Y)$ von Abbildungen mit $h_n(f) = f_\varphi$, falls $f \in W_0$ und $h_n(f) = \{h_n(g) \mid g \in W, \{i \in I \mid g(i) \in f(i)\} \in \varphi\}$, falls $f \in W_n \setminus W_{n-1}$ falls $n > 0$. (Bemerkung: Wenn $f \in W_{n+1} \setminus W_n$, $g \in W$, $\{i \in I \mid g(i) \in f(i)\} \in \varphi$, dann $g \in W_n$, denn

$$\varphi \ni \{i \in I \mid f(i) \in V_{n+1}(X)\} \cap \{i \in I \mid g(i) \in f(i)\} \subseteq \{i \in I \mid g(i) \in V_n(X)\}.)$$

Nun zur Konstruktion: Für $n = 0$ setze einfach $h_0(f) := f'_\varphi$, wobei $f' \in X^I$ beliebig mit $\{i \in I \mid f(i) = f'(i)\} \in \varphi$. Induktionsschluss $n \to n+1$: Für $f \in W_n$ setze $h_{n+1}(f) := h_n(f)$ und für $f \in W_{n+1} \setminus W_n$ setze

$$h_{n+1}(f) := \{h_n(g) \mid g \in W, \{i \in I \mid g(i) \in f(i)\} \in \varphi\}.$$

Aus der Bemerkung folgt, dass alles sinnvoll definiert ist und die h_n die gewünschten Eigenschaften haben. Wir setzen nun noch $h := \bigcup_{n<\omega} h_n$ und haben damit ein $h : W \to V(Y)$ mit $h(f) = f_\varphi$, falls $f \in W_0$ und

$$h(f) = \{h(g) \mid g \in W, \{i \in I \mid g(i) \in f(i)\} \in \varphi\}\ , \quad \text{falls} \quad f \in W \setminus W_0.$$

Wir definieren nun $^* : V(X) \to V(Y)$ durch $^* := h \circ c$. Für $a \in X$ gilt $^*a = f_\varphi$, wobei $f : I \to V(X)$ konstant a ist. Aus der Definition von * folgt weiter

$$^*X = \{h(f) \mid f \in W, \{i \in I \mid f(i) \in X\} \in \varphi\} = \{h(f) \mid f \in W_0\} = Y$$

(man beachte $c(X) \in W_1$). Für unendliches $A \subseteq X$ gilt $\prod_\varphi A \subseteq {}^*A$ und nach Lemma 14.2.11 ist die natürliche Einbettung (und das ist hier *) nicht surjektiv (denn φ ist nicht ω-vollständig). Das heißt $\{^*a \mid a \in A\}$ ist eine echte (!) Teilmenge von $^*A$.

Zeigen wir noch schnell die Injektivität: Wir müssen zeigen: $^*A =^* B$ impliziert $A = B$. Dies folgt aus dem Transfer-Prinzip, oder auch leicht direkt: Angenommen $A \neq B$. O.B.d.A. gibt es dann drei mögliche Fälle 1) $A, B \in X$, 2) $A \in X, B \in V(X) \setminus X$ und 3) $A, B \in V(X) \setminus X$. Fall 1) ist trivial. Fall 3) geht so: Es gibt dann o.B.d.A. ein $x \in A \setminus B$. Definiere $g : I \to V(X)$ durch $g(i) = x$ für alle $i \in I$. Also $\{i \in I \mid g(i) \in c(A)(i) \setminus c(B)(i)\} = I \in \varphi$, und somit $h(g) \in h(c(A)) \setminus h(c(B)) =^* A \setminus^* B$ - Widerspruch!

Für Fall 2) erst eine allgemeine Bemerkung: $A \in X$, $B \in V(X) \setminus X$ und $B \neq \emptyset$ impliziert $B \setminus A \neq \emptyset$ (sonst ist $B \subseteq A$ und es folgt letztendlich $A \cap V(X) \neq \emptyset$ - Widerspruch zur Basismengeneigenschaft). Wir können also B als leer voraussetzen (sonst schließen wir wie in Fall 3)). Dann ist aber offensichtlich $^*B = \emptyset$; hingegen $^*A \neq \emptyset$. Wieder ein Widerspruch!

14.3.4 Definition: Interne Elemente

Ein Element aus $A \in V(Y)$ heißt **internes Element**, wenn es ein $B \in V(X) \setminus X$ gibt mit $A \in {}^*B$.

14.3.5 Definition: κ-saturiert

Sei κ eine (unendliche) Kardinalzahl. Das Tripel heißt κ-saturiert bzw. die Einbettung * heißt κ-kompakt, wenn für jede Familie $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $|\Gamma| < \kappa$, interner Elemente mit der eSE (je endlich viele Elemente haben nicht leeren Schnitt $\Rightarrow$ endliche Schnitt Eigenschaft) $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$ ist.

14.3.6 Existenzsatz κ-saturierter Nichtstandard Universen

Sei κ eine (unendliche) Kardinalzahl. Wenn man den Filter φ zusätzlich κ-gut wählt, dann ist $(V(X), V(Y), ^*)$ κ-saturiert.

Beweis: Sei $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $|\Gamma| < \kappa$, eine Familie interner Elemente mit der eSE und $({}^*B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ die zugehörigen $B \in V(X) \setminus X$. Jedes A_γ ist von der Form $h(f_\gamma)$ für ein $f_\gamma \in W$ mit $\{i \in I \mid f_\gamma(i) \in B\} \in \varphi$ (mit der Notation der Konstruktion). Wir unterscheiden nun 2 Fälle: 1) alle f_γ liegen in $W \setminus W_0$ und 2) Es gibt ein $\gamma \in \Gamma$ mit $f_\gamma \in W_0$.

Fall 1) (der schwere Fall): Es genügt ein $g \in W$ zu finden, mit $\{i \in I \mid g(i) \in f_\gamma(i)\} \in \varphi$, für alle $\gamma \in \Gamma$. Denn dann ist $h(g) \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} h(f_\gamma)$. Der Schnitt der A_γ wäre also nicht leer.

φ ist ein abzählbar unvollständiger Ultrafilter, also gibt es eine Folge $I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq ...$ von Mengen aus φ mit $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$. Wir definieren nun eine Abbildung $p : \mathscr{P}_\omega(\Gamma) \to \varphi$ durch $p(\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}) := I_n \cap \{i \in I \mid f_{\gamma_1}(i) \cap ... \cap f_{\gamma_2}(i) \neq \emptyset\}$ wenn $\gamma_1, ..., \gamma_n$ paarweise verschiedene Elemente sind (die Abbildung ist sinnvoll definiert; man beachte die eSE). Nun ist p offensichtlich antimonoton und daher existiert ein antiadditives $q : \mathscr{P}_\omega(\Gamma) \to \varphi$ mit $q \leq p$. Für jedes $i \in I$ definieren wir nun $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ durch $\Gamma_i := \{\gamma \in \Gamma \mid i \in q(\{\gamma\})\}$. Wenn Γ_i die n Elemente $\gamma_1, ..., \gamma_n$ hat, dann $i \in \bigcap_{k=1}^n q(\{\gamma_k\}) = q(\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}) \subseteq p(\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}) \subseteq I_n$. Da $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$, muss Γ_i endlich sein! Sei also $\Gamma_i = \{\gamma_1^i, ..., \gamma_{n_i}^i\}$. Da $i \in q(\Gamma_i) \subseteq p(\Gamma_i)$, folgt $\exists x_i \in f_{\gamma_1^i}(i) \cap ... \cap f_{\gamma_{n_i}^i}(i)$. Setze dann $g(i) := x_i$ für $i \in I$ und es bleibt zu zeigen, dass $\{i \in I \mid g(i) \in f_\gamma(i)\} \in \varphi$ ist, für alle $\gamma \in \Gamma$. Es gilt aber $\{i \in I \mid g(i) \in f_\gamma(i)\} \supseteq q(\{\gamma\}) \in \varphi$!

Nun zu **Fall 2)** Wir zeigen wenn ein f_γ aus W_0 kommt, dann kommen bereits alle f_γ aus W_0. Wenn das gezeigt ist, sind die $h(f_\gamma)$ nämlich Elemente aus $Y = \prod_\varphi X$ und wenn je endlich viele einen nicht leeren Schnitt haben, dann auch $\emptyset \neq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} h(f_\gamma)$ (Äquivalenzklassen!!). Um dies zu zeigen, beweisen wir die Implikation: $f \in W \setminus W_0 \;\Rightarrow\; h(f) \in V(Y) \setminus Y$. Für so ein f folgt dann nämlich auch $h(f) \subseteq V(Y)$. Gäbe es dann ein $f_\gamma \in W_0$, also $h(f_\gamma) \in Y$ und ein $f_{\gamma'} \in W \setminus W_0$, so wäre $h(f_\gamma) \cap h(f_{\gamma'}) = \emptyset$ - Widerspruch (denn Y ist eine Basismenge)!

► **Behauptung:** $\forall n < \omega \forall d \in W_n : \; [(\exists y \in Y$ mit $R(y) \leq R(h(d)))$ oder $R(h(d)) \leq n.]$ Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist $h(d) \in Y$ - fertig. $n \to n+1$: Sei $d \in W_{n+1} \setminus W_n$. Sei o.B.d.A. $h(d) \neq \emptyset$. 1.Fall: $\forall h(d') \in h(d) : R(h(d')) \leq n$, dann offensichtlich $R(h(d)) \leq n+1$. 2.Fall $\exists h(d') \in h(d) \exists y \in Y$ mit $R(y) \leq R(h(d'))$. Dann aber $R(y) \leq R(h(d')) < R(h(d))$. ◄

Sei nun $f \in W_{n+1} \setminus W_n$, $n \geq 0$ und o.B.d.A. sei $\{i \in I \mid f(i) \neq \emptyset\} \in \varphi$ (sonst $h(f) = \emptyset \in V(Y) \setminus Y$). Für jedes $h(g) \in h(f)$ gilt nun $g \in W_n$. Es treten daher zwei Fälle auf: 1.Fall $\forall h(g) \in h(f) : \; R(h(g)) \leq n$, dann offensichtlich $R(h(f)) \leq n+1$. Oder 2.Fall $\exists h(g) \in h(f) \exists y \in Y$ mit $R(y) \leq R(h(g))$, dann offensichtlich $R(y) < R(h(f))$. In jedem Fall stimmt der Rang von $h(f)$ nicht mit dem Rang der Elemente in Y überein, also $h(f) \notin Y$!

14.3.7 Bemerkung und Definition

Wenn wir φ zusätzlich κ-gut wählen, für ein $\kappa > |V(X)|$, dann folgt für jede Familie $(A_t)_{t\in T}$ von höchstens $|V(X)|$-vielen internen Elementen mit der eSE: $\bigcap_{t\in T} A_t \neq \emptyset$. Diese starke Form von saturiert nennt man **polysaturiert** bzw. spricht man einfach von einer kompakten Einbettung * (statt von einer κ-kompakten). Im Grunde genommen interessiert man sich auch nur für den ersten Fall des Beweises. Die Inklusionsbeziehungen zwischen Elementen aus Y (abgesehen von der Basismengeneigenschaft) haben für die Theorie keine Bedeutung.

In der Literatur gibt es in diesem Zusammenhang noch einen weiteren Begriff, nämlich den der starken Einbettung, bzw. spricht man auch von Enlargements (siehe z.B. [29]). Die Einbettung * wird starke Einbettung genannt, wenn $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} {}^*A \neq \emptyset$ für jede Menge $\mathscr{A} \subseteq V(X) \setminus X$, mit der endlichen Schnitt Eigenschaft (eSE) gilt. Für viele Anwendungen reicht die Existenz einer starken Einbettung aus. Doch haben wir auch die Existenz solcher starken Einbettungen bewiesen? Ja, denn wenn $(V(X), V(Y), ^*)$ polysaturiert ist, dann ist die Einbettung * stark!

Für den Beweis wähle man ein $\mathscr{A} \subseteq V(X) \setminus X$, mit der eSE. Nun hat auch $\alpha := \{ ^*A \mid A \in \mathscr{A} \}$ die eSE (Klar!) und α hat höchstens $|V(X)|$-viele Elemente. Außerdem sind alle Elemente aus α intern. Da $(V(X), V(Y), ^*)$ polysaturiert ist, folgt somit $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} {}^*A = \bigcap \alpha \neq \emptyset$.

Bis auf das Transfer-Prinzip habe wir damit den Nachweis der Existenz von Nichtstandard Universen zu jeder Menge X gegeben.

14.4 Modelltheoretische Grundlagen und das Transfer-Prinzip

Wir definieren nun die Sprache in der dann Aussagen über die Superstrukturen formuliert werden. Dazu gehört ein Alphabet $\mathscr{A}$, eine Menge von Symbolen, aus denen dann Symbolketten gebildet werden und gewisse Syntax-Regeln, welche die Art und Weise wie Ketten gebildet werden regeln. Diese Symbole teilen sich in folgende Gruppen auf: Relationssymbole $\mathscr{R}$ (z.B. das 2-stellige Symbol $=$ oder das 2-stellige $\in$), Funktionssymbole $\mathscr{F}$, Konstenten Symbole $\mathscr{K}$, Variablen Symbole $\mathscr{V}$ und die Logischen Symbole $\mathscr{L}$, die da wären $)\,(\,,\,\neg\,\wedge\,\forall$.

Ein Modell für unsere Sprache ist dann ein geordnetes Paar $(\mathscr{U}, \mathbb{F})$, wobei $\mathscr{U}$ eine mögliche Welt, ein Universum in dem sich alles abspielt, letztendlich aber einfach eine Menge ist, und $\mathbb{F} : \mathscr{R} \cup \mathscr{F} \cup \mathscr{K} \to \mathscr{U}$ eine Abbildung ist, welche jedem n-stelligen Relationssymbol P eine n-stellige Relation $R \subseteq \mathscr{U}^n$ in $\mathscr{U}$ zuordnet $1 \leq n$, jedem m-stelligen Funktionssymbol G eine m-stellige Funktion $F : \mathscr{U}^n \to \mathscr{U}$ zuordnet $1 \leq m$, jedem Konstantensymbol c ein Element $u \in \mathscr{U}$ zuordnet. Mit g.d.w. kürzen wir die Formulierung *genau dann wenn* ab.

14.4.1 Definition: Symbolkette

Eine Symbolkette ist einfach eine Abbildung $S : \beta \to \mathscr{A}$, wobei $\beta < \omega$ ist. Wir werden im weiteren Verlauf Zeichenketten aber nicht als Abbildungen definieren, sondern wie man es nicht anders erwarten würde, einfach die Zeichenkette hinschreiben. Hier zwei Beispiele: $(, P(x_1 \wedge ((\forall$ und $(\neg \forall x)(\neg \forall y(\neg y \in x))$, wobei $\in$ das bekannte Relationssymbol (...ist enthalten in...) bezeichnet. Wir wollen nun aus der großen Menge aller möglichen Zeichenketten (oder Symbolketten) die für uns interessanten herausfiltern. Dies geschieht induktiv.

Noch eine kleine Bemerkung: Wir führen (ohne weiter darauf hinzuweisen) intuitiv klare und leichter lesbare Schreibweisen, wie z.B. $P(v_1, ..., v_n)$ statt $Pv_1...v_n$, wobei P ein n-stelliges Relationssymbol bezeichnet, ein.

14.4.2 Definition: Term, Elementarformeln und Formeln

1. Variablensymbole und Konstantensymbole sind Terme.

2. Wenn F ein n-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, ..., t_n$ Terme sind, so ist $F(t_1, ..., t_n)$ ein Term.

Genau die Zeichenketten sind Terme, die sich durch endliches Anwenden von 1. und 2. erzeugen lassen.

1. Wenn $t_1,...,t_n$ Terme sind und P ein n-stelliges Relationssymbol ist, dann ist $P(t_1,...,t_n)$ eine Elementarformel.
2. Elementarformeln sind Formeln.
3. Wenn ϕ und ψ Formeln sind, dann auch $(\neg\phi)$ und $(\phi \wedge \psi)$
4. Wenn v eine Variable und ϕ eine Formel ist, dann ist auch $(\forall v)\phi$ eine Formel.

Genau die Zeichenketten sind Formeln, die sich in endlich vielen Anwendungen von 1. 2. 3. und 4. erzeugen lassen.

14.4.3 Definition: Teilformeln, gebundenes bzw. freies Auftreten einer Variable und Aussage

Wir definieren induktiv die Menge $sub(\phi)$ aller Teilformeln von ϕ.

1. Wenn ϕ eine Elementarformel ist, dann $sub(\phi) = \{\phi\}$.
2. $sub((\neg\phi)) = sub(\phi) \cup \{(\neg\phi)\}$.
3. $sub(\phi \wedge \psi) = sub(\phi) \cup sub(\psi) \cup \{\phi \wedge \psi\}$.
4. $sub((\forall v)\phi) = sub(\phi) \cup \{(\forall v)\phi\}$.

Das Auftreten einer Variablen v an einer Stelle in einer Formel ϕ heißt gebunden, wenn es ein $\psi \in sub(\phi)$ gibt, mit $(\forall v)\psi \in sub(\phi)$. Andernfalls ist sie an dieser Stelle frei. Eine Variable heißt frei in einer Formel, wenn jedes Auftreten der Variable in der Formel frei ist. Entsprechend reden wir dann auch von der Menge der freien Variablen einer Formel. Eine Formel in der jedes Auftreten einer jeden Variable gebunden ist, heißt Satz oder Aussage.

14.4.4 Notation und Bemerkung

Mit $t(v_0,...,v_p)$ bezeichnen wir einen Term, dessen Variablen eine Teilmenge von $\{v_0,...,v_p\}$ bilden. Mit $\phi(v_0,...,v_p)$ bezeichnen wir eine Formel ϕ, deren freie Variablen eine Teilmenge von $\{v_0,...,v_p\}$ bilden.

Unser Ziel ist es nun, bei Wahl einer Sprache (repräsentiert durch ein Alphabet $\mathscr{A}$, entsprechenden Syntax-Regeln und einem Modell $\mathscr{M} = (\mathscr{U}, \mathbb{F})$) für eine Formel $\phi(v_0,...,v_p)$ mit all ihren freien und gebundenen Variablen unter $v_0,...,v_q$, $p \leq q$ und einer Folge $u_0,...,u_p$ aus $\mathscr{U}$ zu entscheiden, ob ϕ bei der Belegung der $v_0,...,v_p$ durch $u_0,...,u_p$ in $\mathscr{M}$ wahr ist oder nicht. Als abkürzende Schreibweise führen wir dafür (auch wenn der Inhalt noch gar nicht definiert ist) folgendes ein: $\mathscr{M} \models \phi[u_0,...,u_p]$ oder eben $\mathscr{M} \not\models \phi[u_0,...,u_p]$.

Wir haben in unserer Sprache bislang noch nicht das Symbol $=$ und $\in$ (als Symbole für gewisse Relationen) eingeführt. Gleichwohl benutzen wir sie nun (wie auch schon früher) wenn wir über unsere Sprache reden (wie z.B. in der Definition der Teilformeln). Wenn wir also von zwei Formeln zum Ausdruck bringen möchten, dass sie gleich sind, so schreiben wir $\phi = \psi$. Das Gleiche gilt für Terme. In unserer neuen Kunstsprache hingegen sind diese Symbole aber einfach nur Symbole, im Rahmen der Syntax Regeln, die erst über die folgenden Definitionen (Erfüllbarkeit,...) mit dem Universum in Verbindung stehen (Semantik).

14.4.5 Definition: Werte von Termen

Wir definieren den Wert eines Termes $t(v_0,...,v_q)$ für eine Folge $x_0,...,x_q \in \mathscr{U}$:

1. Wenn $t = v_i$, dann $t[x_0,...,x_q] = x_i$ $\quad$ ($t[x_0,...,x_q]$ sei der Wert von t für $x_0,...,x_q$)
2. Wenn t ein Konstantensymbol ist, dann $t[x_0,...,x_q] = \mathbb{F}(c)$.
3. Wenn $t = F(t_1,...,t_m)$, wobei F ein m-stelliges Funktionssymbol ist, dann $t[x_0,...,x_q] = \mathbb{F}(F)(t_1[x_0,...,x_q],...,t_m[x_0,...,x_q])$.

14.4.6 Definition: Erfüllbarkeit von Formeln (Vorbereitung)

1. Wenn die Formel $\phi(v_0,...,v_q)$ die Elementarformel $P(t_1,...,t_n)$ ist, mit einem n-stelligen Relationssymbol P und den Termen $t_1(v_0,...,v_q),...,t_n(v_0,...,v_q)$, dann
$$\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_q] \quad \text{g.d.w.} \quad (t_1[x_0,...,x_q],...,t_n[x_0,...,x_q]) \in \mathbb{F}(P)$$
(man beachte, dass Elementarformeln keine gebundenen Variablen enthalten).
2. Sei nun ϕ eine Formel mit all ihren (freien und gebundenen) Variablen unter $v_0,...,v_q$.
   a) Wenn $\phi = (\chi \wedge \psi)$, dann
   $$\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_q] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathscr{M} \models \chi[x_0,...,x_q] \text{ und } \mathscr{M} \models \psi[x_0,...,x_q].$$
   b) Wenn $\phi = \neg\psi$, dann
   $$\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_q] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathscr{M} \not\models \psi[x_0,...,x_q].$$
   c) Wenn $\phi = (\forall v_i)\psi$, mit $i \leq q$, dann
   $$\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_q] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathscr{M} \models \psi[x_0,...x_{i-1},x,x_{i+1},...,x_q] \text{ für jedes } x \in \mathscr{U}$$

Nun möchten wir allerdings definieren wann eine Formel $\phi(v_0,...,v_p)$ durch $x_0,...,x_p$ erfüllt wird. Um die Definition sauber zum Abschluss zu bringen, müssen wir daher noch nachweisen, dass $\mathscr{M} \models \phi(v_0,...,v_p)[x_0,...,x_q]$ nur von $x_0,...,x_p$ abhängt, $p \leq q$.

14.4.7 Lemma

1. Sei $t(v_0,...,v_p)$ ein Term und $x_0,...,x_q$ bzw. $y_0,...,y_r$ zwei Folgen aus $\mathscr{U}$, mit $p \leq q$ und $p \leq r$ und $x_i = y_i$ falls v_i eine Variable von t ist. Dann ist
$$t[x_0,...,x_q] = t[y_0,...,y_r].$$
2. Sei ϕ eine Formel mit all ihren freien und gebundenen Variablen unter $v_0,...,v_p$ und seien $x_0,...,x_q$ bzw. $y_0,...,y_r$ zwei Folgen aus $\mathscr{U}$, mit $p \leq q$ und $p \leq r$ und $x_i = y_i$ falls v_i eine freie Variable von t ist. Dann
$$\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_q] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathscr{M} \models \phi[y_0,...,y_r].$$

Beweis: Der Beweis ist sehr einfach und ein typisches Beispiel eines Induktionsbeweises über die Komplexität der Terme und Formeln.

1. Sei $t(v_0,...,v_n)$ ein Term. Falls $t = v_i$, dann $t[x_0,...,x_q] = x_i = y_i = t[y_0,...,y_r]$.
Falls $t = c$ ist für ein Konstantensymbol c, dann $t[x_0,...,x_q] = \mathbb{F}(c) = t[y_0,...,y_r]$.
Falls $t = F(t_1,...,t_n)$, dann

$$t[x_0,...,x_q] = \mathbb{F}(F)(t_1[x_0,...,x_q],...,t_n[x_0,...,x_q]) = \mathbb{F}(t_1[y_0,...,y_r],...,t_n[y_0,...,y_r]) = t[y_0,...,y_r].$$

2. Sei ϕ eine Elementarformel, also $\phi(v_0,...,v_p) = P(t_1,...,t_n)$, P ein Relationssymbol und t_i Terme. Dann gilt

$$\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_q] \quad \text{g.d.w.} \quad (t_1[x_0,...,x_q],...,t_n[x_0,...,x_q]) \in \mathbb{F}(P)$$

$$\text{g.d.w.} \quad (t_1[y_0,...,y_r],...,t_n[y_0,...,y_r]) \in \mathbb{F}(P) \quad \text{g.d.w.} \quad \mathscr{M} \models \phi[y_0,...,y_r].$$

Wenn $\phi = (\chi \wedge \psi)$, dann

$$\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_q] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathscr{M} \models \chi[x_0,...,x_q] \text{ und } \mathscr{M} \models \psi[x_0,...,x_q]$$

$$\text{g.d.w.} \quad \mathscr{M} \models \chi[y_0,...,y_r] \text{ und } \mathscr{M} \models \psi[y_0,...,y_r] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathscr{M} \models \phi[y_0,...,y_r].$$

Analog mit $\phi = \neg\psi$. Wenn $\phi = (\forall v_i)\psi$, mit $i \leq p$, dann

$$\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_q] \quad \text{g.d.w. für alle } x \in \mathscr{U} \text{ gilt } \mathscr{M} \models \psi[x_0,...x_{i-1},x,x_{i+1},...,x_q]$$

$$\text{g.d.w. für alle } x \in \mathscr{U} \text{ gilt } \mathscr{M} \models \psi[y_0,...y_{i-1},x,y_{i+1},...,y_r] \quad \text{g.d.w.} \quad \mathscr{M} \models \phi[y_0,...,y_r].$$

Nun können wir die (sehr umfangreiche) Definition abschließen:

14.4.8 Definition: Erfüllbarkeit von Formeln

Sei $\phi(v_0,...,v_p)$ eine Formel, mit all ihren freien und gebundenen Variablen unter $v_0,...,v_q$ und sei $x_0,...,x_p$ eine Folge mit Elementen aus $\mathscr{U}$ mit $p \leq q$. Dann schreiben wir

$$\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_p] \quad \text{(und sagen: } x_0,...,x_p \text{ erfüllen } \phi\text{)},$$

falls es $x_{p+1},...,x_q$ aus $\mathscr{U}$ gibt mit $\mathscr{M} \models \phi[x_0,...,x_q]$. Das obige Lemma bringt nun gerade zum Ausdruck, dass diese Definition von der Wahl der $x_{p+1},...,x_q$ unabhängig ist.

14.4.9 Bemerkung

Wir führen noch einige nützliche Abkürzungen ein: $\phi \vee \psi$ als Abkürzung für $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$, $\phi \to \psi$ als Abkürzung für $\neg\phi \vee \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$ als Abkürzung für $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ und zu guter Letzt bezeichnet $(\exists v_i)\phi$ die Formel $\neg((\forall v_i)\neg\phi)$. Mit diesen Abkürzungen gilt dann z.B. wenn ϕ die Formel $(\exists v_i)\psi$ bezeichnet: $\mathscr{M} \models \phi[v_0,...,v_q]$ g.d.w. es ein $x \in \mathscr{U}$ gibt, mit $\mathscr{M} \models \psi[v_0,...,v_{i-1},x,v_{i+1},...,v_q]$ (der Beweis ist eine leichte Übung).

Im weiteren Verlauf werden wir unser Alphabet und Modell spezieller wählen. Als Relationssymbole nehmen wir $=$ und $\in$ (wir schreiben auch $a = b$ statt $=(a,b)$, analog mit $\in$), wir brauchen keine Funktions - bzw. Konstantensymbole. Die logischen Symbole werden natürlich alle verwendet (und wurden eben bereits um ein paar Abkürzungen erweitert). Als Universum unserer Modelle wählen wir zum einen die Superstruktur über einer Basismenge X und zum anderen das entsprechende $V(Y)$. Dem Symbol $=$ ordnen wir als Relation (wie soll es auch anders sein) $\{(a,a) \mid a$ aus $V(X)\}$ bzw. $\{(a,a) \mid a$ aus $V(Y)\}$ zu; entsprechend dem Symbol $\in$, die Relationen $\{(a,b) \mid a,b$ aus $V(X)$ und a aus $b\}$ bzw. $\{(a,b) \mid a,b$ aus $V(Y)$ und a aus $b\}$. Wir haben also zwei verschiedene Modelle über ein und dem selben Alphabet. Die beiden Modelle werden wir mit $(V(X),\in)$ bzw $(V(Y),\in)$ bezeichnen.

14.4.10 Definition: Beschränkt quantifizierte Formeln

Um das Transfer-Prinzip zu formulieren führen wir nun den Begriff der beschränkt quantifizierten Formel ein. Wir erinnern uns: Im induktiven Aufbau der Formel kam es zu Quantifizierungen der Form $(\forall v)\phi$. Formeln die sich dadurch gewinnen lassen, dass statt dieser allgemeinen Form nur die folgenden abgeschwächten, so genannten beschränkten Quantifizierungen,

- $(\forall v)((v \in w) \rightarrow \phi)$ kurz: $(\forall v \in w)\varphi$
- $(\exists v)((v \in w) \wedge \phi)$ kurz: $(\exists v \in w)\varphi$

benutzt werden, heißen ab sofort beschränkt quantifizierte Formeln.

14.4.11 Lemma

Sei $(V(X),V(Y),^*)$ das in 14.3.3 konstruierte Nichtstandard Universum mit Ultrafilter φ. Dann gilt für jede beschränkt quantifizierte Formel $\phi(x_1,...,x_n)$ und $f_1,...,f_n \in W$:

$$(V(Y),\in) \models \phi[h(f_1),...,h(f_n)] \quad \text{g.d.w.} \quad \{i \in I \mid (V(X),\in) \models \phi[f_1(i),...,f_n(i)]\} \in \varphi.$$

Für die Notation beachte den Existenzbeweis für Nichtstandard Universen.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Formelaufbau. Sei ϕ die (Elementar)Formel $v_1 = v_2$. Dann folgt:

$$(V(Y),\in) \models \phi[h(f_1),h(f_2)] \quad \text{g.d.w.} \quad h(f_1) = h(f_2) \quad \text{g.d.w.} \quad f_1 =_\varphi f_2.$$

► Zeigen wir die letzte Äquivalenz: Sei $h(f_1) = h(f_2)$. Angenommen $J := \{i \in I \mid f_1(i) \neq f_2(i)\} \in \varphi$. Falls $\{i \in I \mid f_2(i) = \emptyset\} \in \varphi$, dann $\emptyset = h(f_2) = h(f_1)$. Dann muss aber auch $\{i \in I \mid f_1(i) = \emptyset\} \in \varphi$ sein! Und somit doch $f_1 =_\varphi f_2$ - Widerspruch.

Für den nächsten Fall erst eine allgemeine Bemerkung: $A \in X$, $B \in V(X) \setminus X$ und $B \neq \emptyset$ impliziert $B \setminus A \neq \emptyset$. Sonst ist $B \subseteq A$ und es folgt letztendlich $A \cap V(X) \neq \emptyset$ - Widerspruch (zur Basismengeneigenschaft)!

Falls also $\{i \in I \mid f_2(i) \neq \emptyset\} \in \varphi$, so gilt für f_1 entweder $f_1 \in W_0$, oder $f_1 \in W \setminus W_0$. Im ersten Fall folgt aus der Bemerkung: $\{i \in I \mid f_2(i) \setminus f_1(i) \neq \emptyset\} \in \varphi$. Im zweiten Fall folgt, dass für jedes $i \in I$ ein $g(i)$ existiert mit $g(i) \in f_2(i) \setminus f_1(i)$, oder $g(i) \in f_1(i) \setminus f_2(i)$. In beiden Fällen lässt sich aber leicht ein $g : I \to V(X)$ konstruieren, so dass entweder $h(g) \in h(f_2) \setminus h(f_1)$ oder $h(g) \in h(f_1) \setminus h(f_2)$ gilt. Und wir erhalten $h_m(f_1) \neq h_m(f_2)$ - Widerspruch. Also $J \in \varphi$ und somit $f_1 =_\varphi f_2$. Die Umkehrung $f_1 =_\varphi f_2 \;\Rightarrow\; h(f_1) = h(f_2)$ ist offensichtlich. ◀

Offenbar gilt nun

$$f_1 =_\varphi f_2 \quad \text{g.d.w.} \quad \{i \in I \mid (V(X), \in) \models \phi[f_1(i), ..., f_n(i)]\} \in \varphi$$

Sei nun ϕ die Formel $v_1 \in v_2$, dann folgt $(V(Y), \in) \models \phi[h(f_1), h(f_2)]$ g.d.w. $h(f_1) \in h(f_2)$

$$\text{g.d.w.} \quad \{i \in I \mid f_1(i) \in f_2(i)\} \in \varphi \quad \text{g.d.w.} \quad \{i \in I \mid (V(X), \in) \models \phi[f_1(i), ..., f_n(i)]\} \in \varphi.$$

Wenn ϕ die Formel $(\psi \wedge \chi)$ ist, beweist man die Äquivalenz, indem man sie auf den rekursiven Formelaufbau und die Filtereigenschaft $P \cap Q \in \varphi$ g.d.w. $P \in \varphi$ und $Q \in \varphi$ zurückführt. Ähnlich geht man vor, wenn ϕ die Formel $\neg\psi$ ist ($P \in \varphi$ g.d.w. $I \setminus P \notin \varphi$ - Ultrafilter!).

Sei ϕ die Formel $(\exists v_1)((v_1 \in v_2) \wedge \psi)$ (es ist klar, dass man sich auf den Nachweis für $\forall$ oder $\exists$ entscheiden kann).

$$(V(Y), \in) \models (\exists v_1)((v_1 \in v_2) \wedge \psi)[h(f_1), ..., h(f_n)]$$

$$\text{g.d.w. es ein} \quad u \in V(Y) \quad \text{gibt, mit} \quad (V(Y), \in) \models ((v_1 \in v_2) \wedge \psi)[u, ..., h(f_n)]$$

$$\text{g.d.w. es ein} \quad u \in V(Y) \quad \text{gibt, mit} \quad u \in h(f_2) \text{ und } (V(Y), \in) \models \psi[u, ..., h(f_n)].$$

Nun ist $h(f_2)$ entweder $(f_2)_\varphi$ oder $\{h(g) \mid g \in W$ und $\{i \in I \mid g(i) \in f_2(i)\} \in \varphi$. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, da Y eine Basismenge ist. Das impliziert: $u = h(g) \in h(f_2)$ und $(V(Y), \in) \models \psi[h(g), ..., h(f_n)]$, also $\{i \in I \mid g(i) \in f_2(i)\} \in \varphi$ und $\{i \in I \mid (V(X), \in) \models \psi[g(i), ..., f_n(i)]\} \in \varphi$. Also ist auch

$$\{i \in I \mid (V(X), \in) \models (\exists v_1)((v_1 \in v_2) \wedge \psi)[f_1(i), ..., f_n(i)]\}$$

als Obermenge des Schnittes dieser beiden Mengen wieder in φ.

Sei andererseits $\{i \in I \mid (V(X), \in) \models (\exists v_1)((v_1 \in v_2) \wedge \psi)[f_1(i), ..., f_n(i)]\} \in \varphi$. Dann auch $J := \{i \in I \mid$ es gibt ein $g(i) \in V(X)$ mit $g(i) \in f_2(i)$ und $(V(X), \in) \models \psi[g(i), ..., f_n(i)]\} \in \varphi$. Wähle dann noch ein $g(i) \in X$ für jedes $i \in I \setminus J$ und wir erhalten $h(g) \in h(f_2)$ (Y ist Basismenge) und $\{i \in I \mid (V(X), \in) \models \psi[g(i), ..., f_n(i)]\} \in \varphi$, also per Induktion $(V(Y), \in) \models \psi[h(g), ..., h(f_n)]$. Zusammen mit $h(g) \in h(f_2)$ erhalten wir

$$(V(Y), \in) \models (\exists v_1)(v_1 \in v_2 \wedge \psi)[h(f_1), ..., h(f_n)].$$

14.4.12 Transfer-Prinzip

Seien $a_1, ..., a_n \in V(X)$ und sei $\phi(v_1, ..., v_n)$ eine beschränkt quantifizierte Formel. Dann:

$$(V(Y), \in) \models \phi[{}^*a_1, ..., {}^*a_n] \quad \text{genau dann wenn} \quad (V(X), \in) \models \phi[a_1, ..., a_n].$$

Beweis: Man wähle als f_k einfach $c(a_k)$ (mit den Bezeichnungen aus 14.3.3 und 14.4.11) und beachte $c(a_k)(i) = a_k$ für alle $i \in I$ und $I \in \varphi$.

14.5 Elementare Eigenschaften von Nichtstandard Universen

14.5.1 Zusammenfassung (und Abschluss von Definition 14.3.1)

Haben wir eine unendliche Menge X, so nehmen wir uns eine Basismenge X' mit $|X| = |X'|$. Wir identifizieren gewissermaßen X' mit X (und all den möglichen Strukturen auf X) und können also o.B.d.A. gleich von Anfang an annehmen, dass X eine Basismenge ist. Bei geeigneter Wahl eines Ultrafilters φ bekommen wir die Modelle $(V(X), \in)$ und $(V(Y), \in)$, mit $Y = \prod_\varphi X$ und das Nichtstandard Universum $(V(X), V(Y), ^*)$, mit folgenden Eigenschaften:

1. X und Y sind unendliche Basismengen und $^* : V(X) \to V(Y)$ ist eine Einbettung der Superstruktur über X in die Superstruktur über Y mit $^*X = Y$. Die Abbildung * heißt Nichtstandard Einbettung.

2. Für jedes unendliche $A \subseteq X$ ist $\{^*a \mid a \in A\}$ eine echte (!) Teilmenge von $^*A$.

3. Für $a_1, ..., a_n \in V(X)$ und eine beschränkt quantifizierte Formel $\phi(v_1, ..., v_n)$ gilt:
   $(V(Y), \in) \models \phi[^*a_1, ..., ^*a_n]$ g.d.w. $(V(X), \in) \models \phi[a_1, ..., a_n]$ (Transfer-Prinzip).

4. Für jede Familie $(A_t)_{t \in T}$ von höchstens $|V(X)|$-vielen internen Elementen, von denen je endlich viele einen nicht leeren Schnitt haben (eSE) gilt: $\bigcap_{t \in T} A_t \neq \emptyset$.
   Dies bezeichnen wir kurz als: $(V(X), V(Y), ^*)$ ist polysaturiert.

Die unvollständige Definition 14.3.1 eines Nichtstandard Universums ist an dieser Stelle damit vollständig. Die (aufwendige) Konstruktion in den vorangehenden Abschnitten dient nur dem Nachweis, dass zu jeder (unendlichen) Menge X ein Nichtstandard Universum existiert. Diese Eigenschaften stellen wir ab jetzt axiomatisch an den Anfang.

14.5.2 Lemma

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es beschränkt quantifizierte Formeln $\varphi_0, ..., \varphi_6$, so dass für jede Superstruktur über einer Basismenge X und Elementen $x_1, ..., x_n \in V(X)$ und $u, v, w \in V(X) \setminus X$ gilt:

(0) $u = \emptyset$ g.d.w. $(V(X), \in) \models \varphi_0[u]$
(1) $u = \{x_1, ..., x_n\}$ g.d.w. $(V(X), \in) \models \varphi_1[u, x_1, ..., x_n]$
(2) $u = (x_1, ..., x_n)$ g.d.w. $(V(X), \in) \models \varphi_2[u, x_1, ..., x_n]$
(3) $u \subseteq v$ g.d.w.$(V(X), \in) \models \varphi_3[u, v]$
(4) $u = v \times w$ g.d.w. $(V(X), \in) \models \varphi_4[u, v, w]$
(5) $u : v \to w$ g.d.w. $(V(X), \in) \models \varphi_5[u, v, w]$
(6) $u \in V_n(X)$ g.d.w. $(V(X), \in) \models \varphi_6[u]$

Beweis: Bleibt als Übungsaufgabe. Bei (6) verwende man Induktion über n und ansonsten benutze man bekannte Formeln zur Konstruktion der Restlichen. Wir werden im Folgenden ohne extra darauf hinzuweisen $\varphi_0, ..., \varphi_6$ frei verwenden!

14.5.3 Lemma

Für $b_1,...,b_n \in V(X)$, $A \in V(X) \setminus X$ und eine beschränkt quantifizierte Formel $\varphi(v_1,...,v_{n+1})$ gilt:

$$^*\{y \in A \mid (V(X),\in) \models \varphi[b_1,...,b_n,y]\} = \{y \in {}^*A \mid (V(Y),\in) \models \varphi[{}^*b_1,...,{}^*b_n,y]\}$$

Beweis: Für $B := \{y \in A \mid (V(X),\in) \models \varphi[b_1,...,b_n,y]\}$ gilt

$$(V(X),\in) \models (\forall y \in A)(y \in B \leftrightarrow \varphi[b_1,...,b_n,y]).$$

Nun handelt es sich hierbei um eine beschränkt quantifizierte Formel, nach dem Transfer-Prinzip ist dies gleichwertig zu:

$$(V(Y),\in) \models (\forall y \in {}^*A)(y \in {}^*B \leftrightarrow \varphi[{}^*b_1,...,{}^*b_n,y]).$$

Ebenso folgt (direkt) aus dem Transfer-Prinzip: ${}^*B \subseteq {}^*A$ ist gleichwertig zu $A \subseteq B$, woraus dann insgesamt die Behauptung folgt.

Kombiniert man diese beiden Lemmata, so erhält man:

14.5.4 Korollar

Seien $A,B \in V(X) \setminus X$. Dann gilt:

1. ${}^*\mathscr{A} \subseteq {}^*\mathscr{A}$, ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$, ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$, ${}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$ und ${}^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$.
2. Wenn $A = \{a_1,...,a_n\}$, dann ${}^*A = \{{}^*a_1,...,{}^*a_n\}$.
3. Wenn $\mathscr{P}(A) \subseteq B$, dann ${}^*\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}({}^*A) \cap {}^*B$.
4. Wenn $V_n(X) \subseteq B$, dann ${}^*V_n(X) = V_n(Y) \cap {}^*B$.

Beweis: Exemplarisch führen wir 3. vor. Der Rest geht analog.

$$\mathscr{P}(A) = \{D \in B \mid D \subseteq A\} = \{D \in B \mid (V(X),\in) \models \varphi_3[D,A]\},$$

also

$$^*\mathscr{P}(A) = \{D \in {}^*B \mid (V(Y),\in) \models \varphi_3[D,{}^*A]\} = \mathscr{P}({}^*A) \cap {}^*B.$$

14.5.5 Korollar

Wenn $A, B \in V(X) \setminus X$ und $f : A \to B$ eine Funktion ist, so ist ${}^*f$ eine Funktion von ${}^*A$ nach ${}^*B$. Ist f injektiv oder surjektiv, so auch ${}^*f : {}^*A \to {}^*B$. Außerdem ist

$${}^*B^A = {}^*\{f \in V(X) \mid (V(X), \in) \models \varphi_5[f, A, B]\} = \{f \in {}^*V(X) \mid (V(Y), \in) \models \varphi_5[f, {}^*A, {}^*B]\}$$

die Menge aller (internen) Funktionen von ${}^*A$ nach ${}^*B$.

Beweis: Bleibt als Übungsaufgabe.

14.5.6 Korollar

Sei $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$, bzw. $B \subseteq Y$. Es gilt dann

$${}^*(f\{A\}) = {}^*f\{{}^*A\} \quad \text{und} \quad {}^*(f^{-1}(B)) = ({}^*f)^{-1}({}^*B)$$

Zur Erinnerung: Hier ist $f\{A\} := \{f(a) \mid a \in A\}$ das Bild von A unter f.

Beweis: Wir zeigen nur ${}^*(f\{A\}) = {}^*f\{{}^*A\}$. Der Rest geht analog. Wir haben

$${}^*(f\{A\}) = {}^*\{y \in Y \mid (V(X), \in) \models \psi[A, f, y]\} = \{y \in {}^*Y \mid (V(Y), \in) \models \psi[{}^*A, {}^*f, y]\} = {}^*f\{{}^*A\},$$

wobei $\psi(u, v, w)$ die Formel $(\exists x \in u)(\exists z \in v)\varphi_2(z, x, w)$ bezeichnet.

14.5.7 Lemma

Sei $(V(X), V(Y), {}^*)$ ein Nichtstandard Universum, $Z \in V(X) \setminus X$, $\alpha \subseteq \mathscr{P}(Z)$ und $B \in V(X) \setminus X$. Dann gilt:

1. Wenn ${}^*B \subseteq \bigcup_{A \in \alpha} {}^*A$, dann gibt es ein endliches $\alpha_0 \subseteq \alpha$, mit $B \subseteq \bigcup_{A \in \alpha_0} A$.
2. Wenn $\bigcap_{A \in \alpha} {}^*A \subseteq {}^*B$, dann gibt es ein endliches $\alpha_0 \subseteq \alpha$, mit $\bigcap_{A \in \alpha_0} A \subseteq B$.
3. $(\forall A, B \in \alpha : A \cap B \in \alpha) \Rightarrow (\exists C \in {}^*\alpha \text{ mit } C \subseteq \bigcap_{A \in \alpha} {}^*A)$

Beweis: 1. Falls $B \not\subseteq \bigcup_{A \in \alpha_0} A$ für alle endlichen $\alpha_0 \subseteq \alpha$, dann setze $\beta := \{B \setminus A \mid A \in \alpha\}$. Dieses β hat dann die endliche Schnitt Eigenschaft und demzufolge hat auch $\beta' := \{{}^*B' \mid B' \in \beta\}$ die eSE (Transfer-Prinzip). Denn es gilt $(V(X), \in) \models \psi[\beta, B]$, also $(V(Y), \in) \models \psi[{}^*\beta, {}^*B]$, wenn $\psi(v,w)$ die Formel $(\forall u_1 \in v)...(\forall u_n \in v)(\exists z \in w)(z \in u_1 \wedge ... \wedge z \in u_n)$ bezeichnet. Da $\beta' \subseteq {}^*\beta$ und unser Nichtstandard Universum polysaturiert ist, folgt

$$\emptyset \neq \bigcap_{B' \in \beta} {}^*B' = \bigcap_{A \in \alpha} {}^*(B \setminus A) = {}^*B \setminus \bigcup_{A \in \alpha} {}^*A \quad \text{- Widerspruch!}$$

2. Analoger Beweis (oder man geht zu Komplementen über und verwendet dann 1.).

3. Für $A \in \alpha$ setze $\alpha_A := \{B \in \alpha \mid B \subseteq A\}$. Dann ist ${}^*\alpha = \{B \in {}^*\alpha \mid B \subseteq {}^*A\}$. Es genügt demnach zu zeigen, dass $\bigcap_{A \in \alpha} {}^*\alpha_A \neq \emptyset$ ist. Na ja, dies liegt daran, dass $\{{}^*\alpha_A \mid A \in \alpha\}$ eine Familie interner Elemente mit der eSE ist.

14.5.8 Definition: Extern und standard

Elemente $A \in V(Y)$ für die es ein $B \in V(X) \setminus X$ mit $A \in {}^*B$ gibt, haben wir bereits als interne Elemente bezeichnet. Elemente aus $V(Y)$ die diese Eigenschaft nicht haben, nennen wir **extern**. Elemente $A \in V(Y)$ der Form $A = {}^*B$, für ein $B \in V(X)$ heißen **standard** Elemente. Standard Elemente sind intern ($A = {}^*B$ für $B \in V(X)$ ergibt $B \in V_n(X)$ für $n \in \omega$ und damit $A =^* B \in {}^*V_n(X)$). Für die Menge $\mathscr{N}$ aller internen Elemente gilt

$$\mathscr{N} = \bigcup_{A \in V(X) \setminus X} {}^*A = \bigcup_{n \in \omega} {}^*V_n(X).$$

Der Nachweis bleibt als Aufgabe. Wenn wir von internen Mengen sprechen, meinen wir interne Elemente aus $V(Y) \setminus Y$ (obwohl natürlich auch Elemente aus Y Mengen sind).

Wie kann man einer Menge ansehen, ob sie intern oder extern ist? Ein hilfreiches Kriterium ist das folgende Prinzip der internen Definition.

14.5.9 Prinzip der internen Definition

Seien $A_1,...,A_n,B$ interne Mengen und $\varphi(v_1,...,v_{n+1})$ eine beschränkt quantifizierte Formel. Dann ist die Menge $D := \{y \in B \mid (V(Y),\in) \models \varphi[A_1,...,A_n,y]\}$ intern.

Beweis: Aus obiger Bemerkung entnehmen wir, dass es ein k gibt, mit $A_1,...,A_n,B \in {}^*V_k(X)$. Sei $\psi(v,v')$ die Formel

$$(\forall v_1 \in v)...(\forall v_{n+1} \in v)(\exists u \in v')(\varphi_3(u,v) \wedge (\forall y \in v)((y \in u) \leftrightarrow (y \in v_{n+1} \wedge \varphi(v_1,...,v_n,y)))).$$

Es gilt dann nämlich

$$(V(X),\in) \models \psi[V_k(X),V_{k+1}(X)].$$

► Beweis dieser Aussage: Zu gegebenen $x_1,...,x_n,b \in V_k(X)$ betrachte man die Menge $u' := \{y \in V_k(X) \mid (V(X),\in) \models \varphi[x_1,...,x_n,y]\}$ und anschließend $u := u' \cap b$. ◄

Hieraus folgt dann $(V(Y),\in) \models \psi[{}^*V_k(X),{}^*V_{k+1}(X)]$, das heißt für die $A_1,...,A_n,B$ gibt es ein $U \in {}^*V_{k+1}(X)$ mit $U \subseteq {}^*V_k(X)$ und der Eigenschaft, dass für jedes $y \in {}^*V_k(X)$ gilt: $y \in U \leftrightarrow y \in B$ und $(V(Y),\in) \models \varphi[A_1,...,A_n,y]$. Kurz: $D = U \in {}^*V_{k+1}(X)$.

14.5.10 Lemma (*Fast* Transitivität der ${}^*V_k(X)$)

Wenn $x \in {}^*V_k(X) \setminus Y$ (natürlich $k \geq 1$), dann $x \subseteq {}^*V_k(X)$.

Beweis: Für $x \in V_{k+1}(X) \setminus X = (\mathscr{P}(V_k(X)) \cup X) \setminus X$ folgt $x \subseteq V_k(X) \subseteq V_{k+1}(X)$. Also haben wir $(V(X), \in) \models \psi[V_k(X), V_k(X) \setminus X]$, für $k \geq 1$, wenn $\psi(u,v)$ die Formel $(\forall x \in u)(x \in v \rightarrow [(\forall y \in x)(y \in u)])$ bezeichnet. Transfer liefert dann $(V(Y), \in) \models \psi[{}^*V_k(X), {}^*V_k(X) \setminus Y]$. Also $x \in {}^*V_k(X) \setminus Y$ impliziert $x \subseteq {}^*V_k(X)$.

14.5.11 Korollar

Die Menge aller internen Mengen ist gegen endliche Schnitte, Vereinigungen, Differenzen und Produkte abgeschlossen.

Beweis: Exemplarisch sei dies für das Produkt zweier Mengen gezeigt; die anderen Beweise verlaufen sehr ähnlich. Seien also A, B intern aus $V(Y) \setminus Y$. Dann A, $B \subseteq {}^*V_k(X)$, für geeignetes k. Nun gilt ${}^*(V_k(X) \times V_k(X)) = {}^*V_k(X) \times {}^*V_k(X)$. Und damit dann

$$A \times B = \{z \in {}^*(V_k(X) \times V_k(X)) \mid (V(Y), \in) \models \psi[A, B, z]\},$$

wobei $\psi(u, v, w)$ die Formel $(\exists x \in u)(\exists y \in v)\varphi_2(w, x, y)$ bezeichnet.

14.6 Elementare Nichtstandard Konzepte in der Topologie

"Das Kreditsystem, das seinen Mittelpunkt hat in den angeblichen Nationalbanken und den großen Geldverleihern und Wucherern um sie herum, ist eine enorme Zentralisation und gibt dieser Parasitenklasse eine fabelhafte Macht, nicht nur die industriellen Kapitalisten periodisch zu dezimieren, sondern auf die gefährlichste Weise in die wirkliche Produktion einzugreifen - und diese Bande weiß nichts von der Produktion und hat nichts mit ihr zu tun."

Karl Marx

Wir wenden Nichtstandard Konzepte nun auf topologische Strukturen an und erhalten so interessante und oftmals sehr intuitive Nichtstandard Charakterisierungen.

14.6.1 Bemerkung

Wir nehmen an, dass die topologischen Räume, die wir betrachten, immer Teil einer Superstruktur z.B. $V(Z)$ sind, genauer $X \subseteq Z$. (o.B.d.A. ist Z wieder eine Basismenge). Wir werden die Superstruktur und entsprechende Nichtstandard Universen nicht immer hinschreiben.

14.6.2 Definition: Monade

Sei (X,τ) ein top. R. und $x \in X$. Dann ist $\mu(x) := \bigcap_{x \in O \in \tau} {}^*O$ als die Monade des Punktes x definiert. Analog ist $\mu(A) := \bigcap_{A \subseteq O \in \tau} {}^*O$ die Monade von $A \subseteq X$. Für $y \in \mu(x)$ schreiben wir zuweilen auch $y \approx x$.

14.6.3 Lemma

1. Eine Menge $U \subseteq X$, eines top. R. ist offen, genau dann wenn $\mu(x) \subseteq {}^*U$ ist, für jedes $x \in U$
2. Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn jedes $a \in X$ mit $\mu(a) \cap {}^*A \neq \emptyset$ bereits in A ist.

Beweis: 1. Sei U offen und $x \in U$. Dann offensichtlich $\mu(x) = \bigcap_{x \in O \in \tau} {}^*O \subseteq {}^*U$. Sei andererseits $\forall x \in U$: $\mu(x) \subseteq {}^*U$, also $\bigcap_{x \in O \in \tau} {}^*O \subseteq {}^*U$. Nach Lemma 14.5.7 gibt es $O_1, ..., O_n$ mit $x \in O_1 \cap ... \cap O_n \subseteq U$. U ist also offen.

2. Sei A abgeschlossen und $x \in X$ mit $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$. Wäre $x \in X \setminus A$, so wäre $\mu(x) \subseteq {}^*X \setminus {}^*A = {}^*(X \setminus A)$ - Widerspruch! Für die andere Richtung betrachte man $x \in X \setminus A$, also $\mu(x) \cap {}^*A = \emptyset$. Es folgt unmittelbar $\mu(x) \subseteq {}^*(X \setminus A)$, und somit ist $X \setminus A$ als offen erkannt.

14.6.4 Lemma

Sei ϕ ein Filter auf dem topologischen Raum (X,τ). Dann gilt

$$\phi \xrightarrow{\tau} x \Leftrightarrow \bigcap_{P \in \phi} {}^*P \subseteq \mu(x)$$

Beweis: Sei $\phi \to X$ und $O \in \dot{x} \cap \tau$. Es folgt $O \in \phi$, also $\bigcap_{P \in \phi} {}^*P \subseteq {}^*O$ und damit $\bigcap_{P \in \phi} {}^*P \subseteq \mu(x)$. Gilt umgekehrt $\bigcap_{P \in \phi} {}^*P \subseteq \mu(x)$, so gibt es zu gegebenen $O \in \dot{x} \cap \tau$ nach Lemma 14.5.7 eine endliche Teilmenge ϕ' von ϕ mit $\bigcap_{P \in \phi'} P \subseteq O$, also $O \in \phi$.

14.6.5 Lemma

$f : X \to Y$ ist stetig im Punkt $x \in X$, g.d.w. ${}^*f\{\mu(x)\} \subseteq \mu(f(x))$. Intuitiv steht hier: Ist y unendlich nahe bei x, so ist ${}^*f(y)$ unendlich nahe bei $f(x)$, also $y \approx x \to ({}^*f)(y) \approx f(x)$.

Beweis: Sei f stetig und $y \in \mu(x)$. Wähle O offen in Y mit $f(x) \in O$. Dann ist $U := f^{-1}(O)$ offen in X mit $x \in U$. Also $y \in {}^*U$. Wir bekommen damit ${}^*f(y) \in {}^*f\{{}^*U\} = {}^*(f\{U\}) \subseteq {}^*O$. Und somit ${}^*f(y) \in \mu(f(x))$.

Für die Rückrichtung werden wir beweisen, dass $U := f^{-1}(O)$ offen ist, für offenes $O \subseteq Y$. Sei dazu $x \in U$, also $f(x) \in O$. Wir müssen zeigen $\mu(x) \subseteq {}^*U$. Nun ist O offen, also $\mu(f(x)) \subseteq {}^*O$. Demzufolge auch ${}^*f\{\mu(x)\} \subseteq {}^*O$. Die ergibt: $\mu(x) \subseteq ({}^*f)^{-1}({}^*O) = {}^*(f^{-1}(O)) = {}^*U$.

14.6.6 Bemerkung

Wenn wir nun Initialtopologien bzw. Finaltopologien zu gegebenen Daten $X, (X_i)_{i\in I}$ und $(f_i)_{i\in I}$ mit Nichtstandard Methoden untersuchen wollen, setzen wir stillschweigend eine genügend große Superstruktur $V(Z)$ voraus, wobei Z alle vorkommenden Mengen (die X_i für $i \in I$, I selber, irgendwelche Y ...) als Teilmengen enthält. Das dies geht, garantiert das Ersetzungsaxiom. Nur wenn unbedingt nötig, schreiben wir das entsprechende Nichtstandard Universum hin.

14.6.7 Lemma

Sei τ die Initialtopologie auf X bzgl. der Daten $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ und $f_i : X \to X_i$. Dann gilt für alle $x \in X$ und $y \in {}^*X$: $y \in \mu(x) \;\Leftrightarrow\; \forall i \in I : {}^*f_i(y) \in \mu(f_i(x))$.

Beweis: Sei $y \in \mu(x)$. Für $i \in I$ und $O \in f_i(\dot{x}) \cap \tau_i$ gilt dann $y \in {}^*(f_i^{-1}(O)) = ({}^*f_i)^{-1}({}^*O)$, also ${}^*f_i(y) \in {}^*O$.

Für die Rückrichtung betrachte man ein $O \in \dot{x} \cap \tau$. Zu diesem gibt es dann $i_1, ..., i_n$ und entsprechende $O_{i_k} \in \tau_{i_k}$ mit $x \in f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n})$. Nach Voraussetzung gilt dann ${}^*f_{i_k}(y) \in {}^*O_{i_k}$, also $y \in ({}^*f_{i_k})^{-1}({}^*O_{i_k}) = {}^*(f_{i_k}^{-1}(O_{i_k}))$, für $k = 1, ..., n$. Es folgt schließlich $y \in {}^*O$.

14.6.8 Lemma

Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(0) X ist T_0 g.d.w. $\forall x \neq y$ gilt $\mu(x) \neq \mu(y)$.
(1) X ist T_1 g.d.w. $\forall x \neq y$ gilt $\mu(x) \nsubseteq \mu(y) \wedge \mu(y) \nsubseteq \mu(x)$.
(2) X ist T_2 g.d.w. $\forall x \neq y$ gilt $\mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$.
(3) X ist T_3 g.d.w. $\forall A$ abgeschlossen und $x \notin A$ gilt $\mu(A) \cap \mu(x) = \emptyset$.
(4) X ist T_4 g.d.w. $\forall A \cap B = \emptyset$, A, B abgeschlossen gilt $\mu(A) \cap \mu(B) = \emptyset$.

Beweis: Exemplarisch führen wir (2) vor. Die restlichen gehen genauso einfach. Sei X T_2 und $x \neq y$. Dann offensichtlich $\mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$.

Wenn andererseits $\mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$ für $x \neq y$, dann können wir mal annehmen, dass es keine disjunkten offenen Umgebungen gibt, also $(\dot{x} \cap \tau) \cup (\dot{y} \cap \tau)$ die eSE hat. Dann hat aber auch $\{{}^*O \mid O \in \dot{x} \cap \tau\} \cup \{{}^*O \mid O \in \dot{y} \cap \tau\}$ die eSE. Nun arbeiten wir in einem polysaturiertem Nichtstandard Universum, also gilt dann auch $\mu(x) \cap \mu(y) \neq \emptyset$ - Widerspruch.

14.6.9 Lemma

1. Sei $K \subseteq X$ dann gilt:

$$K \text{ ist kompakt g.d.w. } \mu(K) = \bigcup_{x\in K} \mu(x) \text{ g.d.w. } {}^*K \subseteq \bigcup_{x\in K} \mu(x).$$

2. X ist genau dann lokal kompakt, wenn $\bigcup_{K\in\mathscr{K}} {}^*K = \bigcup_{x\in X} \mu(x)$. Hierbei bezeichnet $\mathscr{K}$ die Menge aller kompakten Teilmengen von X.

Beweis: 1. Sei K kompakt. $\mu(K) \supseteq \bigcup_{x\in K} \mu(x)$ gilt allgemein. Sei also $z \in \mu(K)$. Angenommen $\forall x \in K : z \notin \mu(x)$. Wähle für jedes $x \in K$ ein $O_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $z \notin {}^*O_x$. Nun ist K kompakt, also gibt es endlich viele solche O_x mit $K \subseteq O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_n} =: O \in \dot{K} \cap \tau$. Dann ist aber $z \in {}^*O = {}^*O_{x_1} \cup \ldots \cup {}^*O_{x_n}$ - Widerspruch!

Es gilt ${}^*K \subseteq \mu(K)$, wir setzen nun also ${}^*K \subseteq \bigcup_{x\in K} \mu(x)$ voraus. Sei dann $\sigma \subseteq \tau$ eine offene Überdeckung, dann gilt auch ${}^*K \subseteq \bigcup_{O\in\sigma} {}^*O$ (Denn $y \in {}^*K$ impliziert $y \in \mu(x)$, für $x \in K$ und für dieses x gibt es ein $O_x \in \sigma$ mit $x \in O_x$. Dann ist aber $y \in \mu(x) \subseteq {}^*O_x$). Wieder nach Lemma 14.5.7 gibt es ein endliches $\sigma_0 \subseteq \sigma$ mit $K \subseteq \bigcup_{O\in\sigma_0} O$.

2. Wenn X lokal kompakt ist und wir $x \in X$ wählen, dann gibt es $K \in \mathscr{K}$ mit $x \in K^\circ$ (offener Kern). Also $\mu(x) \subseteq {}^*K^\circ \subseteq {}^*K$. Aus a) folgt allgemein $\bigcup_{K\in\mathscr{K}} {}^*K \subseteq \bigcup_{x\in X} \mu(x)$. Und damit ist diese Richtung bewiesen.

Für die andere Richtung betrachte $x \in X$. Es gilt dann $\mu(x) \subseteq \bigcup_{K\in\mathscr{K}} {}^*K$, also $\emptyset = \bigcap_{O\in\dot{x}\cap\tau} {}^*O \setminus \bigcup_{K\in\mathscr{K}} {}^*K = \bigcap_{O\in\dot{x}\cap\tau, K\in\mathscr{K}} {}^*(O \setminus K)$. Nun ist unser Nichtstandard Universum polysaturiert, also gibt es endlich viele $O_1, \ldots, O_n, K_1, \ldots, K_n$ mit $\emptyset = {}^*(O_1 \setminus K_1) \cap \ldots \cap {}^*(O_n \setminus K_n)$. Setzt man noch $O := O_1 \cap \ldots \cap O_n$ und $K := K_1 \cup \ldots \cup K_n$ und beachtet entsprechende Eigenschaften der Einbettung, so erhält man $O \setminus K = \emptyset$, also $O \subseteq K$, wobei natürlich O offen und K kompakt ist (die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist wieder kompakt).

14.6.10 Korollar

Kompakte T_2-Räume X sind bereits T_4 (und somit auch T_3).

Beweis: Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Da X kompakt ist, sind A, B dies auch. Also $\mu(A) \cap \mu(B) = (\bigcup_{x\in A} \mu(x)) \cap (\bigcup_{y\in B} \mu(y)) = \emptyset$, da $\mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$ für $x \in A$ und $y \in B$.

14.6.11 Alexanderscher Subbasissatz

Wenn es eine Subbasis $\mathscr{S}$ der Topologie τ auf X gibt, so dass jede offene Überdeckung $\sigma \subseteq \mathscr{S}$ eine endliche Teilüberdeckung hat, dann ist X kompakt. Analog natürlich auch für Teilmengen K von X.

Beweis: Sei $\mathscr{S}$ eine solche Subbasis. Angenommen der Raum X ist trotzdem nicht kompakt, also ${}^*X \neq \bigcup_{x \in X} \mu(x)$. Dann gibt es also ein $y \in {}^*X$, so dass für jedes $x \in X$ gilt $y \notin \mu(x)$. Wir wählen dann für jedes $x \in X$ ein $O_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $y \notin {}^*O_x$. Nun ist $\mathscr{S}$ eine Subbasis, es gibt also $S_1, \ldots, S_n \in \dot{x} \cap \mathscr{S}$, mit $S_1 \cap \ldots \cap S_n \subseteq O_x$. Somit muss also auch ein $S_x \in \dot{x} \cap \mathscr{S}$ geben, mit $y \notin {}^*S_x$ (¶). Da S_x, $x \in X$ eine offene Überdeckung von X aus $\mathscr{S}$ ist, gibt es $x_1, \ldots, x_m \in X$ mit $X = S_{x_1} \cup \ldots \cup S_{x_m}$, also ${}^*X = {}^*S_{x_1} \cup \ldots \cup {}^*S_{x_m}$ - offensichtlich ein Widerspruch zu (¶)!

14.6.12 Lemma

Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind wieder kompakt.

Beweis: Sei $K \subseteq X$ kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Wir müssen ${}^*(f\{K\}) \subseteq \bigcup_{a \in K} \mu(a)$ zeigen. Also Sei $y \in {}^*(f\{K\}) = {}^*f\{{}^*K\}$. Dann $y = {}^*f(z)$ für $z \in {}^*K$. Also $z \in \mu(x)$ für $x \in K$. Und somit $y \in {}^*f\{\mu(x)\} \subseteq \mu(f(x)) \subseteq \bigcup_{a \in f\{K\}} \mu(a)$.

14.6.13 Satz von Tychonoff

Für eine Familie topologischer Räume $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ gilt: Der Produktraum (X, τ) ist genau dann kompakt, wenn alle (X_i, τ_i) kompakt sind.

Beweis: X_i ist das Bild der surjektiven und stetigen Projektionen pr_i, demnach also kompakt. Sind alle X_i kompakt und $y \in {}^*X$. Dann erhalten wir $\forall\, i \in I\, \exists x_i \in X_i$ mit ${}^*pr_i(y) \in \mu(x_i)$. Für $x := (x_i)_{i \in I}$ folgt aus Lemma 14.6.7 $y \in \mu(x)$. Da $x \in X$, sind wir fertig.

Wir kommen nun zu einem wichtigen Konzept, mit dem man Konstruktionen aus der nicht-standard Welt zurück in die standard Welt bekommen kann.

14.6.14 Definition

Sei (X, τ) ein Hausdorff Raum und $a \in {}^*X$. Falls es ein $x \in X$ mit $a \in \mu(x)$ gibt, so ist dies eindeutig bestimmt und wir setzen $st(a) := x$. Wir haben also eine Abbildung $st : \bigcup_{x \in X} \mu(x) \to X$, welche wir **Standardteil-Abbildung** nennen. Für ganze Teilmengen $A \subseteq {}^*X$ können wir sogar in beliebigen topologischen Räumen (also nicht notwendig Hausdorff) den Standardteil definieren. Dazu setzen wir $st(A) := \{x \in X \mid A \cap \mu(x) \neq \emptyset\}$. Nun haben wir beides mit st

bezeichnet. Was jeweils gemeint ist, geht natürlich aus dem Kontext hervor. Im nächsten Satz fassen wir ein paar wichtige Eigenschaften der Standardteil-Abbildung zusammen.

14.6.15 Satz

Sei (X,τ) ein topologischer Raum.

1. Für $A \subseteq X$ ist $st(^*A) = \overline{A}$.

2. Ist B intern $\subseteq {}^*X$, dann ist $st(B)$ in X abgeschlossen.

3. Ist (X,τ) ein T_3-Raum und B intern $\subseteq {}^*X$ mit $B \subseteq \bigcup_{x\in X}\mu(x)$, dann ist $st(B)$ sogar kompakt.

Beweis: 1. Sei $x \in st(^*A)$, also $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$. Offenbar ist dann $O \cap A \neq \emptyset$ für alle $O \in \dot{x} \cap \tau$ (denn falls $O \cap A = \emptyset$, so auch ${}^*O \cap {}^*A = \emptyset$) und damit $x \in \overline{A}$.

Ist umgekehrt $x \in \overline{A}$, so hat $\{O \mid O \in \dot{x} \cap \tau\} \cup \{A\}$ die endliche Schnitt Eigenschaft (eSE), also hat auch $\{{}^*O \mid O \in \dot{x} \cap \tau\} \cup \{{}^*A\}$ die eSE. Aus der Polysaturiertheit folgt $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$ und somit $x \in st(^*A)$.

2. Sei $x \in X \setminus st(B)$, also $B \cap \mu(x) = \emptyset$. Wegen der Polysaturiertheit gibt es $O_1,\dots,O_n \in \dot{x} \cap \tau$ mit $B \cap {}^*O_1 \cap \dots \cap {}^*O_n = \emptyset$. Das bedeutet $x \in O := O_1 \cap \dots \cap O_n \subseteq X \setminus st(B)$ und damit ist $X \setminus st(B)$ offen (denn gäbe es ein $z \in O_1 \cap \dots \cap O_n \cap st(B)$, dann wäre $\mu(z) \cap B \neq \emptyset$ insbesondere also ${}^*O_1 \cap \dots \cap {}^*O_n \cap B \neq \emptyset$ - Widerspruch).

3. Sei $A := st(B)$. Zu zeigen ist ${}^*A \subseteq \bigcup_{x\in A}\mu(x)$. Sei $y \in {}^*A$ gegeben. Setze $\sigma := \{O \in \dot{y} \cap \tau \mid y \in {}^*O\}$ (wegen ${}^*X \in \sigma$ ist $\sigma \neq \emptyset$). Sind $O_1,\dots,O_n \in \sigma$ so ist $O_1 \cap \dots \cap O_n \cap A \neq \emptyset$ (andernfalls wäre $y \in {}^*O_1 \cap \dots \cap {}^*O_n \cap A = \emptyset$). Sei also $x \in O_1 \cap \dots \cap O_n \cap A$. Folglich ist $\mu(x) \cap B \neq \emptyset$. Für $b \in \mu(x) \cap B$ gilt $b \in {}^*O_1 \cap \dots \cap {}^*O_n \cap B$. Aus der Polysaturiertheit folgt $\exists b \in B \cap \bigcap_{O\in\sigma} {}^*O$. Sei $x \in X$ mit $b \in \mu(x)$. Es gilt nun $y \in \mu(x)$. Andernfalls gibt es ein $O \in \dot{x} \cap \tau$ mit $y \notin {}^*O$. Sei $V \in \dot{x} \cap \tau$ mit $\overline{V} \subseteq O$. Folglich $y \in {}^*(X \setminus \overline{V})$ und somit $X \setminus \overline{V} \in \sigma$. Also $b \in {}^*(X \setminus \overline{V}) = {}^*X \setminus {}^*\overline{V}$, aber $b \in \mu(x) \subseteq {}^*\overline{V}$.

Durch das Transfer-Prinzip übertragen sich sehr viele Strukturen, wie z.B. Ordnungsstrukturen, algebraische Strukturen (Gruppen, Körper, ...) auf X in solche auf ${}^*X$. Man muss darauf achten, dass sich diese mittels beschränkt quantifizierter Formeln beschreiben lassen. In diesem Sinn (die genauen Deteils bleiben dem Leser überlassen; im Buch [29] werden diese sehr ausführlich vorgerechnet) ist also ${}^*\mathbb{R}$ und auch ${}^*\mathbb{C}$ ein Körper, in dem man praktisch genauso rechnet wie in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ ist also ${}^*\mathbb{K}$ ein Körper, ${}^* : \mathbb{K} \to {}^*\mathbb{K}$ eine ordnungserhaltende isomorphe Einbettung und $st : \bigcup_{x\in\mathbb{K}}\mu(x) \to \mathbb{K}$ ist auch operationstreu.

Als Anwendung dieser Begrifflichkeiten geben wir einen Beweis des Satzes von Banach-Alaoglu, der an Einfachheit nicht mehr zu unterbieten ist.

14.6.16 Satz von Banach-Alaoglu

Sei (X,τ) ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $X' := \{f \in \mathbb{K}^X \mid f : \text{linear und stetig}\}$. Für jedes $x \in X$ sei $\varphi_x : X' \to \mathbb{K}$ definiert durch $\varphi_x(f) := f(x)$. Sei τ' die initale Topologie auf X' bzgl. der $\{\varphi_x \mid x \in X\}$, sei $V \in \dot{0} \cap \tau$ und K kompakt in $\mathbb{K}$ (üblicherweise ist K die abgeschlossene Einheitskugel um 0). Dann ist $V^P := \{f \in X' \mid \forall x \in V \text{ ist } f(x) \in K\}$ (die sogenannte Polare) kompakt bzgl. τ'.

Beweis: Sei $g \in {}^*V^P = \{h \in {}^*(X') \mid \forall x \in {}^*V \text{ ist } h(x) \in {}^*K\}$. Für beliebiges $x \in {}^*V$ ist $g(x) \in {}^*K \subseteq \bigcup_{y\in K} \mu(y)$. Somit können wir $f : V \to K$ definieren durch $f(x) := st(g({}^*x))$ und anschließend in offensichtlicher Weise auf ganz X fortsetzen. Die Linearität von f folgt unmittelbar aus der Operationstreue von * und st und somit $f \in V^P$ (beachte: f ist beschränkt). Mit dem Transfer-Prinzip folgt für alle $x \in X$: ${}^*\varphi_x(g) = g({}^*x) \in \mu(f(x)) = \mu(\varphi_x(f))$ und mit Lemma 14.6.7 dann $g \in \mu(f)$.

14.6.17 Bemerkung

(1) Man sollte im Beweis natürlich beachten, dass wir Monaden bzgl. verschiedener Topologien gebildet haben (nämlich τ' und der euklidischen Topologie in $\mathbb{K}$).

(2) Die laxe Formulierung "Mit dem Transfer-Prinzip folgt [...]" stimmt natürlich (und hat eigentlich mit der Beweisidee nicht viel zu tun), aber der Leser sollte sich im Detail klarmachen, wie der Transfer von statten geht.

14.6.18 Lemma

1. Sei ϕ ein Filter auf $\varnothing \neq Z \subseteq Y^X$ und ψ ein Filter auf X. Dann gilt für die Monade $\mu(\phi(\psi))$ von $\phi(\psi)$:
$$\mu(\phi(\psi)) = \mu(\phi)(\mu(\psi))$$
2. ϕ konvergiert stetig auf Z gegen $f \in Y^X \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X$ gilt $\mu(\phi)(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x))$.

Beweis: 1. Setze $A := \mu(\phi)$ und $B := \mu(\psi)$. Offenbar ist

$$\mu(\phi(\psi)) = \bigcap_{P\in\phi, Q\in\psi} {}^*(P(Q)) \;\text{ und }\; {}^*(P(Q)) = \{g(x) \mid g \in {}^*P, x \in {}^*Q\} = {}^*P({}^*Q).$$

Sei $z \in A(B)$. Dann $\exists g \in A, b \in B$ mit $z = g(b)$. Sei $P \in \phi$ und $Q \in \psi$. Folglich ist $g \in {}^*P$ und $b \in {}^*Q$, also $z = g(b) \in {}^*P({}^*Q) = {}^*(P(Q))$ und somit $z \in \mu(\phi(\psi))$.

Sei $z \in \mu(\phi(\psi))$. Für jedes $P \in \phi$ und $Q \in \psi$ sei

$$\Gamma_{P,Q} := \{(g,b) \in {}^*(Y^X) \times {}^*X \mid g(b) = z \;\text{ und }\; g \in {}^*P, b \in {}^*Q\}.$$

Nun ist $(\Gamma_{P,Q})_{P\in\phi,Q\in\psi}$ eine Familie interner Mengen, welche wegen

$$\varnothing \neq \Gamma_{P_1\cap\ldots\cap P_n,Q_1\cap\ldots\cap Q_n} \subseteq \Gamma_{P_1,Q_1}\cap\ldots\cap\Gamma_{P_n,Q_n}$$

nicht leere endliche Schnitte hat. Folglich $\exists\,(g,b)\in\bigcap_{P\in\phi,Q\in\psi}\Gamma_{P,Q}$. Es gilt dann $g\in\mu(\phi)$, $b\in\mu(\psi)$ und $z=g(b)$, also $z\in A(B)$.

2. Folgt aus 1. und der bekannten Eigenschaft $\Phi\to z \;\Leftrightarrow\; \mu(\Phi)\subseteq\mu(z)$.

"There is no book so bad that there is not something good in it."
Miguel de Cervantes

Als Einführungen in die Mengentheoretische Topologie möchte ich die Bücher [3], [31] und [42] empfehlen. Als ausführliche standard Referenzen (und gleichzeitig als Lehrbücher für Fortgeschrittene) eignen sich bestens die Bücher [1], [14] und [36]. Einen sehr guten Überblick über neue Entwicklungen der Mengentheoretischen Topologie, ausführlich dargelegt in schönen Übersichtsartikeln (von Spezialisten auf dem jeweiligen Gebiet), zumeist mit Beweisen, findet man in [28] und [34]. Ähnliches Werke (allerdings eher ohne Beweise) sind die Bücher [2] und [23]. Um schnell Überblick über ein Gebiet zu bekommen, greife man zu [21]. Als Lehrbücher zur Algebraischen Topologie kann ich die Bücher [32] bzw. [44] empfehlen und als Lehrbuch zur Nichtstandard Analysis [29]. Für Grundlagen aus der Analysis bzw. linearen Algebra, auf die wir in diesem Text nicht näher eingehen, verweise ich auf [26] bzw. [17].

Literatur

[1] *A.V.Arkhangelskii, V.I.Ponomarev*: Fundamentals of General Topology; Kluwer
Eine gigantische Aufgabensammlung (fast 1600 Aufgaben), größtenteils mit Lösungen.

[2] *A.V.Arkhangelskii, M.M.Choban, V.V.Fedorchuk, E.G.Sklyarenko*: General Topology I,II,III.
Grundlegende Konzepte der Algemeinen Topologie (insbesondere Kompaktheit, Parakompaktheit, Metrisierbarkeit und Funktionenräume), Dimensionstheorie, Deskriptiven Mengenlehre/Topologie und Homologie-/Kohomologie Theorien allgemeiner Räume werden hier enzyklopädisch dargestellt. Aus der Reihe: Encyclopaedia of Mathematical Sciences; Springer-Verlag.

[3] *R.Bartsch*: Allgemeine Topologie I; Oldenbourg
Ist lange Zeit als Skript im Netz herangereift und nun als Buch erschienen. Eine sehr liebevoll gestaltete Einführung (mit Ausblicken) in die Mengentheoretische Topologie.

[4] *A.Blass*: Ultrafilters: Where topological dynamics = algebra = combinatorics; frei im internet verfügbar
Ein wundervoller Artikel in dem spektakuläre Verbindungen zwischen auf den ersten Blick so verschiedenen Gebieten, wie topologischer Dynamik, Ultrafiltern, Algebraischen Strukturen und Kombinatorik, geschaffen werden.

[5] *J.L.Bell, A.B.Slomson*: Models and Ultraproducts; North-Holland
Eine frühe, heute nicht mehr ganz so aktuelle Monographie über Modelle und Ultraprodukte. Für einen ersten Einstieg in dieses Gebiet dennoch ein verlässlicher Ratgeber.

[6] *N.Bourbaki*: General Topology, Part 1 and 2; Hermann
Der Klassiker zur Mengentheoretischen Topologie; mit vielen historischen Anmerkungen und Aufgaben.

[7] *C. Caratheodory*: Stetige Konvergenz und normale Familien von Funktionen (Erschienen in: Math. Ann. 101, 515–533 (1929))

[8] *C.C.Chang, H.J.Keisler*: Model Theory; North-Holland
Die letzte Auflage stammt aus den 90er und bis dahin war es DAS Standardwerk zur Modelltheorie. Bis heute ist es trotzdem eines von inzwischen mehreren geblieben.

[9] *O.Deiser*: Einführung in die Mengenlehre; Springer
Eine leicht verständliche und großen Wert auf Motivation legende Einführung in die Mengenlehre, mit vielen historischen Anmerkungen. Sehr zu empfehlen, insbesondere für Studienanfänger.

[10] *J.Dieudonne*: Grundzüge der modernen Analysis, VEB
Ein sehr abstrakter (und schwerer) Zugang zur modernen Analysis (von Anfang an wird in metrischen und normierten Räumen gearbeitet), es wird aber nichts an Vorwissen vorausgesetzt. Ebenfalls ein echter Klassiker.

[11] *A.Dold*: Lectures on Algebraic Topology; Springer
Ein Standardwerk zur Algebraischen Topologie.

[12] *J.Dugundji, A.Granas*: Fixed Point Theory; Springer
Enzyklopädische Darstellung der Fixpunkttheorie.

[13] *S.Eilenberg, N.Steenrod*: Foundations of Algebraic Topology; Princeton
Der Klassiker zur Algebraischen Topologie.

[14] *R.Engelking*: General Topology; Heldermann
Standardreferenz zur modernen Mengentheoretischen Topologie; extrem ausführlich und eine riesige Sammlung an Aufgaben!

[15] *K.Evers*: Stetige Konvergenz im Kontext äquivalenter Formulierungen des T_3-Axioms; Diplomarbeit, *2010 www.mathekarsten.npage.de*

[16] *K.Evers*: Zahlbereiche
Ein Skript zur Konstruktion der Zahlbereiche. Die reellen Zahlen sind nach wie vor ein wichtiges Beispiel eines topologischen Raums. Eine exakte Konstruktion wird hier vorgeführt. Man kann es hier *http://www.mathekarsten.npage.de* bekommen.

[17] *G.Fischer*: Lineare Algebra; Vieweg
Deutschsprachiges standard Lehrbuch zur Linearen Algebra.

[18] *R. Fric, D. C. Kent*: Regularity and extension of maps (Erschienen in: Mathematica Slovaca, Vol. 42 (1992), No. 3, 349–357)

[19] *W. Gähler*: Grundstrukturen der Analysis, Band I und Band II; Akademie-Verlag Berlin, 1977

[20] H. HAHN: *Theorie der reellen Funktionen*; Berlin 1921

[21] *K.P.Hart, J.Nagata, J.E.Vaughan*: Encyclopedia of General Topology; Elsevier
Eine enzyklopädische Darstellung klassischer und moderner Resultate (ohne Beweise, aber mit sehr ausführlichen Literaturangaben).

[22] *H. Herrlich*: Topologie I und Topologie II; Heldermann, 1986/88

[23] *M.Husek, J.van Mill*: Recent Progress in General Topology I/II; North-Holland
Eine Sammlung von Übersichtsartikeln (eher ohne Beweise) über moderne und aktuelle Richtungen der Mengentheoretischen Topologie.

[24] *T.Jech*: Set Theory; Springer
Ein Standardwerk der modernen Mengentheorie.

[25] *D. C. Kent, G. D. Richardson*: Convergence Spaces and diagonal conditions
(Erschienen in: Topology and Applications 70 (1996) 167–174)

[26] *K.Königsberger*: Analysis 1; Springer
Deutschsprachiges standard Lehrbuch zur reellen Analyis.

[27] *A.Kufner*: Raum und Entfernung; Harri Deutsch
Gibt eine wundervoll geschriebene Einführung in in das Gebiet der metrischen Räume. Obwohl eigentlich für Schüler gedacht, denke ich, dass auch Studenten, die zum ersten mal mit metrischen Räumen in Berührung kommen, einen großen Nutzen aus diesem Buch ziehen können.

[28] *K.Kunen, J.E.Vaughan*: Handbook of Set-Theoretic Topology; North-Holland
Eine zusammenhängende Sammlung von 24 ausführlichen Artikel zu verschiedenen Bereichen der Mengentheoretischen Topologie - geschrieben von Spezialisten - auf insgesammt 1273 Seiten!

[29] *D.Landers, L.Rogge*: Nichtstandard Analysis; Springer
Dieses Buch zeichnet sich durch eine sehr ausführliche Beweisführung aus. Viele Anwendungen werden gegeben.

[30] *T.Lindstrøm*: An Invitation To Nonstandard Analysis
Mit ein bisschen mehr als 100 Seiten ein gut überschauberer, einführender Artikel in dieses interessante Gebiet.

[31] *F.Lösch*: Höhere Mathematik, Band 4; S.Hirzel
Dieser vierte Teil des ursprünglich dreibändigen klassischen Lehrbuch *Höhere Mathematik* von Mangoldt, Knopp, enthält einen wunderbar geschrieben Abschnitt zu topologischen Räumen, den ich jedem, der sich zum ersten mal mit diesen Dingen beschäftigt, empfehlen kann.

[32] *K.H.Mayer*: Algebraische Topologie; Bikhäuser
Ein einführendes Lehrbuch in die Algebraische Topologie.

[33] *J.v.Mill, G.M.Reed*: Open Problems in Topology; North-Holland
Der Name ist Programm.

[34] *K.Morita, J.Nagata*: Topics in General Topology; North-Holland
Eine Fortsetzung von Nagata's Buch *Modern General Topology*. In 15 ausführlichen, mehr oder weniger voneinander unabhängigen Kapiteln werden moderne Richtungen der mengentheoretischen Topologie vorgestellt.

[35] *S.A.Morris*: Topology without tears
Ein kostenloses (!) Buch zur Mengentheoretischen Topologie (im pdf-Format; einfach mit Google suchen).

[36] *J.Nagata*: Modern General Topology; North-Holland
Ein weiteres ausführliches Standardwerk zur Mengentheoretischen Topologie.

[37] *J.E.Joseph, M.H.Kwack, B.M.P.Nayar*: A characterization of metacompactness in terms of filters
B.M.P.Nayar: A characterization of paracompactness in terms of filterbases
Zwei kurze Artikel, leider auch mit kleineren Fehlern, trotzdem sehr interessant.

[38] *E.Pearl*: Open Problems in Topology II; Elsevier
Eine Fortsetzung von [33].

[39] *H. Poppe*: Compactness in General Function Spaces; VEB, 1974

[40] *M.D.Potter*: Mengentheorie; Spektrum
Eine interessante Darstellung (insbesondere die letzten Kapitel über Verbände und Topologie), aber zum Teil extrem ungewöhnliche Bezeichnungen. Die Ursache liegt wohl bei der deutschen Übersetzung.

[41] *G.Preuß*: Allgemeine Topologie; Springer
Eine schöne, leicht zu lesende Einführung, betont besonders (und als einziges von den hier aufgeführten Werken) den Kategorientheoretischen Aspekt der Mengentheoretischen Topologie.

[42] *B.v.Querenburg*: Mengentheoretische Topologie; Springer
Ist gut als Einführung zu verwenden, geht aber letztendlich deutlich über eine bloße Einführung hinaus. Insbesondere die letzten Kapitel geben tiefere Einblicke in verschiedene Richtungen der Mengentheoretischen Topologie und angrenzende Gebiete.

[43] *A.Robinson*: Non-standard Analysis; Princeton University Press
Der Klassiker zur Nichtstandard Analysis; vom Erfinder persönlich.

[44] *J.J.Rotman*: An Introduction to Algebraic Topology; Springer
Eine ausführliche und gut verständliche Einführung in die Algebraische Topologie.

[45] *W.Rudin*: Functional Analysis; McGraw-Hill
Ein wahrer Schatz für alle die mit den Grundbegriffen der Mengentheoretischen Topologie vertraut sind. Viele interessante Resultate, die sonst nicht so leicht in Lehrbüchern zu finden sind.

[46] *J.A.Seebach, L.A.Steen*: Counterexamples in Topology; 1995, Dover
Wer Beispiele der Art *topologischer Raum mit der Eigenschaft X, Y und Z* sucht, könnte hier fündig werden.

[47] *E.H.Spanier*: Algebraic Topology; Springer
Ein Standardwerk zur Algebraischen Topologie.

[48] *S.Todorcevic*: Topics in Topology; Springer
Ein schönes Buch, das den Leser in vier verschiedenen Kapiteln an Bereiche der aktuellen Forschung heranführt.

[49] *E.Zeidler*: Nonlinear Functional Analysis and its Application I (Fixed-Point Theorems); Springer Eine weitere enzyklopädische Darstellung der Fixpunkttheorie.